

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ДВУХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ С ВЫСОКОКОНТРАСТНЫМИ СВОЙСТВАМИ

М. Г. Ботогова¹, Н. Д. Ле¹, Г. И. Михасев²

¹Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь

²Харбинский политехнический университет, Харбин, Китай

Введение. Слоистые пластины и панели, собранные из слоев с контрастными механическими свойствами, находят разнообразное применение в качестве элементов тонкостенных инженерных конструкций и легких транспортных средств. Так, оконные и лобовые стекла современных автомобилей, фотоэлектрические панели обычно проектируются как двух- либо трехслойные конструкции [1; 2], состоящие из стекла и гораздо более мягкой прослойки или покрытия. Известные методы расчета подобных конструкций, как правило, основаны на принятии каких-либо кинематических гипотез о распределении перемещений и/либо напряжений по толщине слоев (например, см. [3]), которые в случае высокой контрастности упругих параметров слоев приводят к значительным погрешностям [4]. В работе [5] предложен метод асимптотического интегрирования трехмерных уравнений упругости для слоистых пластин, основанный на осреднении свойств слоев. В статьях [6; 7] данный метод применен для исследования динамики двух- и трехслойных балок без использования процедуры осреднения упругих констант. Целью данной работы является расчет напряженно-деформированного состояния двухслойной пластины с высококонтрастными свойствами с использованием асимптотической процедуры интегрирования, развитой в [6; 7].

Постановка задачи. Рассмотрим прямоугольную пластину, состоящую из двух различных жестко связанных изотропных упругих слоев толщиной h_k которые характеризуются константами Ламе λ_k, μ_k и плотностями материала ρ_k ($k = 1, 2$). Значения h_1, h_2 считаются одного порядка, хотя не исключен случай исчезающей малой толщины h_2 более «мягкого» слоя. Две локальные системы координат вводятся, как показано на рисунке 1, где $0 \leq x_j^{(1)} = x_j^{(2)} \leq L_j$, а индексы $k = 1$ и $k = 2$ соответствуют нижнему жесткому и верхнему мягкому слоям соответственно. Пластина находится под действием внешней поверхностной нагрузки $Q^{(k)} = (0, 0, q_3^{(k)})$, где в общем случае $q_3^{(k)}$ – функция координат $x_j^{(k)}$.

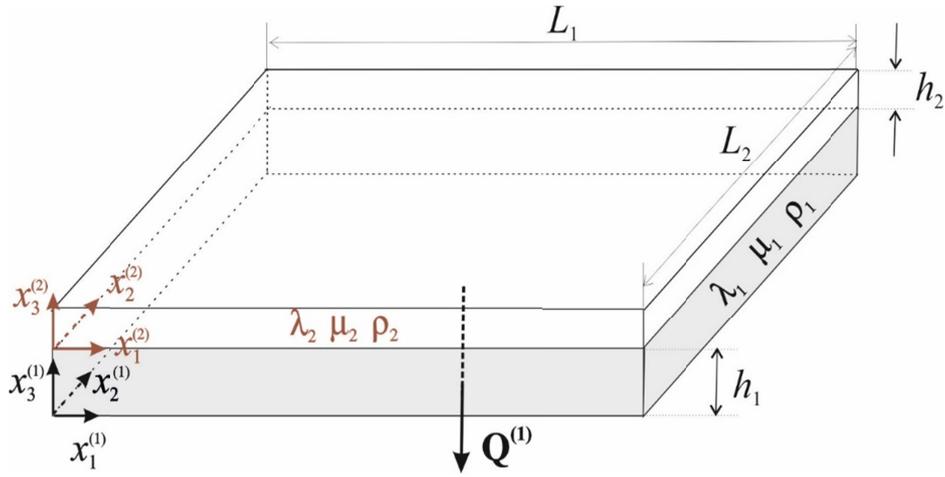


Рис. 1. Двухслойная прямоугольная пластина. Системы координат

Пусть L – характерный размер пластины в плоскости. Предполагается, что $\varepsilon = h / L$ – малый параметр, где $h = h_1 + h_2$ – общая толщина пластины. Считаем также, что нижний слой намного жестче верхнего, так что $\lambda_2 \ll \lambda_1, \mu_2 \ll \mu_1$. Тогда можно ввести следующую оценку для модулей Юнга E_k :

$$E_2 / E_1 = \varepsilon^\alpha \varepsilon, \quad \alpha \geq 0, \quad \varepsilon \sim 1. \quad (1)$$

Введем безразмерные переменные

$$\begin{aligned} x_n^{(k)} &= Lx_n, & x_3^{(k)} &= h_k z^{(k)}, & v_i^{(k)} &= h \hat{u}_i^{(k)}, & s_{ij}^{(k)} &= E_k \sigma_{ij}^{(k)}, \\ q_3^{(k)} &= E_k q^{(k)}, & i &= 1, 2, 3; & n, k &= 1, 2 \end{aligned} \quad (2)$$

и сделаем масштабирование неизвестных функций, соответствующее длинноволновой изгибной деформации [5]

$$\begin{aligned} \hat{u}_3^{(k)} &= \varepsilon^{-4} w^{(k)}, & \hat{U}_n^{(k)} &= \varepsilon^{-3} U_n^{(k)}, & \sigma_{n3}^{(k)} &= \varepsilon^{-1} \tau_n^{(k)}, \\ \sigma_{33}^{(k)} &= \sigma^{(k)}, & n, k &= 1, 2 \end{aligned} \quad (3)$$

где $w^{(k)}, U_n^{(k)}, \tau_n^{(k)}, \sigma^{(k)}$ – величины порядка 1 при $\varepsilon \rightarrow 0$. Здесь $U_n^{(k)} = (u_n^{(k)}, u_m^{(k)})$, $n, m = 1, 2, \quad n \neq m$.

В работах [6] получена система уравнений в безразмерном виде относительно фигурирующих в (3) неизвестных функций для двухслойной балки. В нашем случае эта система принимает вид:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w^{(k)}}{\partial z} &= -\varepsilon^2 \kappa_k c_v^{(k)} \left(\frac{\partial u_1^{(k)}}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2^{(k)}}{\partial x_2} \right) + \varepsilon^4 \kappa_k c_3^{(k)} \sigma^{(k)}, \\
\frac{\partial u_n^{(k)}}{\partial x_1} &= -\kappa_k \frac{\partial w^{(k)}}{\partial x_n} + \varepsilon^2 \frac{\kappa_k}{\hat{\mu}_k} \tau_n^{(k)}, \\
\frac{\partial \tau_n^{(k)}}{\partial z} &= -\kappa_k L_n^{(k)} \hat{U}_n^{(k)T} - \varepsilon^2 \kappa_k c_v^{(k)} \frac{\partial \sigma^{(k)}}{\partial x_n}, \\
\frac{\partial \sigma^{(k)}}{\partial z} &= -\kappa_k \left(\frac{\partial \tau_1^{(k)}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_2^{(k)}}{\partial x_2} \right), \quad k, n, m = 1, 2, \quad n \neq m.
\end{aligned} \tag{4}$$

Фигурирующие в (4) константы приведены в [6; 7]. Граничные условия на лицевых поверхностях

$$\begin{aligned}
\tau_n^{(1)} &= 0, \quad \sigma^{(1)} = q^{(1)} \quad \text{при } z = 1, \\
\tau_n^{(2)} &= 0, \quad \sigma^{(2)} = q^{(2)} \quad \text{при } z = 1.
\end{aligned} \tag{5}$$

На интерфейсных плоскостях при жестком контакте слоев:

$$\begin{aligned}
w^{(1)} \Big|_{z=1} &= w^{(2)} \Big|_{z=0}, \quad u_n^{(1)} \Big|_{z=1} = u_n^{(2)} \Big|_{z=0}, \\
\tau_n^{(1)} \Big|_{z=1} &= \varepsilon^2 \epsilon \tau_n^{(2)} \Big|_{z=0}, \quad \sigma^{(1)} \Big|_{z=1} = \varepsilon^2 \epsilon \sigma^{(2)} \Big|_{z=0}.
\end{aligned} \tag{6}$$

Асимптотическое интегрирование краевой задачи. Решение поставленной выше задачи будем искать в виде асимптотических рядов:

$$\tau_n^{(k)} = \tau_{n0}^{(k)} + \varepsilon^2 \tau_{n2}^{(k)} + \dots, \quad \tau_n^{(k)} = \sigma_0^{(k)} + \varepsilon^2 \sigma_2^{(k)} + \dots \tag{7}$$

Компоненты вектора перемещений разыскиваются в таком же виде. Подстановка (7) в уравнения и граничные условия (6), (7) приводит к последовательности краевых задач. Решая эти задачи в каждом приближении методом интегрирования по толщине каждого слоя, можем найти все входящие в разложения (7) неизвестные функции (см. детали интегрирования в статье [6; 7]).

Далее будем считать, что на пластину действует равномерно распределенная нагрузка $q^{(1)}$, которую можно разложить в ряд Тейлора. Для такой нагрузки из рассмотрения нулевого приближения получаем:

$$\begin{aligned}
\sigma_0^{(1)} &= q_A (2z^3 - 3z^2 + 1), \\
\sigma_0^{(2)} &= \frac{q_A c_0^{(2)} \kappa_2^2}{c_0^{(1)} \kappa_1^3} \left[2\kappa_2 (z^3 - 3z) + 3\kappa_1 (z^2 - 2z) + 4\kappa_2 + 3\kappa_1 \right], \\
\tau_{10}^{(1)} &= \frac{6q_A \delta_n (z^2 - z)}{\kappa_1 (\delta_n^2 + \delta_m^2)}, \quad \tau_{10}^{(2)} = \frac{6q_A c_0^{(2)} \kappa_2 \delta_n}{c_0^{(1)} \kappa_1^3 (\delta_n^2 + \delta_m^2)} \left[\kappa_2 (z^2 - 1) + \kappa_1 (z - 1) \right],
\end{aligned} \tag{8}$$

где

$$q_A = \frac{4}{L_1 L_2} \int_0^{L_1} \int_0^{L_2} q^{(1)} \sin(\delta_n x) \sin(\delta_m x) dx_1 dx_2, \quad \delta_n = \frac{\pi n}{L_1}, \quad \delta_m = \frac{\pi m}{L_2}.$$

Интегрируя уравнения, возникающие в первом приближении, получаем поправки к напряжениям:

$$\begin{aligned}
\sigma_2^{(1)} &= \frac{q_A d_{mn} \kappa_1^2}{10} (2z^5 - 5z^4 + 5z^2) - \frac{3q_A \epsilon c_0^{(2)} \kappa_2}{c_0^{(1)} \kappa_1^2} z^2 - \\
&\quad - \frac{d_{mn} \kappa_1^2}{2} \left\{ 2q_A \left[\frac{\epsilon c_0^{(2)} \kappa_2 (3 + \kappa_2^2)}{c_0^{(1)} \kappa_1^5 d_{mn}} - \frac{1}{5} \right] \right\} (2z^3 - 3z^2), \\
\sigma_2^{(2)} &= \frac{q_A c_0^{(2)} d_{mn} \kappa_2^2}{10 c_0^{(1)} \kappa_1^3} \{ 2\kappa_2^3 (z^5 - 5z + 4) + 5\kappa_1 \kappa_2^2 (z^4 - 4z + 3) - \\
&\quad - 10c_4^{(2)} \kappa_2^2 (z^3 - 3z + 2) - 5 [c_v^{(2)} \kappa_2^2 (3 + \kappa_2) + c_4^{(1)} \kappa_1^3] (z - 1)^2 - \\
&\quad - \frac{q_A c_0^{(2)} \kappa_2^2}{4c_0^{(1)} \kappa_1^4} (24c_0^{(2)} \kappa_2 + c_0^{(1)} c_4^{(1)} \kappa_1^4) (z - 1)^2 - \\
&\quad - \frac{c_0^{(2)} d_{mn} \kappa_2^2}{2c_0^{(1)} \kappa_1} \left\{ 2q_A \left[\frac{\epsilon c_0^{(2)} \kappa_2 (3 + \kappa_2^2)}{c_0^{(1)} \kappa_1^5 d_{mn}} - \frac{1}{5} \right] \right\} [2\kappa_2 (z^3 - 3z + 2) - \\
&\quad - 3\kappa_1 (z - 1)^2] - \frac{1}{2} \kappa_2^2 \delta_n \left[\frac{1}{2} q_A c_v^{(1)} \delta_n (1 - 2\kappa_1) \right] (z - 1)^2,
\end{aligned} \tag{9}$$

$$\tau_{12}^{(1)} = q_A \kappa_1 \delta_n (z^4 - 2z^3 + z) - \frac{6q_A \epsilon c_0^{(2)} \kappa_2 \delta_n z}{c_0^{(1)} \kappa_1^3 d_{mn}} - 3\kappa_1 \delta_n \left\{ 2q_A \left[\frac{\epsilon c_0^{(2)} \kappa_2 (3 + \kappa_2^2)}{c_0^{(1)} \kappa_1^5 d_{mn}} - \frac{1}{5} \right] \right\} (z^2 - z),$$

где константы $c_0^{(k)}$, $c_v^{(k)}$, $c_4^{(k)}$ зависят от упругих параметров слоев (см. соотношения в [6; 7]).

Пример. В качестве примера рассмотрим квадратную двухслойную пластину со сторонами $L_1 = L_2 = 0,5$ м. Первый слой выполнен из жесткого материала Si_3N_4 с параметрами $E_1 = 348,4 \cdot 10^3$ МПа, $\nu_1 = 0,24$. Второй слой изготовлен из ABS-пластика SD-0170 с параметрами $E_2 = 1,5 \cdot 10^3$ МПа, $\nu_2 = 0,4$. Суммарная толщина слоев $h = 0,025$ м. На пластину действует равномерно распределенная безразмерная нагрузка $q^{(1)} = 10$. Переход к размерной нагрузке выполняется в соответствии с (2). На рисунках 2–5 приведены графики безразмерных напряжений $\sigma^{(1)}$, $\sigma^{(2)}$, $\tau_1^{(1)}$, $\tau_1^{(2)}$ для различных значений безразмерного параметра $\kappa_1 = \frac{h_1}{h}$, найденные из первых двух приближений. Цифрами 1, 2, 3 обозначены напряжения при $\kappa_1 = 0,35; 0,5; 0,75$ соответственно. Как и следовало ожидать, с увеличением толщины «жесткого» слоя, все напряжения уменьшаются по величине. Распределение нормального и касательного напряжений по толщине является более сложным: нормальное напряжение падает с увеличением глубины пластины; касательное же напряжение (отрицательное) сначала возрастает, достигая максимального по величине значения на срединной поверхности «жесткого» слоя, а затем убывает до нулевого значения на свободной поверхности «мягкого» слоя.

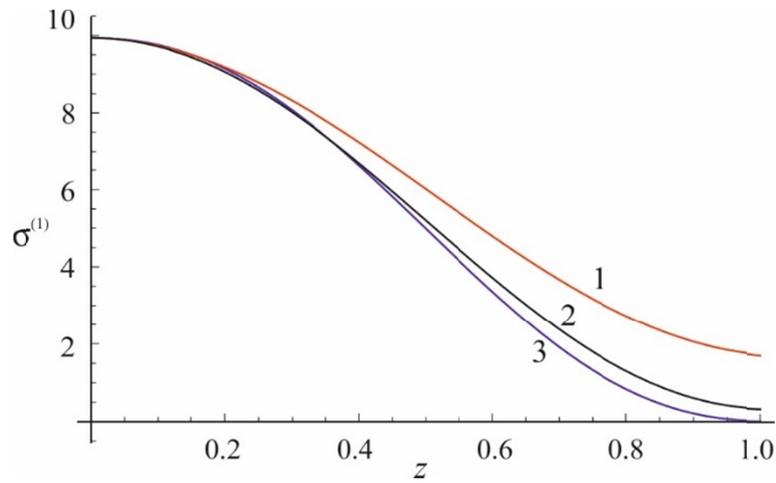


Рис. 2. Безразмерное нормальное напряжение $\sigma^{(1)}$ в первом «жестком» слое как функция безразмерной поперечной координаты z для различных значений параметра $\kappa_1 = 0,35; 0,5; 0,75$ (кривые 1, 2, 3, соответственно)

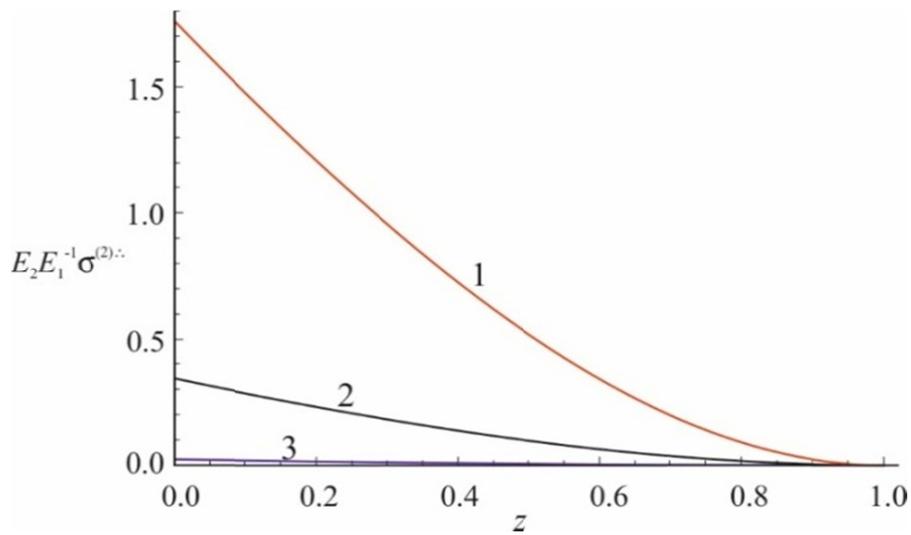


Рис. 3. Безразмерное нормальное нормированное напряжение $\sigma^{(2)}$ во втором «мягком» слое как функция безразмерной поперечной координаты z для различных значений параметра $\kappa_1 = 0,35; 0,5; 0,75$ (кривые 1, 2, 3, соответственно)

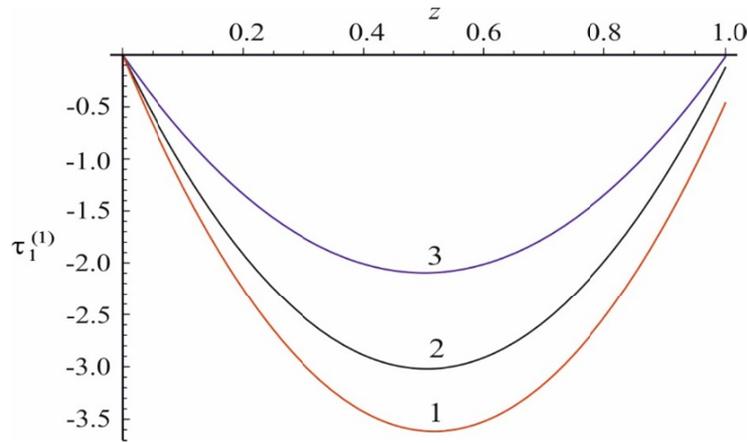


Рис. 4. Безразмерное касательное напряжение $\tau_1^{(1)}$ в первом «жестком» слое как функция безразмерной поперечной координаты z для различных значений параметра $\kappa_1 = 0,35; 0,5; 0,75$ (кривые 1, 2, 3, соответственно)

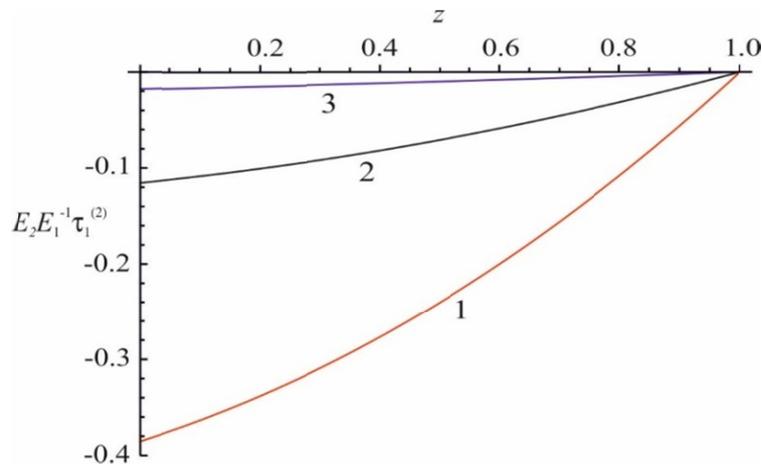


Рис.5. Безразмерное касательное нормированное напряжение $\tau_1^{(2)}$ во втором «мягком» слое как функция безразмерной поперечной координаты z для различных значений параметра $\kappa_1 = 0,35; 0,5; 0,75$ (кривые 1, 2, 3, соответственно)

Заключение. В статье рассмотрена задача о расчете напряженно-деформированного состояния двухслойной прямоугольной пластины с высококонтрастными упругими свойствами. Методом асимптотического интегрирования трехмерных уравнений упругости по толщине пластины и рассмотрения первых двух приближений выведены соотношения для напряжений в обоих слоях как функций пространственных координат. Предлагаемый метод расчета НДС отличается от методов теории пластин, основанных на принятии кинематических гипотез, и приводит к соотношениям, дающим асимптотически корректное распределение напряжений по толщине обоих слоев. В качестве примера приведен расчет напряжений в двухслойной шарнирно опертой пластине под действием постоянной нормальной нагрузки, приложенной к более «жесткому» слою.

ЛИТЕРАТУРА

1. Njuguna, J. Lightweight composite structures in transport: design, manufacturing, analysis and performance / J. Njuguna. – Sawston : Woodhead Publishing, 2016. – 474 p.

2. Weps, M. Unsymmetric three-layer laminate with soft core for photovoltaic modules / M. Weps, K. Naumenko, H. Altenbach // Journal of Composite Structures. – 2013. – Vol. 105. – P. 332–339.

3. Mikhasev, G. I. Thin-Walled Laminated Structures. Buckling, Vibrations and Their Suppression / G. I. Mikhasev, H. Altenbach. – Cham : Springer, 2019. – 280 p.

4. Morozov, N. F. Applicability ranges for four approaches to determination of bending stiffness of multilayer plates / N. F. Morozov, A. K. Belyaev, P. E. Tovstik // Continuum Mechanics and Thermodynamics. – 2021. – Vol. 33. – P. 1659–1673.

5. Tovstik, P. E. Generalized Timoshenko-Reissner models for beams and plates, strongly heterogeneous in the thickness direction / P. E. Tovstik, T. P. Tovstik // ZAMM. – 2017. – Vol. 97(3). – P. 296–308.

6. Mikhasev, G. Asymptotically Correct Analytical Model for Flexural Response of a Two-Layer Strip with Contrast Elastic Constants / G. Mikhasev, N. Le // Sixty Shades of Generalized Continua (Advanced Structured Materials), edited by H. Altenbach, A. Berezovski, F. dell’Isola, A. Porubov, (eds), Springer. – 2023. – Vol. 170. – P. 517–540.

7. Mikhasev, G. Flexural Deformations and Vibrations of a Three-Layer Beam-Strip with a Stiff Core and Soft Skins / G. Mikhasev, M. Botogova, N. Le // Progress in Continuum Mechanics (Advanced Structured Materials), edited by H. Altenbach, H. Irschik, A. V. Porubov, (eds), Springer. – 2023. – Vol. 196. – P. 265–282.

Поступила: 12.04.2024