УДК 514.12

ПРЕЕМСТВЕННОСТЬ ПРИ ИЗУЧЕНИИ КРИВЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА В СРЕДНЕЙ ШКОЛЕ И ТЕХНИЧЕСКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

Сазанчук Эмилия Павловна*, студент 1-го курса*
кафедры «Автомобильные дороги»
Белорусский национальный технический университет, г. Минск
(Научный руководитель – Чернявская С.В., канд. физ.-мат. наук, доцент, заведующий кафедрой «Математические методы в строительстве»)

В работе рассматривается связь между школьным материалом, в котором изучались такие линии, как окружность, гипербола, парабола и учебным материалом по аналитической геометрии (тема «Кривые второго порядка»). На примере такой кривой как гипербола показано, как совместить знания, полученные в школе и университете. На первый взгляд функция

$$xy = k \qquad (1),$$

графиком которой является гипербола и которую изучали в школе никак не соответствует уравнениям гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ или } -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (2),$$

изученным в разделе «Аналитическая геометрия». Здесь мы узнали, что гиперболой называется множество точек плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная. В школе ничего не говорилось ни о фокусах, ни о вершинах гиперболы. Однако, мы знали, что при $x = 0$ функция $y = \frac{k}{x}$ не определена, имеет две симметричные относительно начала координат ветви и прямые $x = 0, y = 0$ являются асимптотами гиперболы В курсе аналитической геометрии оказалось, что уравнения асимптот имеют вид $y = \pm\frac{b}{a}x$ и ветви, гиперболы имеют другое расположение. И тем не менее оба варианта определяют одну и туже кривую – гиперболу. Представляется интересным показать, как из уравнения (1) получить уравнение (2), а также как общее уравнение кривой второго порядка

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \qquad (3)$$

с помощью исследования квадратного уравнения привести к каноническому виду (2) и вывести условия, при которых оно задает гиперболу.

Для преобразования уравнения (1) при $k > 0$ к виду $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ достаточно выполнить преобразование поворота координатных осей Ох, Оу на угол 45^0 по формулам

$$x = X\cos 45^\circ - Y\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}(X - Y) \qquad (4.1)$$

$$y = X\sin 45^\circ + Y\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}(X + Y) \qquad (4.2)$$

После подстановки в уравнение (1) формул (4.1), (4.2) получим:

$$xy = \frac{1}{2}(X^2 - Y^2) = k, \text{откуда } \frac{X^2}{2k} - \frac{Y^2}{2k} = 1,$$

то есть получено каноническое уравнение равносторонней гиперболы $\left(a = b = \sqrt{2k}\right),$ вершины которой лежат на оси ОХ (Рис.1).

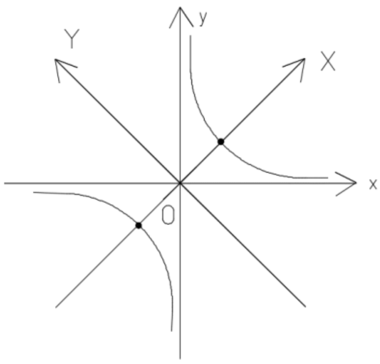

Рисунок 1 – Равносторонняя гипербола с вершинами, лежащими на оси ОХ

Уравнение (2) можно преобразовать к уравнению (1) посредством такого поворота осе Ох, Оу:

$$X = x\cos 45^\circ - y\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}(x - y) \qquad (5.1)$$

$$Y = x\sin 45^\circ + y\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}(x + y) \qquad (5.2)$$

Тогда выражение $\frac{\sqrt{2}}{2}(x + y) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}(x - y) = \frac{1}{2}(x^2 - y^2) = XY$ преобразуется к виду $x^2 - y^2 = 2XY$, следовательно уравнение равносторонней гиперболы $x^2 - y^2 = 1$ примет вид $2XY = 1$ или $XY = \frac{1}{2}$

Таким образом, стало понятно, что уравнение (1) и (2) описывают одну и ту же линию, только по-разному расположенную относительно координатных осей.

Для исследования общего уравнения кривой (3), запишем его как квадратное уравнение по одной из переменных, например, по у. Для удобства вычислений предположим, что С=1. Тогда уравнение (3) примет вид:

$$y^2 + 2(Bx + E)y + Ax^2 + 2Dx + F = 0 \quad (6)$$

Дискриминант уравнения (6) равен:

$$D = (Bx + E)^2 - (Ax^2 + 2Dx + F) = px^2 + qx + r, \text{где}$$
$$p = B^2 - A; q = 2(B - D); r = E^2 - F.$$

По знаку дискриминанта возможны три случая:

1) $px^2 + qx + r < 0$ и тогда уравнение (6) действительных решений не имеет;

2) $px^2 + qx + r = 0$ и тогда уравнение (6) имеет два одинаковых решения $y = -Bx - E$ и определяет прямую, а не кривую второго порядка;

3) $px^2 + qx + r > 0$ и тогда уравнение (6) имеет два различных решения:

$$y = -Bx - E \pm \sqrt{px^2 + qx + r} \quad (7)$$

В случае, если $px^2 + qx + r$ не является полным квадратом, решения квадратного уравнения (6) будут задавать кривые второго порядка. Для того, чтобы формула (7) определяла именно гиперболу опытным путем были получены следующие ограничения:$B = E = 0$. Самое простое выражение под корнем в формуле (7) будет иметь вид $x^2 - 1$, тогда $y = \pm\sqrt{x^2 - 1}$

Рассмотрим случай $y > 0$, тогда формула (7) имеет вид $y = \sqrt{x^2 - 1}$ или $y^2 = x^2 - 1$.Отсюда получим $x^2 - y^2 = 1$ – уравнение равносторонней гиперболы.

В целом, преемственность при изучении кривых второго порядка является ключевым аспектом, обеспечивающим глубокое понимание геометрических и математических принципов на разных этапах образования – в средней школе и техническом университете. Переходя в технический университет, студенты углубляют свои знания, изучая более сложные концепции, такие как свойства кривых второго порядка, а также методы их анализа. Это не только способствует комплексному восприятию материала, но и формирует навыки, необходимые для решения задач.

Литература:

1. С. В. Дворянинов, «Что такое кривые второго порядка», Матем. обр., 2003, № 2(25), 67–79
2. Математика [Электронный ресурс] : электронный учебно-методический комплекс для студентов Белорусский национальный технический университет, Кафедра «Высшая математика» ; сост.: Г. И. Лебедева [и др.]. – Минск : БНТУ, 2021. – Ч. 1.