

## **МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЕФОРМАЦИИ ПРЯМОУГОЛЬНОГО В ПЛАНЕ ОДНОНАПРАВЛЕННОГО ОБРАЗЦА КОМПОЗИТА В УСЛОВИЯХ УСАДКИ СВЯЗУЮЩЕГО**

**Василевич Ю. В., Сахоненко С. В.**

*Белорусский национальный технический университет*

Технология изготовления композиционного изделия может быть представлена в виде следующих этапов.

1. Формование пропитанной ткани на оправку.

2. Разогрев полуфабриката. При этом повышение температуры практически не дает началу процесса химической усадке связующего, что подтверждено экспериментальными исследованиями. Здесь происходит фильтрация связующего, тем самым заполняются пустоты, образующиеся в процессе укладки. Температурные деформации испытывают стеклонити и оправка. Коэффициент температурного линейного расширения стекловолокна и стали оправки практически одинаковые, следовательно, поле напряжений изменяется незначительно. При проведении тензометрирования полуфабриката, данный вывод также был подтвержден экспериментально.

3. Полимеризация связующего. Этот процесс можно разделить на два этапа. На первом – связующее находится в еще жидком состоянии; на втором – связующее можно считать твердым телом. На каждом этом этапе полимеризация сопровождается объемной усадкой матрицы. Разогрев полуфабриката на эпоксидном связующем происходит до 1600 °С. Причем, как показали экспериментальные исследования, связующее становится твердым телом только в процессе выдержки при 160 °С.

Процесс перехода связующего из жидкого состояния в твердое сопровождается уменьшением объема связующего. В результате в нем возникают усадочные напряжения.

Полимеризация – это постепенный переход связующего из жидкого состояния в твердое. Он осуществляется следующим образом. Вначале связующее теряет основные свойства жидкости (текучесть и возможность передавать одинаковое давление сжатия во все стороны). Одновременно уменьшается высокоэластичная деформация, которая постепенно заменяется упругой деформацией. В конце полимеризации полимер обладает свойствами упругого твердого тела.

4. Этап охлаждения характеризуется снижением температуры от 160 °С до требуемого эксплуатационного температурного режима изделия.

Прочностные, физические и многие специальные свойства конструкционных материалов определяются главным образом прочностью исход-

ных волокон или арматуры в целом, природой и свойствами связующего и в определенной степени относительным содержанием волокон арматуры и связующего, которое задается конструктором в виде структурного параметра объемной плотности. Кроме указанного, на прочностные свойства композита оказывают существенное влияние остаточные напряжения.

Остаточные напряжения, возникшие в результате отверждения, могут быть настолько велики, что способны вызвать разрушение в матрице еще до приложения нагрузки [1]. Их величина растет с увеличением толщины ламината [2]. В некоторых случаях значительные напряжения фиксируются еще до охлаждения изделия [3; 4]. Показано, что они зависят от температуры, при которой происходит гелирование связующего [5]. На ранних этапах научного поиска для аналитического вычисления остаточных напряжений была предложена модель, описанная в [6]. Отмечено, что остаточные напряжения возникают в основном при усадочных деформациях связующего в процессе его отверждения и температурных деформациях.

В большинстве случаев при создании и расчете армированных композиционных материалов преобладают или полуэмпирические методы, или классические методы теории упругости, абстрагирующиеся от неизбежного наличия в процессе изготовления композита усадочных явлений связующего и изменения температуры, что, естественно, не позволяет в полной мере реализовать упруго-прочностные свойства исходных компонентов. Таким образом, проблема расчета и создания монолитных трещиностойких армированных композитов, безусловно, актуальна.

Особенность строения всех рассмотренных типов композитов позволяет найти научные подходы для преодоления структурной неоднородности. Материалы, армированные волокнами, обладают регулярным строением и содержат большое число однотипных структурных элементов (волокна, нити, пряжи, жгуты и др.), которые невозможно, да и нецелесообразно рассматривать в отдельности. Это открывает возможность нового шага в создании модели сплошной среды, названного В. В. Болотиным методом энергетического сглаживания [7]. Армирующие элементы «сосредотачиваются» по объему тела и среда рассматривается как однородная, но наделенная новыми свойствами, которые зависят от свойств компонентов системы. В направлениях армирования главную роль играет арматура, а в трансверсальных плоскостях – полимерная матрица. В этом и состоит анизотропия идеализированной среды.

При кажущейся очевидности такого подхода нельзя, однако, забывать, что исследуется неоднородный материал, и необходимо в любом случае оценивать погрешность перехода к сплошной среде. Однако, этот прием не означает игнорирование действительной структуры материала. Если необходимо найти структурные напряжения и деформации, нужно снова вернуться на уровень структурной неоднородности. В этом случае свойства композита могут быть выражены через свойства составляющих, а по

напряжениям и деформациям, рассчитанными для квазиоднородного материала, они могут быть определены в компонентах материала.

Между тем метод энергетического сглаживания [7], предложенный В. В. Болотиным, для расчета остаточных напряжений, возникающих в композиционных материалах, можно рассматривать приближенным, так как он не учитывает данных об изменении ряда механических и теплофизических характеристик связующего во времени.

Пусть композит представляет собой однонаправленное семейство нитей, между которыми находится связующее. На рисунке 1 показана схема перпендикулярного сечения к нитям.

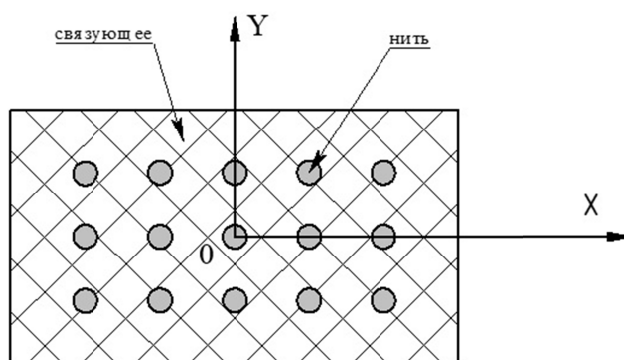


Рис. 1. Структурная схема композита

При плоской деформации такого композита должны быть согласованы условия равновесия и совместности деформаций наполнителя и связующего. Следующие зависимости выражают такую согласованность

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_{1H} = \sigma_{1c}, \\ \sigma_2 &= \sigma_{2H} = \sigma_{2c}. \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= m\varepsilon_{1c} + (1 - m)\varepsilon_{1H}, \\ \varepsilon_2 &= m\varepsilon_{2c} + (1 - m)\varepsilon_{2H}. \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\sigma_1, \sigma_2$  – усредненные напряжения композита в направлениях «1» и «2»; индексы «Н» и «С» относятся к материалам нитей и связующего;

$\varepsilon_1, \varepsilon_2$  – усредненные относительные деформации композита в направлениях «1» и «2» соответственно;

$m$  – относительное содержание связующего в композите.

Направления осей  $Ox$  и  $Oy$  совпадают с направлениями и «2».

Законы Гука для наполнителя, связующего и для осредненных напряжений и деформаций записываются в виде

$$\varepsilon_{1H} = \frac{1}{E_H} (\sigma_{1H} - \nu_H \sigma_{2H}), \quad (3)$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{2H} &= \frac{1}{E_H} (\sigma_{2H} - \nu_H \sigma_{1H}), \\ \varepsilon_{1c} &= \frac{1}{E_c} (\sigma_{1c} - \nu_c \sigma_{2c}), \\ \varepsilon_{2c} &= \frac{1}{E_c} (\sigma_{2c} - \nu_c \sigma_{1c}), \\ \varepsilon_1 &= \frac{1}{E_2} (\sigma_1 - \nu_2 \sigma_2), \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E_2} (\sigma_2 - \nu_2 \sigma_1).\end{aligned}$$

Здесь  $E_2$  и  $\nu_2$  – модуль упругости, и коэффициент Пуассона композита;  $E_H$ ,  $\nu_H$  – модуль упругости и коэффициент Пуассона нитей;  $E_c$  и  $\nu_c$  – модуль упругости и коэффициент Пуассона связующего.

Подставим соответствующие выражения из (3) в (2). После несложных преобразований получим

$$\begin{aligned}a_1 \sigma_1 + a_2 \sigma_2 &= 0, \\ a_2 \sigma_1 + a_1 \sigma_2 &= 0,\end{aligned}\tag{4}$$

где

$$\begin{aligned}a_1 &= \frac{1}{E_2} - \frac{m}{E_c} - \frac{1-m}{E_H}, \\ a_2 &= \frac{m}{E_c} \nu_c + \frac{1-m}{E_H} \nu_H - \frac{\nu_2}{E_2}.\end{aligned}$$

К представленным уравнениям следует добавить еще и уравнения равновесия

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_1}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{12}}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{12}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_2}{\partial y} &= 0.\end{aligned}\tag{5}$$

Здесь касательные напряжения  $\tau_{12} = G_1 \gamma_{12}$ ,  $G_1$  – модуль сдвига;  $\gamma_{12}$  – относительный сдвиг угла между направлениями «1» и «2».

Предполагаем деформации малыми, поэтому имеют место формулы Коши

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_2 = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{12} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x},\tag{6}$$

где  $u$  и  $v$  – перемещения композита в направлении осей  $Ox$  и  $Oy$ .

Кроме уравнений (4) напряжения  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  должны удовлетворять еще и уравнениям равновесия (5). Через закон Гука (3) они также связаны с перемещениями  $u$  и  $v$  посредством формул Коши (6).

Кроме того, при  $\varepsilon_c \neq 0$  (химическая деформация связующего) в условиях отсутствия внешней нагрузки должно выполняться условие

$$\sigma_1 = \sigma_2.$$

В результате из (4) имеем

$$a_1 + a_2 = 0. \quad (7)$$

Для задач с другими граничными условиями, когда  $\sigma_1 \neq \sigma_2$ , следует искать решение при равенстве нулю коэффициентов системы, т. е.

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 0. \quad (8)$$

Условие (8) позволяет установить два уравнения для нахождения механических характеристик  $E_2$  и  $\nu_2$  композита, то есть

$$\begin{aligned} \frac{1}{E_2} &= \frac{m}{E_c} + \frac{1-m}{E_H}, \\ \frac{\nu_2}{E_2} &= \frac{m\nu_c}{E_c} + \frac{1-m}{E_H} \nu_H. \end{aligned} \quad (9)$$

Рассмотрим сечение того же однонаправленного композита параллельно волокнам. Из условий совместности деформаций и равновесия нитей и связующего в твердом состоянии можно получить следующие зависимости

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \varepsilon_{1H} = \varepsilon_{1c} + \varepsilon_c, \\ \sigma_1 &= m\sigma_{1c} + (1-m)\sigma_{1H}, \\ \sigma_2 &= \sigma_{2H} = \sigma_{2c}, \\ \varepsilon_2 &= m\varepsilon_{2c} + (1-m)\varepsilon_{2H}. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь индекс «1» обозначает направление армирования, а индекс «2» – направление, перпендикулярное направлению армирования. Принятые обозначения такие же, как и в зависимостях (1) и (2). При составлении условий совместности деформаций предполагалось, что деформации связующего и нитей в направлении армирования равны между собой. Это следует из условия существования химической и физической связей между связующим и наполнителем. Кроме того, этому способствует достаточно

тонкий слой связующего, расположенного между нитями армирующего материала. Такой вывод сделали и авторы работы [8].

Содержание связующего при  $m = 0,3$  технологами отработано, как оптимальное. При увеличении  $m$  растет прослойка связующего между наполнителем. Это приводит к возникновению неравномерности напряжений в связующем и к увеличению касательных напряжений на границе раздела связующего и наполнителя. Соотношения (10) не предусматривают этого. Такое положение может быть исправлено введением других зависимостей. Однако заметим, что представления (10), во-первых, упрощают исследования, во-вторых, обеспечивают необходимую точность исследований при содержании связующего близкого к оптимальному значению  $m = 0,3$ .

Изотропные материалы нитей и связующего подчиняются закону Гука (3). Связь между осредненными напряжениями и деформациями выражается равенствами

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{\sigma_1}{E_1} - \nu_1 \frac{\sigma_2}{E_2}, \\ \varepsilon_2 &= \frac{\sigma_2}{E_2} - \nu_2 \frac{\sigma_1}{E_1}.\end{aligned}\tag{11}$$

Из (3) с учетом (10) получим зависимости

$$\begin{aligned}\varepsilon_{1H} = \varepsilon_1 &= \frac{1}{E_H} (\sigma_{1H} - \nu_H \sigma_2), \\ \varepsilon_{1c} = \varepsilon_1 &= \frac{1}{E_c} (\sigma_{1c} - \nu_c \sigma_2), \\ \sigma_{1H} &= \varepsilon_1 E_H + \nu_H \sigma_2, \\ \sigma_{1c} &= \varepsilon_1 E_c + \nu_c \sigma_2.\end{aligned}\tag{12}$$

Произведем теперь подстановку во второе и четвертое уравнения (10), соответствующих величин из предыдущих равенств. В результате получим

$$\begin{aligned}b_{11}\sigma_1 + b_{12}\sigma_2 &= b_1, \\ b_{21}\sigma_1 + b_{22}\sigma_2 &= 0,\end{aligned}\tag{13}$$

где

$$\begin{aligned}b_{11} &= \frac{E_1^0}{E_1} - 1, \\ b_{12} &= \nu_2^0 - \frac{E_1^0}{E_1} \nu_1, \\ b_{21} &= \frac{\nu_2^0}{E_1} - \frac{\nu_2}{E_2},\end{aligned}$$

$$b_{22} = \frac{1}{E_2} - \frac{m(1 - \nu_c^2)}{E_c} - \frac{(1 - m)(1 - \nu_H^2)}{E_H} - \frac{\nu_2^0 \nu_1}{E_1},$$

$$b_1 = m \varepsilon_c E_c,$$

$$E_1^0 = (1 - m)E_H + mE_c,$$

$$\nu_2^0 = (1 - m)\nu_H + m\nu_c.$$

Система (13) имеет единственное решение при отличном от нуля определителе системы. Если это так, то, учитывая, что коэффициенты системы и свободные члены – постоянные числа, решение системы тоже будет постоянным.

Другие решения системы (13) могут быть найдены только в случае равенства нулю ее определителя.

В связи с этим решение системы будет получено при условии существования зависимости коэффициентов системы в виде

$$b_{21} = 0, \quad b_{22} = 0. \quad (14)$$

В этом случае напряжение  $\sigma_1$  на основании (13) и (14) будет равно

$$\sigma_1 = \frac{b_1}{b_{11}} - \frac{b_{12}}{b_{11}} \sigma_2. \quad (15)$$

Для упрощения дальнейших исследований воспользуемся неравенствами

$$E_c \ll E_H, \nu_H^2 \ll 1, \nu_c^2 \ll 1. \quad (16)$$

Эпоксидное связующее и стеклянные нити позволяют принять условие (16). Это видно из данных, приведенных в таблице 1.

Таблица 1 – Модули Юнга и коэффициенты Пуассона для связующего и наполнителя композита

$\nu_c$	$E_c$ , МПа	$\nu_H$	$E_H$ , МПа
0,15	$0,4 \cdot 10^4$	0,24	$7,4 \cdot 10^4$

Если предположить, что формулы (9) и (14) получены для одного и того же материала, то они в совокупности позволяют определить постоянные  $E_1, E_2, \nu_1, \nu_2$ , которые описывают напряженное состояние в композиционном материале в момент окончания полимеризации связующего. В результате получим

$$\begin{aligned}
\frac{1}{E_2} &= \frac{m}{E_c} + \frac{1-m}{E_H}, \\
\frac{v_2^0}{E_1} &= \frac{m}{E_c} v_c + \frac{1-m}{E_H} v_H, \\
v_1 &= \frac{\frac{m}{E_c} v_c^2 + \frac{1-m}{E_H} v_H^2}{\frac{m}{E_c} v_c + \frac{1-m}{E_H} v_H}, \\
v_2 &= \frac{\frac{m}{E_c} v_c + \frac{1-m}{E_H} v_H}{\frac{m}{E_c} + \frac{1-m}{E_H}}.
\end{aligned} \tag{17}$$

Система (13) решалась при  $\varepsilon_c \neq 0$ . Предположим теперь, что полимеризация связующего осуществлена. После чего к композиционному материалу приложена внешняя нагрузка. Система (13) и в этом случае участвует в рассмотрении напряженного состояния композиционного материала. Только в этом случае необходимо считать, что  $\varepsilon_c = 0$ . В таком случае напряжения  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  будут удовлетворять уравнениям системы (13), если все коэффициенты  $b_{ij}$  равны нулю. Это позволяет определить величины механических характеристик композиционного материала в момент после отверждения связующего. Приравнивая коэффициенты  $b_{ij}$  нулю, получим уравнения для определения постоянных упругости композита

$$\begin{aligned}
E_1 &= E_1^0, \\
\frac{1}{E_2} &= \frac{m(1-v_c^2)}{E_c} + \frac{(1-m)(1-v_H^2)}{E_H} + \frac{(v_2^0)^2}{E_1^0}, \\
v_1 &= v_2^0, \\
v_2 &= v_2^0 \frac{E_2}{E_1^0}.
\end{aligned} \tag{18}$$

Соотношения (18) совпадают с полученными выражениями В. В. Болотина [9].

Для нахождения напряжений  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  имеется только первое уравнение из системы (13). Чтобы установить еще одну зависимость, поступим следующим образом.

Преыдушие исследования показали, что при химической усадке связующего в нем возникают напряжения в направлении армирования ( $\sigma_1$ ) и перпендикулярно ему ( $\sigma_2$ ). Это вызвано наличием химических и физических связей между связующим и наполнителем [10]. В данном случае наполнитель препятствует уменьшению объема связующего. В результате возникают усилия сжатия у наполнителя и усилия растяжения у связую-



щего [10]. При этом работа, затраченная на сжатие наполнителя, равна работе, затраченной на растяжение связующего.

Рассмотрим семейства нитей отдельно от связующего. И расположим их в прямой последовательности. При этом толщина связующего будет равной  $h_0 m$ , а нитей  $h_0(1 - m)$ , где  $h_0$  – толщина слоя рассматриваемого композита. Их взаимодействие заменим силами трения  $\tau_1$  и  $\tau_2$ , имеющими направления действий, совпадающими с направлениями действий усилий  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  соответственно. Вырежем из композита параллелепипед высотой  $h_0$  и основанием размером  $a \times a$ , где  $a$  – достаточно малая величина. Пусть границы параллелепипеда перпендикулярны к главным осям напряжений и деформаций  $\sigma_1, \sigma_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2$ . Рассмотрим отдельно работы, совершаемые силами деформации для нитей и связующего в отдельности друг от друга. Предположим, что величины главных напряжений  $\sigma_{1H}, \sigma_{2H}, \sigma_{1C}, \sigma_{2C}$  и главных деформаций  $\varepsilon_{1H}, \varepsilon_{2H}, \varepsilon_{1C}, \varepsilon_{2C}$  достигнуты в результате непрерывного нарастания, поэтому промежуточные значения напряжений и упругих относительных деформаций соответственно равны  $k\sigma_{1H}, k\sigma_{2H}, k\sigma_{1C}, k\sigma_{2C}, k\varepsilon_{1H}, k\varepsilon_{2H}, k\varepsilon_{1C}, k\varepsilon_{2C}$ , где  $k$  – коэффициент пропорциональности, изменяющийся от нуля до единицы. На этом основании промежуточные значения сил трения становятся равными  $k\tau_1$  и  $k\tau_2$ . Тогда работы, произведенные силами в направлениях  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  будут равны

$$A_H = \frac{1}{2}(1 - m)h_0 a^2 \sigma_{1H} \varepsilon_{1H} + \frac{1}{2}(1 - m)h_0 a^2 \sigma_{2H} \varepsilon_{2H},$$

$$A_C = \frac{1}{2}m h_0 a^2 \sigma_{1C} \varepsilon_{1C} + \frac{1}{2}m h_0 a^2 \sigma_{2C} \varepsilon_{2C}.$$

Определим теперь работу, совершаемую силами трения. Учтем, что в направлении  $\sigma_1$  действует сила трения  $\tau_1$ , а в направлении  $\sigma_2$  – сила трения, равная  $\tau_2$ . Рассмотрим на расстоянии  $t$  от края плоскости  $a \times a$  в направлении действия  $\tau_1$  полосу шириной  $dt$ . Тогда сила  $akt_1 dt$  совершит работу равную  $a^2 kt_1 \tau_1 \varepsilon_1 dk dt$ . Полная работа, произведенная силой трения  $\tau_1$  в направлении  $\sigma_1$ , в конечном состоянии будет равна

$$\int_0^a \int_0^1 a^2 kt_1 \tau_1 \varepsilon_1 dk dt = \frac{1}{4} \tau_1 \varepsilon_1 a^3.$$

В направлении  $\sigma_2$  сила трения  $\tau_2$  совершит работу

$$\frac{1}{4} \tau_2 \varepsilon_2 a^3.$$

Сложим их вместе и, разделив на объем параллелепипеда  $a^2 h_0$ , получим потенциальные энергии  $(1 - m)$  толщины нитей в единице толщины композита и  $m$  толщины связующего в единице толщины композита

$$W_H = \frac{1 - m}{2} (\sigma_{1H} \varepsilon_{1H} + \sigma_{2H} \varepsilon_{2H}) + \frac{a}{4h_0} (\tau_1 \varepsilon_{1H} + \tau_2 \varepsilon_{2H}),$$

$$W_C = \frac{m}{2} (\sigma_{1C} \varepsilon_{1C} + \sigma_{2C} \varepsilon_{2C}) + \frac{a}{4h_0} (\varepsilon_1 \varepsilon_{1C} + \varepsilon_2 \varepsilon_{2C}).$$

Выражения для  $W_H$  и  $W_C$  следует рассматривать в пределе, когда  $a \rightarrow 0$ . В результате получим

$$W_H = \frac{1 - m}{2} (\sigma_{1H} \varepsilon_{1H} + \sigma_{2H} \varepsilon_{2H}),$$

$$W_C = \frac{m}{2} (\sigma_{1C} \varepsilon_{1C} + \sigma_{2C} \varepsilon_{2C}).$$

При выводе формул допускалось, что тепло, выделяемое в процессе этого медленного деформирования, отводится так, что термодинамический процесс можно считать изотермическим. Поэтому тепло, вырабатываемое силами трения, выводится полностью в окружающую среду. На этом основании объясняется отсутствие влияния сил трения на потенциальную энергию.

Таким образом сделанное предположение о равенстве работ выражается зависимостью

$$m(\varepsilon_{1C} \sigma_{1C} + \varepsilon_{2C} \sigma_{2C}) = (1 - m)(\varepsilon_{1H} \sigma_{1H} + \varepsilon_{2H} \sigma_{2H}). \quad (19)$$

Напряжения в нитях и связующим и соответствующие им перемещения, фигурирующие в зависимости (18), можно найти из (3) и (13). В результате получим

$$\sigma_{2H} = \sigma_{2C} = \sigma_2, \quad \varepsilon_{1H} = \varepsilon_{1C} + \varepsilon_c = \varepsilon_1,$$

$$\sigma_{1C} = (\varepsilon_1 - \varepsilon_c) E_c + \nu_c \sigma_2,$$

$$\sigma_{1H} = \varepsilon_1 E_H + \nu_H \sigma_2,$$

$$\varepsilon_{2C} = \frac{\sigma_2}{E_c} (1 - \nu_c^2) - \nu_c (\varepsilon_1 - \varepsilon_c),$$

$$\varepsilon_{2H} = \frac{\sigma_2}{E_H} (1 - \nu_H^2) - \nu_H \varepsilon_1.$$

Подставим эти зависимости в (18). В результате с учетом неравенства  $E_c \ll E_H$  найдем связь между деформацией  $\varepsilon_1$  и напряжением  $\sigma_2$

$$\sigma_2^2 m \frac{(1 - \nu_c^2)}{E_c} = (1 - m) \varepsilon_1^2 E_H. \quad (20)$$

Таким образом для нахождения  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} b_{11}\sigma_1 + b_{12}\sigma_2 &= b_1, \\ A\sigma_1 - \frac{1}{E_1}(\sigma_1 - \nu_1\sigma_2) &= 0, \end{aligned} \quad (21)$$

где

$$A = \sqrt{\frac{m}{(1 - m)E_c E_H}}.$$

Здесь второе уравнение получено из (20). Причем при извлечении квадратного корня перед  $\varepsilon_1$  взят знак (+), так как напряжение  $\sigma_1$  должно быть отрицательным. В таком случае решение системы (21) имеет вид

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{(AE_1 + \nu_1)b_1}{(AE_1 + \nu_1)b_{11} + b_{12}}, \\ \sigma_2 &= \frac{b_1}{(AE_1 + \nu_1)b_{11} + b_{12}}. \end{aligned} \quad (22)$$

Можно убедиться, что  $b_1 < 0$ , так как  $\varepsilon_c < 0$ ,  $AE_1 + \nu_1 > 0$ ,  $b_{11} > 0$  и  $b_{12} > 0$ . Для этого следует воспользоваться зависимостями (13), (16) и (17). В результате получим, что  $\sigma_1 < 0$ .

Остаточные напряжения, вызванные усадкой связующего, определяются по формулам (22). Они получены в условиях отсутствия внешней нагрузки к конструкции, выполненной из композита, армированного однонаправленным семейством нитей.

Для примера приведем расчет по формулам (11), (17) и (22) с использованием данных из таблицы 1 при  $\varepsilon_c = -0,01$ . Результаты расчетов для различных значений  $m$  отражены в таблице 2.

Таблица 2 – Данные расчета компонент напряженно-деформированного состояния композита

$m$	$E_1$ , МПа	$E_2$ , МПа	$\nu_1$	$\nu_2$	$\varepsilon_1$	$\varepsilon_2$	$\sigma_1$ , МПа	$\sigma_2$ , МПа
0,2	$2,94 \cdot 10^4$	$0,67 \cdot 10^4$	0,1	0,15	-0,0002	-0,00047	-6,4	-7,6
0,3	$1,89 \cdot 10^4$	$0,75 \cdot 10^4$	0,14	0,153	-0,0003	-0,00055	-5,9	-8,0
0,4	$1,33 \cdot 10^4$	$1 \cdot 10^4$	0,17	0,159	-0,0004	-0,00083	-5,6	-8,9

Учитывая, что формулы (22) линейно зависят от  $\varepsilon_c$ , несложно определить значения  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  и для других значений  $\varepsilon_c$ . Значения для  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  рассчитаны по формулам (11).

В формулах (22) имеются параметры, управление которыми может снизить напряжения от усадки. Одним из важнейших приемов снижения напряжений усадки является повторная термообработка композиционного материала. При такой термообработке продолжаются процессы отверждения связующего, удаление летучих и частичного снятия усадки материала. Применяется так же термохимическое отверждение с использованием специальных отвердителей. Этот метод в настоящее время является основным. Дополнительное отверждение уменьшает возможность трещинообразования в полимере, возникающего после первой термообработки. Степень и режимы отверждения оказывают заметное влияние на их упругие и релаксационные константы. Как правило, они определяются экспериментально [11].

Влияние релаксационных и других эффектов на снижение напряжений от воздействия химической усадки можно оценить посредством введения коэффициента релаксации  $k_p$ , который определяется экспериментально и вводится в расчетные формулы (22). Причем

$$\varepsilon_c = k_p \cdot \varepsilon_c^p,$$

где  $\varepsilon_c$  – суммарная расчетная химическая усадка связующего;

$\varepsilon_c^p$  – усадка связующего после ее релаксации.

Классические методы теории упругости, основанные на «рассозреодоточению» армирующих элементов по объему тела, и рассмотрение напряжений и деформаций на уровне структурной неоднородности имеют общие черты, а также отличия. Если для классических методов достаточно рассмотреть условия равновесия и совместности деформаций, то на уровне структурной неоднородности, то необходимо учесть еще взаимодействие компонент композита на границе их раздела. В случае нагружения композита в виде химической осадки связующего это выражается в сохранении энергетического баланса как во время усадки, так и после нее. Рассматривая усадку, как процесс изменения объема связующего, следует предположить, что на границе раздела связующее-наполнитель отсутствует проскальзывание. Поэтому связующее заставляет сжиматься наполнитель. И в этом случае работа, затраченная на растяжение связующего, должна быть равна работе, затраченной на сжатие наполнителя. Это условие обязательно к выполнению для всех композитов, когда отсутствует внешняя нагрузка, приложенная к граничным точкам композита.

Таким образом, решение системы (13), когда коэффициенты  $b_{21}$  и  $b_{22}$  не равны нулю, не подходит ввиду того, что оно не удовлетворяет уравнению (20), отражающему принцип энергетического баланса.

**Выводы.** Путем построения теории деформирования армированных материалов, базирующейся на их микроструктурных особенностях, решена задача об определении напряженного состояния в однонаправленном композите при усадке связующего. Найдены зависимости для определения постоянных упругости.

## ЛИТЕРАТУРА

1. White, S. R. Process modeling of composite materials: residual stress development during cure. Part I. Model formulation / S. R. White, H. T. Hahn // *J. Compos. Mater.* – 1992. – Vol. 26, № 16. – P. 2402–2422.
2. Bogetti, T. A. Process-induced stress and deformation in thick-section thermoset composite laminates / T. A. Bogetti, J. W. Gillespie // *J. Compos. Mater.* – 1992. – Vol. 26, № 5. – P. 626–660.
3. White, S. R. Process-induced residual stress analysis of AS4/3501–6 composite material / S. R. White, Y. K. Kim // *Mech. Compos. Mater. St.* – 1998. – Vol. 5, № 2. – P. 153–186.
4. Zhu, Q. Dimensional accuracy of thermoset composites: simulation of process-induced residual stresses / Q. Zhu, Ph. H. Geubelle, M. Li // *J. Compos. Mater.* – 2001. – Vol. 35, № 24. – P. 2171–2205.
5. Prasatya, P. A viscoelastic model for predicting isotropic residual stresses in thermosetting materials: effects of processing parameters / P. Prasatya, G. B. McKenna, S. L. Simon // *J. Compos. Mater.* – 2001. – Vol. 35, № 10. – P. 826–848.
6. Adolf, D. Calculation of stresses in crosslinking polymers / D. Adolf, J. E. Martin // *J. Compos. Mater.* – 1996. – Vol. 30, № 1. – P. 13–34.
7. Болотин, В. В. Строительная механика. Современное состояние и перспективы развития / В. В. Болотин, И. И. Гольденблат, А. Ф. Смирнов. – М. : Стройиздат, 1972. – 191 с.
8. Ван фо Фы, Г. А. Конструкции из армированных пластмасс / Г. А. Ван фо Фы. – Киев : Техника, 1971. – 220 с.
9. Болотин, В. В. Плоская задача теории упругости для деталей из армированных материалов / В. В. Болотин // *Сборник «Расчеты на прочность»*. – М. : Машиностроение, 1966. – № 12.
10. Благонадежин, В. Л. Технологические задачи механики конструкций из композиционных материалов / В. Л. Благонадежин, А. Н. Воронцов, Г. Х. Мурзаханов // *Механика композиционных материалов*. – 1987. – № 5. – С. 859–877.
11. Рабинович, А. Л. Введение в механику армированных полимеров / А. Л. Рабинович – М. : Химия, 1970. – 482 с.

*Поступила: 20.03.2024*