

Секция 3. ФИЗИЧЕСКИЕ, ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ, МАТЕРИАЛОВЕДЧЕСКИЕ
И ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ПРИБОРОСТРОЕНИЯ

UDC 517.958

CLASSICAL SOLUTION OF A MIXED PROBLEM OF THE LONGITUDINAL IMPACT
ON A FINITE ROD WITH A NONCHARACTERISTIC BOUNDARY CONDITION

Korzyuk V.^{1,2}, Rudzko J.², Kolyachko V.²

¹Belarusian State University

²Institute of Mathematics of the NAS of Belarus

Minsk, Republic of Belarus

Abstract. We consider a mixed problem for the wave equation with discontinuous initial conditions and a noncharacteristic boundary condition. This problem models a longitudinal impact on the free end of a finite rod of constant cross-section. We seek a classical solution for the problem under consideration and establish conditions for its existence and uniqueness.

Key words: classical solution, mixed problem, wave equation, matching conditions, conjugation conditions.

КЛАССИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ О ПРОДОЛЬНОМ УДАРЕ ПО
КОНЕЧНОМУ СТЕРЖНЮ С НЕХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИМ ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ

Корзюк В. И.^{1,2}, Рудзько Я. В.², Колячко В. В.²

¹Белорусский государственный университет

²Институт математики НАН Беларуси

Минск, Республика Беларусь

Аннотация. Рассматривается смешанная задача для волнового уравнения с разрывными начальными условиями и нехарактеристическим граничным условием. Эта задача моделирует продольный удар по свободному концу конечного стержня постоянного поперечного сечения. Отывается классическое решение рассматриваемой задачи и устанавливаются условия его существования и единственности.

Ключевые слова: классическое решение, смешанная задача, волновое уравнение, условия согласования, условия сопряжения.

Correspondence address: Rudzko J., 11 Surganov Street, Minsk 220072, Republic of Belarus

e-mail: janycz@yahoo.com

In this report, we consider the following boundary wave problem

$$\begin{aligned} (\partial_t^2 - a^2 \partial_x^2)u(t, x) &= f(t, x), \\ t > 0, x \in (\gamma(t), l), \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} u(0, x) &= \varphi(x), \partial_t u(0, x) = \psi(x) - \\ & - \begin{cases} 0, & x \in [0, l], \\ v, & x = l, \end{cases} \quad x \in [0, l], \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \alpha(t) \partial_t u(t, \gamma(t)) + \beta(t) \partial_x u(t, \gamma(t)) + \\ + \theta(t) u(t, \gamma(t)) = \mu_1(t), t \in [0, \infty), \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \partial_t^2 u(t, x = l) + \lambda \partial_x u(t, x = l) = \\ = \mu_2(t), t \in [0, \infty), \end{aligned} \quad (4)$$

where $\gamma(0) = 0$, $\gamma'(t) \in (-a, a)$, $t \in [0, \infty)$, the curves $x = \gamma(t)$ and $x = l$ do not intersect, the boundary condition (3) is nowhere characteristic, i.e., $\alpha(t) \neq a^{-1} \beta(t)$, $t \in [0, \infty)$.

The mixed problem (1)–(4) models of displacement $u(t, x)$ of the cross sections of the rod, which is subjected at the initial moment $t = 0$ to an impact on the free end $x = l$ by a load that sticks to the rod, where l is the initial length of the rod, v is the velocity of the impacting load, $a = \sqrt{E\rho^{-1}}$, and $\lambda = SEM^{-1}$,

where $E > 0$ is Young's modulus of the rod material, $\rho > 0$ is the density of the rod material, $S > 0$ is the cross-sectional area of the rod, $M > 0$ is the mass of the impacting load. The boundary condition (3) models different ways of fixing the end $x = \gamma(t)$ of the rod, e. g., if we assume $\alpha(t) = Sp\gamma'(t)$, $\beta = SE$, and $\theta \equiv 0$, then we obtain the free end [1–3].

Let us introduce the functions

$$\gamma_+ : [0, \infty) \ni t \mapsto \gamma(t) + at,$$

$$\gamma_- : (-\infty, 0] \ni t \mapsto \gamma(t) - at,$$

and let the functions Φ_+ and Φ_- are the inverses of the functions γ_+ and γ_- , respectively. Assertions 1 and 2 of the paper [4] guarantee the existence of the functions Φ_+ and Φ_- .

To solve the problem (1)–(4), we divide the domain

$$Q = \{(t, x) : t \in (0, \infty) \wedge x \in (\gamma(t), l)\},$$

by the characteristics $x - at = \gamma_-(r_i)$ and $x + at = l + al_i$, $i \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, into subdomains $Q^{(i,j)}$:

$$Q^{(0,0)} = Q \cap$$

$$\cap \{(t, x) : x - at \in [0, l] \wedge x + at \in [0, l]\},$$

$$Q^{(1,0)} = Q \cap$$

$$\begin{aligned} & \cap \{(t, x) : x - at \in [\gamma_-(r_1), 0] \wedge x + at \in [0, l]\}, \\ & \quad Q^{(0,1)} = Q \cap \\ & \cap \{(t, x) : x - at \in [0, l] \wedge x + at \in [l, l + al_1]\}, \\ & \quad Q^{(i,j)} = Q \cap \\ & \cap \{(t, x) : x - at \in [\gamma_-(r_i), \gamma_-(r_{i-1})] \wedge \\ & \wedge x + at \in [l + al_{j-1}, l + al_j]\}, i \in \mathbb{N}, j \in \mathbb{N}, \\ & \text{where } r_0 = l_0 = 0, l_i = r_{i-1} + a^{-1}(l - \gamma(r_{i-1})), \\ & \quad r_i = \Phi_+(l + al_{i-1}), i \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

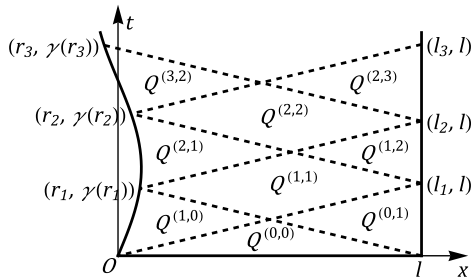


Figure 1 – Partitioning of the domain Q

Definition 1. A function u is a classical solution of the problem (1)–(4) if it is representable in the form $u = u_1 + u_2$, where u_1 is a classical solution of the problem (1)–(4) with $v = 0$ and u_2 satisfies Eq. (1) with $f \equiv 0$, the initial conditions

$$u_2(0, x) = \partial_t u_2(0, x) = 0, x \in [0, l], \quad (5)$$

the boundary conditions (3) and (4) with $\mu_1 = \mu_2 \equiv 0$, and the following matching conditions:

$$\begin{aligned} [(u_2)^+ - (u_2)^-](t, x = \gamma_-(r_i) + at) &= 0, \\ i \in \{0\} \cup \mathbb{N}, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} [(u_2)^+ - (u_2)^-](t, x = l + al_i - at) &= 0, \\ i \in \{0\} \cup \mathbb{N}, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} [(\partial_t u_2)^+ - (\partial_t u_2)^-](t, x = l + al_i - at) &= \\ = \begin{cases} 0, i \equiv 0 \pmod{2}, \\ -v, i \equiv 1 \pmod{2}, \end{cases} i \in \{0\} \cup \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (8)$$

Here $(\cdot)^\pm$ are the limit values of the function u and its partial derivatives on different sides on the characteristic $x = r(t)$, i.e.,

$$(\partial_t^p u)^\pm(t, r(t)) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \partial_t^p u(t, r(t) \pm \delta).$$

The conditions (6) and (7) follow from the continuity, and the condition (8) is derived from the physical assumptions [5]. Note that Definition 1 gives a physically correct solution only under the additional condition $\gamma'(r_{2i-1}) = 0, i \in \mathbb{N}$.

Theorem 1. Let the smoothness conditions $f \in C^1(\bar{Q}), \varphi \in C^2([0, l]), \psi \in C^1([0, l]), \mu_1 \in C^1([0, \infty)), \mu_2 \in C([0, \infty)), \gamma \in C^2([0, \infty)), \alpha \in C^1([0, \infty)), \beta \in C^1([0, \infty)), \theta \in C^1([0, \infty)),$ be

satisfied. The mixed problem (1) – (4) has a unique classical solution u in the sense of Definition 1 if and only if the following conditions are satisfied:

$$\begin{aligned} \mu_1(0) &= \alpha(0)\psi(0) + \beta(0)\varphi'(0) + \theta(0)\varphi(0), \\ \mu_1'(0) &= \alpha'(0)\psi(0) + \beta'(0)\varphi'(0) + \theta'(0)\varphi(0) + \\ &+ \theta(0)(\psi(0) + \gamma'(0)\varphi'(0)) + \\ &+ \alpha(0)(f(0,0) + \gamma'(0)\psi'(0) + a^2\varphi''(0)) + \\ &+ \beta(0)(\psi'(0) + \gamma'(0)\varphi''(0)), \\ \mu_2(0) &= f(0, l) + a^2\varphi''(l) + \lambda\varphi'(l). \end{aligned}$$

The results obtained in this report generalize and extend the previously known theorems [6–11].

Acknowledgments. The report was published with the financial support of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation within the program of the Moscow Center of Fundamental and Applied Mathematics under the agreement № 075-15-2022-284.

References

1. Vesnitsky, A. I. Waves in systems with moving boundaries and loads / A. I. Vesnitsky. – M.: Fizmatlit, 2001. – 320 p.
2. Anisimov, V. N. Mathematical models of nonlinear longitudinal-cross oscillations of object with moving borders / V. N. Anisimov, V. L. Litvinov // J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci. – 2015. – V. 19, № 2. – P. 382–397.
3. Anisimov, V. N. Longitudinal resonant oscillations of a viscoelastic rope of a lifting equipment / V. N. Anisimov // Izvestia of Samara Scientific Center of the Russian Federation Academy of Sciences. – 2016. – V. 18, № 4. – P. 128–133.
4. Korzyuk, V. I. Classical Solution of the First Mixed Problem for the Telegraph Equation with a Nonlinear Potential in a Curvilinear Quadrant / V. I. Korzyuk, J. V. Rudzko // Differential Equations. – 2023. – V. 59, № 8. – P. 1075–1089.
5. Korzyuk, V. I. Solutions of problems with discontinuous conditions for the wave equation / V. I. Korzyuk, J. V. Rudzko, V. V. Kolyachko // Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics. – 2023. – V. 3. – P. 6–18.
6. Korzyuk, V. I. Classical Solution of the First Mixed Problem for Second-Order Hyperbolic Equation in Curvilinear Half-Strip with Variable Coefficients / V. I. Korzyuk, I. I. Stolyarchuk // Differential Equations. – 2017. – V. 53, № 1. – P. 74–85.
7. Korzyuk, V. I. Classical Solution of the First Mixed Problem for the Wave Equation in a Curvilinear Half-Strip / V. I. Korzyuk, I. S. Kozlovskaya, S. N. Naumavets // Differential Equations. – 2020. – V. 56, № 1. – P. 98–108.
8. Korzyuk, V. I. A mathematical investigation of one problem of the longitudinal impact on an elastic rod with an elastic attachment at the end / V. I. Korzyuk, J. V. Rudzko // Tr. Inst. Mat., Minsk. – 2023 – V. 31, № 1. – P. 81–87.
9. Gaiduk, S. I. Some problems related to the theory of longitudinal impact on a rod / S. I. Gaiduk // Differential Equations. – 1977. – V. 12. – P. 607–617.

10. Baranovskaya, S. N. Directional Derivative Problem for the Telegraph Equation with a Dirac Potential / S. N. Baranovskaya, E. N. Novikov, N. I. Yurchuk // Differential Equations. – 2018. – V. 54, № 9. – P. 1147–1155.

11. Baranovskaya, S. N. Mixed problem for the string vibration equation with a time-dependent oblique derivative in the boundary condition / S. N. Baranovskaya, N. I. Yurchuk // Differential Equations. – 2009. – V. 45, № 8. – P. 1212–1215.

УДК 681.723.2

ЛАЗЕРНЫЙ МИКРОСКОП ДЛЯ ВИДЕОРЕГИСТРАЦИИ СТРУКТУРЫ BLU-RAY ДИСКА

Агашков А. В.

ГНУ «Институт физики НАН Беларуси»
Минск, Республика Беларусь

Аннотация. Представлен микроскоп с лазерной системой освещения, обеспечивающий качественную видеорегистрацию структуры Blu-ray диска при его поперечных перемещениях. Видеорегистрация производилась на длинах волн излучения 405, 532 и 632,8 нм без удаления защитного слоя. Для формирования изображения использован стандартный объектив ЛОМО МИ 90x/1,25, иммерсионная жидкость – дистиллированная вода. Параметры оптической системы позволяют получать изображение с высоким поперечным разрешением без повреждения диска.

Ключевые слова: микроскопия, косое освещение, видеорегистрация структуры, Blu-ray диск с фильмом.

LASER MICROSCOPE FOR VIDEO REGISTRATION OF BLU-RAY DISC STRUCTURE

Agashkov A.

Institute of Physics of the NAS of Belarus
Minsk, Republic of Belarus

Abstract. We present a microscope with a laser illumination system, it provides qualitative video recording of the Blu-ray disc structure during its transverse movements. Video recording was performed at wavelengths of 405, 532 and 632.8 nm without removing the protective layer. A standard LOMO MI 90x/1.25 lens was used to form the image, and the immersion liquid was distilled water. The parameters of the optical system make it possible to obtain an image with high transverse resolution without damaging the disc.

Key words: microscopy, oblique illumination, video recording of structure, Blu-ray movie disc.

Адрес для переписки: Агашков А. В., пр. Независимости, 68-2, г. Минск 220072, Республика Беларусь
e-mail: a.agashkov@ifanbel.bas-net.by

Введение. Оптические микроскопы дальнего поля являются очень эффективными устройствами для получения изображения структуры объектов с поперечным разрешением порядка 200 нм. Основным ограничением оптической микроскопии является предельное разрешение, в соответствии с теорией Аббе определяемое выражением

$$r = \lambda_0 / 2n \sin \theta = \lambda_0 / 2NA, \quad (1)$$

где λ_0 – длина волны света в вакууме; n – показатель преломления среды между объектом и объективом; θ – половинный угол наиболее наклонных лучей, попадающих в объектив; NA – числовая апертура объектива. При более детальном рассмотрении необходимо также учитывать состояние поляризации и степень когерентности световой волны, а также параметры конденсора [1].

Для улучшения пространственного разрешения микроскопов был предложен метод, в соответствии с которым вплотную к исследуемой поверхности размещались микролинзы [2]. Исследования в данном направлении продолжают в настоящее время. В большинстве случаев в качестве тестовых объектов используются Blu-ray диски (BD) с периодом 320 нм. К недостаткам микроскопов с микролинзами можно отнести

необходимость предварительного удаления защитного слоя BD толщиной 100 мкм, ограничение области исследуемой поверхности размерами микролинз, малая информативность – на полученных изображениях видны только треки без записанных данных. Использование микроволокон [3] позволило увеличить только размер исследуемой области в одном направлении.

Применение дополнительной твердой иммерсионной линзы, контактирующей с поверхностью защитного слоя, увеличило числовую апертуру объектива микроскопа до значения $NA = 1,4$ для длины волны света 405 нм. В режиме критического освещения это позволило зарегистрировать пикеты данных [4]. Недостатками данной системы является отсутствие мобильности в выборе регистрируемой области поверхности диска и возможное повреждение его защитного слоя.

В работе [5] представлен проекционный микроскоп с лазерной системой освещения, характеризующийся высокой яркостью и контрастностью изображения субмикронных объектов.

Цель данной работы – экспериментальное подтверждение перспективности использования модификации данного микроскопа по методу косого освещения для мобильной регистрации структуры BD.