

Н. Н. Баранов

РАСЧЕТ ДИНАМИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ВОДОНАСЫЩЕННОГО ОТКОСА МЕТОДОМ КОНФОРМНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ОБЛАСТЕЙ

Динамические воздействия по поверхности откоса, его гребня или основания вызывают появление в грунтовой массе поля напоров и, как следствие, фильтрационных сил [1, 2]. Сложность очертаний водонасыщенной области затрудняет учет фильтрационных сил, которые при определенных условиях могут стать причиной частичной или полной потери несущей способности и перехода грунтовой массы в текучее или текучепластичное состояние. Поэтому для решения задачи целесообразно сделать переход к такой области, где учет фильтрационных сил и получение решения производятся простыми способами. В настоящей работе будет показано, что с помощью конформных отображений исследуемых областей на вспомогательные решение ряда задач устойчивости водонасыщенных грунтов существенно упрощается. В качестве вспомогательной области целесообразно использовать полуплоскость, которая будет служить математической моделью откоса.

Остановимся на некоторых наиболее общих свойствах конформных отображений. Если в плоскостях комплексного переменного x, y и u, v заданы области z и w (рис. 1), находящиеся в конформном соответствии, то всякому значению $z = x + iy$ из области z отвечает определенное

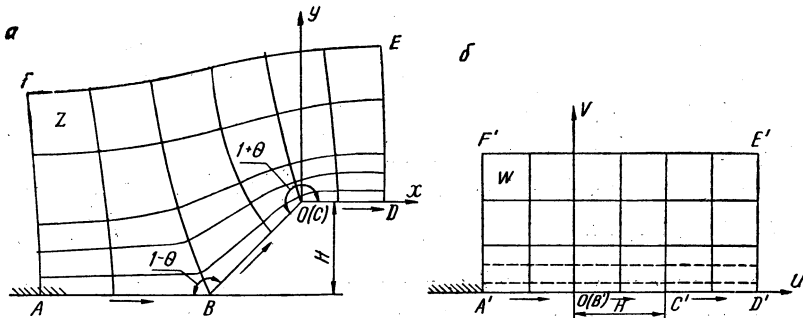


Рис. 1. Математическая модель откоса в виде полуплоскости.

значение $w = u + iv$ в области w , так же, как совокупности всех значений w отвечают определенные значения z . Взаимно-однозначное отображение области z на область w осуществляет некоторая аналитическая функция $w = f(z)$. Из важнейшего для конформных отображений свойства сохранения углов следует, что любой ортогональной сетке кривых в области z соответствует ортогональная же сетка в области w . При этом бесконечно малые площади любой формы одной области отображаются в геометрически подобные площади другой области с сохранением направления отсчета углов. Можно показать также, что вещественная и мнимая части всякой аналитической функции комплексной переменной

удовлетворяют уравнению Лапласа и являются сопряженными гармоническими функциями.

В задачах теории фильтрации два семейства взаимно ортогональных линий (тока и равного потенциала скорости) образуют гидродинамическую сетку течения. Поскольку при конформном отображении ортогональность не нарушается, можно одну область потенциального течения жидкости конформно преобразовать в другую область. Иначе, при помощи соответствующей отображающей функции комплексного переменного можно один потенциальный поток жидкости преобразовать в другой: исследуемый поток, заданный определенными граничными условиями, можно преобразовать в поток, хорошо изученный, и получить искомое решение. В этом и заключается идея применения конформных отображений для решения задач устойчивости фильтрующих откосов в условиях плоского потенциального течения жидкости. При этом в соответствии с условием неразрывности потенциального потока рассматривается несжимаемая водонасыщенная пористая среда.

Построение гидродинамических сеток на практике в настоящее время производится методом электрогидродинамических аналогий. Испытуемые модели готовят из электропроводной бумаги. Для фильтрующего по всей высоте откоса имеем следующие граничные условия: по свободной поверхности напорная функция в виде равномерно распределенной нагрузки интенсивностью $p = \gamma_b H$, где H — высота откоса; γ_b — удельный вес воды; по наклонной поверхности откоса от $p = \gamma_b H$ до $p = 0$ по линейному закону с нулевым потенциалом по основанию. Динамическое воздействие моделируется приложением по участку соответствующего потенциала.

С помощью конформного отображения определяются граничные условия фильтрации и выполняется построение гидродинамической сетки в полуплоскости. Поле сил тяжести и взвешивания в плоскостях z и w остается без изменения. Для области, ограниченной полуплоскостью, представляется возможным, с учетом фильтрационных сил по способу Чугаева — Павловского [3] построить потенциальное поле результирующих сил и выявить наличие неустойчивых зон. Произведя далее отображение полученных в области w неустойчивых зон в плоскость z , получим искомое решение.

Построение конформного отображения. Откос, изображенный в плоскости z (см. рис. 1, а), представляет собою вырожденный прямолинейный треугольник с внутренними углами $(1-\theta)\pi$, $(1+\theta)\pi$ и $(-1)\pi$, где θ — отношение, характеризующее углы при вершинах ($\theta = \frac{\lambda}{q}$, λ, q — натуральные числа, причем $\lambda < q$). Высота откоса (расстояние между параллельными сторонами) равна H . Отображающая функция может быть представлена интегралом Шварца—Кристоффеля [4] в виде

$$z(w) = A_1 \int_{w_0}^w \prod_{v=1}^{n-1} (w - a_v)^{\delta_{n-1}} dw + A_2, \quad (1)$$

где A_1 и A_2 — произвольные постоянные, $A_1 \neq 0$; a_v — особые точки, образы которых служат вершинами треугольника; положим

$$a_1 = 0; a_2 = 1; \quad (1')$$

h — число вершин треугольника,

$$h = 3; \quad (1'')$$

$\rho\delta_n$ — внутренний угол соответствующей вершины;

$$\delta_1 = 1 - \theta; \delta_2 = 1 + \theta; \delta_3 = -1. \quad (1''')$$

Подставляя значения из (1'), (1''), (1''') в уравнение (1) и учитывая образ точки $\omega = 0$, получим

$$z(\omega) = A_1 \int_1^{\omega} \omega^{-\theta} (\omega - 1)^{\theta} d\omega = A_1 \int_1^{\omega} \left(\frac{\omega - 1}{\omega} \right)^{\theta} d\omega. \quad (2)$$

Определив постоянную интегрирования A_1 и применив подстановку

$$\left(\frac{\omega - 1}{\omega} \right)^{1/q} = t,$$

получим решение уравнения (по В. Коппенфельсу — Ф. Штальману):

$$z(\omega) = \frac{H}{\pi} \left[-\frac{1}{\theta} \frac{t^\lambda}{t^q - 1} + \sum_{v=0}^{q-1} t^\lambda \ln \left(1 - \frac{t}{t_v} \right) \right], \quad (4)$$

где $t_v = e^{\frac{2v}{q}\pi i}$ ($v=0, 1, \dots, q-1$).

Функция (4) является искомой. Используя (4), можно преобразовать ограниченное откосным профилем поле фильтрационных сил в полуплоскость.

Рассмотрим в качестве примера частный случай, когда откос имеет заложение $m=1$ (угол наклона к горизонту 45° , при этом $\theta = \frac{1}{4}$; $\lambda=1$; $q=4$). Отображающая функция (4) будет иметь вид

$$z(\omega) = \frac{H}{\pi} \left[-\frac{4t}{t^4 - 1} + \ln(1-t) + i \ln \left(1 - \frac{t}{i} \right) - \ln(1+t) - i \times \right. \\ \left. \times \ln \left(1 + \frac{t}{i} \right) \right], \quad (5)$$

где $t = \sqrt[4]{\frac{\omega - 1}{\omega}}$.

Отделяя действительную часть от мнимой в уравнении (5), получим выражения для x и y (из условия, что $x=u$, $y=v$):

$$x = \frac{H}{\pi} \left[4Au \cos \varphi - 4Av \sin \varphi - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{A \cos \varphi}{1 + A \sin \varphi} + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{A \cos \varphi}{1 - A \sin \varphi} + \right. \\ \left. + \ln \sqrt{1 - 2A \cos \varphi + A^2} - \ln \sqrt{1 + 2A \cos \varphi + A^2} \right], \quad (6)$$

$$y = \frac{H}{\pi} \left[4Au \sin \varphi + 4Av \cos \varphi + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{A \sin \varphi}{1 - A \cos \varphi} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{A \sin \varphi}{1 + A \cos \varphi} + \right. \\ \left. + \ln \sqrt{1 + 2A \sin \varphi + A^2} - \ln \sqrt{1 - 2A \sin \varphi + A^2} \right], \quad (6')$$

где $A = \sqrt[8]{\frac{(u^2 + v^2 - u)^2 + v^2}{(u^2 + v^2)^2}}$, $\varphi = \frac{1}{4} \arctg \frac{v}{u^2 + v^2 - u}$.

В табл. 1 приведены координаты точек образов и их отображений, полученных при решении уравнений (6) и (6'). На рис. 1, а откос представлен областью $ABCDEF$. Математическая модель его в виде области полуплоскости ($Im\omega > 0$) изображена на рис. 1, б. Конформное соответствие области ω с областью z осуществляет функция (5), а построения на рис. 1, а, б с соблюдением масштаба выполнены по данным табл. 1. Аналогично можно построить отображение в полуплоскости откоса с углом наклона к горизонту от 0° до 90° .

Учет фильтрационных сил по способу Р. Р. Чугаева — Н. Н. Павловского. На скелет грунта в объеме одной кубической единицы, выделенной в области фильтрующего потока, действует система объемных сил (взвешивания, собственного веса и фильтрации), которые при сложении дают результирующую γ , наклоненную в общем случае под переменным углом α к вертикали (рис. 2).

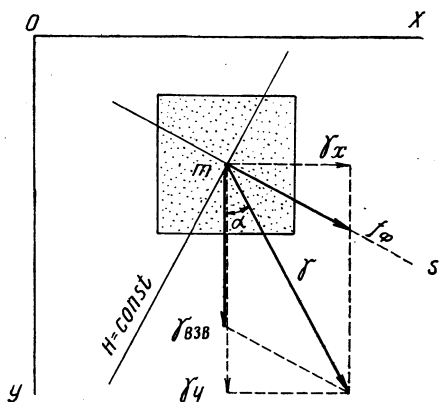


Рис. 2. Силы, действующие на скелет грунта в области фильтрующего потока.

Очевидно, если условиться соответствующие величины выражать в тоннах и метрах, зависимость (7) можно переписать в виде

$$\Phi = \gamma_{vzv}y - H + A_3. \quad (8)$$

Построение линий Φ производится по предварительно найденным (методом ЭГДА или иным способом) линиям равного напора. Для построения линий $\Phi = \text{const}$ полагаем в зависимости (7) произвольную постоянную A_3 равной нулю и переписываем уравнение в виде

$$y = \frac{1}{\gamma_{vzv}} \Phi + \frac{\gamma_v}{\gamma_{vzv}} H, \quad (9)$$

где Φ выражается в τ/m^2 . Ось y направляем вниз, начало этой оси выбираем так, чтобы для точек области фильтрации, характеризующихся максимальным значением напора, величина Φ равнялась нулю (рис. 3, а). При таком условии положение точки O определится размером

$$y_0 = \frac{\gamma_v}{\gamma_{vzv}} H_{\max}, \quad (10)$$

где H_{\max} — эквипотенциаль, характеризующаяся максимальным значением напора.

действует система объемных сил (взвешивания, собственного веса и фильтрации), которые при сложении дают результирующую γ , наклоненную в общем случае под переменным углом α к вертикали (рис. 2). Поле результирующих сил является потенциальным, а функция его записывается в виде

$$\Phi = -\gamma_v H + \gamma_{vzv} y + A_3, \quad (7)$$

где γ_v — объемный вес воды; γ_{vzv} — объемный вес взвешенного грунта; p — величина приложенной нагрузки;

$H = \frac{p}{\gamma_v}$ — напорная функция (H — функция только x и y); A — постоянная интегрирования.

Таблица 1

Координаты точки в плоскости					
w	z	w	z	w	z
-1,00	-2,85 - 1,00 <i>i</i>	1,00 <i>i</i>	-1,51 + 0,67 <i>i</i>	1,00 + 1,00 <i>i</i>	-0,24 + 0,94 <i>i</i>
-1,00 + 0,10 <i>i</i>	-2,86 - 0,82 <i>i</i>	1,50 <i>i</i>	-1,64 + 1,32 <i>i</i>	1,00 + 1,50 <i>i</i>	-0,38 + 1,57 <i>i</i>
-1,00 + 0,30 <i>i</i>	-2,87 - 0,54 <i>i</i>	0,10	-0,79 - 0,79 <i>i</i>	1,10	0,06
-1,00 + 0,50 <i>i</i>	-2,89 - 0,23 <i>i</i>	0,20	-0,65 - 0,65 <i>i</i>	1,20	0,13
-1,00 + 1,00 <i>i</i>	-2,95 + 0,51 <i>i</i>	0,30	-0,53 - 0,53 <i>i</i>	1,30	0,22
-1,00 + 1,50 <i>i</i>	-3,01 + 1,19 <i>i</i>	0,40	-0,42 - 0,42 <i>i</i>	1,40	0,31
-0,50	-2,06 - 1,00 <i>i</i>	0,50	-0,33 - 0,33 <i>i</i>	1,50	0,40
-0,50 + 0,10 <i>i</i>	-2,07 - 0,81 <i>i</i>	0,50 + 0,10 <i>i</i>	-0,42 - 0,22 <i>i</i>	1,50 + 0,10 <i>i</i>	0,40 + 0,11 <i>i</i>
-0,50 + 0,30 <i>i</i>	-2,10 - 0,51 <i>i</i>	0,50 + 0,30 <i>i</i>	-0,55 - 0,03 <i>i</i>	1,50 + 0,30 <i>i</i>	0,39 + 0,31 <i>i</i>
-0,50 + 0,50 <i>i</i>	-2,13 - 0,19 <i>i</i>	0,50 + 0,50 <i>i</i>	-0,65 + 0,20 <i>i</i>	1,50 + 0,50 <i>i</i>	0,38 + 0,49 <i>i</i>
-0,50 + 1,00 <i>i</i>	-2,21 + 0,55 <i>i</i>	0,50 + 1,00 <i>i</i>	-0,85 + 0,77 <i>i</i>	1,50 + 1,00 <i>i</i>	0,32 + 1,08 <i>i</i>
-0,50 + 1,50 <i>i</i>	-2,31 + 1,23 <i>i</i>	0,50 + 1,50 <i>i</i>	-0,98 + 1,43 <i>i</i>	1,50 + 1,50 <i>i</i>	0,25 + 1,64 <i>i</i>
-0,40	-1,89 - 1,00 <i>i</i>	0,60	-0,24 - 0,24 <i>i</i>	2,00	0,91
-0,30	-1,71 - 1,00 <i>i</i>	0,70	-0,16 - 0,16 <i>i</i>	2,00 + 0,10 <i>i</i>	0,91 + 0,12 <i>i</i>
-0,20	-1,52 - 1,00 <i>i</i>	0,80	-0,10 - 0,10 <i>i</i>	2,00 + 0,30 <i>i</i>	0,91 + 0,33 <i>i</i>
-0,10	-1,30 - 1,00 <i>i</i>	0,90	-0,04 - 0,04 <i>i</i>	2,00 + 0,50 <i>i</i>	0,90 + 0,52 <i>i</i>
0,10 <i>i</i>	-1,10 - 0,67 <i>i</i>	1,00 + 0,10 <i>i</i>	-0,02 + 0,07 <i>i</i>	2,00 + 1,00 <i>i</i>	0,89 + 1,11 <i>i</i>
0,30 <i>i</i>	-1,22 - 0,43 <i>i</i>	1,00 + 0,30 <i>i</i>	-0,07 + 0,24 <i>i</i>	2,00 + 1,50 <i>i</i>	0,87 + 1,68 <i>i</i>
0,50 <i>i</i>	-1,33 - 0,04 <i>i</i>	1,00 + 0,50 <i>i</i>	-0,12 + 0,40 <i>i</i>		

Далее задаемся значением разности $\Delta\Phi$ двух соседних линий Φ (лучше выбирать $\Delta\Phi$ кратной величине ρ), причем устанавливаем наименование тех линий Φ , которые намечаем построить. Например, при $\Delta\Phi=0,1$ т/м², очевидно, надлежит наметить для Φ следующий ряд зна-

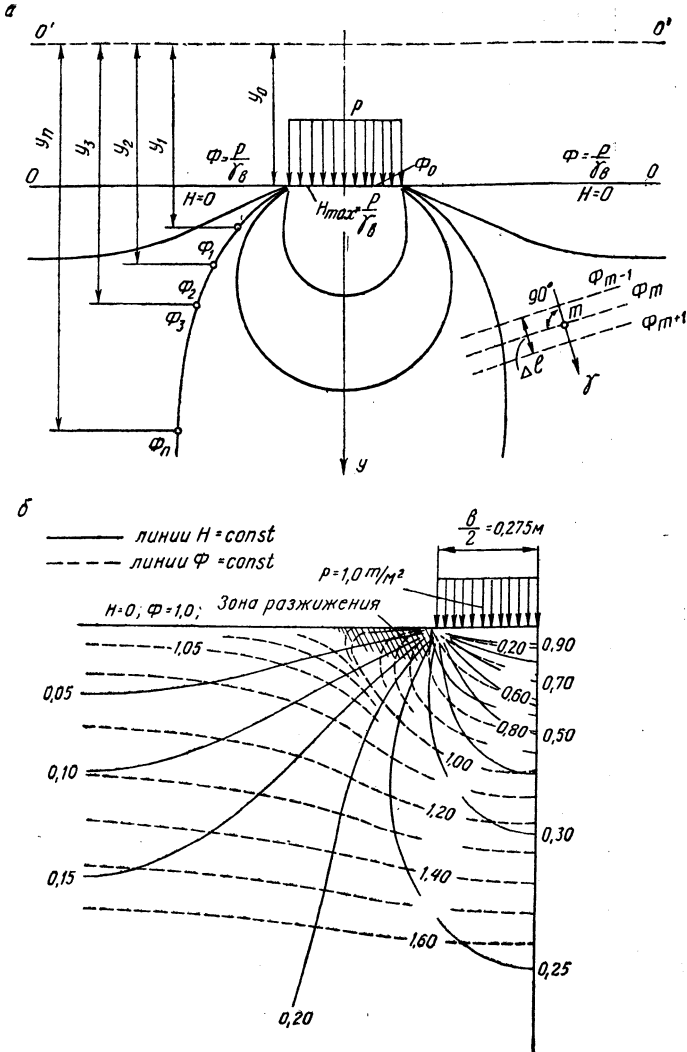


Рис. 3. Учет фильтрационных сил по способу Р. Р. Чугаева—
Н. Н. Павловского.

чений: $\Phi_0=0$; $\Phi_1=0,1$; $\Phi_2=0,2$ и т. д. После этого рассматриваем какую-либо одну линию равного напора $H=H_0=const$, используя зависимость (9).

Задаваясь в уравнении (9) намеченными значениями Φ , вычисляем соответствующие величины координат (y_1, y_2, y_3, \dots) для точек пересечения рассмотренных линий $\Phi=const$ с данной линией равного напора $H_0=const$. Подобным образом рассматриваем и другие линии равного напора, после чего по найденным на этих линиях точкам и проводим линии $\Phi=const$.

Построенные эквипотенциальные линии Φ дают возможность определить результирующую силу γ в любой точке области фильтрации. Эта сила в любой данной точке действует нормально к линии Φ и направлена в сторону возрастающих значений. Ее величина может быть определена по формуле

$$\gamma = \frac{\Delta\Phi}{\Delta l}, \quad (11)$$

где Δl — расстояние между двумя соседними линиями.

Анализируя построенные линии $\Phi = \text{const}$, можно легко очертить те области грунтовой массы, для которых вертикальная составляющая объемной силы направлена вверх. Границы зоны разжижения будут представлять собою геометрическое место точек, для которых линии Φ имеют вертикальную касательную. Эти зоны и будут искомыми. Если же такие зоны не возникают, то основание устойчиво против действия фильтрационных сил. В качестве примера на рис. 3, б приводятся линии $\Phi = \text{const}$, построенные для нагрузки $p = 0,1 \text{ кг/см}^2$ по участку полуплоскости шириною $b_p = 0,55 \text{ м}$. Линии равного напора найдены методом ЭГДА. Зона разжижения грунта заштрихована.

Очевидно, что грунт рассматриваемой зоны будет устойчив, если его сверху пригрузить. Для обеспечения местной устойчивости необходимо выдержать следующее условие:

$$\int_{\omega_1} (\gamma_y)^{\text{разж}} d\omega_1 < \int_{\omega_2} (\gamma_y)^{\text{пригр}} d\omega_2, \quad (12)$$

где ω_1 — площадь зоны разжижения грунта; ω_2 — площадь зоны грунта, пригружающего область разжижения сверху.

Используя неравенство (12), можно произвести учет сил сцепления при наличии последних. С этой целью сцепление c заменяется условной пригрузкой мощностью h_{ysl} , определяемой по формуле

$$h_{\text{ysl}} = \frac{c}{\gamma_{\text{взв}}}. \quad (13)$$

Местная устойчивость будет соблюдена при условии, что

$$\int_{\omega_1} (\gamma_y)^{\text{разж}} d\omega_1 < \gamma_{\text{взв}} h_{\text{ysl}} b^{\text{разж}}. \quad (14)$$

Используя (13), получаем

$$\int_{\omega_1} (\gamma_y)^{\text{разж}} d\omega_1 < c b^{\text{разж}}. \quad (15)$$

Пример оценки устойчивости фильтрующего откоса при динамическом нагружении его периметра. Пусть имеется однородный фильтрующий откос высотой $H = 1,0 \text{ м}$ с коэффициентом заложения $m = 1$, по участку наклонной поверхности которого приложена нагрузка $p = 1,0 \text{ т/м}^2$ (рис. 4). Пусть $\gamma_{\text{в}} = 1,0 \text{ т/м}^3$, $\gamma_{\text{взв}} = 1,0 \text{ т/м}^3$. Требуется определить, возникнут ли при этом зоны разжижения грунта, вызванные фильтрационными силами.

Отобразив откос в полуплоскость и определив напорную функцию по ее верхней границе в соответствии с функцией (5), построим методом ЭГДА линии $H = \text{const}$. Далее строим линии $\Phi = \text{const}$ и устанавливаем границы областей разжижения, которые характеризуются направленной вверх вертикальной составляющей результирующей силы. Произведем

переход от плоскости w к откосу, можно очертить найденные зоны уже в области плоскости z . В плоскости $z = x + iy$, соответствующей откосному профилю, найденные зоны разжижения могут сопровождаться взвешиванием, оплыванием или фильтрационным выпором в зависимости от их местоположения и связности грунта.

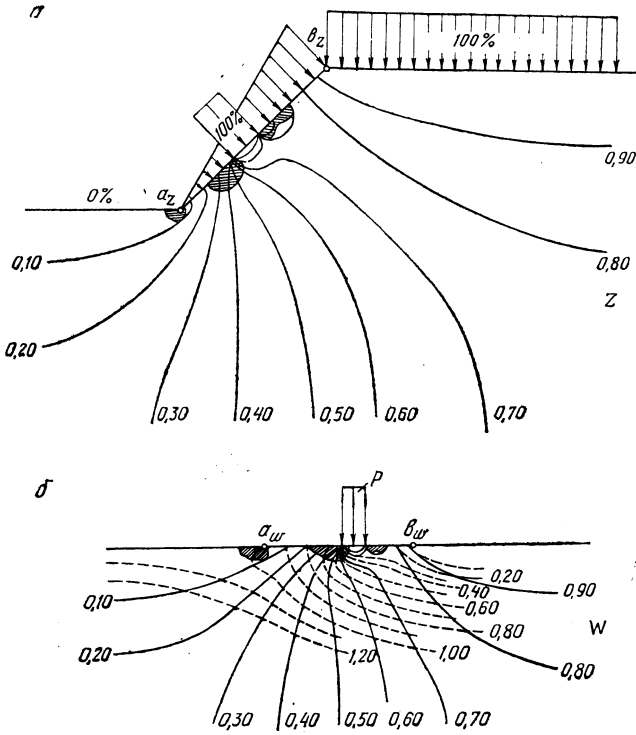


Рис. 4. Определение положения неустойчивых областей фильтрующего откоса:

a — напорная функция для фильтрующего по всей высоте откоса при динамическом воздействии по его участку; b — построение линий Φ и определение положения зоны разжижения.

Используя формулу (15), можно определить положение зон разжижения с учетом сил сцепления.

Мы рассмотрели устойчивость откоса с коэффициентом заложения $m=1$. Если заложение откоса иное, то соответствие с математической моделью устанавливается при помощи формулы (4). Общий порядок решения не меняется.

Критерием устойчивости водонасыщенного откоса при динамическом воздействии по участку периметра является отсутствие областей разжижения грунта. Величину воздействия, соответствующую отсутствию зон разжижения, можно считать безопасной при производстве работ и ее нужно принимать во внимание при выборе землеройного механизма (его типа).

С помощью предлагаемого способа расчета представляется возможным оценивать эффективность различного рода противофильтрационных мероприятий, учитывать анизотропность фильтрационных свойств грунтов и влияние геологических особенностей строения по соответствующим изменениям характера распределения фильтрационных сил (изменения гидродинамической картины).

Литература

1. *Н. Н. Баранов*. Исследование методом ЭГДА условий разжижения оснований и откосов выемок в процессе разработки. Сб. «Устойчивость фильтрующих откосов». Минск, 1969.
2. *Н. М. Герсеванов*. Основы динамики грунтовой массы. М., 1937.
3. *Р. Р. Чугаев*. Земляные гидротехнические сооружения. М., 1967.
4. *В. Коппенфельс, Ф. Штальман*. Практика конформных отображений. М., 1963.