УДК 624.21

ПРИМЕНЕНИЕ РЯДОВ ТЕЙЛОРА ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИЙ С ВЫСОКОЙ ТОЧНОСТЬЮ

***Соболь Максим Алексеевич**, студент 2-го курса*
кафедры «Профессиональное обучение и педагогика»
Белорусский национальный технический университет, г. Минск
(Научный руководитель – Коваленок Н.В., старший преподаватель)

В современном мире высокая точность вычислений играет важную роль в различных областях — от программирования до инженерных расчётов. В сфере информационных технологий создание приложений-калькуляторов или графических редакторов требует точного представления математических функций для получения корректных результатов. В строительстве и машиностроении расчёт нагрузок и проектирование конструкций также требуют высокой степени точности для обеспечения безопасности и надёжности. Одним из ключевых математических инструментов для достижения такой точности является разложение функций в ряды Тейлора. Этот метод позволяет рассмотреть функции с необходимой для нас точностью, используя конечное число членов ряда.

Для вычисления значений мы будем использовать ряды. В частности, ряды Тейлора и Макларена. Ряды — это математические конструкции, представляющие собой сумму членов последовательности. Формально ряд можно записать как:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n)$$

где a_n — это элементы последовательности, называемые членами ряда. Если частичная сумма ряда. Если сумма ряда S стремиться к конечному значению, то ряд называется сходящимся, иначе — расходящимся.

В математике выделяют два вида рядов. Это числовые и функциональные ряды. Числовой ряд состоит из чисел, например, геометрическая прогрессия. В свою очередь в функциональном ряде каждый член ряда представляет собой функцию, например, ряд Тейлора или Макларена. В дальнейших примерах мы будем использовать ряды Тейлора или Макларена.

Ряд Тейлора — это разложение функции $f(x)$ в бесконечную сумму степенных членов вокруг точки a. Он позволяет приблизить значение функции с высокой точностью, используя производные функции в выбранной точке. Ряд Тейлора имеет следующий вид:

$$\text{f(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n$$

В свою очередь ряд Макларена представляет собой частный вид ряда Тейлора, где a=0. Подставим a=0 и получим следующий вид:

$$\text{f(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(0)}{n!}x^n$$

Ряд Тейлора и Макларена позволяют представить сложные функции (например, экспоненты, синусы, логарифмы) в виде суммы более простых степенных функций. Это особенно полезно для численного вычисления значений функции, где требуется высокая точность, так как мы можем ограничиться конечным числом членов ряда. Рассмотрим применение ряда Тейлора на практике.

Задача: Вычислить sin18° с точностью до 0,0001

Решение: Рассмотрим функцию синуса в общем виде ряда Тейлора:

$$\text{f(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

Разложим этот вид в степенной ряд:

$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$

Переведем градусную меру угла в радианную x= 18° = 0,31416 рад. Подставив это значение в расположение sin x, получим:

$\sin x = 0.31416 - \frac{0.31416^3}{3!} + \frac{0.31416^5}{5!} - \frac{x0.31416^7}{7!} + \ldots = 0.31416 - 0.00517 + 0.000026 - \ldots$

Третий член этого ряда меньше по величине чем 0,0001 (0,000026<0.0001); следовательно, для приближенного вычисления достаточно взять сумму двух первых членов ряда и получим что sin18°=0,31416-0,00517=0,3090

Ответ: sin18°=0,3090 с точностью до 0,0001

Разложение функций в ряды Тейлора является мощным инструментом для получения высокоточных значений функций в прикладных задачах. Этот метод находит применение в программировании, инженерии, физике и других областях, где необходимы точные вычисления. Возможность контролировать точность приближения за счёт добавления членов ряда делает ряды Тейлора универсальным и гибким методом для численных расчётов.

Литература:

1. Колмогоров, А. Н. "Элементы теории функций и функционального анализа" – Москва: Наука, 1981, 320 с.
2. Поляк, Б. Т. "Методы оптимизации" – М.: Физматлит, 2006, 270 с.
3. Бронштейн, И. Н., Семендяев, К. А. "Справочник по математике для инженеров и учащихся вузов" – М.: Наука, 2004, 720 с.
4. Берман, Г. Н. "Краткий курс математического анализа" – М.: Физматгиз, 1965, 500 с.
5. MathWorld: Taylor Series [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://mathworld.wolfram.com/TaylorSeries.html. – Дата доступа: 03.06.2024.
6. ASCE Library – Ряды и численные методы в инженерных приложениях [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://ascelibrary.org. – Дата доступа: 01.06.2024.
7. Международная конференция "Современные методы вычислительной математики" – Программа и материалы, 2023. – Режим доступа: https://www.comp-math-conference.org. – Дата доступа: 02.06.2024.