

ДЕФОРМИРОВАНИЕ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ТОНКОСТЕННЫХ СТРЕЖНЕЙ ПРИ ПРОСТРАНСТВЕННО-ПЕРЕМЕННОМ НАГРУЖЕНИИ С УЧЕТОМ ПОВРЕЖДАЕМОСТИ МАТЕРИАЛА

Абдусаттаров А.

*Ташкентский Государственный Транспортный Университет,
Ташкент, Узбекистан*

1. Введение. Как известно, работа большинства несущих элементов конструкций и сооружений происходит на фоне выхода материалов за пределы упругости. При действии циклических нагрузок это приводит к возникновению ряда дополнительных явлений, таких как вторичные пластические деформации, изменение диаграмм деформирования от цикла к циклу, проявление свойств циклического упрочнения-разупрочнения и деформационной анизотропии, теплообразование, накопление повреждений и распространение трещин, приводящих к разрушению материала [1–5].

В работах В. В. Москвитина [2; 3] сформулированы основные уравнения переменной пластичности и вязкопластичности с учетом накопленных повреждений, доказаны теоремы о переменном нагружении, вторичных пластических деформациях. Рассмотрены вопросы циклической и длительной прочности элементов конструкций. Введена функция повреждаемости для оценки прочности упругопластических и реономных тел при циклических нагружениях. Предложены уравнения состояния для сложных нагружений упругопластических тел с переменными разгрузками, даны постановки соответствующих краевых задач и рассмотрены методы решения.

Подробное описание диаграмм циклического деформирования для различных конструкционных материалов выполнено в [4] и показаны возможные уточнения интерпретаций диаграмм при решении задач циклической прочности. В работе [5] разработаны модели и методика расчета на прочность элементов конструкций при малоцикловом нагружении. Для определения напряженно-деформированного состояния разработана численные методы решения краевой задачи о циклическом нагружении элементов конструкций.

Создание методов расчета элементов конструкций на прочность при повторно-статическом малоцикловом нагружении стало возможным в результате экспериментального и теоретического изучения закономерности циклического деформирования в упругопластической области, исследований кинетики напряженно-деформированного состояния в зонах концен-

трации напряжений и разработки критериев накопления повреждений и разрушения при неоднородном напряженном состоянии [4–7].

Статья [8] посвящена проблеме построения математических моделей, повреждаемых термоупруговязкопластических сред и методам определения «нестандартных» констант моделей, связанных с параметрами поврежденности и подлежащих экспериментальному определению. В работе [9] рассматривается компьютерное моделирование процессов деформирования, поврежденности и континуального разрушения нелинейных материалов и конструкций. В статье [10] рассматривается современная теория неупругости (термовязкопластичности), являющаяся обобщением и развитием идей, содержащихся в различных вариантах теории пластичности, ползучести, неупругости и накопления повреждений.

В [11] рассмотрены деформирования слоистых элементов конструкций при переменных нагружениях с учетом упругих, упругопластических и вязкоупругопластических свойств материалов. Численно исследована НДС трехслойных элементов конструкций при действии однократных и циклических нагрузок. Т. Буриевым [12] сформулирован ряд краевых задач по расчету несущих элементов тонкостенных конструкций при повторных и переменных упругопластических нагружениях и разгрузениях в текущих величинах. Исследована сходимость созданных им алгоритмов и итерационных процессов в зависимости от степени развития пластических деформаций. В монографии [13] изложены постановки и методы решения задач деформирования упругих и упругопластических элементов конструкций при однократном и циклическом нагружениях. На основе вариационного принципа получены система дифференциальных уравнений равновесия и движения для элементов конструкции, при этом учитываются повреждаемости материалов и взаимодействия со средой. Для решения краевых задач применяются метод Бубнова–Галеркина и методы конечных разностей. Приведены аналитические и численные расчеты для тонкостенных стержней, пластин и оболочечных конструкций.

2. Постановка задачи. Приведем модели и схему расчета элемента конструкции – тонкостенных стержней при пространственно-переменном нагружении на основе теории малых упругопластических деформаций А. А. Ильюшина и уточненной теории стержней, предложенной В. З. Власовым, Г. Ю. Джанелидзе, В. К. Кабуловым. При пространственном нагружении, т. е. при совместных продольных, поперечных и крутильных силах законы распределения перемещений, деформаций и напряжений в сечениях стержня являются сложными, поэтому уточненная теория строится на основании ряда статических гипотез [14].

Рассмотрим тонкостенный стержень произвольного сечения при воздействии внешних переменных сил. Ось OX направим по длине стержня, а оси OZ и OY – по поперечному сечению. Перемещения центральной линии

стержня при исходном нагружении обозначим через u'_i , компоненты деформаций и напряжений – через e'_{ij}, σ'_{ij} .

Следуя теории В. В. Москвитина [2], введем разности

$$\begin{aligned}\bar{u}_i^{(n)} &= (-1)^n (u_i^{(n-1)} - u_i^{(n)}), \quad \bar{e}_{ij}^{(n)} = (-1)^n (e_{ij}^{(n-1)} - e_{ij}^{(n)}), \\ \bar{\sigma}_{ij}^{(n)} &= (-1)^n (\sigma_{ij}^{(n-1)} - \sigma_{ij}^{(n)}).\end{aligned}\tag{1}$$

Перемещения точек стержня при переменном нагружении представим в следующем виде [13]:

$$\begin{aligned}\bar{u}_1^{(n)} &= \bar{u}^{(n)} - y\bar{\alpha}_1^{(n)} - z\bar{\alpha}_2^{(n)} + \phi\bar{v}^{(n)} + a_1\bar{\beta}_1^{(n)} + a_2\bar{\beta}_2^{(n)}, \\ \bar{u}_2^{(n)} &= \bar{v}^{(n)} - z\bar{\theta}^{(n)}, \quad \bar{u}_3^{(n)} = \bar{w}^{(n)} + y\bar{\theta}^{(n)},\end{aligned}\tag{2}$$

где $\bar{u}^{(n)}, \bar{v}^{(n)}, \bar{w}^{(n)}$ – компоненты перемещений при n -ном нагружении;

$\alpha_1^{(n)}, \alpha_2^{(n)}$ – углы поворота сечения при чистом изгибе;

$\beta_1^{(n)}, \beta_2^{(n)}$ – углы поперечного сдвига;

$\theta^{(n)}$ – угол кручения;

$\nu_1^{(n)}$ – погонная закрутка при n -ном нагружении;

ϕ – функция кручения Сен-Венана.

Согласно формуле Коши, с учетом (2) определяем компоненты деформации:

$$\begin{aligned}\bar{e}_{11}^{(n)} &= \frac{\partial \bar{u}^{(n)}}{\partial x} - y \frac{\partial \bar{\alpha}_1^{(n)}}{\partial x} - z \frac{\partial \bar{\alpha}_2^{(n)}}{\partial x} + \phi(y, z) \frac{\partial \bar{v}^{(n)}}{\partial x} + a_1(y, z) \frac{\partial \bar{\beta}_1^{(n)}}{\partial x} + a_2(y, z) \frac{\partial \bar{\beta}_2^{(n)}}{\partial x}; \\ \bar{e}_{13}^{(n)} &= \frac{\partial \bar{w}^{(n)}}{\partial x} + y \frac{\partial \bar{\theta}^{(n)}}{\partial x} - \bar{\alpha}_2^{(n)} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \bar{v}^{(n)} + \frac{\partial a_1}{\partial z} \bar{\beta}_1^{(n)} + \frac{\partial a_2}{\partial z} \bar{\beta}_2^{(n)}, \\ \bar{e}_{12}^{(n)} &= \frac{\partial \bar{v}^{(n)}}{\partial x} - z \frac{\partial \bar{\theta}^{(n)}}{\partial x} - \bar{\alpha}_1^{(n)} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \bar{v}^{(n)} + \frac{\partial a_1}{\partial y} \bar{\beta}_1^{(n)} + \frac{\partial a_2}{\partial y} \bar{\beta}_2^{(n)}.\end{aligned}\tag{3}$$

Для построения зависимости между интенсивностями напряжений и деформаций, характеризующей упругопластические свойства и повреждаемость материалов при переменном нагружении, воспользуемся обобщенным принципом Мазинга и циклической диаграммой деформирования, учитывающей накопление повреждаемости [2–4]. Согласно теории переменной пластичности, компоненты напряжений связаны через деформации следующим образом [12]:

а) при переменном нагружении в фиктивных координатах

$$\bar{\sigma}_{11}^{(n)} = 3G(1 - \omega^{(n)})\bar{e}_{11}^{(n)}, \quad \bar{\sigma}_{13}^{(n)} = G(1 - \omega^{(n)})\bar{e}_{13}^{(n)}, \quad \bar{\sigma}_{12} = G(1 - \omega^{(n)})\bar{e}_{12}^{(n)}; \quad (4)$$

б) при переменном нагружении в текущих координатах

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^{(k)} &= 3G \left\{ e_{11}^{(k)} - \left[\omega^{(k)} e_{11}^{(k)} + \sum_{m=1}^{k-1} \omega^{0(k-m)} \bar{e}_{11}^{0(k-m)} \right] \right\}, \\ \sigma_{13}^{(k)} &= G \left\{ e_{31}^{(k)} - \omega^{(k)} \bar{e}_{31}^{(k)} - \sum_{m=1}^{k-1} \omega^{0(k-m)} \bar{e}_{31}^{0(k-m)} \right\}, \\ \sigma_{12}^{(k)} &= G \left\{ e_{12}^{(k)} - \omega^{(k)} \bar{e}_{12}^{(k)} - \sum_{m=1}^{k-1} \omega^{0(k-m)} \bar{e}_{12}^{0(k-m)} \right\}. \end{aligned} \quad (5)$$

При линейном упрочнении

$$\omega^{(n)} = \begin{cases} 0, & \text{при } \bar{\varepsilon}_u^{(n)} \leq \bar{\varepsilon}_s^{(n)}(\eta) \\ \lambda_n \left[1 - \frac{\bar{\varepsilon}_s^{(n)}(\eta)}{\bar{\varepsilon}_u^{(n)}} \right], & \text{при } \bar{\varepsilon}_u^{(n)} > \bar{\varepsilon}_s^{(n)}(\eta) \end{cases}$$

В случае обобщенного принципа Мазинга $\lambda_n = \lambda$, $\bar{\varepsilon}_u^{(n)} = \alpha_n \varepsilon_s$, при использовании диаграмм деформирования Гусенкова–Шнейдеровича $\bar{\varepsilon}_s^{(n)} = 2\varepsilon_s$, $\lambda_n = 1 - g_n$, где g_n определяется экспериментально. При учете накопления повреждений:

$$\bar{\varepsilon}_s^{(n)}(\eta) = \alpha_1^{n-z} (1 + \alpha_1) \varepsilon_s + (3G)^{-1} B^{1/\alpha} \cdot \left[1 - 0,5(1 + \alpha_1) \alpha_1^{n-2} \right] \left[1 - (1 - \eta)^{1+\alpha} \right]^{1/\alpha} (n-1)^{-1/\alpha}.$$

Функция повреждаемости η определяется из кинетического уравнения[2]:

$$\frac{d\eta}{dn} = f(\bar{\sigma}_u, \eta_n) \quad \text{или} \quad \eta = \int_0^n F(n-m) \psi\left(\bar{\sigma}_u^{(n)}\right) dm. \quad (6)$$

При условии $\eta(0) = 0$, $\eta(N) = 1$, где N – число полуциклов до наступления предельного состояния (разрушения).

3. Вывод уравнения движения стержней. Для вывода уравнений движения стержней при пространственном нагружении с учетом упруго-

пластических деформаций используем вариационный принцип Гамильтона–Остроградского [14]:

$$\delta \int_t (T - \Pi + A) dt = 0. \quad (7)$$

Сначала определим вариации кинетической энергии, при этом используем соотношение

$$\delta \int_t T dt = \int_t \int_V \rho \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial u_i^{(n)}}{\partial t} \cdot \delta \frac{\partial u_i^{(n)}}{\partial t} \right) dv dt. \quad (8)$$

Выполняя операции интегрирования по частям, получим

$$\delta \int_t T dt = \int_V \rho \sum_{i=1}^3 \left[\frac{\partial u_i^{(n)}}{\partial t} \cdot \delta u_i^{(n)} \right] dv \Big|_t - \int_t \int_V \rho \sum_{i=1}^3 \left[\frac{\partial^2 u_i^{(n)}}{\partial t^2} \cdot \delta u_i^{(n)} \right] dv dt. \quad (9)$$

В соотношении (9) первое и второе слагаемые обозначим через I_1 , I_2 и перепишем в следующем виде:

$$I_1 = \int_V \rho \left[\frac{\partial u_1^{(n)}}{\partial t} \cdot \delta u_1^{(n)} + \frac{\partial u_2^{(n)}}{\partial t} \delta u_2^{(n)} + \frac{\partial u_3^{(n)}}{\partial t} \delta u_3^{(n)} \right] dV \Big|_t \quad (10)$$

$$I_2 = \int_t \int_V \rho \left[\frac{\partial^2 u_1^{(n)}}{\partial t^2} \cdot \delta u_1^{(n)} + \frac{\partial^2 u_2^{(n)}}{\partial t^2} \delta u_2^{(n)} + \frac{\partial^2 u_3^{(n)}}{\partial t^2} \delta u_3^{(n)} \right] dV dt. \quad (11)$$

Теперь выражения перемещений (2) подставим под знаками вариации (10):

$$I_1 = \int_V \rho \left[\frac{\partial u_1^{(n)}}{\partial t} \cdot \delta(u_1^{(n)} - y\alpha_1^{(n)} - z\alpha_2^{(n)} + \phi v^{(n)} + a_1\beta_1^{(n)} + a_2\beta_2^{(n)}) + \right. \\ \left. + \frac{\partial u_2^{(n)}}{\partial t} \delta(v^{(n)} - z\theta^{(n)}) + \frac{\partial u_3^{(n)}}{\partial t} \delta(w^{(n)} + \theta^{(n)}) \right] dV \Big|_t.$$

Раскроем скобки и выполним операции интегрирования по сечению стержня и введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
\int_F dF &= F_x, \quad \int_F y\phi dF = S_\phi, \quad \int_F ydF = S_z, \quad \int_F zdF = S_y, \quad \int_F a_1 dF = S_{a_1}, \quad \int_F a_2 dF = S_{a_2}, \quad \sqrt{a^2 + b^2} \\
\int_F y^2 dF &= J_z, \quad \int_F z^2 dF = J_y, \quad \int_F (y^2 + z^2) dF = J_\rho, \quad \int_F yzdF = J_{yz}, \quad \int_F \phi^2 dF = J_\phi, \\
\int_F a_1 \phi dF &= J_{a_1\phi}, \quad \int_F a_2 \phi dF = J_{a_2\phi}, \quad \int_F za_1 dF = J_{za_1}, \quad \int_F za_2 dF = J_{za_2}, \quad \int_F ya_1 dF = J_{ya_1}, \\
\int_F y\phi dF &= J_{y\phi}, \quad \int_F z\phi dF = J_{z\phi}, \quad \int_F a_1^2 dF = J_{a_1}, \quad \int_F a_2^2 dF = J_{a_2}, \quad \int_F a_1 a_2 dF = J_{a_1 a_2}, \quad \int_F ya_2 dF = J_{ya_2}.
\end{aligned}$$

Интеграл I_1 с учетом обозначений запишем в следующем виде:

$$\begin{aligned}
I_1 = \int_x \left\{ \left[F \frac{\partial u^{(n)}}{\partial t} - S_z \frac{\partial \alpha_1^{(n)}}{\partial t} - S_y \frac{\partial \alpha_2^{(n)}}{\partial t} + S_\phi \frac{\partial v^{(n)}}{\partial t} + S_{a_1} \frac{\partial \beta_1^{(n)}}{\partial t} + S_{a_2} \frac{\partial \beta_2^{(n)}}{\partial t} \right] \delta u + \left[F \frac{\partial v^{(n)}}{\partial t} - \right. \right. \\
\left. \left. - S_y \frac{\partial \theta^{(n)}}{\partial t} \right] \delta v + \left[F \frac{\partial w}{\partial t} + S_z \frac{\partial \theta}{\partial t} \right] \delta w - \left[S_z \frac{\partial u}{\partial t} - J_z \frac{\partial \alpha_1}{\partial t} - J_{yz} \frac{\partial \alpha_2}{\partial t} + J_{y\phi} \frac{\partial v}{\partial t} + J_{ya_1} \frac{\partial \beta_1}{\partial t} + \right. \\
\left. + J_{ya_2} \frac{\partial \beta_2}{\partial t} \right] \delta \alpha_1 - \left[S_y \frac{\partial u}{\partial t} - J_{yz} \frac{\partial \alpha_1}{\partial t} - J_y \frac{\partial \alpha_2}{\partial t} + J_{z\phi} \frac{\partial v}{\partial t} + J_{za_1} \frac{\partial \beta_1}{\partial t} + J_{za_2} \frac{\partial \beta_2}{\partial t} \right] \delta \alpha_2 + \left[S_\phi \frac{\partial u}{\partial t} - \right. \\
\left. - J_{y\phi} \frac{\partial \alpha_1}{\partial t} - J_{z\phi} \frac{\partial \alpha_2}{\partial t} + J_\phi \frac{\partial v}{\partial t} + J_{\phi a_1} \frac{\partial \beta_1}{\partial t} + J_{\phi a_2} \frac{\partial \beta_2}{\partial t} \right] \delta v + \left[S_z \frac{\partial w}{\partial t} - S_y \frac{\partial v}{\partial t} + J_\rho \frac{\partial \theta}{\partial t} \right] \delta \theta + \\
+ \left[S_{a_1} \frac{\partial u}{\partial t} - J_{ya_1} \frac{\partial \alpha_1}{\partial t} - J_{za_1} \frac{\partial \alpha_2}{\partial t} + J_{\phi a_1} \frac{\partial v}{\partial t} + J_{a_1} \frac{\partial \beta_1}{\partial t} + J_{a_1 a_2} \frac{\partial \beta_2}{\partial t} \right] \delta \beta_1 + \\
+ \left[S_{a_2} \frac{\partial u}{\partial t} - J_{ya_2} \frac{\partial \alpha_1}{\partial t} - J_{za_2} \frac{\partial \alpha_2}{\partial t} + J_{\phi a_2} \frac{\partial v}{\partial t} + J_{a_1 a_2} \frac{\partial \beta_1}{\partial t} + J_{a_2} \frac{\partial \beta_2}{\partial t} \right] \delta \beta_2 \} dx \Big|_t.
\end{aligned}$$

Аналогичным образом определяем вторую часть кинетического уравнения (11), т. е. выражения интеграла I_2 . Учитывая выражения интегралов I_1 и I_2 , вариации кинетической энергии (9) запишем в векторном виде

$$\delta \int_t T dt = \int_x \tilde{A} \frac{\partial Y^{(n)}}{\partial t} E \delta Y^{(n)} dx \Big|_t - \iint_{tx} \tilde{A} \frac{\partial^2 Y^{(n)}}{\partial t^2} E \delta Y^{(n)} dx dt, \quad (12)$$

где $Y^{(n)} = \{u^{(n)}, v^{(n)}, w^{(n)}, \alpha_1^{(n)}, \alpha_2^{(n)}, \theta^{(n)}, v^{(n)}, \beta_1^{(n)}, \beta_2^{(n)}\}$ – вектор перемещения;

\tilde{A} – матрица девятого порядка;

E – единичная матрица.

Вариация потенциальной энергии стержня в данной постановке имеет вид

$$\delta \int_t \Pi dt = \iiint_{tV} \left(\sum_{i=1}^3 \sigma_{i1}^{(n)} \delta e_{i1}^{(n)} \right) dv dt = \iiint_{tV} \left[\sigma_{11}^{(n)} \delta e_{11}^{(n)} + \sigma_{12}^{(n)} \delta e_{12}^{(n)} + \sigma_{13}^{(n)} \delta e_{13}^{(n)} \right] dV dt. \quad (13)$$

Выражения деформации (3) подставим в (13):

$$\begin{aligned} \delta \int_t \Pi dt = \iiint_{tV} & \left\{ \sigma_{11}^{(n)} \delta \left(\frac{\partial u^{(n)}}{\partial x} - y \frac{\partial \alpha_1^{(n)}}{\partial x} - z \frac{\partial \alpha_2^{(n)}}{\partial x} + \phi \frac{\partial v^{(n)}}{\partial x} + a_1 \frac{\partial \beta_1^{(n)}}{\partial x} + a_2 \frac{\partial \beta_2^{(n)}}{\partial x} \right) + \right. \\ & + \sigma_{13}^{(n)} \delta \left(\frac{\partial w^{(n)}}{\partial x} + y \frac{\partial \theta^{(n)}}{\partial x} - \alpha_2^{(n)} \frac{\partial \phi}{\partial z} v^{(n)} + \frac{\partial a_1}{\partial z} \beta_1^{(n)} + \frac{\partial a_2}{\partial z} \beta_2^{(n)} \right) + \\ & \left. + \sigma_{12}^{(n)} \delta \left[\frac{\partial v^{(n)}}{\partial x} - z \frac{\partial \theta^{(n)}}{\partial x} - \alpha_1^{(n)} + \frac{\partial \phi}{\partial y} v^{(n)} + \frac{\partial a_1}{\partial y} \beta_1^{(n)} + \frac{\partial a_2}{\partial y} \beta_2^{(n)} \right] \right\} dV dt. \quad (14) \end{aligned}$$

Преобразуем вариации потенциальной энергии (14). Для этого раскроем скобки под знаком вариации и выделим интеграл по сечению стержня. После некоторых выкладок и обозначений из (14) имеем:

$$\begin{aligned} \delta \int_t \Pi dt = \int_t & \left\{ N_x^{(k)} \delta u^{(k)} - M_z^{(k)} \delta \alpha_1^{(k)} - M_y^{(k)} \delta \alpha_2^{(k)} + Q_y^{(k)} \delta v^{(k)} + Q_z^{(k)} \delta w^{(k)} + M_x^{(k)} \delta \theta^{(k)} + \right. \\ & + M_z^{(k)} \delta v^{(k)} + M_{a_1}^{(k)} \delta \beta_1^{(k)} + M_{a_2}^{(k)} \delta \beta_2^{(k)} \left. \right\} dt - \iiint_{tV} \left\{ \frac{\partial N_x^{(k)}}{\partial x} \delta u^{(k)} + \frac{\partial Q_y^{(k)}}{\partial x} \delta v^{(k)} + \frac{\partial Q_z^{(k)}}{\partial x} \delta w^{(k)} + \right. \\ & + \left(Q_y^{(k)} - \frac{\partial M_z^{(k)}}{\partial x} \right) \delta \alpha_1^{(k)} + \left(Q_z^{(k)} - \frac{\partial M_y^{(k)}}{\partial x} \right) \delta \alpha_2^{(k)} + \frac{\partial M_x^{(k)}}{\partial x} \delta \theta^{(k)} + \left(\frac{\partial M_\phi^{(k)}}{\partial x} - Q_v^{(k)} \right) \delta v^{(k)} + \\ & \left. + \left(\frac{\partial M_{a_1}^{(k)}}{\partial x} - Q_{\beta_1}^{(k)} \right) \delta \beta_1^{(k)} + \left(\frac{\partial M_{a_2}^{(k)}}{\partial x} - Q_{\beta_2}^{(k)} \right) \delta \beta_2^{(k)} \right\} dx dt. \quad (15) \end{aligned}$$

Введя некоторых обозначений и с учетом соотношений (5) выражения внутренних усилий и моментов, например $N_x^{(n)}$ и $M_{a_2}^{(n)}$, можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} N_x^{(k)}(x, t) = 3G \left\{ \left(\tilde{F} - \tilde{F}_\omega^{(k)} \right) \frac{\partial u^{(k)}}{\partial x} - \left(S_z - S_{z\omega}^{(k)} \right) \frac{\partial \alpha_1^{(k)}}{\partial x} - \left(S_y - S_{y\omega}^{(k)} \right) \frac{\partial \alpha_2^{(k)}}{\partial x} + \right. \\ \left. + \left(S_\phi - S_{\phi\omega}^{(k)} \right) \frac{\partial v_1^{(k)}}{\partial x} + \left(S_{a_1} - S_{a_1\omega}^{(k)} \right) \frac{\partial \beta_1^{(k)}}{\partial x} + \left(S_{a_2} - S_{a_2\omega}^{(k)} \right) \frac{\partial \beta_2^{(k)}}{\partial x} - N_{x\omega}^{0(k-1)} + N_{x\omega}^{0(k-m)} \right\}; \quad (16) \end{aligned}$$

$$M_{a_2}^{(k)}(x, t) = 3G \left\{ \left[\left(S_{a_2} - S_{a_2\omega}^{(k)} \right) \frac{\partial u^{(k)}}{\partial x} + \left(I_{a_2y} - I_{a_2y}^{\omega(k)} \right) \frac{\partial \alpha_1^{(k)}}{\partial x} + \left(I_{a_2z} - I_{a_2z}^{\omega(k)} \right) \frac{\partial \alpha_2^{(k)}}{\partial x} + \right. \right. \\ \left. \left. + \left(I_{a_2\phi} - I_{a_2\phi}^{\omega(k)} \right) \frac{\partial v_1^{(k)}}{\partial x} + \left(I_{a_1a_2} - I_{a_1a_2}^{\omega(k)} \right) \frac{\partial \beta_1^{(k)}}{\partial x} + \left(I_{a_2} - I_{a_2}^{(k)} \right) \frac{\partial \beta_2^{(k)}}{\partial x} - M_{\alpha_2}^{0(k-1)} + M_{\alpha_2}^{0(k-m)} \right] \right\}, \quad (17)$$

где

$$F_x = \int_F dF, \quad S_z = \int_F y dF, \quad S_y = \int_F z dF, \quad S_\phi = \int_F \phi dF, \quad S_{a_1} = \int_F a_1 dF, \quad S_{a_2} = \int_F a_2 dF, \\ J_{a_2y} = \int_F a_2 y dF, \quad J_{a_2z} = \int_F a_2 z dF, \quad J_{a_2\phi} = \int_F \phi a_2 dF, \quad J_{a_1a_2} = \int_F a_1 a_2 dF, \quad J_{a_2} = \int_F a_2^2 dF.$$

Аналогичным образом определяются $N_{x\omega}^{0(k-1)}, N_{x\omega}^{0(k-m)}, M_{\alpha_2}^{0(k-1)}, N_{\alpha_2}^{0(k-m)}$, а также интегралы $F_{\omega}^{(k)}, \dots, J_{a_2}^{\omega(k)}$, содержащие функции пластичности ω , например,

$$F_{\omega}^{(k)} = \int_F \omega^{(k)} dF, \dots, J_{a_2}^{\omega(k)} = \int_F \omega^{(k)} a_2^2 dF. \quad (18)$$

Выражения внутренних усилий и моментов (16)–(17) подставим в вариации потенциальной энергии (15). Введя некоторые обозначения вариации потенциальной энергии представим в векторном виде

$$\delta \int_t \Pi dt = \int_t \left\{ \left(A^{yn} - A^{n\lambda} \right) \frac{\partial Y^{(n)}}{\partial x} + \left(B^{yn} - B^{n\lambda} \right) Y^{(n)} \right\} E \delta Y^{(n)} dt \Big|_x + \int_t \int_x \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\left(A^{yn} - A^{n\lambda} \right) \frac{\partial Y^{(n)}}{\partial x} + \right. \right. \\ \left. \left. + \left(B^{yn} - B^{n\lambda} \right) Y^{(n)} \right) + \left(C^{yn} - C^{n\lambda} \right) \frac{\partial Y^{(n)}}{\partial x} + \left(D^{yn} - D^{n\lambda} \right) Y^{(n)} \right\} E \delta Y^{(n)} dx dt. \quad (19)$$

Теперь рассмотрим вариации работы внешних сил:

$$\delta \int_t A dt = \int_t \int_V \sum_{i=1}^3 p_i^{(n)} \delta u_i^{(n)} dv dt + \int_t \int_S \sum_{i=1}^3 q_i^{(n)} \delta u_i^{(n)} ds dt + \int_t \int_{s_1} \sum_{i=1}^3 f_i^{(n)} \delta u_i^{(n)} ds_1 dt \Big|_x, \quad (20)$$

где $p_i^{(n)}$ – объемные силы при n-ом нагружении;
 $q_i^{(n)}$ – поверхностные силы;
 $f_i^{(n)}$ – торцевые силы.

К соотношению (20) подставляем выражения перемещений (2). Раскроем скобки и выполним интегрирование по поперечным сечениям стержня:

$$\begin{aligned} \delta \int_t A dt = & \int_t \int_x \left\{ \int_F \left[p_1^{(n)} \delta \left(u^{(n)} - y \alpha_1^{(n)} - z \alpha_2^{(n)} + \phi v^{(n)} + a_1 \beta_1^{(n)} + a_2 \beta_2^{(n)} \right) + p_2^{(n)} \delta \left(v^{(n)} - z \theta^{(n)} \right) + \right. \right. \\ & + p_3^{(n)} \delta \left(w^{(n)} + y \theta^{(n)} \right) \left. \right] dF \left. \right\} dx dt + \int_t \int_x \left\{ \int_l \left[q_1^{(n)} \delta \left(u^{(n)} - y \alpha_1^{(n)} - z \alpha_2^{(n)} + \phi v^{(n)} + a_1 \beta_1^{(n)} + a_2 \beta_2^{(n)} \right) + \right. \right. \\ & + q_2^{(n)} \delta \left(v^{(n)} - z \theta^{(n)} \right) + q_3^{(n)} \delta \left(w^{(n)} + y \theta^{(n)} \right) \left. \right] dl \left. \right\} dx dt + \int_t \left\{ \int_{s_1} \left[f_1^{(n)} \delta \left(u^{(n)} - y \alpha_1^{(n)} - z \alpha_2^{(n)} + \phi v^{(n)} + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + a_1 \beta_1^{(n)} + a_2 \beta_2^{(n)} \right) + f_2^{(n)} \delta \left(v^{(n)} - z \theta^{(n)} \right) + f_3^{(n)} \delta \left(w^{(n)} + y \theta^{(n)} \right) \right] dS_1 \right\} dt \Big|_x. \quad (21) \end{aligned}$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} \int_F p_1^{(n)} dF &= N_x^{\text{об}(n)}, \quad \int_F y p_1^{(n)} dF = M_z^{\text{об}(n)}, \quad \int_F z p_1^{(n)} dF = M_y^{\text{об}(n)}, \quad \sqrt{a^2 + b^2} \\ \int_F \phi p_1^{(n)} dF &= M_\phi^{\text{об}(n)}, \quad \int_F a_1 p_1^{(n)} dF = M_{a_1}^{\text{об}(n)}, \quad \int_F a_2 p_1^{(n)} dF = M_{a_2}^{\text{об}(n)}, \\ \int_F p_2^{(n)} dF &= Q_y^{\text{об}(n)}, \quad \int_F p_3^{(n)} dF = Q_z^{\text{об}(n)}, \quad \int_F \left(y p_3^{(n)} - z p_2^{(n)} \right) dF = M_x^{\text{об}(n)}. \end{aligned}$$

Аналогичным образом определяются поверхностные и торцовые нагрузки, например, $N_x^{\Pi(n)}$, $N_x^{\Gamma(n)}$. Теперь перепишем соотношения (21) в виде

$$\begin{aligned} \delta \int_t A dt = & \int_t \int_x \left\{ \left(N_x^{\text{об}(n)} - N_x^{\Pi(n)} \right) \delta u^{(n)} + \left(Q_y^{\text{об}(n)} + Q_y^{\Pi(n)} \right) \delta v^{(n)} + \left(Q_z^{\text{об}(n)} + Q_z^{\Pi(n)} \right) \delta w^{(n)} - \left(M_z^{\text{об}(n)} + M_z^{\Pi(n)} \right) \delta \alpha_1^{(n)} + \right. \\ & - \left(M_y^{\text{об}(n)} + M_y^{\Pi(n)} \right) \delta \alpha_2^{(n)} - \left(M_x^{\text{об}(n)} + M_x^{\Pi(n)} \right) \delta \theta^{(n)} + \left(M_\phi^{\text{об}(n)} + M_\phi^{\Pi(n)} \right) \delta v^{(n)} + \left(M_{a_1}^{\text{об}(n)} + M_{a_1}^{\Pi(n)} \right) \delta \beta_1^{(n)} - \\ & + \left. \left(M_{a_2}^{\text{об}(n)} - M_{a_2}^{\Pi(n)} \right) \delta \beta_2^{(n)} \right\} dx dt + \int_t \left\{ N_x^{\Gamma(n)} \delta u^{(n)} + Q_y^{\Gamma(n)} \delta v^{(n)} + Q_z^{\Gamma(n)} \delta w^{(n)} - M_z^{\Gamma(n)} \delta \alpha_1^{(n)} - \right. \\ & \left. - M_y^{\Gamma(n)} \delta \alpha_2^{(n)} - M_x^{\Gamma(n)} \delta \theta^{(n)} + M_\phi^{\Gamma(n)} \delta v^{(n)} + M_{a_1}^{\text{об}(n)} \delta \beta_1^{(n)} + M_{a_2}^{\text{об}(n)} \delta \beta_2^{(n)} \right\} dt \Big|_x. \quad (22) \end{aligned}$$

С учетом введенных обозначений вариации работы внешних сил представим в векторном виде:

$$\delta \int_t A dt = \int_t Q^{\Gamma(n)} \delta Y^{(n)} dt \Big|_x + \int_t \int_x Q^{\Pi(n)} dY^{(n)} dx dt. \quad (23)$$

Подставляя векторные выражения вариации кинетической (12), потенциальной (19) энергий и работы внешних сил (23) в вариационный принцип (7), получим:

$$\begin{aligned} & \iint_{t x} \left\{ \tilde{A} \frac{\partial^2 Y^{(n)}}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(A^{yn} - A^{nл} \right) \frac{\partial Y^{(n)}}{\partial x} + \left(B^{yn} - B^{nл} \right) Y^{(n)} \right] + \right. \\ & \left. + \left(C^{yn} - C^{nл} \right) \frac{\partial Y^{(n)}}{\partial x} + \left(D^{yn} - D^{nл} \right) Y^{(n)} + Q^{\Pi(n)} \right\} E \delta Y^{(n)} dx dt + \quad (24) \\ & + \int_t \left\{ \left(A^{yn} - A^{nл} \right) \frac{\partial Y^{(n)}}{\partial x} + \left(B^{yn} - B^{nл} \right) Y^{(n)} + Q^{\Gamma(n)} \right\} E \delta Y^{(n)} dt \Big|_x + \int_x \tilde{A} \frac{dY^{(n)}}{dt} E \delta Y^{(n)} dx \Big|_t = 0. \end{aligned}$$

Из этого вариационного уравнения получаем следующую краевую задачу:

$$\begin{aligned} & \tilde{A} \frac{\partial^2 Y^{(n)}}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(A^{yn} - A^{nл} \right) \frac{\partial Y^{(n)}}{\partial x} + \left(B^{yn} - B^{nл} \right) Y^{(n)} \right] + \left(C^{yn} - C^{nл} \right) \frac{\partial Y^{(n)}}{\partial x} + \left(D^{yn} - D^{nл} \right) Y^{(n)} + Q^{\Pi} = 0; \quad (25) \\ & \left\{ \left(A^{yn} - A^{nл} \right) \frac{\partial Y}{\partial x} + \left(B^{yn} - B^{nл} \right) Y + Q^{\Gamma\Pi} \right\} \delta Y \Big|_x = 0; \\ & \tilde{A} \frac{dY^{(n)}}{dt} E \delta Y^{(n)} \Big|_t = 0. \quad (26) \end{aligned}$$

Здесь A, B, C, D – квадратичные матрицы девятого порядка, Q^{Π} и $Q^{\Gamma\Pi}$ – векторы внешних сил девятого порядка. Коэффициенты матрицы имеют следующем вид:

$$a_{ij} = a_{ij}^{yn} - a_{ij}^{nл(n)}, \quad b_{ij} = b_{ij}^{yn} - b_{ij}^{nл(n)}, \quad c_{ij} = -b_{ij}, \quad d_{ij} = d_{ij}^{yn} - d_{ij}^{nл(n)}.$$

4. Уравнения равновесия стержней. Учитывая (16)–(17) из вариационного уравнения (24), имеем следующую систему дифференциальных уравнений равновесия стержня при переменных нагружениях с граничными условиями в векторной форме (в текущих величинах):

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(A^{yn} - A^{nл(k)} \right) \frac{\partial Y^{(k)}}{\partial x} + \left(B^{yn} - B^{nл(k)} \right) Y^{(k)} \right] + \left(C^{yn} - C^{nл(k)} \right) \frac{\partial Y^{(k)}}{\partial x} + \left(D^{yn} - D^{nл(k)} \right) Y^{(k)} = P^{(k)} + \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \left(A^{nл(k)} \frac{\partial Y^{0(k-1)}}{\partial x} + B^{nл} Y^{0(k-1)} \right) + C^{nл(k)} \frac{\partial Y^{0(k-1)}}{\partial x} + D^{nл(k)} Y^{0(k-1)} + \end{aligned}$$

$$+ \sum_{m=1}^{k-1} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[A^{n\pi(k-m)} \frac{\partial}{\partial x} \left(Y^{0(k-m)} - Y^{0(k-m-1)} \right) + B^{n\pi(k-m)} \left(Y^{0(k-m)} - Y^{0(k-m-1)} \right) \right] + C^{n\pi(k-m)} \frac{\partial}{\partial x} \left(Y^{0(k-m)} - Y^{0(k-m-1)} \right) + D^{n\pi(k-m)} \left(Y^{0(k-m)} - Y^{0(k-m-1)} \right) \right\}. \quad (27)$$

Граничные условия:

$$\left\{ \left(A^{yn} - A^{n\pi(k)} \right) \frac{\partial Y^{(k)}}{\partial x} + \left(B^{yn} - B^{n\pi(k)} \right) Y^{(k)} - \bar{Q}^{(k)} - B^{n\pi o(k)} Y^{(k)} - A^{n\pi o(k)} \frac{\partial Y^{0(k-1)}}{\partial x} - \sum_{m=1}^{k-1} \left[A^{n\pi(k-m)} \frac{\partial}{\partial x} \left(Y^{0(k-m)} - Y^{0(k-m-1)} \right) + B^{n\pi(k-m)} \left(Y^{0(k-m)} - Y^{0(k-m-1)} \right) \right] \right\} \delta Y^k \Big|_r = 0. \quad (28)$$

Здесь $Y^{(k)}$ – искомые векторы функции девятого порядка в текущих координатах.

Выражения внутренних усилий и моментов в векторной форме можно представить в виде

$$P^{(n)} = \frac{3Gh_0 I_0}{l^3} \left\{ \left(\begin{array}{cc} \sim yn & \sim n\pi(n) \\ A & -A \end{array} \right) \frac{\partial Y^{(n)}}{\partial x} + \left(\begin{array}{cc} \sim yn & \sim n\pi(n) \\ B & -B \end{array} \right) Y^{(n)} \right\}, \quad (29)$$

где $P^{(n)}$ – вектор функции двенадцатого порядка

$$P^{(n)} = \left\{ N_x^{(n)}, M_y^{(n)}, M_z^{(n)}, M_\phi^{(n)}, M_{a_1}^{(n)}, M_{a_2}^{(n)}, Q_1^{(n)}, M_x^{(n)}, Q_2^{(n)}, Q_{a_1}^{(n)}, Q_{a_2}^{(n)}, M_\phi^{(n)} \right\}.$$

Матрицы $\tilde{A}^{yn}, \tilde{A}^{n\pi(n)}, \tilde{B}^{yn}, \tilde{B}^{n\pi(n)}$ квадратной матрицы двенадцатого порядка и элементы описываются следующим образом:

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{ij} &= a_{ij}, & \tilde{a}_{10,s} &= b_{s,5}; & \tilde{a}_{11,s} &= b_{s,6}; & \tilde{a}_{12,s} &= b_{s,4}; & \tilde{b}_{ij} &= b_{ij}, \\ \tilde{b}_{10,r} &= d_{2,s}; & \tilde{b}_{11,r} &= d_{r,6}; & \tilde{b}_{12,r} &= d_{r,4}; & (i, j &= 1, 2, \dots, 9; s = 7, 8, 9; r = 2, 3, 4, 5, 6;) \end{aligned}$$

Для решения краевой задачи используется метод конечных разностей и метод упругих решений Ильюшина. В процессе их аппроксимации применяется центральная разностная схема второго порядка точности [15; 16].

Векторное уравнение (27) после применения разностей схемы получает вид:

$$\left(A_i^{yn} - A_i^{n\pi(k)} \right) Y_{i+1}^{(k)} - \left(B_i^{yn} - B_i^{n\pi(k)} \right) Y_i^{(k)} + \left(C_i^{yn} - C_i^{n\pi(k)} \right) Y_i^{(k)} = \bar{Q}_i^{(k)} + \bar{Q}_i^{n\pi} + \bar{Q}_i^{n\pi 0}. \quad (30)$$

Для решения сформулированных алгебраических уравнений (30) с соответствующими граничными условиями, используется метод прогонки, с помощью следующей рекуррентной формулы [12; 13]:

$$V_i = \alpha_i V_{i+1} + \beta_i; \quad i = N-1, \dots, 1. \quad (31)$$

Здесь $\alpha_i = (B_i - C_i \alpha_{i-1})^{-1} A_i$; $\beta_i = (B_i - C_i \alpha_{i-1})^{-1} (C_i \beta_{i-1} - F)$; $i = 1, 2, \dots, N-1$.

В качестве примера приведем результаты расчета тонкостенных стержней прямоугольного поперечного сечения, заземленного по торцам при знакопеременном нагружении с учетом накопления повреждений. За кинетическое уравнение принято $\frac{d\eta}{dn} = A(1 - \gamma_1 \eta)^{-\beta} (\bar{\sigma}_u^{(k)})^\alpha$. Задача решена

при следующих исходных данных: материальные константы кинетического уравнения повреждаемости: $A = 1,2 \cdot 10^{-4}$; $\alpha = \beta = 5$; $\gamma_1 = 0,8$; $\alpha_1 = 0,97$; $B = 1,4 \cdot 10^3$; $\epsilon_s = 0,0015$. За внешнюю нагрузку приняты следующие значения: $f_0^+ = 25$; $f_0^- = 50$; $\bar{f}_0^+ = 10$; $\bar{f}_0^- = 5$ (кг/см²); $\alpha = \pi/3$; $\alpha^* = \pi/2$; $\gamma = \pi/4$; $\gamma^* = \pi/6$. В таблице 1, 2 приводятся численные результаты вектора перемещений в зависимости от числа цикла k (при $N = 40$, $k = 1$ и $k = 5$) с использованием обобщенного принципа Мазинга [17–19].

Таблица 1 – Численные значения расчетных величин – перемещений

Расчетная величина	x	$W^{(k)}$	$\alpha_1^{(k)}$	$\alpha_2^{(k)}$	$V^{(k)}$
$k = 1$	0,1	-0,038498	-0,724490	-0,679278	-0,036098
	0,2	-0,124965	-0,965903	-0,905623	-0,117170
	0,4	-0,284147	-0,482706	-0,452569	-0,266419
	0,6	-0,284124	0,483426	0,453289	-0,266396
	0,8	-0,124919	0,966394	0,906114	-0,117123
	0,9	-0,038463	0,724772	0,679560	-0,036062
$k = 5$	0,1	-0,038502	-0,724583	-0,679373	-0,036101
	0,2	-0,124982	-0,966050	-0,905770	-0,117186
	0,4	-0,284190	-0,482782	-0,452642	-0,266462
	0,6	-0,284166	0,483511	0,453370	-0,266438
	0,8	-0,124934	0,966536	0,906256	-0,117138
	0,9	-0,038467	0,724856	0,679646	-0,036066

Таблица 2 – Численные значения расчетных величин – усилий

Расчетная величина	x	$Q_1^{(k)}$	$M_y^{(k)}$	$Q_2^{(k)}$	$M_z^{(k)}$
$k = 1$	0,0	14,8597	93,7650	13,9340	89,1796
	0,2	7,83433	5,85102	7,34389	5,56424
	0,4	2,59486	-41,0297	2,43147	-39,0236
	0,6	-2,64614	-41,0243	-2,48271	-39,0182
	0,8	-7,88573	5,86793	-7,39532	5,58184
	1,0	-14,8119	93,7967	-13,8862	89,2114
$k = 5$	0,0	-14,8652	94,1137	13,9393	89,2166
	0,2	7,83850	5,87462	7,34794	5,56778
	0,4	2,59560	-41,1852	2,43210	-39,0421
	0,6	-2,64694	-41,1795	-2,48341	-39,0359
	0,8	-7,88983	5,89176	-7,39926	5,58623
	1,0	-14,8165	94,1454	-13,8907	89,2474

Изменения перемещений $W^{(k)}$, $\alpha_1^{(k)}$ и моментов $M_y^{(k)}$, $M_z^{(k)}$ по длине стержня при повторно-переменном упругопластическом нагружении показаны на рисунке 1 и рисунке 2 (где δ – интенсивность нагрузки).

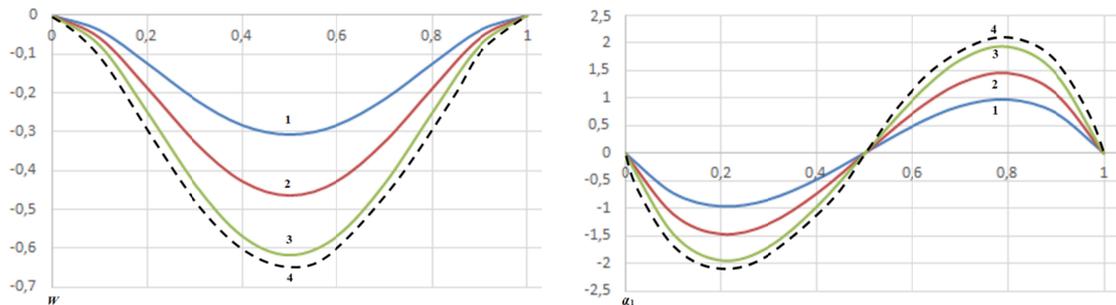


Рис. 1. Изменения перемещений по длине стержня (1 – $\delta = 1$; 2 – $\delta = 1,5$; 3 – $\delta = 2$; 4 – $\delta = 2$ (с учетом повреждаемости))

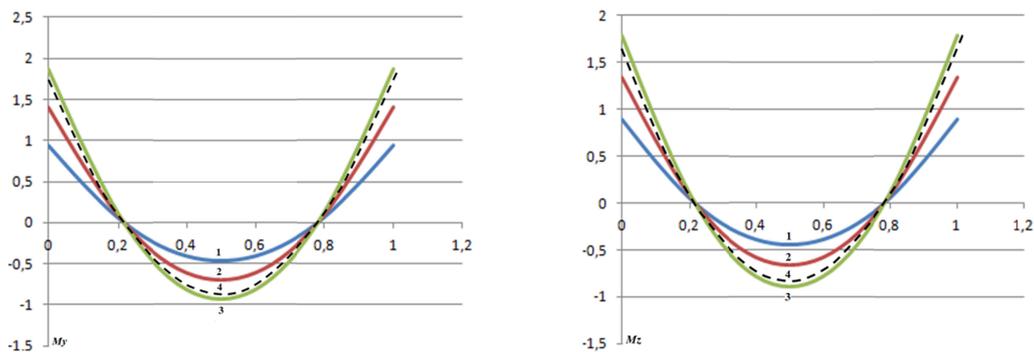


Рис. 2. Изменения моментов по длине стержня

Анализ численного эксперимента показывает, что с увеличением числа циклов нагружения изменяются значения функции пластичности и повреждаемости. В свою очередь это влияет на кинетику перемещений, усилий и моментов упругопластического стержня.

5. Заключение. На основе вариационного принципа получена система дифференциальных уравнений движения (равновесия) тонкостенных стержней. Сформированы краевые задачи при повторно-переменном нагружении и исследовано напряженно-деформированное состояние стержней при переменном нагружении с учетом обобщенного принципа Мазинга и повреждаемости материала. При этом показано влияние циклических диаграмм деформирования на расчетных величин.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ильюшин, А. А. Пластичность: Упруго-пластические деформации. / А. А. Ильюшин. – 3-е изд. – М. : ЛЕНАНД, 2018. – 392 с.
2. Москвитин, В. В. Циклические нагружения элементов конструкций. / В. В. Москвитин. – М. : URSS, 2019. – 344 с. (переизд).
3. Москвитин, В. В. Сопротивление вязкоупругих материалов / В. В. Москвитин. – М. : URSS, 2019. – 328 с. (переизд).
4. Гусенков, А. П. Малоцикловая прочность оболочечных конструкций / А. П. Гусенков, Г. В. Москвитин, В. Н. Хорошилов. – М. : Наука, 1989. – 254 с.
5. Москвитин, Г. В. Решение задачи о напряженно-деформированном состоянии сильфонного компенсатора при длительном циклическом нагружении / Г. В. Москвитин // Машиноведение. – 1977. – № 6. – С. 61–70.
6. Махутов, Н. А. Прочность конструкций при малоцикловом нагружении / Н. А. Махутов, В. М. Филатов, А. Н. Раманов. – М. : Наука. 1983. – 271 с.
7. Серенсен, С. В. Сопротивления материалов усталостному и хрупкому разрушению / С. В. Серенсен. – М. : Атомиздат, 1975. – 192 с.
8. Киселев, А. Б. Модели необратимого динамического деформирования и микроразрушения повреждаемых сред / А. Б. Киселев // Упругость и неупругость. – М. : Изд-во МГУ, 2001. – С. 381–383.
9. Кукуджанов, В. Н. Компьютерное моделирование деформирования, повреждаемости и разрушения неупругих материалов и конструкций / В. Н. Кукуджанов. – М. : МФТИ, 2008. – 215 с.
10. Бондарь, В. С. Термовязкопластичность. Теория и эксперимент / В. С. Бондарь // Упругость и неупругость. – М. : Изд-во Московского университета, 2011. – С. 122–128.
11. Старовойтов, Э. И. Деформирование трехслойных элементов конструкции на упругом основании. / Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая, Д. В. Леоненко. – М. : Физматлит. 2006. – 379 с.
12. Буриев, Т. Алгоритмизация расчета несущих элементов тонкостенных конструкций / Т. Буриев. – Ташкент : Фан, 1986. – 244 с.

13. Абдусаттаров А. Деформирование и повреждаемость упруго-пластических элементов конструкций при циклических нагружениях. / А. Абдусаттаров, Э. И. Старовойтов, Н. Б. Рузиева. – Ташкент : «IDEAL PRESS», 2023. – 381 с.
14. Кабулов, В. К. Алгоритмизация в теории упругости и деформационной теории пластичности. / В. К. Кабулов. – Ташкент : Фан, 1966. – 394 с.
15. Самарский, А. А., Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. / А. А. Самарский, А. П. Михайлов. – М. : Наука, 2001. – 316 с.
16. Годунов, С. К. Разностные схемы (Введение в теорию) / С. К. Годунов, В. С. Рябенский. – М. : Наука, 1977. – 440 с.
17. Абдусаттаров, А. Уравнение движения подземных магистральных трубопроводов при пространственно-переменном упругопластическом нагружении / А. Абдусаттаров, А. И. Исомиддинов, Н. Б. Рузиева // Матер. Респуб. науч.-прак. конференции «Современная архитектура, прочность зданий и сооружений. Проблемы надежности и сейсмической безопасности». – НамИСИ, 2021. С. 135–137.
18. Рузиева, Н. Б. Нелинейное деформирование подземных трубопроводов при циклическом нагружении / Н. Б. Рузиева, А. Абдусаттаров // Проблемы безопасности на транспорте. Материалы XI Междунар. науч. – практ. конференции. – Гомель : БелГУТ, 2021. – Ч. 2. – С. 113–114.
19. Абдусаттаров, А. Методы решения задач механики композитных материалов и неупругих элементов конструкции при циклических нагружениях / А. Абдусаттаров, А. М. Каримов. – Ташкент : Узбекистан. – 2020. – 198 с.

Поступила: 18.01.2024