ВОДНОЕ ХОЗЯЙСТВО БЕЛОРУССИИ

МИНСК 1972

Д. А. Козлов, Е. Г. Шешуков

О ДВИЖЕНИИ ЖИДКОСТИ В КАНАЛЕ

Рассмотрим задачу о движении весомой несжимаемой жидкости в открытом канале с криволинейным участком дна. Движение жидкости в системе координат x, y, неподвижно связанной с каналом, установившееся и безвихревое (ось x совпадает с невозмущенной свободной поверхностью и направлена в сторону, противоположную движению жидкости). Обозначим скорость и глубину в канале вверх по течению соответственно через v_0 и h.

На дне канала известно распределение давления как однозначная, непрерывная функция абсциссы x: $P=P(x)\infty+\Delta P(x)$, где $\Delta P(x)$ и ее производная малы по абсолютной величине.

Ищется форма свободной поверхности жидкости и профиль дна.

Данная задача решается в линеаризированной постановке с использованием метода, разработанного в [1]. Физическую область течения в первом приближении рассматриваем как бесконечную полосу ширины h $\left(h=\dfrac{P(x)\infty}{\rho g}\right)$.

Введем в рассмотрение комплексный потенциал нашего установившегося движения $W=\Phi+i\Psi$ и комплексный потенциал возмущенного движения[1] $\omega=\varphi+i\psi$, связанные соотношением

$$W=\omega-v_0 z,\ \ \Phi=\varphi-v_0 x,\ \ \Psi=\psi-v_0 y. \tag{1}$$

Из интеграла Бернулли для определения давления внутри жидкости получаем формулу

$$P-P_0=\rho v_0\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\frac{1}{2}\rho\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\right]-\rho g y, \tag{2}$$

где P_0 — давление на свободной поверхности жидкости; g — ускорение силы тяжести; ρ — плотность жидкости.

Проекции скорости возмущенного течения $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}$ считаем малыми порядка ε. Величинами порядка ε^2 пренебрегаем.

Интеграл Бернулли при сделанных предположениях имеет вид

$$P-P_0=\rho v_0\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\rho g y. \tag{3}$$

Отсюда видно, что на свободной поверхности ($P=P_0$) должно выполняться условие

$$v_0\frac{\partial\varphi}{\partial x}=gy, \tag{4}$$

[1] Если на установившееся движение наложить равномерное течение в направлении положительной оси x со скоростью v_0, то полученное движение называем возмущенным.

Так как свободная поверхность является линией тока, то, считая на ней $\Psi=0$, из соотношений (1) имеем

$$v_0 y = \psi. \tag{5}$$

С учетом (5), граничное условие (4) примет вид

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \nu\psi = 0, \tag{6}$$

где $\nu = \frac{g}{v_0^2}$.

Это условие считаем выполняющимся на оси x. В комплексной форме выражение (6) запишется так:

$$Im\left(i\,\frac{d\omega}{dz} - \nu\omega\right) = 0 \text{ при } y=0. \tag{7}$$

Так как дно канала есть линия тока ($\Psi = v_0 h$), из соотношений (1) имеем

$$y = \frac{1}{v_0}\psi - h. \tag{8}$$

Исключая из (3) и (8) координату y, приходим к следующему граничному условию на прямой $y=-h$:

$$\frac{P-P_0}{\rho v_0} - \frac{gh}{v_0} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \nu\psi \tag{9}$$

или в комплексной форме

$$Im\left(i\,\frac{d\omega}{dz} - \nu\omega\right) = \frac{\Delta P(x)}{\rho v_0}. \tag{10}$$

Введем в рассмотрение функцию

$$F(z) = i\,\frac{d\omega}{dz} - \nu\omega, \tag{11}$$

голоморфную во всей полосе ширины h, включая бесконечно удаленную точку, в которой она обращается в нуль.

Таким образом, приходим к следующей краевой задаче. Найти аналитическую функцию $F(z)$ в бесконечной полосе по условиям:

1) $ImF(z) = 0$ при $y = 0$;

2) $ImF(z) = \frac{\Delta P(x)}{\rho v_0}$ при $y = -h$.

С помощью функции

$$z = \frac{h}{\pi} \ln \frac{\xi+1}{\zeta-1} \tag{12}$$

конформно отобразим верхнюю полуплоскость переменного $\varsigma=\xi+i\eta$ на полосу $(-h\leqslant y\leqslant 0)$. Функция (12) позволяет установить соответствие границ областей D_ζ и D_z. Следовательно, можно рассматривать мнимую часть функции F, как известную величину на действительной оси ξ. Тогда, пользуясь формулой Шварца, находим аналитическую функцию F (ζ).

$$F(\zeta)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{ImF(\xi)}{\tau-\xi}\,d\tau. \tag{13}$$

Формулы (12) и (13) позволяют определить функцию в физической области течения $F=F(z)$.

Зная $F(z)$, из формулы (11) находим функцию ω:

$$\omega(z)=-i\,e^{-i\nu z}\int\limits_{\infty}^{z}e^{i\nu t}F(t)\,dt. \tag{14}$$

Уравнение свободной поверхности, как видно из (5) и (14), принимает вид

$$y=\frac{1}{v_0}\psi=-\frac{1}{v_0}\,\mathrm{Re}\,[e^{-i\nu x}\int\limits_{\infty}^{x}e^{i\nu t}\mathrm{Re}F(t)\,dt]. \tag{15}$$

Из формулы (15) видно, что вверх по течению

$$\lim_{x\to\infty}y(x)=0,$$

т. е. свободная поверхность жидкости приближается к горизонтальной.

Вниз по течению (при $x\to-\infty$) имеет место иная картина:

$$y=-\frac{1}{v_0}\mathrm{Re}\{e^{-i\nu x}\int\limits_{+\infty}^{-\infty}[\cos\nu t\,\mathrm{Re}F(t)+i\sin\nu t\,\mathrm{Re}\,F(t)]\,dt\}. \tag{16}$$

Введем в рассмотрение функцию

$$H(\nu)=H_1(\nu)+iH_2(\nu)=\int\limits_{\infty}^{-\infty}e^{i\nu t}\mathrm{Re}\,F(t)\,dt.$$

Тогда

$$y=-\frac{1}{v_0}\mid H(\nu)\mid\cos(u-\nu x), \tag{17}$$

где $\quad u=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{H_2(\nu)}{H_1(\nu)}$.

Формула (17) показывает, что при $x\to-\infty$ свободная поверхность жидкости имеет вид косинусоиды, амплитуда которой α равна

$$\alpha=\frac{1}{v_0}\mid H(\nu)\mid. \tag{18}$$

Для нахождения профиля дна канала из (8) и (14) получим формулу

$$y = -h - \frac{1}{v_0} \int\limits_{\infty}^{x} [\operatorname{Re} F(t) \cos \nu (t - x) - Im F(t) \sin \nu (t - x)]\, dt. \qquad (19)$$

Литература

1. *Е. Г. Шешуков.* Нахождение формы подводного крыла по заданному распределению давления. Сб. «Труды семинара по краевым задачам». Вып. 4. Казань, 1967.