

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДИНАМИКИ ГРУНТОВЫХ ВОД МЕЖДУ ДРЕНАМИ С УЧЕТОМ ОСУШИТЕЛЬНОГО ДЕЙСТВИЯ ВОДOPРОВОДЯЩИХ КАНАЛОВ ПРИ ПАРАЛЛЕЛЬНОМ РАСПОЛОЖЕНИИ КАНАЛОВ И ДРЕН

Данная задача решалась на основании результатов исследований [1, 2] по учету влияния водопроводящей сети на режим фильтрации воды к осушительным каналам и дренам. В первом приближении учет влияния водопроводящей сети для случая параллельного расположения каналов и дрен можно осуществлять, определяя расстояния между дренами по формулам А. И. Ивицкого [1]. Эти формулы получены при следующих предпосылках: 1) расстояния между дренами одинаковы; 2) дренаи располагаются на водоупоре, а несовершенство их учитывается

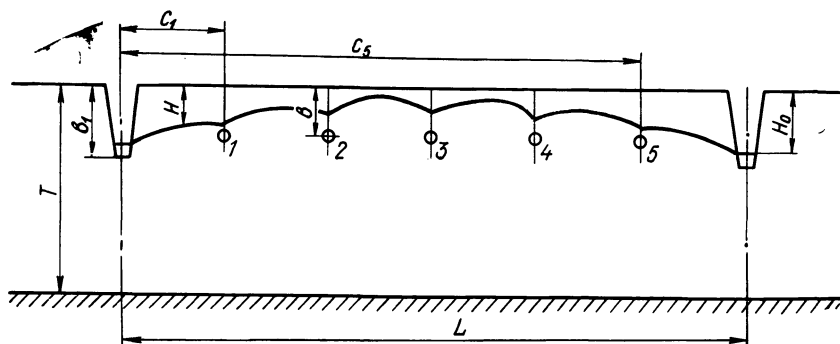


Рис. 1.

введением в конечные формулы коэффициента висячности; 3) над дренами в течение всего процесса фильтрации поддерживается постоянный напор воды.

Следует отметить, что математические выкладки выполнены с целым рядом допущений, правомерность которых в работе [1] не доказывается. Например, переход от стационарного режима к нестационарному осуществляется простым умножением на время  $t$  и т. д. Поэтому в настоящей статье приводится решение этой же задачи, где авторы постарались устранить указанные недостатки.

**Постановка задачи.** Пусть мощность грунтовых вод в однородном грунте в момент времени  $t=0$  составляет  $T$ . В некоторый момент времени  $t>0$  начинает действовать система из двух каналов глубиной  $b_1$  с одинаковым постоянным напором в них  $H_0$  и  $m$  дрен, расположенных на глубине  $b_1$  с постоянным во времени расходом их  $Q_k$  ( $k=1, \dots, m$ ) (рис. 1). Расстояния между дренами могут быть произвольными. По известным водно-физическим свойствам грунта требуется определить динамику грунтовых вод на осушаемом массиве.

**Решение задачи.** Заменяя каналы узкими щелями и считая источник моделью дренаи, решение поставленной задачи получаем по методу ис-

точников и стоков. Функция снижения  $H_1$  от действия  $m$  дрен с интенсивностями  $g_k$ , постоянно действующими во времени, имеет вид [3]

$$H_1 = \frac{1}{4a\pi} \sum_{k=1}^m g_k \int_0^t \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\exp \left[ -\frac{r_k^2 + (y+b-2nT)^2}{4a(t-\theta)} \right] + \dots}{t-\theta} + \dots \frac{\exp \left[ -\frac{r_k^2 + (y-b-2nT)^2}{4a(t-\theta)} \right]}{t-\theta} \right\} d\theta, \quad (1)$$

где  $a$  — коэффициент пьезопроводности;  $r_k$  — расстояние от рассматриваемого сечения до  $k$ -й дрены;  $t$  — время.

На рис. 1 система координат выбрана таким образом, что начало координат всегда совпадает с рассматриваемым сечением.

Учесть влияние водопроводящих каналов с постоянным снижением воды в них можно следующим образом. На контуре дренажных щелей разместим стоки (источники) такой переменной интенсивности  $g(\Theta)$ , которая обеспечила бы в любой момент времени постоянство снижений ( $H_0$ ) в каналах. Тогда общее снижение  $H$  от действия каналов и дрен будет выражаться формулой

$$H = H_1 + \frac{1}{4\pi a} \int_{-b_1}^{b_1} \int_0^t g(\theta) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\exp \left[ -\frac{r_0^2 + (y+\lambda-2nT)^2}{4a(t-\theta)} \right] + \dots}{t-\theta} + \dots \frac{\exp \left[ -\frac{r_{m+1}^2 + (y-\lambda-2nT)^2}{4a(t-\theta)} \right]}{t-\theta} d\theta d\lambda, \quad (2)$$

где  $H_1$  определяется согласно (1);  $r_0, r_{m+1}$  — расстояния от рассматриваемого сечения до каналов.

Воспользовавшись соотношением [3]

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp \left[ -\frac{(y \pm \lambda - 2nT)^2}{4at} \right] = \frac{\sqrt{\pi at}}{T} \times \left[ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{n\pi(y \pm \lambda)}{T} \exp \left( -\frac{n^2\pi^2 at}{T^2} \right) \right] \quad (3)$$

и предположив, что каналы совершенны, после интегрирования полученных зависимостей по  $\lambda$  найдем следующую формулу для определения снижения поверхности грунтовых вод:

$$H = \frac{1}{2T\sqrt{a\pi}} \sum_{k=1}^m \int_0^t g_k \frac{e^{-\frac{r_k^2}{4a(t-\theta)}}}{\sqrt{t-\theta}} \left( 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{\pi nb}{T} e^{-\frac{\pi^2 n^2 a(t-\theta)}{T^2}} \right) \times \dots \times d\theta + \frac{1}{2\sqrt{a\pi}} \int_0^t g(\theta) \frac{e^{-\frac{r_0^2}{4a(t-\theta)}} + e^{-\frac{r_{m+1}^2}{4a(t-\theta)}}}{\sqrt{t-\theta}} d\theta. \quad (4)$$

Несовершенство каналов учтем в дальнейшем путем введения дополнительных сопротивлений.

В выражении (4) функция  $g(\theta)$  неизвестная. Однако ее можно определить, если воспользоваться условием постоянства снижений воды в каналах ( $H_0$ )

$$H_0 = \frac{1}{2T\sqrt{a\pi}} \sum_{k=1}^m \int_0^t g_k \frac{e^{-\frac{c_k^2}{4a(t-\theta)}}}{\sqrt{t-\theta}} \left( 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{\pi nb}{T} e^{-\frac{\pi^2 n^2 a(t-\theta)}{T^2}} \right) \times \\ \times d\theta + \frac{1}{2\sqrt{a\pi}} \int_0^t g(\theta) \frac{(1 + e^{-\frac{L^2}{4a(t-\theta)}})}{\sqrt{t-\theta}} d\theta, \quad (5)$$

где  $L$  — расстояние между каналами;  $c_k$  — расстояние между каналом и  $k$ -й дренажной ( $k=1, 2, \dots, m$ ).

Полученное уравнение сохраняет смысл в силу непрерывной зависимости правой части (4) от  $r_k$  ( $k=0, 1, \dots, m+1$ ).

Таким образом, для отыскания функции  $g(\theta)$  необходимо решить интегральное уравнение первого рода типа Вольтерра. Так как интегралы, входящие в это уравнение, представляют собой свертку, то преобразование Лапласа переводит ее в алгебраическое произведение изображений [4].

Применив преобразование Лапласа к уравнению (5), согласно таблице изображений [5], получим

$$\frac{2\sqrt{a}H_0}{s} = \frac{1}{T} \sum_{k=1}^m \left[ g_k \frac{e^{-c_k\sqrt{\frac{s}{a}}}}{s\sqrt{s}} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{\pi nb}{T} \times \right. \\ \left. \times \frac{e^{-\frac{c_k}{\sqrt{a}}\sqrt{s+\frac{\pi^2 n^2 a}{T^2}}}}{s\sqrt{s+\frac{\pi^2 n^2 a}{T^2}}} \right] + \frac{\Phi(s)}{\sqrt{s}} (1 + e^{-L\sqrt{\frac{s}{a}}}), \quad (6)$$

где  $\Phi(s)$  — изображение функции  $g(\theta)$ .

Разложив в ряд функцию

$$\frac{1}{1 + e^{-L\sqrt{\frac{s}{a}}}} = 1 - e^{-L\sqrt{\frac{s}{a}}} + e^{-2L\sqrt{\frac{s}{a}}} - \dots \quad (7)$$

и ограничившись первыми двумя членами, найдем из уравнения (6) искомую функцию в области изображений

$$\Phi(s) = (1 - e^{-L\sqrt{\frac{s}{a}}}) \left\{ \frac{2\sqrt{a}H_0}{\sqrt{s}} - \sum_{k=1}^m \frac{g_k}{T} \left[ \frac{e^{-c_k\sqrt{\frac{s}{a}}}}{s} + \right. \right.$$

$$+ 2 \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{\pi n b}{T} \frac{e^{-c_k \sqrt{s + \frac{\pi^2 n^2 a}{T^2}}}}{\sqrt{s} \sqrt{s + \frac{\pi^2 n^2 a}{T^2}}} \right]. \quad (8)$$

Нетрудно убедиться, осуществив обратный переход уравнения (8) к оригиналу, что при изменении времени  $t$  в промежутке  $\left(0 < t \leq \frac{L}{\sqrt{a}}\right)$  указанное ограничение вполне допустимо. Для решения же поставленной задачи осуществлять переход к оригиналу нет необходимости, так как, воспользовавшись теоремой о свертке, можно записать изображение уравнения (4) с учетом (8) в таком виде:

$$U(s) = \frac{1}{2\sqrt{a}T} \sum_{k=1}^m g_k \left( \frac{e^{-r_k \sqrt{\frac{s}{a}}}}{s \sqrt{s}} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{\pi n b}{T} \frac{e^{-\frac{r_k}{\sqrt{a}} \sqrt{s + \frac{\pi^2 n^2 a}{T^2}}}}{s \sqrt{s + \frac{\pi^2 n^2 a}{T^2}}} \right) +$$

$$+ \frac{H_0 (e^{-r_0 \sqrt{\frac{s}{a}}} + e^{-r_{m+1} \sqrt{\frac{s}{a}}})}{s} - \frac{1}{2\sqrt{a}T} \sum_{k=1}^m g_k \times$$

$$\times \left[ \frac{e^{-c_k \sqrt{\frac{s}{a}}} (e^{-r_0 \sqrt{\frac{s}{a}}} + e^{-r_{m+1} \sqrt{\frac{s}{a}}})}{s \sqrt{s}} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{\pi n b}{T} \frac{e^{-\frac{c_k}{\sqrt{a}} \sqrt{s + \frac{\pi^2 n^2 a}{T^2}}}}{s \sqrt{s + \frac{\pi^2 n^2 a}{T^2}}} \times \right.$$

$$\left. (e^{-r_0 \sqrt{\frac{s}{a}}} + e^{-r_{m+1} \sqrt{\frac{s}{a}}}) \right] - \frac{H_0 e^{-L \sqrt{\frac{s}{a}}} (e^{-r_0 \sqrt{\frac{s}{a}}} + e^{-r_{m+1} \sqrt{\frac{s}{a}}})}{s} +$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{a}T} \sum_{k=1}^m g_k e^{-L \sqrt{\frac{s}{a}}} (e^{-r_0 \sqrt{\frac{s}{a}}} + e^{-r_{m+1} \sqrt{\frac{s}{a}}}) \left[ \frac{e^{-c_k \sqrt{\frac{s}{a}}}}{s \sqrt{s}} + \right.$$

$$\left. + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{\pi n b}{T} \frac{e^{-\frac{c_k}{\sqrt{a}} \sqrt{s + \frac{\pi^2 n^2 a}{T^2}}}}{s \sqrt{s + \frac{\pi^2 n^2 a}{T^2}}} \right], \quad (9)$$

где  $U(s)$  — изображение  $H(t)$ .

Воспользовавшись таблицей обратных преобразований Лапласа [6], найдем оригиналы всех членов уравнения (9) за исключением слагаемых вида

$$F(s) = \frac{e^{-\frac{c_k}{\sqrt{a}} \sqrt{s + \frac{\pi^2 n^2 a}{T^2}}} e^{-r_0 \sqrt{\frac{s}{a}}}}{s \sqrt{s + \frac{\pi^2 n^2 a}{T^2}}}.$$

Оригинал этой функции найдем по теореме умножения изображений. Введем обозначения

$$F_1(s) = \frac{e^{-r_0} \sqrt{\frac{s}{a}}}{s}, \quad F_2(s) = \frac{e^{-\frac{c_k}{\sqrt{a}} \sqrt{s + \frac{\pi^2 n^2 a}{T^2}}}}{\sqrt{s + \frac{\pi^2 n^2 a}{T^2}}} \quad (10)$$

и воспользуемся таблицей, приведенной в работе [6]. Получим

$$L^{-1} [F_1(s) \cdot F_2(s)] = \int_0^t \operatorname{erfc} \left( \frac{r_0}{2\sqrt{a\theta}} \right) \frac{e^{-\frac{c_k^2}{4a(t-\theta)} - \frac{\pi^2 n^2 a(t-\theta)}{T^2}}}{\sqrt{\pi(t-\theta)}} d\theta. \quad (11)$$

Вычислить интеграл правой части этого соотношения, который обозначим через  $f(t)$ , не представляется возможным. Поэтому поступим следующим образом. Так как функция  $\operatorname{erfc} \left( \frac{r_0}{2\sqrt{a\theta}} \right)$  неотрицательна и монотонно возрастающая, то имеет место формула Бонне о среднем значении [5]. Поэтому можно записать

$$f(t) = \operatorname{erfc} \left( \frac{r_0}{2\sqrt{at}} \right) \int_\rho^t \frac{e^{-\frac{c_k^2}{4a(t-\theta)} - \frac{\pi^2 n^2 a(t-\theta)}{T^2}}}{\sqrt{\pi(t-\theta)}} d\theta, \quad (12)$$

где  $\rho$  — некоторая точка из интервала  $[0, t]$ , вообще говоря, неизвестная. Если положить  $\rho=0$  и обозначить правую часть формулы (12) через  $f_1(t)$ , то будет, очевидно, выполняться соотношение

$$f(t) \leq f_1(t). \quad (13)$$

Так как при  $\rho=0$  получается известный интеграл вычисленный, например в работе [7], то

$$f_1(t) = \operatorname{erfc} \left( \frac{r_0}{2\sqrt{at}} \right) \frac{T}{2\sqrt{a\pi n}} \left[ e^{-\frac{c_k \pi n}{T}} \operatorname{erfc} \left( \frac{c_k}{2\sqrt{at}} - \frac{\sqrt{at} \pi n}{T} \right) - e^{-\frac{c_k \pi n}{T}} \operatorname{erfc} \left( \frac{c_k}{2\sqrt{at}} + \frac{\sqrt{at} \pi n}{T} \right) \right]. \quad (14)$$

В окончательную формулу эти слагаемые войдут в виде следующего ряда  $N$ :

$$N = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \pi n \bar{b}}{n} \operatorname{erfc} \left( \frac{\bar{r}_0}{2\sqrt{\bar{\tau}}} \right) \left[ e^{-\bar{c}_k \pi n} \operatorname{erfc} \left( \frac{\bar{c}_k}{2\sqrt{\bar{\tau}}} - \pi n \sqrt{\bar{\tau}} \right) - e^{-\bar{c}_k \pi n} \operatorname{erfc} \left( \frac{\bar{c}_k}{2\sqrt{\bar{\tau}}} + \pi n \sqrt{\bar{\tau}} \right) \right], \quad (15)$$

где

$$\frac{c_k}{T} = \bar{c}_k, \quad \frac{r_k}{T} = \bar{r}_k, \quad \frac{b}{T} = \bar{b}, \quad \frac{at}{T^2} = \bar{\tau}. \quad (16)$$

Результаты расчетов по формуле (15), часть которых приведена в сокращенном виде в табл. 1, показывают, что при  $\bar{c}_k > 1$  величиной  $N$  практически можно пренебречь.

Таблица 1

$\bar{b}$	$\bar{c}_k$	$\sqrt{\tau}$					
		0,20	0,40	0,60	0,80	1,00	1,26
0,07	1	0,0012	0,0298	0,0632	0,0728	0,0742	0,0742
	2	0	0,0001	0,0019	0,0034	0,0036	0,0036
	3	0	0	0	0,0001	0,0001	0,0001
0,10	1	0,0009	0,0260	0,0589	0,0672	0,691	0,691
	2	0	0,0001	0,0018	0,0033	0,0035	0,0035
	3	0	0	0	0,0001	0,0001	0,0001
0,15	1	0,0005	0,0215	0,0548	0,0623	0,0635	0,0635
	2	0	0,0001	0,0017	0,0031	0,0033	0,0033
	3	0	0	0	0,0001	0,0001	0,0001
0,20	1	0,0001	0,0171	0,0513	0,0572	0,0582	0,0582
	2	0	0	0,0016	0,0029	0,0030	0,0030
	3	0	0	0	0,0001	0,0001	0,0001

Учитывая сказанное и пользуясь тем, что интенсивность источника связана с расходом дрены зависимостью [3]

$$g_k = \frac{a}{k} Q_k, \quad (17)$$

можем решение нашей задачи записать в виде

$$\begin{aligned}
 H = H_0 & \left[ \operatorname{erfc} \left( \frac{\bar{r}_0}{2\sqrt{\tau}} \right) + \operatorname{erfc} \left( \frac{\bar{L} - \bar{r}_0}{2\sqrt{\tau}} \right) - \operatorname{erfc} \left( \frac{\bar{L} + \bar{r}_0}{2\sqrt{\tau}} \right) - \right. \\
 & \left. - \operatorname{erfc} \left( \frac{2\bar{L} - \bar{r}_0}{2\sqrt{\tau}} \right) \right] + \frac{\tau}{k} \sum_{k=1}^m Q_k \left[ i \operatorname{erfc} \left( \frac{\bar{r}_k}{2\sqrt{\tau}} \right) - i \operatorname{erfc} \left( \frac{\bar{r}_0 + \bar{c}_k}{2\sqrt{\tau}} \right) - \right. \\
 & \left. - i \operatorname{erfc} \left( \frac{\bar{L} - \bar{r}_0 + \bar{c}_k}{2\sqrt{\tau}} \right) + i \operatorname{erfc} \left( \frac{\bar{r}_0 + \bar{c}_k + \bar{L}}{2\sqrt{\tau}} \right) + i \operatorname{erfc} \left( \frac{2\bar{L} + \bar{c}_k - \bar{r}_0}{2\sqrt{\tau}} \right) \right] + \\
 & + \frac{1}{2k\pi} \sum_{k=1}^m Q_k F(\bar{r}_k, \bar{b}, \tau), \quad (18)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{где } F(\bar{r}_k, \bar{b}, \tau) = & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \pi n \bar{b}}{n} \left[ e^{-\bar{r}_k \pi n} \operatorname{erfc} \left( \frac{\bar{r}_k}{2\sqrt{\tau}} - \pi n \sqrt{\tau} \right) - \right. \\
 & \left. - e^{-\bar{r}_k \pi n} \operatorname{erfc} \left( \frac{\bar{r}_k}{2\sqrt{\tau}} + \pi n \sqrt{\tau} \right) \right], \quad \bar{L} = \frac{L}{T}.
 \end{aligned}$$

Остальные обозначения введены согласно (16) с учетом замены  $\bar{r}_{m+1} = \bar{L} - \bar{r}_0$ .

В полученном решении несовершенство каналов может быть учтено исправлением характеристик  $r_0$  и  $L$  путем введения дополнительного сопротивления  $\xi$ , определяемого по формуле [3]

$$\xi = -0,6366 \ln \sin 05 \pi \bar{b}_1, \quad (19)$$

где  $\bar{b}_1 = \frac{b_1}{T}$ .

Тогда в решение (18) вместо  $\bar{r}_0$  и  $\bar{L}$  следует ввести  $\bar{r}_0^*$  и  $\bar{L}^*$ , которые определяются по формулам

$$\bar{r}_0^* = \bar{r}_0 (1 + \xi), \quad \bar{L}^* = \bar{L} (1 + \xi). \quad (20)$$

Из формулы (18) как частный случай получается ряд зависимостей. Так, при отсутствии каналов ( $L = \infty, r_0 = \infty$ ) получаем функцию снижения от действия системы  $m$  дрен

$$H = \frac{\tau}{k} \sum_{k=1}^m Q_k i \operatorname{erfc} \left( \frac{\bar{r}_k}{2 \sqrt{\tau}} \right) + \frac{1}{2\pi k} \sum_{k=1}^m Q_k F(\bar{r}_k, \bar{b}, \tau). \quad (21)$$

Если дрен нет, то, положив в формуле (18)  $Q_k = 0$  ( $k=1, 2, \dots, m$ ), получим функцию снижения для двух каналов

$$H = H_0 \left[ \operatorname{erfc} \left( \frac{\bar{r}_0}{2 \sqrt{\tau}} \right) + \operatorname{erfc} \left( \frac{\bar{L} - \bar{r}_0}{2 \sqrt{\tau}} \right) - \operatorname{erfc} \left( \frac{\bar{L} + \bar{r}_0}{2 \sqrt{\tau}} \right) - \operatorname{erfc} \left( \frac{2\bar{L} - \bar{r}_0}{2 \sqrt{\tau}} \right) \right]. \quad (22)$$

Расчеты по формуле (22) и по известной формуле С. Ф. Аверьянова [8] полностью совпадают при выполнении соответствующих ограничений на ее применение по времени, на что указывалось вначале.

При выполнении расчетов по формуле (18) значения функций  $i \operatorname{erfc}(x)$  могут быть взяты из таблиц, приведенных в работе А. В. Лыкова [9]. Для определения значений функций  $F(\bar{r}_k, \bar{b}, \tau)$  нами составлены таблицы для различных значений входящих в функции параметров. Часть этих результатов приведена в сокращенном виде в табл. 2.

Значения  $F(\bar{r}_k, \bar{b}, \tau)$  при  $\bar{b}=0,2$

Таблица 2

$\bar{r}_k$	$\tau$									
	0,01	0,04	0,09	0,16	0,25	0,36	0,49	0,64	0,81	1,00
0,1	0,0210	0,4369	0,7524	0,9241	1,0028	1,0327	1,0420	1,0444	1,0449	1,0450
0,2	0,0173	0,3089	0,5862	0,7471	0,8229	0,8520	0,8612	0,8635	0,8640	0,8641
0,3	0,0041	0,1719	0,3960	0,5406	0,6116	0,6395	0,6484	0,6507	0,6512	0,6513
0,4	0,0005	0,0833	0,2502	0,3747	0,4396	0,4659	0,4744	0,4766	0,4771	0,4772
0,5	0	0,0361	0,1512	0,2540	0,3118	0,3361	0,3442	0,3463	0,3468	0,3469
0,6	0	0,0141	0,0879	0,1693	0,2196	0,2417	0,2492	0,2513	0,2517	0,2518
0,7	0	0,0049	0,0492	0,1112	0,1537	0,1735	0,1804	0,1824	0,1828	0,1829
0,8	0	0,0015	0,0265	0,0718	0,1069	0,1243	0,1307	0,1325	0,1329	0,1329
0,9	0	0,0004	0,0129	0,0422	0,0786	0,0918	0,0989	0,1006	0,1010	0,1010
1,0	0	0	0,0063	0,0271	0,0487	0,0613	0,0663	0,0678	0,0682	0,0682

## Литература

1. *Ивицкий А. И.* Теория расчета расстояний между дренами с учетом осушительного действия водопроводящей сети — ДАН БССР, 1968, т. XII, № 11.
2. *Брусиловский Ш. И., Писецкий Г. А.* Определение динамики грунтовых вод при взаимно-перпендикулярном расположении водопроводящей и регулирующей сети. — В сб.: Водное хозяйство Белоруссии. Вып. 3. Минск, 1973.
3. *Васильев С. В.* и др. Методы фильтрационных расчетов гидромелиоративных систем. М., 1970.
4. *Деч Г.* Руководство к практическому применению преобразований Лапласа и  $z$ -преобразования. М., 1971.
5. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. М., 1966.
6. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Таблицы интегральных преобразований. Т. 1. М., 1969.
7. *Полубаринова-Кочина П. Я.* Теория движения грунтовых вод. М., 1952.
8. *Аверьянов С. Ф.* Расчет понижения и подъема грунтовых вод при осушении системой каналов (дрен). — «Гидротехника и мелиорация», 1957, № 12.
9. *Лыков А. В.* Теория теплопроводности. М., 1952.