Э. П. Коваленко

К ВЫВОДУ ФОРМУЛЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ОСРЕДНЕННОЙ СКОРОСТИ В ПЛОСКОМ ТУРБУЛЕНТНОМ РАВНОМЕРНОМ ПОТОКЕ

Рассмотрим движение вихря, образовавшегося в пристеночной области толщиной 2δ, и его диффузию при плоском движении вязкой жидкости.

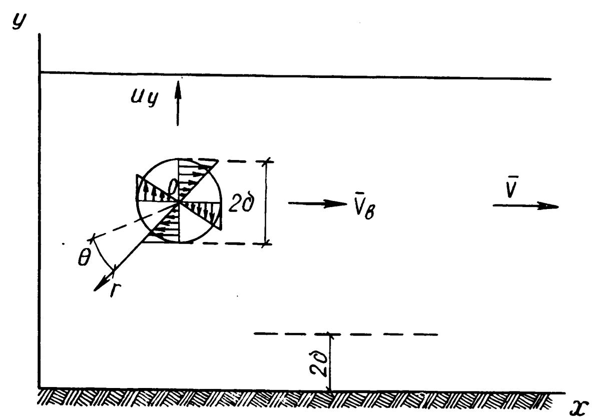

Рис. 1.

В момент времени $t=0$ проекции скорости v (рис. 1) на оси цилиндрических координат r, θ, z будут следующими:

$$v_r = v_z = 0, \quad v_\theta = v_H. \tag{1}$$

В качестве допущения будем считать

$$v_\theta = ar, \tag{2}$$

где $a=\text{const}$.

Уравнение движения в рассматриваемом случае [1] имеет вид

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\nu \frac{2}{r} \frac{\partial v}{\partial r}, \tag{3}$$

где ν— кинематический коэффициент вязкости.

Учитывая (2), уравнение (3) запишется так:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -2\nu \frac{v}{r^2}. \tag{4}$$

Отсюда

$$\ln v = -\frac{2\nu}{r^2} t + C.$$

Принимая во внимание (1), получим

$$\ln \frac{v}{v_H} = -\frac{2\nu}{r^2} t. \qquad (5)$$

Для вязкого потока

$$\frac{dv}{dy} = -g(H-y)\,i, \qquad (6)$$

где i — уклон; y — расстояние рассматриваемой точки от дна плоского потока; H — глубина; g — ускорение силы тяжести.

Известно, что

$$\frac{dy}{dt} = u_y, \qquad (7)$$

где u_y — осредненная по поперечному сечению составляющая скорости движения вихря, направленная перпендикулярно поверхности равномерного плоского потока.

Учитывая, что в (4) $\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{dv}{dt}$ и $\frac{dv}{dy} = \frac{v}{r}$ (рис. 1), подставим в (4) значение $\nu \frac{dv}{dy}$ из (6) и dt из (7). В результате находим

$$\frac{dv}{dy} u_y = \frac{2g(H-y)\,i}{r}. \qquad (8)$$

Составляющую скорости u_y можно описать соотношением, учитывая [1]:

$$u_y = b(\bar{v} - \bar{v}_{\text{в}}) \frac{dv}{dy}, \qquad (9)$$

где $\bar{v}$ — местная скорость потока; $\bar{v}_{\text{в}}$ — продольная составляющая скорости движения вихря; b — коэффициент приведения.

Подставив значение u_y из (9) в (8), получим

$$\bar{v} - \bar{v}_{\text{в}} = \frac{2g(H-y)\,i}{rb\left(\frac{dv}{dy}\right)^2}. \qquad (10)$$

Подставив значение u_y из (7) и $\bar{v} - \bar{v}_{\text{в}}$ из (10) в (9), находим

$$\frac{dy}{H-y} = \frac{2gi}{r\frac{dv}{dy}} dt. \qquad (11)$$

Значение $\frac{dv}{dy}$, полученное из (5), подставим в (11). Тогда

$$\frac{dy}{H-y} = \frac{2gi}{v_H e^{-\frac{2\nu}{r^2}t}} dt. \qquad (12)$$

Проинтегрировав (12), получим

$$-\ln(H-y)=\frac{gir^2}{\nu v_H}e^{\frac{2\nu}{r^2}t}+C.$$

При $r=\delta$ и $t=0$

$$-\ln(H-\delta)=\frac{gi\,\delta^2}{\nu\,v_H}+C.$$

Отсюда, полагая, что вихрь сохраняет свои линейные размеры, т. е. $r=\delta$, находим

$$-\ln\left(\frac{H-y}{H-\delta}\right)=\frac{gi\,\delta^2}{\nu\,v_H}\left(e^{\frac{2\nu}{\delta^2}t}-1\right). \tag{13}$$

При $\frac{H-y}{H-\delta}\approx 1$ левую часть выражения (13) разложим в ряд по $\frac{H-y}{H-\delta}$ и, ограничиваясь первым членом разложения, получим

$$1-\frac{y-H}{\delta-H}=\frac{gi\,\delta^2}{\nu\,v_H}\left(e^{\frac{2\nu}{\delta^2}t}-1\right).$$

Зная [2, 3], что

$$\frac{v_{\text{н}}}{u_*}=\frac{u_*\delta}{\nu}=\text{const},$$

где $u_*=\sqrt{gHi}$, находим

$$\frac{\delta-y}{\delta-H}=-\frac{\delta}{H}\left(e^{\frac{2\nu}{\delta^2}t}-1\right),$$

но при $\frac{H-\delta}{H}\approx 1$

$$-1+\frac{y}{\delta}=e^{\frac{2\nu}{\delta^2}t}-1. \tag{14}$$

Подставив из (5) в (14) значение $e^{\frac{2\nu}{\delta^2}t}$, получим

$$\frac{y}{\delta}=\frac{v_H}{v}.$$

но $\frac{v}{\delta}=\frac{dv}{dy}$.

Отсюда

$$\frac{dv}{dy}=\frac{v_H}{y}. \tag{15}$$

Ранее было показано [2], что $v_H=2{,}8\,u$.

Учитывая это и (15), можно записать

$$\frac{dv}{dy} = 2{,}8 \frac{u_*}{y} . \tag{16}$$

Полученное соотношение (16) хорошо согласуется с известным уравнением Прандтля для турбулентной зоны режима.

Литература

1. *Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.* Теоретическая гидромеханика. Ч. 2. М., 1963. 2. *Коваленко Э. П.* К определению толщины вязкого подслоя в равномерном плоском потоке. — В сб.: Вопросы водохозяйственного строительства. Минск, 1970. 3. *Хинце И. О.* Турбулентность. М., 1963.