ВОДНОЕ ХОЗЯЙСТВО БЕЛОРУССИИ

МИНСК 1972

Ю. А. Соболевский, В. А. Рыжков

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НАПОРОВ И ФИЛЬТРАЦИОННЫХ СИЛ В АНИЗОТРОПНОМ ПО ВОДОПРОНИЦАЕМОСТИ ОСНОВАНИИ В НАЧАЛЬНЫЙ МОМЕНТ ПРИЛОЖЕНИЯ ВНЕШНЕЙ НАГРУЗКИ (ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА)

Анизотропные по водопроницаемости основания обладают неодинаковой фильтрационной способностью в разных направлениях. В частности, лессовые и лессовидные грунты более водопроницаемы в вертикальном направлении, чем в горизонтальном; ленточные глины, торфы и некоторые пески, наоборот, более водопроницаемы в горизонтальном направлении, чем в вертикальном.

Получим картины распределения напоров и фильтрационных сил в анизотропных по водопроницаемости основаниях: а) при преобладающей горизонтальной водопроницаемости $\frac{k_x}{k_y} > 1$; б) при преобладающей вертикальной водопроницаемости $\frac{k_x}{k_y} < 1$ (k_x — коэффициент фильтрации в горизонтальном направлении, k_y — коэффициент фильтрации в вертикальном направлении) для начального момента приложения равномерно распределенной полосовой нагрузки интенсивностью P_0 к поверхности грунтовой массы (рис. 1) на участке $-b < x < +b$. Полагаем, что горизонт грунтовых вод (ГГВ) совпадает с поверхностью грунта.

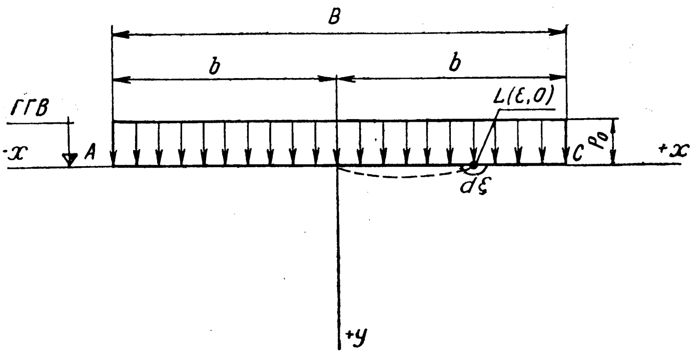


Рис. 1. Расчетная схема водонасыщенного основания.

При этом считаем, что напор на этом участке мгновенно повышается от нуля до величины

$$H = \frac{P_0}{\gamma_0},$$

где γ_0 — объемный вес воды. В остальных точках поверхности грунтовой массы напор остается равным нулю.

Выражения для компонет скорости фильтрации будет иметь вид

$$v_x = -k_x \frac{\partial H}{\partial x}, \quad v_y = -k_y \frac{\partial H}{\partial y},$$

а уравнение неразрывности

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{k_y}{k_x} \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = 0. \tag{1}$$

Вводя замену по Самшио [1]—$y_1 = \sqrt{\frac{k_x}{k_y}}\, y$, $x = x$, выражение (1) приводим к уравнению Лапласа:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y_1{}^2} = 0. \tag{2}$$

Функцию напора H определяем из следующих условий: 1) во всех точках полуплоскости $y_1 \geqslant 0$ функция напора H удовлетворяет уравнению Лапласа (2); 2) во всех точках $y_1 = 0$, расположенных внутри участка $-b \leqslant x < +b$, функция напора H принимает значение $H = \frac{P_0}{\gamma_0}$; 3) во всех точках $y_1 = 0$, расположенных вне участка $-b < x < +b$, функция напора $H = 0$; 4) для бесконечно удаленных точек функция напора H и ее производные обращаются в нуль.

Выражение для функции напора H, удовлетворяющей поставленным условиям, будет иметь вид

$$H = \frac{P_0}{\gamma_0 \pi} \int\limits_{-b}^{+b} \frac{\sqrt{\frac{k_x}{k_y}}\, y}{(x-\xi)^2 + \frac{k_x}{k_y}\, y^2}\, d\xi = -\frac{P_0}{\gamma_0 \pi} \left[\operatorname{arc\,tg} \frac{(x-b)}{\sqrt{\frac{k_x}{k_y}}\, y} - \right.$$

$$\left. - \operatorname{arc\,tg} \frac{(x+b)}{\sqrt{\frac{k_x}{k_y}}\, y} \right].$$

Так как

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{x-b}{\sqrt{\frac{k_x}{k_y}}\, y} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{\frac{k_x}{k_x}}\, y}{x-b},$$

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{x+b}{\sqrt{\frac{k_x}{k_y}}\, y} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{\frac{k_x}{k_x}}\, y}{x-b},$$

то выражение для функции напора H записываем так:

$$H = \frac{P_0}{\gamma_0 \pi}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{\frac{k_x}{k_y}}\,y}{x-b} - \operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{\frac{k_x}{k_y}}\,y}{x+b}\right). \tag{3}$$

Приравняв его к постоянному, получим уравнение линий равных напоров, которыми будет служить семейство эллипсов, проходящих через точки $A(-b, 0)$ и $C(b, o)$.

Поток фильтрующейся жидкости можно характеризовать функцией комплексного переменного в виде

$$W(z) = U(x, y) + iV(x, y) = H + iQ,$$

которая в силу условий Коши-Римана:

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y_1}, \qquad \frac{\partial H}{\partial y_1} = -\frac{\partial Q}{\partial x}$$

будет аналитической.

Найдем производные по x и y_1 от функции напора H:

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{P_0}{\gamma_0 \pi}\left[-\frac{y_1}{(x-b)^2 + y_1^2} + \frac{y_1}{(x+b)^2 + y_1^2}\right],$$

$$\frac{\partial H}{\partial y_1} = \frac{P_0}{\gamma_0 \pi}\left[\frac{x-b}{(x-b)_1^2 + y_1^2} - \frac{x+b}{(x+b)^2 + y_2^1}\right].$$

Интегрируя $\frac{\partial Q}{\partial y_1}$ по y_1, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ по x и заменяя $y_1 = \sqrt{\frac{k_x}{k_y}}\,y$, найдем

$$Q = -\frac{P_0}{\gamma_0 \pi}\ln\frac{\sqrt{(x-b)^2 + \frac{k_x}{k_y}y^2}}{\sqrt{(x+b)^2 + \frac{k_x}{k_y}y^2}}. \tag{4}$$

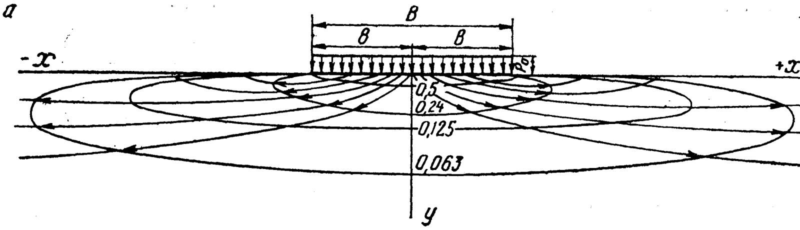
Выражение для комплексного потенциала записываем так:

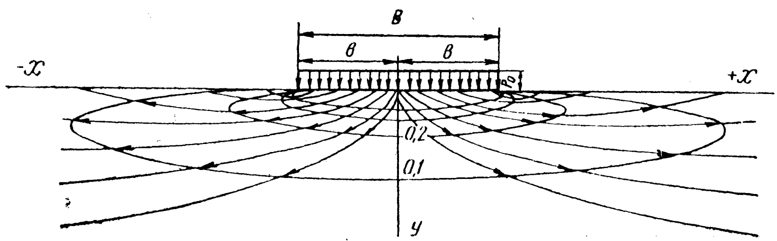
$$W = \frac{P_0}{\gamma_0 \pi}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{\frac{k_x}{k_y}}\,y}{x-b} - \operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{\frac{k_x}{k_y}}\,y}{x+b}\right) - \frac{iP_0}{\gamma_0 \pi}\times$$

$$\times\ln\frac{\sqrt{(x-b)^2 + \frac{k_x}{k_y}y^2}}{\sqrt{(x+b)^2 + \frac{k_x}{k_y}y^2}}; \tag{5}$$

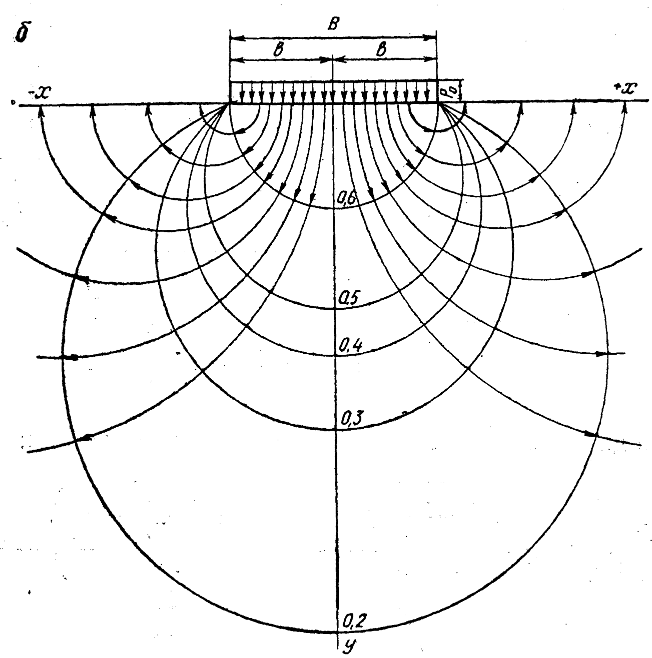
действительная и мнимая части полученной формулы удовлетворяют уравнению Лапласа.

Действительная часть комплексного потенциала является уравнением для линий равного напора — эквипотенциалей, а мнимая его часть, если а





б



приравнять ее постоянному, является уравнением семейства линий тока

$$-\frac{P_0}{\gamma_0 \pi} \ln \frac{\sqrt{(x-b)^2+\frac{k_x}{k_y}\, y^2}}{\sqrt{(x+b)^2+\frac{k_x}{k_y}\, y^2}} = C. \tag{6}$$

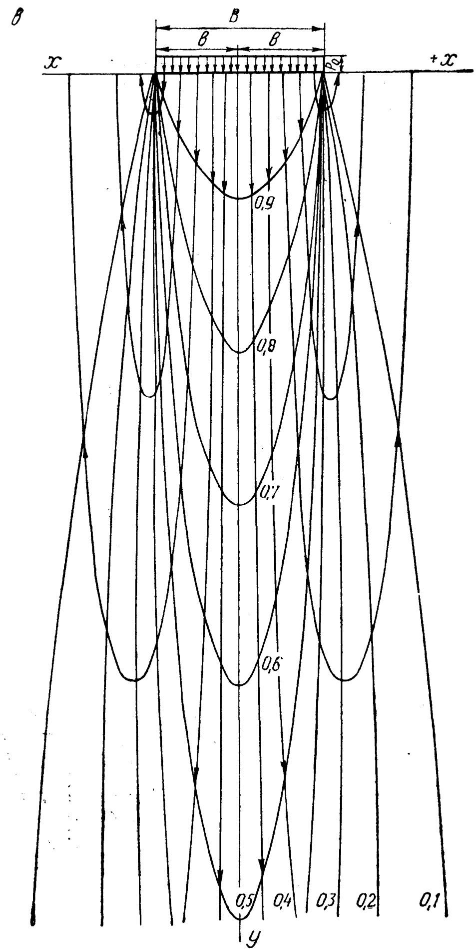


Рис. 2. Гидродинамические сетки водонасыщенных оснований:

а — для грунта с преобладающей горизонтальной водопроницаемостью $\left(\frac{k_x}{k_y}=100;\ 50\right)$; *б* — для изотропного грунта; *в* — для грунта с преобладающей вертикальной водопроницаемостью $\left(\frac{k_x}{k_y}=\frac{1}{100}\right)$.

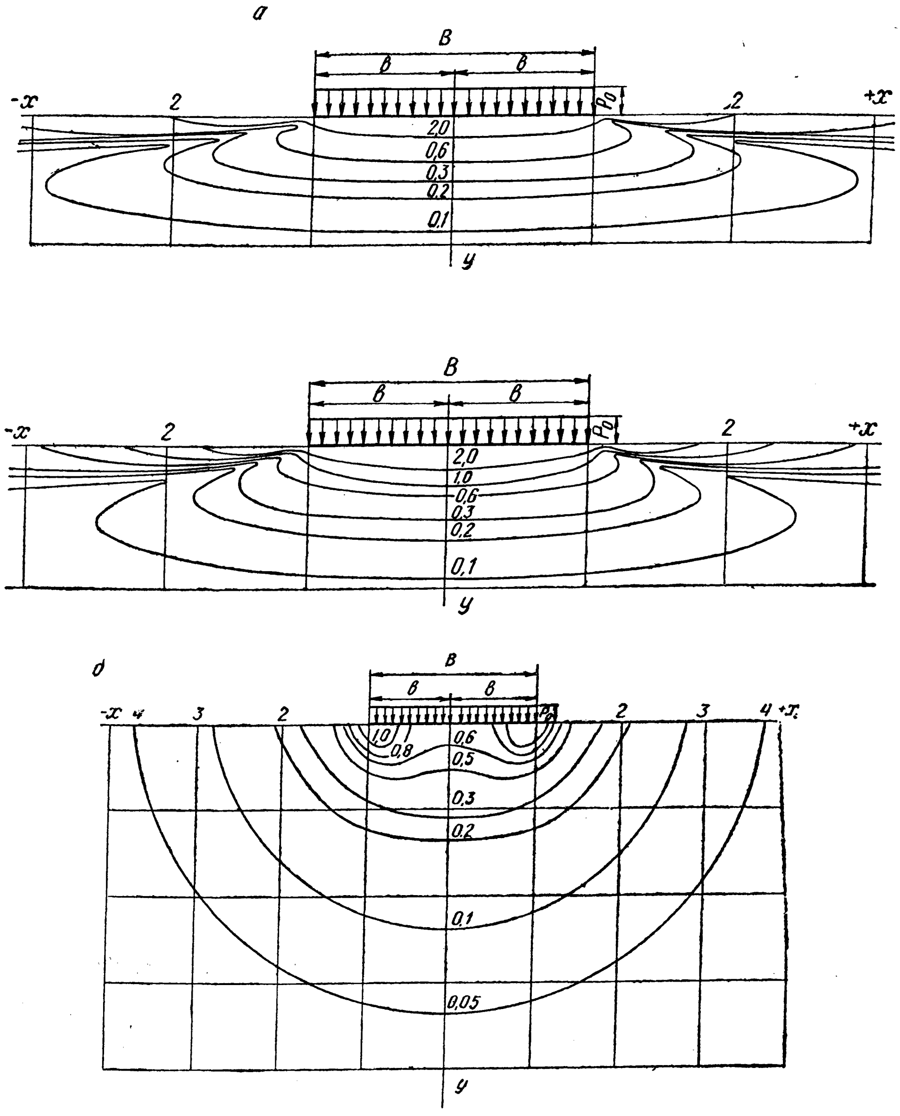
Уравнение линий модулей равных градиентов имеет вид

$$|\operatorname{grad} H| = \frac{P_0}{\gamma_0\pi}\,\frac{2b\sqrt{\frac{k_x}{k_y}}\sqrt{4x^2y^2+\left(x^2-\frac{k_x}{k_y}y^2-b^2\right)^2}}{\left(x^2+\frac{k_x}{k_y}y^2-b^2\right)^2+4\frac{k_x}{k_y}b^2y^2} = C_1, \tag{7}$$

т. е. представляет алгебраические кривые четвертого порядка.

Если положить в выражениях (3), (6) и (7) отношение $\frac{k_x}{k_y}=1$, то получим уравнения, совпадающие с выражениями для изотропной по водопроницаемости среды, которые имеют вид [2, 3, 4]:

$$H = \frac{P_0}{\gamma_0\pi}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x-b} - \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x+b}\right), \tag{3'}$$



$$-\frac{P_0}{\gamma_0\pi}\ln\frac{\sqrt{(x-b)^2+y^2}}{\sqrt{(x+b)^2+y^2}}=C, \tag{6'}$$

$$|\operatorname{grad} H| = \frac{P_0}{\gamma_0\pi}\,\frac{2b}{\sqrt{(x^2+y^2-b^2)+4b^2y^2}}\,. \tag{7'}$$

На рис. 2 показаны гидродинамические сетки для анизотропного и изотропного оснований, полученных из формул (3) и (6) и (3′) и (6′).

На рис. 3 изображены линии равных градиентов в начальный момент приложения вертикальной равномерно распределенной нагрузки, вычисление по формулам (7) и (7′).

При решении подобных задач наибольший интерес представляет учет действия фильтрационных сил с точки зрения устойчивости основания как в отношении взвешивания, так и выпора.

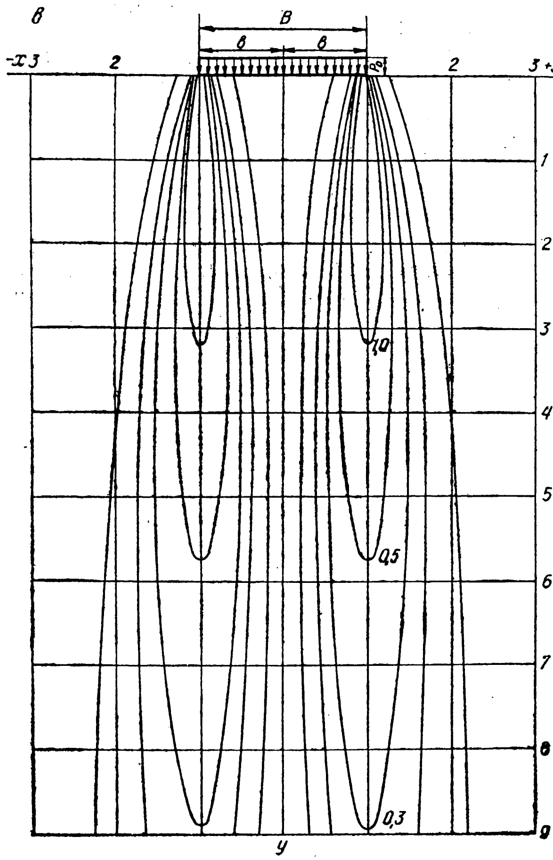


Рис. 3. Линии равных градиентов с водонасыщенных оснсваний в начальный момент приложения вертикальной равномерно распределенной нагрузки:

а — для грунта с преобладающей горизонтальной водопроницаемостью $\left(\frac{k_x}{k_y} = 100;\ 50\right)$; *б* — для изотропного грунта; *в* — для грунта с преобладающей вертикальной водопроницаемостью $\left(\frac{k_x}{k_y} = \frac{1}{100}\right)$.

Величина объемной фильтрационной силы может быть определена из выражения

$$| f | = \gamma_0 \, | \operatorname{grad} H | ,$$

где γ_0 — объемный вес воды.

Следует иметь в виду, что вектор объемной фильтрационной силы всегда нормален эквипотенциали в данной точке фильтрующей области, а в случае изотропных по водопроницаемости грунтов его направление совпадает с направлением линий тока.

Выводы

1. Фильтрационные силы в анизотропном основании при преобладающей горизонтальной водопроницаемости в начальный момент приложения внешней нагрузки будут в большей мере способствовать выпору

грунта, чем в изотропных и анизотропных с преобладанием вертикальной водопроницаемости оснований.

2. При сильно выраженной анизотропии с преобладанием вертикальной водопроницаемости фильтрационные силы, возникшие вследствие быстрого приложения внешней нагрузки к основанию, будут способствовать интенсивному его уплотнению.

Литература

1. *A. F. Samsioe.* Einfluβ von Rohrbrunnen auf Bewegung des Grundwassers. Z. angew. Math. Math. Mech H. 11, Seite 24—135, 1931. 2. *Н. М. Герсеванов.* Основы динамики грунтовой массы. М., 1933. 3. *Я. А. Мечерет.* Распределение мгновенных напоров и давлений в грунтовой массе, вызванных мгновенной нагрузкой. Тр. ВИОС, вып. 4, 1934. 4. *В. А. Флорин.* К вопросу о гидродинамических напряжениях в грунтовой массе. М., 1938.