

ВОДНОЕ ХОЗЯЙСТВО БЕЛОРУССИИ

ВЫПУСК

3



МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ БССР

Белорусский ордена Трудового Красного Знамени
политехнический институт
РЕСПУБЛИКАНСКИЕ МЕЖВЕДОМСТВЕННЫЕ СБОРНИКИ

ВОДНОЕ ХОЗЯЙСТВО БЕЛОРУССИИ

выпуск 3

ИЗДАТЕЛЬСТВО «ВЫШЭЙШАЯ ШКОЛА»
МИНСК 1973

38
В62

Главный редактор
кандидат технических наук, доцент *К. И. Шимко*

Редакционная коллегия:

Г. В. Васильченко, П. А. Запольский, К. В. Иванов, И. Г. Лазаревич (зам. гл. редактора), *И. М. Лившиц, И. В. Минаев* (отв. секретарь), *Р. Ф. Таканаев*.

В $\frac{3211-117}{М 304(05)-73}$ 39-73

ПРЕДИСЛОВИЕ

Прогресс в области водного хозяйства республики определяется развитием всех отраслей народного хозяйства, намеченных Директивами XXIV съезда КПСС. Совершенствование промышленности, сельского хозяйства, транспорта, лесного и рыбного хозяйства и других отраслей приводит к увеличивающимся темпам водопотребления и водоиспользования. В результате растет искусственная гидрографическая сеть, протяженность водопровода, количество скважин для отбора подземных вод и других водохозяйственных сооружений.

Развитое водное хозяйство республики ставит задачи теоретического и практического плана. На первый план выступают вопросы ограниченного забора воды из различных источников, комплексного использования водных ресурсов, водооборота и т. д. Не меньшее значение имеет теоретическое и инженерное обоснование различных типов водохозяйственных и мелиоративных сооружений. В настоящем сборнике дана оценка использования поверхностных вод для целей регулирования почвенной влаги на осушенных землях, рассматривается кри-

терий однородности летних и зимних минимальных расходов рек на территории Полесской низменности.

Ряд статей посвящен гидравлике сооружений для открытых потоков. В этой части сборника приводятся оригинальные расчеты гидротехнических сооружений с учетом характера течения воды через сооружения. К этим статьям примыкают также и работы по фильтрационным расчетам, которые по-новому освещают затронутые в них вопросы.

Часть статей посвящена механике грунтов, свойства которых зависят от их водных характеристик.

Сборник знакомит с направлением и характером работ в различных организациях республики, связанных с водным хозяйством и мелиорацией земель.

В. Ф. Шебеко

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ РЕСУРСОВ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОД ПРИ РЕГУЛИРОВАНИИ ПОЧВЕННОЙ ВЛАГИ ОСУШАЕМЫХ ЗЕМЕЛЬ БССР

Совершенствование методов мелиорации болот и заболоченных земель направлено на решение ряда задач по более детальному проектированию мероприятий, обеспечивающих оптимальный для сельскохозяйственных культур режим почвенной влаги. Такие мероприятия с естественным ходом формирования приходных и расходных элементов водного баланса, с режимом стока на водосборе должны учитывать требования по рациональному перераспределению, использованию и охране водных ресурсов. Для решения этих задач выполняются специальные исследования по гидрологическим и водохозяйственным характеристикам в конкретных природных условиях. Основой таких мероприятий являются характеристики по водным ресурсам и условиям формирования водного режима территории.

Атмосферные осадки и условия перераспределения и преобразования их на земной поверхности служат основным показателем увлажненности территории, водоносности рек. Годовая сумма осадков для разных календарных лет и разных пунктов территории БССР по данным наблюдений метеорологических станций Управления гидрометеослужбы изменяется примерно в одинаковом интервале от максимального значения (1200 мм) до наименьшей величины (330 мм) в год. Средняя же многолетняя сумма годовых осадков по территории имеет тенденцию уменьшения с севера на юг. Среднее за многолетие годовое количество осадков изменяется от 620 мм на севере республики до 530 мм на юге. Чтобы измеренные осадки соответствовали фактическим, надо увеличить их примерно на 15%.

Гидротермические условия определяют направление мелиоративных воздействий на избыточно увлажненных землях и водные ресурсы, являющиеся основой для инженерных расчетов при проектировании водохозяйственных мероприятий. Если оценить условия увлажненности мелиорируемых почв территории Белорусской ССР, то оказывается, что во внутрисезонном распределении приходных и расходных составляющих водного баланса появляются периоды как избыточной увлажненности, так и недостатка почвенной влаги для сельскохозяйственных культур. Дефициты почвенной влаги на этой территории наиболее детально изучены для болот. Для минеральных суглинистых и супесчаных почв дефициты почвенной влаги примерно такие же, как для мелкозалежных болот. В этой связи результаты наших исследований по дефицитам на мелкозалежных болотах можно использовать для минеральных почв супесчаных, суглинистых и более тяжелого механического состава.

Основным источником для восполнения дефицитов почвенной влаги является речной сток. Можно сравнить объемы естественного речного

стока в его внутрисезонном ходе в засушливые годы с объемами появляющихся в эти годы дефицитов почвенной влаги на мелиорированных минеральных землях и мелкозалежных болотах. Это сравнение показывает, что в отдельные короткие интервалы времени (декады, месяцы) наблюдаются значительные недостатки влаги в почве по сравнению с оптимально необходимыми для нормального роста и развития основных сельскохозяйственных культур, выращиваемых на осушаемых минеральных и заболоченных землях, среди которых основные площади отводятся под зерновые (55%), травы (25%) и пропашные (20%). В это же время формируется самый низкий сток в речных системах, который используется на орошение. Чтобы оросить 1 га площади в засушливые годы, полностью используя речной сток в его естественном календарном ходе, необходимо собрать сток со значительно большей площади водосбора (табл. 1).

Таблица 1

Площадь водосбора естественного речного стока (га), необходимого для восполнения дефицитов почвенной влаги на 1 га осушенных минеральных и заболоченных земель (при условии полного использования стока)

Бассейн реки	Повторяемость расчлененных засушливых лет	Май	Июнь	Июль	Август	Сентябрь	За сезон V—IX
Западной Двины	раз в 4 года	0	0,6	2,0	3,1	0,4	0,7
Верховье Немана, Березины, Сожа		0	0	4,3	4,1	0,5	1,5
Низовье Немана, Березины, Сожа, верх. Птичи		0	4,0	11,5	11,5	1,4	4,1
Припяти		0	8,2	11,5	8,9	1,7	4,6
Западной Двины	раз в 10 лет	0,2	4,8	2,6	3,5	0,2	1,8
Верховье Немана, Березины, Сожа		0,3	5,8	4,4	3,3	0,1	3,0
Низовье Немана, Березины, Сожа, верх. Птичи		1,1	12,8	19,2	8,2	0,3	7,2
Припяти		1,2	23,0	23,0	10,5	5,8	9,6

В различных бассейнах рек формирование стока имеет свои особенности. Это относится как к количественным показателям объемов, так и к их внутрисезонному распределению. Поэтому, несмотря на небольшую разницу в величине дефицитов почвенной влаги для разных бассейнов, необходимая площадь водосбора естественного речного стока для восполнения этих дефицитов по водосборам резко изменяется. Наиболее обеспечены водой бассейны Западной Двины, верховья Немана, Березины и Сожа. Здесь в засушливые сезоны с повторяемостью раз в четыре года отношение необходимой площади водоисточника к площади орошения при условии полного использования стока и без учета потерь воды колеблется для объемов месячных интервалов в пределах 0—4,3 га/га и для сезонных объемов в пределах 0,7—1,5 га/га. В более засушливые сезоны с вероятностью повторения раз в 10 лет эти отношения увеличиваются до 0,2—5,8 для месячных объемов стока и дефицита и до 1,8—3,0 для сезонных.

Значительно понижена водообеспеченность в водосборах нижнего течения рек Немана, Березины, Сожа и верховья Птичи. Здесь необходимая площадь водосбора для возможности восполнения дефицитов почвенной влаги на 1 га осушенных земель характеризуется такими же величинами, как для южной части республики в бассейне реки Припяти. В засушливые сезоны с вероятностью повторения раз в четыре года необходимая площадь водосбора (с полным использованием стока для покрытия дефицитов почвенной влаги без учета потерь воды при подаче) составляет для объемов месячных интервалов от 0 в мае до 11,5 га/га в июле и августе. Для сезонных объемов стока и дефицитов почвенной влаги это отношение площади водосточника к площади орошения изменяется в пределах 4,0—4,6 га/га. В годы с более засушливыми сезонами с вероятностью повторения раз в 10 лет необходимая площадь водосбора определяется величиной от 1,1 в мае до 23 га/га в июне и июле. По сезонной величине объема стока и дефицита отношение площадей изменяется в пределах 7,2—9,6.

Приведенные в табл. 1 расчеты показывают соотношение наличных ресурсов поверхностных вод h и дефицитов почвенной влаги D в соответствии с их внутрисезонным ходом в засушливые годы разной вероятности повторения. Для оценки возможного использования поверхностных вод необходимо исключить минимально допустимые расходы в водотоках, за которые можно принять бытовые расходы 95%-ной обеспеченности h_6 . Такую оценку можно сделать по бассейнам отдельных рек. В табл. 2 характеризуются отдельные водосборы рек северной части БССР и три водосбора южной территории (рек Ясельды, Бобриска, Орессы).

Удельные характеристики водных ресурсов зависят от величины водосборной площади водотока (табл. 2), его эрозионного вреза. Однако определяющими условиями являются географическое положение и связанные с ним климатические условия, а также местные условия формирования поверхностного и грунтового стока. В связи с этим соотношения K между ресурсами поверхностных вод ($h-h_6$) и потребностями воды на увлажнение сельскохозяйственных полей (D) значительно различаются как для отдельных бассейнов по территории, так и по внутрисезонному распределению во времени. Общим является то, что в средний маловодный и засушливый годы возможные для использования ресурсы поверхностных вод в их естественном календарном ходе не могут полностью обеспечить восполнение дефицитов почвенной влаги по всей территории республики. В отдельные декады вегетационного периода для увлажнения 1 га мелиорированных земель необходимо использовать речной сток с водосбора, в 25—30 раз большего по площади на севере республики и в 50—80 раз на юге. В некоторых южных водосборах в отдельные засушливые декады среднемаловодного года наблюдается сток меньше бытового 95%-ной обеспеченности, что указывает на отсутствие в эти декады возможных ресурсов для увлажнения почв (табл. 2).

Неравномерность во внутрисезонном распределении стока за вегетационный период может быть несколько сглажена при регулировании водного режима подпорными сооружениями за счет местного стока. В этом случае можно ориентироваться на соотношение сезонных сумм ресурсов поверхностных вод и дефицитов почвенной влаги (табл. 2). Использование суммарного объема стока ($h-h_6$) за наиболее напряженный по водопотреблению период вегетации (май — август) позволяет значительно увеличить ресурсы поверхностных вод по декадам в результате внутрисезонного перераспределения. Средние соотношения

Таблица 2

Внутрирассезонное декадное распределение ресурсов поверхностных вод в водосборе и дефицитов почвенной влаги на избыточно увлажненных землях после их осушения

Река—пункт	Площадь водосбора, км ²	Показатели	Средний маловодный год (P ≈ 85%)															Сумма за май—август, тыс. м ³ с 1 км ²
			май			июнь			июль			август			сентябрь			
			1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
р. Полота, п. Янково	618	h	9100	3800	3100	3500	2600	2020	1750	1670	1640	1280	1120	1150	1280	1260	1570	32,7
		$h-h_6$	8000	2700	2000	2400	1500	920	650	670	540	180	20	50	180	160	470	19,6
		D	0	1030	7210	22660	38110	13390	3090	3090	6180	4120	3090	1030	0	0	0	103
		$K = \frac{h-h_6}{D}$	—	2,62	0,28	0,106	0,040	0,068	0,21	0,22	0,088	0,044	0,0065	0,048	—	—	—	0,19
р. Виляя, п. Залесье	6840	h	6200	7600	5200	4000	3660	3140	2800	2700	2700	2400	2430	2820	2760	2560	2500	45,6
		$h-h_6$	4700	6100	3700	2500	2160	1640	1300	1200	1200	900	930	1320	1260	1060	1000	27,6
		D	0	1000	7000	22000	37000	13000	3000	3000	6000	4000	3000	1000	0	0	0	100
		$K = \frac{h-h_6}{D}$	—	6,1	0,53	0,114	0,058	0,126	0,43	0,40	0,20	0,22	0,31	1,32	—	—	—	0,28
р. Неман, п. Столбцы	4050	h	3600	6200	3400	2900	2510	2100	2000	1700	1500	1550	1600	2070	1520	1620	2120	21,1
		$h-h_6$	2400	5000	2200	1500	1500	900	800	500	300	350	400	870	320	420	920	16,7
		D	0	1000	7000	22000	37000	13000	3000	3000	6000	4000	3000	1000	0	0	0	100
		$K = \frac{h-h_6}{D}$	—	5,0	0,31	0,068	0,040	0,069	0,27	0,167	0,50	0,087	0,133	0,87	—	—	—	0,17
р. Свислочь, п. Теребуты	3070	h	5650	4500	4250	3040	2500	2760	2400	2240	2340	2660	2420	2080	2040	2300	3200	36,8
		$h-h_6$	4250	3100	2850	1640	1100	1360	1000	840	960	1220	1020	680	640	900	1800	20
		D	0	1000	7000	22000	37000	13000	3000	3000	6000	4000	3000	1000	0	0	0	100
		$K = \frac{h-h_6}{D}$	—	3,1	0,40	0,075	0,030	0,105	0,33	0,28	0,16	0,30	0,34	0,68	—	—	—	0,20

р. Ясельда, п. Береза	916	h	8700	5700	4200	1200	860	610	510	220	220	270	340	420	300	390	480	23,2
		$h-h_6$	8460	4460	3960	960	620	370	270	—20	—20	30	100	180	60	150	240	19,3
		D	0	1160	9280	26680	44080	15080	3780	3480	5800	3480	3480	0	0	0	0	116
		$K = \frac{h-h_6}{D}$	—	3,86	0,43	0,038	0,014	0,025	0,071	—0,006	—0,004	0,009	0,029	—	—	—	—	0,17
р. Бобрин, п. Парохонск	1450	h	4700	2600	1310	1010	750	680	530	490	420	320	380	480	580	430	360	13,7
		$h-h_6$	4530	2430	1140	840	580	510	360	320	250	150	210	310	410	260	190	11,6
		D	0	1160	9280	26680	44080	15080	3780	3480	5800	3480	3480	0	0	0	0	116
		$K = \frac{h-h_6}{D}$	—	2,10	0,123	0,031	0,013	0,034	0,095	0,092	0,043	0,043	0,060	—	—	—	—	0,10
р. Оресса, п. Андреевка	3580	h	7500	5700	4000	2000	1620	1370	1180	1010	1040	850	750	720	840	800	1010	27,7
		$h-h_6$	6930	5730	3430	1430	1050	800	610	440	470	280	180	140	270	239	440	21,5
		D	0	1160	9280	26680	44080	15080	3780	3480	5800	3480	3480	0	0	0	0	116
		$K = \frac{h-h_6}{D}$	—	4,95	0,37	0,054	0,024	0,053	0,016	0,126	0,081	0,080	0,052	—	—	—	—	0,18

Примечание. Обозначения: h — среднедекадный сток, $м^3/дек$ с $1 км^2$; h_6 — бытовой сток 95%-ной обеспеченности, $м^3/дек$ с $1 км^2$; D — дефицит почвенной влаги, $м^3/дек \cdot км^2$; K — отношение используемого стока к дефициту.

используемого стока к дефицитам почвенной влаги для декад за май—август составляют 0,17—0,20 для северной половины республики, 0,10—0,18 — для южной. Это значит, что при перераспределении местного стока подпорными сооружениями и обеспечении подачи этой воды в зону корнеобитания растений площадь водосбора нетто, необходимая для восполнения дефицитов влаги на 1 га сельскохозяйственных угодий, может уменьшиться соответственно до 5—6 га на севере и до 5,5—10,0 га на юге.

Приведенный анализ дефицитов почвенной влаги на избыточно увлажненных землях после их осушения и ресурсов поверхностных вод как в их естественном внутрисезонном ходе, так и при частичном перераспределении стока в период вегетации показывает, что в синхронном соотношении этих величин по отдельным декадам и суммам за вегетацию средnezасушливого года наблюдается значительное превышение дефицитов над объемами стока.

В случае годовичного регулирования стока для восполнения появляющихся в засушливые годы дефицитов почвенной влаги можно использовать летний сток этих лет за вычетом минимально необходимых расходов водотока (бытовых 95%-ной обеспеченности) и зарегулированный сток предшествующей весны. Эти объемы составят ресурсы весенне-летнего стока, которые могут быть использованы из водотоков в засушливые годы различной вероятности повторения. В случае отсутствия претендентов в других отраслях народного хозяйства они могут быть использованы на орошение земель. Расчеты по оценке ресурсов поверхностных вод при зарегулированном весеннем стоке и дефицитов почвенной влаги в засушливые годы для территории Белорусской ССР приводятся в табл. 3 и 4.

В табл. 3 для расчета принят год засушливый по осадкам теплого периода 75%-ной обеспеченности (вероятность повторения — раз в четыре года) с маловодным летним сезоном (июнь — сентябрь) 75%-ной обеспеченности стока. Исходя из типизации внутригодового распределения стока такому году соответствуют объемы весеннего стока, приведенные в графах 4 и 5. Ресурсы весенне-летнего стока определяются графой 7. Дефициты почвенной влаги могут появляться в течение теплого периода как после многоводной весны с большими влагозапасами на начало вегетации (графа 8), так и после маловодной весны с небольшими исходными влагозапасами в почве (графа 9). Имеются большие избытки воды после удовлетворения нужд сельского хозяйства на орошение. Для северной и центральной части Белоруссии сток с 1 км² площади водосбора в 1,1—3 раза превышает дефициты почвенной влаги на 1 км² сельскохозяйственных полей. Учитывая, что сельскохозяйственные угодья занимают лишь часть любого речного водосбора, водообеспеченность этих районов будет избыточной на принятый расчетный год. В бассейне реки Припять водообеспеченность значительно ниже, однако и здесь отношение объема ресурсов весенне-летнего стока с 1 км² к объему дефицитов почвенной влаги на той же единице площади сельскохозяйственных угодий изменяется в пределах 0,7—1,3. С учетом распаханности водосборов и для этого речного бассейна в засушливый теплый период с вероятностью повторения раз в четыре года водообеспеченность можно считать избыточной.

Иные соотношения в водообеспеченности и водопотреблении сельскохозяйственными культурами получаются в более засушливые годы.

В табл. 4 приводятся результаты расчетов для года с засушливым теплым периодом и маловодным летом при вероятности повторения раз

Таблица 3

Характеристика ресурсов максимально зарегулированного речного стока и дефицитов почвенной влаги на осушенных минеральных и заболоченных землях БССР в засушливый теплый период (повторяемость — раз в четыре года).

Гидрологический район	Градации водосборн. площадей, тыс. км ²	Летний сток h , мм, обеспеченностью $P=75\%$	Соответствующий сток весны (III—V)		Бытовой сток 95%-ной обеспеченности h , мм	Ресурсы весенне-летнего стока h , мм	Дефициты почвенной влаги, мм, при осадках теплового периода 75%-ной обеспеченности и водности весны		Отношение объема ресурсов весенне-летнего стока к объему дефицитов (на единицу площади водосбора)	
			h , мм	P , %			многоводной	маловодной	дефициты графы 8	дефициты графы 9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Северный	<5	22	143	39	15	150	50	103	3,0	1,46
Западный	1—10	31	96	40	18	109	59	101	1,85	1,08
	<1	20	100	—	9	111	59	101	1,88	1,10
Центральный	1—10	32	107	35	22	117	59	101	1,98	1,16
	<1	20	86	—	17	89	59	101	1,51	0,88
Восточный	<5	13	125	39	9	129	59	101	2,19	1,28
Левобережные притоки Припяти	1—10	20	88	40	7	101	81	110	1,25	0,92
	<1	9	73	—	2	80	81	110	0,99	0,73
Юго-восточные притоки правобережья Припяти	<6	8	82	38	1,4	89	89	106	1,0	0,84
Юго-западные притоки правобережья Припяти	1—10	21	56	40	11	66	89	106	0,74	0,62

Таблица 4

Характеристика ресурсов максимально зарегулированного речного стока и дефицитов почвенной влаги на осушенных минеральных и заболоченных землях БССР в засушливый теплый период (повторяемость — раз в 10 лет)

Гидрологический район	Градации водосбора площади, тыс. км ²	Летний сток <i>h</i> , мм, 90%-ной обеспеченности	Соответствующий сток весны (III—IV)		Бытовой сток, мм 95%-ной обеспеченности	Ресурсы весенне-летнего стока <i>h</i> , мм	Дефициты почвенной влаги, мм, при осадках теплового периода 90%-ной обеспеченности и весны		Отношение объема ресурсов весенне-летнего стока к объему дефицитов (на единицу площади водосбора)-	
			<i>h</i> , мм	<i>P</i> , %			многоводной	маловодной	дефициты графы 8	дефициты графы 9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Северный	<5	14	92	65	15	91	82	140	1,11	0,65
Западный	1—10	22	73	55	18	77	96	138	0,80	0,56
	<1	13	73		9	77	96	138	0,80	0,56
Центральный	1—10	25	84	55	22	87	96	138	0,91	0,63
	<1	14	60		17	57	96	138	0,59	0,41
Восточный	<5	9	86	70	9	86	96	138	0,90	0,62
Левобережные притоки Припяти	1—10	13	57	70	7	63	116	153	0,54	0,41
	<1	5	43		2	46	116	138	0,40	0,33
Юго-восточные притоки правобережья Припяти	<6	4,5	47	75	1,4	50,1	119	152	0,42	0,33
Юго-западные притоки правобережья Припяти	1—10	16	46	70	11	51	119	152	0,43	0,33

в 10 лет (обеспеченность 90%). В такие годы ресурсы весенне-летнего стока не всегда обеспечивают пополнение дефицитов почвенной влаги на всех сельскохозяйственных угодьях, даже при условии зарегулированности объемов весеннего половодья соответствующих лет. Избыточная водообеспеченность поверхностными водами в эти расчетные годы создается при многоводной весне в северной и центральной части республики. При маловодной весне на этой территории, когда дефициты почвенной влаги на сельскохозяйственных полях вследствие малой весенней влагозарядки большие, избыточная водообеспеченность за счет поверхностных вод может иметь место при распаханности водосборов менее 40—60%.

По условиям формирования водного режима, определяющего дефициты почвенной влаги на сельскохозяйственных угодьях после осушения избыточно увлажненных земель, и по гидрологическому режиму на водосборах, характеризующих ресурсы поверхностных вод, территория Белорусской ССР имеет различную водообеспеченность. В северной и центральной части зарегулированный сток поверхностных вод может обеспечить увлажнение сельскохозяйственных земель в засушливый год даже весьма редкой повторяемости (обеспеченность осадков и стока сезона 90% при маловодной весне). В бассейне реки Припяти (Полеская низменность) возможные для использования ресурсы поверхностных вод за весенне-летний период могут гарантировать полное обеспечение дефицитов почвенной влаги на сельскохозяйственных полях при распаханности водосборов не более 30—50%. Практически удельный вес сельскохозяйственных угодий в водосборе может быть большим. Кроме того, ресурсы поверхностных вод используются в народном хозяйстве комплексно с участием других потребителей. И если ставить задачу полного увлажнения почв на сельскохозяйственных угодьях, то на территории Полесья создается обстановка недостаточной водообеспеченности за счет поверхностных вод. Возникает необходимость использования местных подземных вод и речного стока смежных более северных водосборов. Приведенные материалы и анализ показывают возможности в водообеспеченности и водопотреблении на водосборах территории Белорусской ССР. Практическая реализация этих возможностей требует технических решений в конкретных условиях каждого объекта с учетом комплексного использования водных ресурсов.

П. И. Закржевский

ОЦЕНКА ВОДНОГО РЕЖИМА ОСУШЕННЫХ БОЛОТ В ВЕСЕННИЙ ПЕРИОД

Опыт использования осушенных болот БССР свидетельствует, что водный режим в весенний период является фактором, определяющим возможность и характер использования торфяно-болотных почв под посевы сельскохозяйственных культур.

В настоящее время значительная часть болот и заболоченных земель, подлежащих осушению, находится в долинах и поймах крупных рек — водоприемников. Эти земли подвержены затоплениям в многоводные весны и после регулирования водоприемников. На землях, подвергшихся затоплению, озимые зерновые гибнут.

Неблагоприятный водный режим после схода полых вод отодвигает срок сева яровых культур. Запаздывание с посевом последних обуславливает снижение урожая до 0,5 ц/га на один день опоздания [1].

При проектировании осушения болотных массивов оценка водного режима в весенний период, как правило, сводится к расчету водоприемника и магистральных каналов на сток заданной обеспеченности и определению расстояния между осушительными дренами на один расчетный случай. Считается, что расчет на сток принятого норматива обеспеченности автоматически гарантирует соответствие водного режима осушенного болота весной за многолетие для всех типов водосборов и расположения мелиорируемых объектов.

Следует отметить, что указанного расчета явно недостаточно для полноценной характеристики водного режима наиболее важного периода в работе мелиоративной системы на болоте. Нужна более развернутая характеристика, включающая: величины продолжительности и вероятности затопления участков, расположенных на различном удалении от водоприемника; режим снижения уровней грунтовых вод на территории, бывшей в затоплении и подтоплении, с учетом сроков схода полых вод и типичной метеорологической обстановки весны.

Таким образом, оценка водного режима осушенных болот в весенний период включает две группы задач: 1) расчеты водного режима в годы с конкретным ходом гидрологических и метеорологических условий; 2) получение оценки водного режима территории за многолетие.

Рассмотрим некоторые подходы решения указанных задач.

Режим затопления осушенных земель зависит от пропускной способности водоприемника и магистральных каналов, величины стока и его распределения во времени. Определенное влияние на величину затопляемой площади оказывает плановое положение магистральных каналов.

При поперечной схеме расположения магистральных каналов затопление развивается так. Возрастание расходов и уровней в водоприемнике создает подпор воде, текущей по магистральным каналам. По мере развития этого подпора и возрастания стока магистральных каналов из последних переливается вода и затопляются нижележащие осушительные карты до подъема воды в водоприемнике выше бровки. Дальнейшее повышение уровней воды в водоприемнике влечет образование общего потока по пойме поперек магистральных каналов. Указанный ход развития затопления наблюдался нами в половодье 1969 г. на объекте «Глубонец» Пружанского района. Поэтому при поперечной схеме расположения магистральных каналов в весенние периоды, близкие по водности к пропускной способности водоприемника, следует выполнять поверочные расчеты по развитию подпорных явлений и возникающих при этом затоплений. Существенным является учет повышенных сопротивлений от ледовых явлений (точнее снежных заносов в магистральных каналах).

Продольная схема размещения магистральных каналов обуславливает несколько иной характер развития затопления. В этом случае при подъеме уровней воды в водоприемнике затопление прибрежной полосы начинается при уровнях понижений бровки берега водоприемника. Перелившаяся через бровку вода попадает в осушители, затем по коллекторам в магистральный канал, вызывая соответствующее повышение уровней воды, а при недостаточной пропускной способности затопление окружающей территории. Такой процесс вначале охватывает верхнюю часть, распространяясь последовательно на нижерасположенные участки реки. До тех пор, пока суммарная пропускная способность водоприемника и магистрального канала, в который сбрасывается из осушителей перелившаяся из реки вода, больше суммарного стока реки и собственного стока канала, существенного затопления не будет. При недостаточной их суммарной пропускной способности затопливается вся полоса между ними в соответствии с рельефом местности. По мере возрастания расходов воды и соответствующего повышения уровней возникает прилив в систему следующего параллельного канала. В момент протекания через расчетный створ наибольшего суммарного расхода системы водоприемник — магистральные каналы образуется максимальное затопление на данном участке. Поверхность воды при таком развитии затопления имеет поперечный уклон от реки. Поэтому площадь затопления, установленная по кривой расходов водоприемника и его поймы, будет определена с некоторым завышением.

Вычисление площади затопления в таком случае ведется по суммарным кривым зависимости расходов воды от ее уровня. При построении суммарных кривых расходов $Q_n = f(H)$ пропускная способность берется для горизонтов с одинаковыми высотными отметками; вначале строится $Q_1 = f(H)$ для водоприемника и первого магистрального канала, затем $Q_2 = f(H)$ с добавлением второго магистрального канала для тех же отметок уровня и т. д. Выполненные определения режима затопления осушенных земель объекта «Морочь» показали, что учет перераспределения максимального стока по системе водоприемник — магистральные каналы уменьшил горизонты отметок затопления на 10—12 см. При плоском рельефе болот последнее заметно сказывается на величине площади затопления в весенний период.

Иложенный подход позволяет учесть специфику затопления осушенных земель в весенний период и наметить границы возможного размещения озимых зерновых культур.

Целесообразность использования затопливаемых весной осушенных торфяно-болотных земель для посевов яровых зерновых зависит от потерь урожая из-за запаздывания с их посевом, обусловленного временем схода полых вод и длительностью последующего понижения уровня грунтовых вод (УГВ) до требуемых этими культурами глубин.

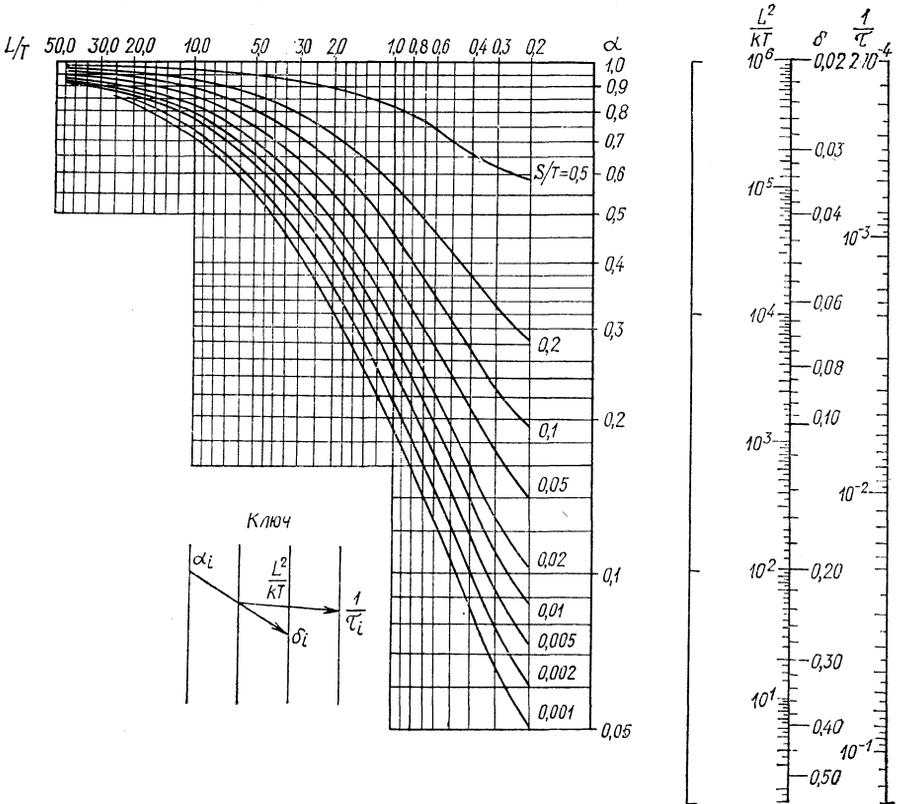


Рис. 1. Номограмма для определения параметра τ (времени стабилизации по С. Ф. Аверьянову).

Благоприятные условия водно-воздушного режима весной для сева яровых зерновых на осушенных торфяниках создаются при понижении уровня грунтовых вод до 50 см, картофеля и сахарной свеклы при уровне грунтовых вод на глубине 60—70 см.

Снижение уровней грунтовых вод на полях, бывших под затоплением, происходит под действием оттока в каналы и испарения; ход снижения замедляется подпорными явлениями и выпадающими осадками.

Весной при УГВ 50—60 см профиль влажности торфяной почвы близок к равновесному, капиллярная кайма в таком случае еще достигает поверхности, поэтому расход влаги на испарение восполняется капиллярным подтоком с соответствующим понижением уровней грунтовых вод. Выпавшие осадки по этим же причинам полностью уходят на повышение уровней грунтовых вод.

Режим снижения УГВ от действия осушительных каналов является неустановившимся в зависимости от режима спада воды в водоприемнике. Последний обуславливается транзитным стоком и, как правило, является сложной функцией времени. Однако последний можно аппроксимировать по участкам прямыми, т. е. линейным законом.

Поскольку при оценке снижения урожая яровых культур от запаздывания имеет значение каждый день, возникает необходимость в пасчете ежедневного режима воды на участках с неблагоприятным водным режимом. В таком случае для оценки осушительного действия каналов удобно пользоваться решениями, позволяющими определять скорость снижения уровней грунтовых вод. Зная скорость снижения для любого момента времени, не представит трудности определить снижение УГВ за сутки или другой расчетный отрезок времени.

Используя решение дифференциального уравнения Буссенеска

$$\frac{\partial h}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \quad (1)$$

при граничных условиях

$$h(0, x) = H_0; h(t, 0) = h_0 \text{ и } \frac{\partial h(t, L)}{\partial x} = 0, \quad (2)$$

приведенное С. Ф. Аверьяновым [2], мы получили зависимость скорости снижения уровней грунтовых вод на середине межканавной полосы для двух случаев:

а) при мгновенном понижении уровня воды в канале; б) при линейном законе понижения уровней воды в канале.

Зависимость для скорости снижения УГВ на середине межканавной полосы при мгновенном опускании уровня, представленной в долях последнего, является функцией относительного времени $\beta = \frac{t}{\tau}$, выраженного через время стабилизации

$$\tau = \frac{\delta L^2}{kT\alpha},$$

где δ — коэффициент водоотдачи; L — расстояние до середины межканавной полосы; k — коэффициент фильтрации; T — средняя мощность водоносной толщи; α — коэффициент висячести.

Формула имеет вид

$$\Phi'(\beta) = -\pi \sum_i^{\infty} i (-1)^{\frac{i+1}{2}} e^{-\frac{\pi^2}{4} i^2 \beta}, \quad (3)$$

где i — числовая последовательность, $i=1, 3, 5, \dots$; e — основание натурального логарифма.

При линейном законе снижения воды в канале скорость изменения УГВ на середине межканавной полосы, выраженная в долях снижения уровня воды в канале к рассматриваемому моменту времени, является также функцией относительного времени $\beta = \frac{t}{\tau}$.

Расчетная формула имеет вид

$$\Theta' \beta = \frac{4}{\pi \beta} \sum_i^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{i+1}{2}}}{i} e^{-\frac{\pi^2}{4} i^2 \beta} + \frac{16}{\pi^3 \beta^2} \sum_i^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{i+1}{2}}}{i^3} e^{-\frac{\pi^2}{4} i^2 \beta}. \quad (4)$$

Значения относительных скоростей $\Phi'(\beta)$ и $\Theta'(\beta)$ подсчитаны и представлены на рис. 2. По значению скорости можно подсчитать величину опускания УГВ в течение расчетного интервала времени, используя теорему Лагранжа для приращения функции.

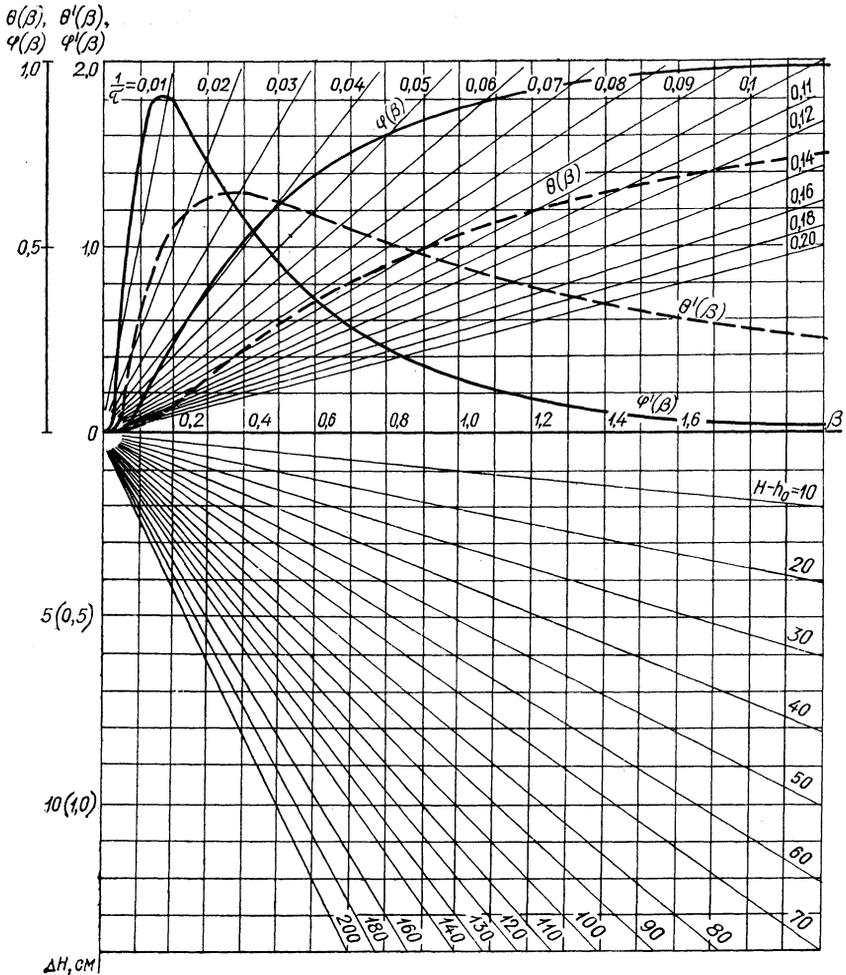


Рис. 2. Номограмма для определения величины снижения УГВ на середине межканавной полосы: по кривым $\varphi(\beta)$ и $\varphi'(\beta)$ — при мгновенном опускании уровней в канале; по кривым $\theta(\beta)$ и $\theta'(\beta)$ — при снижении уровней в канале по линейному закону.

Расчетная зависимость имеет такой вид:

$$\Delta H = \theta'(\beta + \Delta\beta)_{\text{ср}} \frac{\Delta t}{\tau} (H_0 - h_0), \quad (5)$$

где $\theta'(\beta + \Delta\beta)_{\text{ср}}$ — значение относительной скорости снижения УГВ (производной) в течение интервала $(\Delta\beta)$; β — относительное время от возникновения возмущения в канале до расчетного момента t ; $\Delta\beta = \frac{\Delta t}{\tau}$ — относительная длительность расчетного интервала времени Δt ; $H_0 - h_0$ — опускание уровня воды в канале (величина возмущения за время от $t=0$ до рассматриваемого момента t).

Выполнение расчета облегчают построенные нами номограммы (рис. 1, 2). Первая служит для определения времени стабилизации или

обратной величины $\frac{1}{\tau}$. Вторая дает возможность определять снижение УГВ для суточного интервала времени при известном времени возникновения возмущения в канале (если последнее неизвестно, но имеются данные о положении УГВ на начало расчетного интервала).

Отмеченное обстоятельство важно при выполнении расчетов по динамике УГВ весной, когда требуется учесть переменность величин испарения и осадков.

В указанном случае расчет режима УГВ ведется балансовым способом по последовательным интервалам времени; снижение под действием канала определяется по формуле (3), а от метеорологических условий по зависимости

$$\Delta H_2 = 0,1 \frac{u - o}{\delta}, \quad (6)$$

где $(u - o)$ — испарение за вычетом осадков в расчетные сутки; δ — водоотдача.

Общее снижение УГВ от работы каналов и метеоусловий равно их сумме

$$\Delta H = \Delta H_1 + \Delta H_2. \quad (7)$$

Имея даты схода воды паводковых вод по выделенным зонам, а также используя методику расчета снижения УГВ, нетрудно установить даты опускания уровней до расчетной глубины и запаздывания с посевом сельскохозяйственных культур по отношению к оптимальным срокам. Это дает возможность оценить потери урожая, обусловленные неблагоприятными условиями водного режима, конкретной гидрометеорологической обстановкой весны.

Сток и гидрометеорологические условия весны подвержены значительной изменчивости, что обуславливает недостаточность оценки водного режима осушенных болот весной по одному или даже нескольким половодьям. Существенное влияние на величину недобора сельскохозяйственной продукции оказывает длительность и частота неблагоприятных условий. Поэтому применяемые при технико-экономических обоснованиях показатели оценки водного режима должны отражать повторяемость и длительность затопления разных зон осушенных болот, а также запаздывания сроков сева яровых культур. Этим требованиям при установлении характеристик затопления соответствует комплексный график, объединяющий зависимость площади (ширины) затопления от максимальных расходов и кривые обеспеченности площадей затопления заданной продолжительности (рис. 3). Такой график позволяет оценивать площади затопления и их вероятности для ряда вариантов регулирования русел. Последнее основано на известном положении, что пропускная способность поймы практически одинакова при разных степенях регулирования русла.

Учитывая, что между длительностью затопления и частичной гибелью озимых есть связь, предложенный график позволяет дать многолетнюю характеристику ущербов от размещения озимых по зонам вдоль водоприемника.

Пусть в n -польном севообороте a полей занято озимыми. Тогда вероятность посева озимых на любом поле севооборота составляет $\frac{a}{n} = \mu$ долю и равна удельному весу озимых зерновых в севообороте. Вероят-

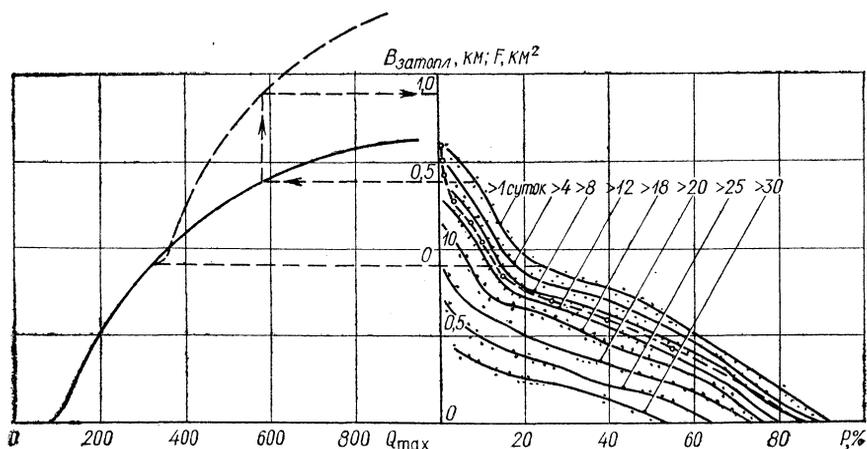


Рис. 3. Комплексный график связи вероятности и продолжительности затопления территории в полновье; штриховая линия — средние за многолетние потери урожая озимых от затопленных весной, %.

ность затопления каждой зоны зависит от ее места и может быть охарактеризована по связи $P_i(B_{cp}, Q_{max})$.

Вероятность того, что озимые посеяны на поле i и что оно будет затоплено, равна произведению их вероятностей

$$v_i = \frac{a}{n} P_i.$$

Если в данной зоне размещены все поля севооборота, то число полей, занятых озимыми ежегодно, равно a . Тогда вероятность затопления озимых в данной зоне равна сумме вероятностей затопления озимых на каждом поле:

$$v = \sum_1^a \frac{a}{n} P_i = P.$$

Таким образом, если в каждой зоне будет расположен севооборот, то вероятность затопления озимых равна вероятности затопления этих зон. Она складывается из частных, соответствующих интервалам длительности затопления от 1 до t суток.

Частные значения вероятности соответствуют интервалам между i и $i+1$ изолиниями, что обуславливает возможность определения потерь урожая разной повторяемости и средних за многолетие.

Средние за многолетие потери урожая озимых от затопления весной рассчитывают по формуле

$$\Delta Y = (\Delta P_1 k_1 + \Delta P_2 k_2 + \dots + \Delta P_i k_i) 100\%,$$

где ΔP_i — вероятность затопления рассматриваемой зоны длительностью i дней, равная интервалу между i и $i+1$ изолиниями на комплексном графике; k_i — потери урожая озимых при затоплении длительностью i дней.

Подсчитанные указанным способом и нанесенные на комплексный график потери характеризуют закономерность изменения последних по территории. Эта зависимость служит для выделения зон, где допустимо сеять озимые, и обоснования степени регулирования водоприемника. Например, согласно данным комплексного графика (рис. 3), на участках, удаленных в среднем на 1 км от русла реки, гибель озимых будет составлять 14% в среднем за многолетие.

Оценка степени гибели озимых в зависимости от длительности весеннего затопления принята по данным Новгородского опорного пункта СевНИИГиМ [3, 4]. В рассматриваемой зоне в 12% всех лет возникает необходимость сеять вместо озимых яровые культуры, т. е. зона для посева озимых малопригодна. В зоне, удаленной на 1,5 км от реки, средние за многолетие потери составят 2,5%, а с повторяемостью один раз в 30—40 лет — до 34%. Необходимость пересева здесь может возникнуть примерно один раз в 50 лет. Приведенные количественные показатели являются достаточно объективными и позволяют обосновать зону, до которой можно еще использовать в севообороте озимые зерновые.

Комплексный график (рис. 3) соответствует естественному руслу реки водоприемника. Однако его можно использовать для оценки возможных потерь урожая озимых и выделения границ зон, где и после регулирования водоприемника целесообразно сеять озимые. В указанном случае в левой части комплексного графика достраивается зависимость $Q_{\max} = f(B_{\text{ср}})$ от значения пропускной способности отрегулированного русла (в приведенном случае $Q_{\max} = 320 \text{ м}^3/\text{сек}$). Этому расходу Q_{\max} соответствует ширина затопляемой поймы после регулирования русла $B_{\text{ср}} = 0$. Учитывая новое положение начала отсчета и направление зависимости $Q = f(B_{\text{ср}})$, по графику определяем, что если до регулирования русла допустимая зона находилась на удалении 1,5 км ($Q = 580 \text{ м}^3/\text{сек}$), то после регулирования водоприемника она уже будет находиться в среднем на удалении 0,95 км от реки.

Аналогичный подход правомерен и для оценки потерь от запаздывания с посевом яровых культур. В этом случае на комплексном графике вместо длительности затопления будут иметь место изолинии величины запаздывания с посевом яровых культур. Это позволит оценить потери урожая и наметить оптимальные зоны размещения последних на осушаемой территории.

Таким образом, предлагаемый способ расчета и оценки водного режима в весенний период позволяет получить количественные характеристики, обуславливающие характер использования и размещения сельскохозяйственных культур по территории осушаемого массива.

Литература

1. С. И. Тризно. Основы агротехники и селекции зерновых культур на торфяно-болотных почвах БССР. Минск, 1962.
2. С. Ф. Аверьянов. Об осушении низинных болот. Научные записки МГМИ, вып. 19, 1956.
3. П. В. Денисов, М. Ф. Стихин. Озимая рожь и пшеница в нечерноземной полосе. Л., 1965.
4. А. И. Ивицкий. Исследование норм осушения болот. Труды БелНИИМиВХ, т. VIII. Минск, 1958.

Н. П. Артемьева, И. М. Лившиц

ПРИМЕНЕНИЕ КРИТЕРИЕВ РАЗЛИЧИЯ ДЛЯ АНАЛИЗА ОДНОРОДНОСТИ ЛЕТНИХ И ЗИМНИХ МИНИМУМОВ РЕК ПОЛЕССКОЙ НИЗМЕННОСТИ

Минимальные расходы на исследуемой территории наступают как летом, так и зимой в период устойчивых морозов, когда поверхностный сток в реке или полностью отсутствует, или очень незначителен. Основным источником питания в эти периоды является подземный сток.

Проведенные исследования (табл. 1) фактических многолетних (до 1967 г. включительно) летних и зимних минимумов (суточных и месячных) показали, что для каждой данной реки:

1) отношение нормы минимального суточного расхода летней межени к норме минимального расхода зимней межени для исследуемых рек колеблется от 1,15 до 0,60 для 82% пунктов;

2) отношение нормы минимального месячного расхода летней межени к норме минимального расхода зимней межени колеблется от 1,0 до 0,60 для 50% пунктов;

3) отношение коэффициентов вариации летних и зимних минимальных суточных расходов находится в пределах 1,25—0,70 для 75% пунктов;

4) отношение коэффициентов вариации летних и зимних минимальных месячных расходов находится в пределах 1,25—0,70 для 78% пунктов.

Принимая во внимание, что минимумы летней и зимней межени имеют одинаковый источник питания и достаточно близкие абсолютные значения расходов и коэффициентов вариации, можно сделать предположение об однородности статистических выборок летних и зимних минимумов на территории Полесья.

Иными словами, нулевая гипотеза, подлежащая проверке, заключается в предположении, что измеренные расходы летней и зимней межени являются выборками из одной генеральной совокупности. Проверка нулевой гипотезы может быть произведена с помощью критериев различия.

Существуют параметрические и непараметрические порядковые критерии различия [1—4]. Все они основаны на предположении об отсутствии внутрирядной и межрядной корреляции.

Параметрические критерии различия получили свое название потому, что анализ однородности производится путем сравнения параметров выборок. Они применимы только к нормальным распределениям. К параметрическим критериям различия относятся критерий Стьюдента, Фишера, критерий χ^2 Пирсона и др.

Критерий Стьюдента применяется в том случае, когда интересуются различием выборок по средним значениям.

Критерий Фишера позволяет установить однородность (или различие) выборок по стандартным отклонениям. Критерий Фишера задается отношением дисперсий выборок:

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2}. \quad (1)$$

Условием однородности двух выборок является выполнение неравенства

$$\frac{s_1^2}{s_2^2} < F\beta; \quad (2)$$

F_β — критические значения F при уровне значимости β — содержатся в таблицах, приведенных в работах [1—4].

Непараметрические, порядковые критерии различия не требуют каких-либо предположений о характере распределения выборок, а также предварительного определения их параметров.

Порядковые критерии позволяют установить различие выборок как по средним значениям (критерии Колмогорова — Смирнова, Манна—Уитни, Ван дер Вардена, Вилкоксона и др.), так и по характеру рассеяния (модифицированный ранговый критерий и др.).

Остановимся коротко на описании использованных критериев. Одним из наиболее чувствительных (мощных) порядковых критериев является критерий Колмогорова — Смирнова [3, 4]. Этот критерий основан на сравнении двух эмпирических функций распределений.

Пусть имеются две выборки x_i и y_i объемами n_x и n_y . Определяется максимальная разность эмпирических обеспеченностей

$$\Delta \rho_\beta = p(x) - p(y), \quad (3)$$

где $p(x) = \frac{m_x}{n_x}$; $p(y) = \frac{m_y}{n_y}$. Здесь $m_x(m_y)$ — порядковый номер величины $x(y)$ в ранжированном ряду.

Полученная максимальная разность эмпирических обеспеченностей сравнивается с критической при уровне значимости β :

$$\Delta \rho_\beta = \sqrt{\frac{1}{2} \ln \frac{2}{\beta} \left(\frac{1}{n_x} + \frac{1}{n_y} \right)}. \quad (4)$$

Предположение об однородности исследуемых выборок принимается при $\Delta \rho_{\beta \max} < \Delta \rho_\beta$, отвергается при $\Delta \rho_{\beta \max} > \Delta \rho_\beta$.

Для применения критерия Манна — Уитни исследуемые выборки располагаются в один ранжированный ряд. Все члены ряда нумеруются по порядку их расположения. Обозначим через r_x номера x_i и через r_y номера y_i . Находятся суммы

$$W_x = \sum r_x, \quad W_y = \sum r_y. \quad (5)$$

При достаточно больших объемах выборок распределение сумм W_x и W_y приближается к нормальному со средними значениями:

$$\overline{W_x} = \frac{n_x(n+1)}{2}, \quad \overline{W_y} = \frac{n_y(n+1)}{2} \quad (6)$$

Таблица 1

Река—пункт	Площадь водо- сбора, км ²	Минимальные суточные расходы									Минимальные среднемесячные расходы								
		Лето			Зима			Критерий Колмогорова— Смирнова			Лето			Зима			Критерий Колмогорова— Смирнова		
		n	\bar{Q}	C_V	n	\bar{Q}	C_V	$\Delta\rho_{\Sigma}$	$\Delta\rho_{0,05}-\Delta\rho_{0,01}$	Оцен- ка H_0	n	\bar{Q}	C_V	n	\bar{Q}	C_V	$\Delta\rho_{\Sigma}$	$\Delta\rho_{0,05}-\Delta\rho_{0,01}$	Оцен- ка H_0
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Припять—Мозырь	97200	81	135,0	0,51	78	114,3	0,54	0,23	0,22 ÷ 0,26	±	83	146,0	0,53	84	171,0	0,51	0,19	0,21 ÷ 0,25	+
Птичь—Лучицы	8770	60	12,3	0,51	57	15,5	0,34	0,30	0,25 ÷ 0,30	—	62	15,5	0,47	61	20,7	0,49	0,38	0,25 ÷ 0,30	—
Вить—Борисовщина	782	29	0,26	0,20	27	0,33	0,82	0,16	0,36 ÷ 0,43	+	29	0,33	0,85	28	0,59	0,97	0,33	0,36 ÷ 0,47	+
Птичь—Кринка	2010	42	1,32	0,39	38	3,3	0,38	0,39	0,30 ÷ 0,36	—	43	2,94	0,41	40	4,01	0,39	0,50	0,30 ÷ 0,36	—
Уборть—Злодин	5260	38	2,50	1,72	38	4,10	0,85	0,24	0,31 ÷ 0,37	+	39	2,91	0,74	38	6,65	0,93	0,30	0,31 ÷ 0,37	+
Горинь—Речица	27000	39	26,7	0,32	39	31,1	0,40	0,21	0,31 ÷ 0,37	+	40	30,7	0,38	40	42,6	0,46	0,35	0,30 ÷ 0,36	±
Меречанка—Ставок	118	17	0,086	0,67	16	0,074	0,55	0,22	0,47 ÷ 0,57	+	17	0,12	0,48	17	0,20	0,52	0,41	0,47 ÷ 0,56	+
Словечна—Кузьмичи	914	33	0,31	0,97	33	0,57	0,84	0,39	0,34 ÷ 0,40	±	33	0,48	0,85	33	1,14	0,89	0,42	0,34 ÷ 0,41	—
Морочь—Мацкевичи	313	20	0,20	0,40	18	0,21	0,43	0,27	0,44 ÷ 0,53	+	20	0,32	0,56	20	0,39	0,77	0,20	0,45 ÷ 0,54	+
Лань—Локтыши	935	20	0,84	0,32	19	0,82	0,26	0,14	0,44 ÷ 0,52	+	20	1,11	0,31	20	1,57	0,50	0,40	0,43 ÷ 0,52	+
Случь—Новодворцы	910	37	0,31	1,00	36	0,58	0,62	0,43	0,32 ÷ 0,38	—	37	0,47	0,96	37	0,91	0,62	0,43	0,32 ÷ 0,38	—
Случь—Ленин	4260	12	4,30	0,61	11	6,11	0,51	0,49	0,56 ÷ 0,68	+	13	5,45	0,55	13	7,41	0,50	0,23	0,53 ÷ 0,64	+
Чертьень—Некра- шевка	445	34	0,11	0,66	34	0,26	0,62	0,47	0,33 ÷ 0,40	—	35	0,16	0,69	34	0,52	0,90	0,44	0,33 ÷ 0,39	—
Оресса—Верхутино	520	35	0,55	0,60	32	0,65	0,54	0,19	0,33 ÷ 0,40	+	35	0,76	0,70	34	1,02	0,64	0,32	0,33 ÷ 0,39	+

Оресса—Любань	1290	18	2,02	0,60	18	2,29	0,41	0,13	0,45 ÷ 0,56	+	18	2,63	0,58	18	3,49	0,45	0,39	0,45 ÷ 0,54	+
Оресса—Андреевка	3580	38	4,86	0,52	39	6,07	0,43	0,33	1,31 ÷ 0,37	±	39	5,84	0,51	39	8,10	0,50	0,36	0,31 ÷ 0,37	±
Ведрич—Демехи	1010	22	0,58	0,60	22	0,82	0,62	0,27	1,41 ÷ 0,49	+	22	0,89	0,78	22	1,42	0,66	0,23	0,41 ÷ 0,49	+
Ведрич—Бабичи	438	26	0,25	0,56	27	0,34	0,70	0,32	1,37 ÷ 0,45	+	26	0,40	0,72	27	0,57	0,72	0,36	0,37 ÷ 0,45	+
Уза—Прибор	680	34	0,34	0,44	33	0,40	0,55	0,22	0,33 ÷ 0,40	+	34	0,57	0,86	35	0,66	0,56	0,30	0,33 ÷ 0,39	+
Ясельда—Сенин	5110	23	3,35	0,57	22	4,85	0,76	0,28	0,40 ÷ 0,48	+	23	3,95	0,53	23	6,99	0,79	0,30	0,40 ÷ 0,48	+
Ясельда—Береза	916	28	0,59	0,86	27	0,91	0,66	0,46	0,37 ÷ 0,44	—	29	0,79	0,87	29	1,57	0,76	0,35	0,36 ÷ 0,43	+
Бобрик—Парохонск	1450	32	0,79	0,94	32	1,22	0,75	0,25	0,37 ÷ 0,41	+	33	1,20	0,85	32	1,87	0,71	0,41	0,34 ÷ 0,41	—
Цна—Дятловичи	969	14	0,34	0,79	12	0,78	0,79	0,35	0,53 ÷ 0,64	+	14	0,43	0,70	13	1,16	0,82	0,64	0,52 ÷ 0,63	—
Турья—Ковель	1480	33	0,36	1,36	34	0,64	0,81	0,41	0,33 ÷ 0,40	—	36	0,58	1,33	35	1,62	1,14	0,38	0,32 ÷ 0,39	±
Стырь—Луцк	7200	40	11,3	0,32	39	14,0	0,30	0,29	0,30 ÷ 0,37	+	41	13,7	0,32	41	20,9	0,39	0,54	0,30 ÷ 0,36	—
Радостевка—Тройца	316	12	0,24	0,56	11	0,26	0,66	0,21	0,57 ÷ 0,68	+	12	0,37	0,57	12	1,18	0,76	0,67	0,56 ÷ 0,67	—
Тня—Броники	982	24	0,092	0,82	25	0,23	1,13	0,27	0,39 ÷ 0,47	+	26	0,14	0,86	27	0,89	1,55	0,45	0,37 ÷ 0,45	—
Уж—Полесское	5690	50	2,05	0,77	48	3,05	0,53	0,28	0,29 ÷ 0,33	+	49	3,05	0,74	50	5,66	0,74	0,40	0,28 ÷ 0,33	—
Смолка—Суслов	632	22	0,065	0,68	21	0,103	1,10	0,33	0,41 ÷ 0,50	+	22	0,12	0,79	22	0,67	1,51	0,59	0,41 ÷ 0,49	—
Грезля—Давыдки	558	11	0,17	0,76	10	0,25	0,52	0,45	0,60 ÷ 0,71	+	11	0,26	0,58	11	0,80	0,90	0,64	0,58 ÷ 0,70	±

Примечания: 1. Для рек Стырь—Шуровцы, Иква—Млыновец, Стоход—Любешов, Бережанка—Рудня, Уж—Коростень, Уборть—Рудня, Уборть—Перга, не включенных в таблицу, летние и зимние минимумы оказались однородными. 2. Знаком + («плюс») обозначен случай, когда нулевая гипотеза принимается; знаком — («минус») — отвергается; ± («плюс» и «минус») — сомнительна.

и среднеквадратическими отклонениями:

$$\sigma_{W_x} = \sigma_{W_y} = \sqrt{\frac{n_x n_y (n_x + n_y + 1)}{12}}, \quad (7)$$

где $n = n_x + n_y$. Здесь n_x, n_y — объемы исследуемых выборок.

Значимость отклонения меньшей из полученных сумм, скажем W_x от \bar{W}_x , оценивается по величине u_β :

$$u_\beta > \frac{\bar{W}_x - W_x}{\sigma_{W_x}}, \quad (8)$$

где β — уровень значимости.

В настоящей работе были приняты два уровня значимости, равные 5 и 1%. При этом если вычисленные значения критериев по приведенным формулам оказывались ниже критических значений при 5%-ном уровне значимости, то нулевая гипотеза принималась. Если вычисленные значения превышали критические при 1%-ном уровне значимости, то нулевая гипотеза отвергалась. Если вычисленные значения попадали в интервал критических значений, то возможность принять нулевую гипотезу считалась сомнительной.

Опыт применения порядковых критериев для анализа гидрологических рядов [5, 6] показал, что они дают хорошо согласующиеся результаты при сравнительно небольших объемах вычислений. Критерий Колмогорова — Смирнова является одним из наиболее чувствительных критериев, а по методике построения — одним из наиболее простых. Поэтому в настоящей работе он и был использован для анализа однородности летних и зимних минимумов рек Полесья.

В табл. 1 приведены результаты проведенного анализа и даны значения максимальных разностей эмпирических обеспеченностей Δr_β и критические значения Δr_β при 1%-ном и 5%-ном уровнях значимости, вычисленные по формуле (4).

Исследования показали, что для большинства рек Полесья различие между измеренными минимальными расходами в засушливый период летом и в период устойчивых морозов незначимо. Для 40 исследованных пар (лето — зима) суточных минимумов значимым оказалось расхождение для 10 рек. Несколько худшие результаты получены для месячных минимумов. Так, из 38 исследованных пар неоднородными оказались расходы 16 рек.

Различие минимальных расходов, сформированных в летнюю и зимнюю межени, может быть следствием как различия генетических факторов, так и неодинаковой точности установления низких расходов для летнего и зимнего периодов (учет зарастаемости, ледовых явлений, выбор переходных коэффициентов от летних расходов к зимним и пр.).

Большинство пунктов с неоднородными суточными минимумами имеют достаточно длинный период наблюдения. Поэтому интересным представляется анализ однородности самих исследуемых выборок, т. е. проверка однородности выборки, например летних расходов реки Припяти у п. Мозырь, за первые годы наблюдений и последние. Такой анализ был проведен для 6 рек по летним и зимним расходам. Результаты приводятся в табл. 2 и 3.

Анализ показал, что для рек Припять у п. Мозырь и Птичь у п. Кринка неоднородными оказались выборки летних расходов, а для

Таблица 2

Река—пункт	Годы	Q_1				Q_3		
		n_d	Δp_{Σ}	$\Delta p_{0,05}-\Delta p_{0,01}$	Оценка H_0	n_3	Δp_{Σ}	Оценка H_0
Припять—Мозырь	1882—1906	25	0,52	0,39—0,46	—	25	0,16	+
	1934—1962	25				25		
Птичь—Лучицы	1895—1928	25	0,16	0,39—0,46	+	25	0,24	+
	1934—1962	25				25		
Словечна—Кузьмичи	1929—1950	16	0,44	0,48—0,58	+	16	0,44	+
	1951—1967	16				16		
Птичь—Кринка	1920—1937	18	0,53	0,46—0,55	±	17	0,18	+
	1951—1967	17				18		
Случь—Новодворцы	1926—1948	18	0,17	0,45—0,54	+	17	0,56	—
	1949—1967	18				18		
Чертьень—Некрашевка	1930—1949	17	0,29	0,47—0,56	+	17	0,18	+
	1950—1967	17				17		

Таблица 3

Река—пункт	Годы	n_d	n_3	Δp_{Σ}	$\Delta p_{0,05}-\Delta p_{0,01}$	Оценка H_0
Припять—Мозырь	1882—1906	25	25	0,48	0,39—0,46	—
	1934—1962	25	25	0,20	»	+
Птичь—Лучицы	1895—1928	25	25	0,48	»	—
	1934—1962	25	25	0,48	»	—
Словечна—Кузьмичи	1929—1950	16	16	0,44	0,48—0,58	+
	1951—1967	16	16	0,56	»	±
Птичь—Кринка	1920—1937	18	17	0,38	0,46—0,55	+
	1951—1967	17	18	0,46	»	±
Случь—Новодворцы	1926—1948	18	17	0,77	»	—
	1949—1967	18	18	0,33	0,45—0,54	+
Чертьень—Некрашевка	1930—1949	17	17	0,59	0,47—0,56	—
	1950—1967	17	17	0,41	»	+

реки случь у п. Новодворцы — зимние расходы, т. е. расходы за первые годы наблюдений и последние годы относятся к различным генеральным совокупностям.

Анализ летних и зимних суточных минимумов за периоды начальных лет наблюдений и последние годы показывает (табл. 3), что неоднородными оказались минимумы лета и зимы рек Припять, Случь и Чертьень в первые годы наблюдений, а в последние годы наблюдений летние и зимние минимумы этих рек однородны. На реках же Словечна и Случь летние и зимние минимумы были однородными в начальный период, а за последние годы наблюдений они оказались неоднородными.

Только для одной из исследованных рек (Птичь у п. Лучинцы) применяемая методика выявила, что все летние расходы принадлежат одной генеральной совокупности, а зимние — другой, т. е. будучи однород-

ными за весь период наблюдения (60 лет), летние и зимние минимумы неоднородны между собой.

Причинами различия как фазовооднородных, так и фазоворазнородных минимумов могут явиться различные факторы. Минимальные расходы рек формируются под влиянием сложного комплекса физико-географических и климатических условий. Выявление среди них факторов, обуславливающих различие между обоими минимумами, является задачей дальнейшего исследования.

Одной из причин различия летних и зимних минимумов может являться различное стояние уровней подземных вод летом и зимой. Исследование естественного режима уровней подземных вод на территории Припятского Полесья [8] показало, что амплитуды колебаний уровней подземных вод в зимний период на некоторых бассейнах меньше амплитуд колебания уровней за летне-осенний период. Это различие в высоте стояния уровней подземных вод может приводить к различным условиям дренирования подземных вод реками Полесья в летний и зимний периоды.

Различие в фазовооднородных минимумах может быть вызвано изменением условий на водосборных площадях, а также рядом других причин. Очевидно, что для каждого конкретного случая этот вопрос должен рассматриваться особо.

Известно, что статистическая неоднородность может быть обусловлена различием средних значений или рассеяния.

Критерий Колмогорова — Смирнова позволил установить различие минимальных расходов по средним значениям. Показания критерия Колмогорова — Смирнова подтверждаются критерием Манна — Уитни (табл. 4).

Таблица 4

Река—пункт	Число членов		Критерий Манна—Уитни			Критерий Фишера		
	n_1	n_2	u_x	$u_{0,05}-u_{0,01}$	Оценка H_0	$\frac{s_1^2}{s_2^2}$	$\left \frac{s_1^2}{s_2^2} \right _{0,05}$ — $\left \frac{s_1^2}{s_2^2} \right _{0,01}$	Оценка H_0
Припять—Мозырь	81	78	2,76	1,96—2,58	—	1,24	1,45—1,70	+
Птичь—Лучицы	60	57	4,54	»	—	1,36	1,55—1,85	+
Птичь—Кринка	42	38	3,01	»	—	1,50	1,70—2,12	+
Словечно—Кузьмичи	33	33	2,86	»	—	2,56	1,82—2,34	—
Случь—Новодворцы	37	36	3,60	»	—	1,35	1,75—2,21	+
Чертежь—Некрасhevка	34	34	4,06	»	—	4,58	1,80—2,30	—
Оресса—Андреевка	38	39	3,50	»	—	1,07	1,71—2,14	+
Ясельда—Береза	28	27	2,28	»	±	1,38	1,88—2,47	+
Турья—Ковель	33	34	5,22	»	—	1,12	1,82—2,34	+
Вырка—Сварыни	20	18	2,88	»	—	2,09	2,15—3,00	+

Для исследования однородности выборок по характеру рассеяния (стандартным отклонениям) можно применить критерий Фишера, так как исследуемые выборки суточных минимумов имеют распределения, близкие к нормальному.

Результаты проверки гипотезы однородности по критерию Фишера (табл. 3) также показали, что неоднородность суточных минимумов рек Полесья обусловлена различиями средних значений, так как большинство выборок (8 из 10 проверенных) по характеру рассеяния однородны.

Таким образом, проведенное исследование позволило установить, что для рек Полесья большая часть летних и зимних минимумов (суточных и месячных) однородна и они могут быть объединены в один статистический ряд.

Объединение летних и зимних минимальных расходов в одну совокупность увеличивает объем информации, что приводит к повышению точности оценок параметров объединенной совокупности по сравнению с параметрами составляющих ее выборок. Однако существенное увеличение объема информации достигается только при объединении корреляционно не связанных или слабо связанных рядов.

Для исследования этого вопроса были вычислены коэффициенты корреляции между зимними и летними минимумами, сопряженными в последовательности зима — последующее лето. Для такого сопряжения коэффициенты корреляции больше, чем для сопряжения лето — последующая зима [6], но тем не менее коэффициенты корреляции оказались низкими. Примерно для одной трети исследуемых выборок они получились отрицательными.

В табл. 5 показано число рек с различными величинами коэффициентов корреляции между минимальными зимними и летними расходами.

Таблица 5

Число рек с коэффициентом корреляции в интервалах r					Общее число рек
< 0	0—0,19	0,20—0,39	0,40—0,59	$> 0,60$	

Для суточных расходов

10 | 7 | 9 | 3 | 1 | 30

Для месячных расходов

8 | 9 | 3 | 2 | — | 22

Определяя тесноту связи для выборок сравнительно малых объемов и низкой тесноты связи, нельзя избежать элемента случайности в полученных значениях r , т. е. отличное от 0 выборочное значение r может быть случайным. Иными словами, выдвигается нулевая гипотеза об отсутствии корреляции между исследуемыми выборками.

Проверка значимости различия между значениями коэффициентов корреляции двух эмпирических совокупностей может производиться по критерию [4, 7]:

$$u_{z_1-z_2} = \frac{|z_1 - z_2|}{S_{z_1-z_2}} > u_{\beta}, \tag{9}$$

где z_1, z_2 — вспомогательная величина, взаимно однозначно связанная с r_1 и r_2 (коэффициентами корреляции сравниваемых совокупностей),

$$z = \frac{1}{2} \ln \frac{1+r}{1-r}; \tag{10}$$

u_{β} — критические значения;

$$S_{z_1-z_2} = \sqrt{\frac{1}{n_1-3} + \frac{1}{n_2-3}}. \quad (11)$$

Здесь n_1, n_2 — объемы совокупностей.

Проверка гипотезы об отсутствии корреляции между выборками равносильна проверке значимости различия между вычисленным r_1 и теоретическим $r_2=0$. Поскольку в теоретической совокупности предполагается $n=\infty$, то $z_2=0$ и $S_{z_1-z_2} = \frac{1}{\sqrt{n_1-3}}$. Выражение (11) можно записать так:

$$z_1 \sqrt{n_1-3} > u_\beta \quad (12)$$

или

$$z_1 > \frac{u_\beta}{\sqrt{n_1-3}}.$$

Таким образом, можно указать область критических значений z_1 для различных уровней значимости β и объемов выборок n . Так как z_1 однозначно связана с r , то критическая область может быть указана непосредственно для r . Критические значения коэффициентов корреляции приводятся в таблицах [4] для различных β и $(n-1)$. Нами приняты 1% - и 5% -ые уровни значимости. При этом считалось, что выборочный коэффициент корреляции значимо отличен от 0, если $|r| > r_{0,01}$; отклонение от 0 случайно, если $|r| < r_{0,05}$; значимость отклонения от 0 сомнительна, если $r_{0,05} \leq |r| \leq r_{0,01}$.

Значимыми оказались коэффициенты корреляции в 2 случаях из 52, значимость коэффициентов корреляции оказалась сомнительной в 5 случаях, и для 45 пар выборок из 52 исследованных корреляционная связь между вариантами не обнаружена.

Проведенное исследование показало, что минимальные суточные и среднемесячные расходы летней и зимней межени рек Полесья являются корреляционно независимыми, что показывает правомерность применения к ним критериев различия.

Объединение однородных корреляционно независимых величин в один статистический ряд приводит к увеличению объема информации почти в два раза, что позволяет более точно определить параметры кривых распределений. Методы определения точности и надежности выборочных параметров кривых распределения, основанные на построении доверительных интервалов для выборочных параметров, показывают, что увеличение объема информации в два раза приводит к сужению доверительного интервала почти в полтора (точнее $\sqrt{2}$) раза, т. е. точность выборочных параметров существенно повышается.

Выводы

1. Генезис летних и зимних минимальных расходов рек на территории Полесья позволяет считать их однородными для каждой отдельно взятой реки.

2. Статистический анализ однородности минимумов, произведенный с помощью критериев различия, показал, что большая часть рек имеет однородные летние и зимние минимумы.

3. Летние и зимние минимальные расходы являются корреляционно независимыми. Объединение их (для каждой отдельно взятой реки) в один статистический ряд приводит к увеличению объема информации, что позволяет более точно определить параметры кривых распределения минимальных расходов воды.

Литература

1. Б. Л. Ван дер Варден. Математическая статистика. М., 1960.
2. Н. В. Смирнов, И. В. Дунин-Барковский. Краткий курс математической статистики для технических приложений. М., 1959.
3. Л. Н. Бошев, Н. В. Смирнов. Таблицы математической статистики. М., 1965.
4. В. Ю. Урбах. Статистические методы в биологии и медицине. М., 1963.
5. М. Г. Красник, И. М. Лившиц. Опыт применения порядковых критериев при анализе гидрологических рядов. Сб. «Многолетние колебания стока и вероятностные методы его расчета». М., 1967.
6. М. Г. Красник, И. М. Лившиц. Расчет многолетних колебаний минимального стока. Сб. «Водное хозяйство Белоруссии». Вып. 1. Минск, 1971.
7. А. К. Митропольская. Техника статистических исчислений. М., 1971.
8. М. Ф. Козлов. Закономерности естественного режима подземных вод Припятского Полесья. Сб. «Режим и баланс подземных вод». Вып. 2. Минск, 1967.

В. Б. Хейнман

НОМОГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ КРИВОЙ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ С. Н. КРИЦКОГО И М. Ф. МЕНКЕЛЯ ПО СПОСОБУ Г. А. АЛЕКСЕЕВА

Кривые обеспеченности (интегральные кривые распределения) широко применяются в гидрологических расчетах мелиоративных систем при расчете паводочных и дождевых максимумов, предпосевных расходов и др. Графоаналитический способ определения параметров кривой распределения, разработанный Г. А. Алексеевым, основан на нахождении параметров непосредственно по эмпирической кривой обеспеченности. Метод заключается в следующем.

По сглаженной эмпирической кривой распределения находят x_5 , x_{50} , x_{95} — квантили уровня вероятности соответственно при $p=5\%$, 50% и 95% . Затем находят не стандартные параметры C_{sx} , σ_x , \bar{x} , а значения C_{sz} , α , \bar{z} , где

$$z = x^a. \quad (1)$$

Величина z распределена по нормальному закону.

Для нахождения этих параметров пользуются формулами:

$$S_z = \frac{2 \lg x_{50} - \lg x_5 - \lg x_{95}}{\lg x_5 - \lg x_{95}}, \quad (2)$$

$$\alpha = \frac{\lg k_5 - \lg k_{95}}{\lg x_5 - \lg x_{95}}, \quad (3)$$

$$\lg z = \alpha \lg x_{50} - \lg k_{50}. \quad (4)$$

Коэффициент скошенности S_z связан с коэффициентом асимметрии C_{sz} трансцендентной зависимостью, которая в пределах точности вычислений может быть выражена интерполяционной формулой

$$C_{sz} = 7,15 S_z.$$

Следовательно,

$$C_{sz} = 7,15 \frac{2 \lg x_{50} - \lg x_5 - \lg x_{95}}{\lg x_5 - \lg x_{95}}. \quad (5)$$

Входящие в формулы (3) и (4) модульные коэффициенты k_5 , k_{50} , k_{95} определяются по таблице ординат биномиальной кривой обеспеченности при $C_s=2C_\sigma$ как функции C_s .

Для нахождения ординат x_p искомой кривой обеспеченности $x_p = f(p)$ по формулам (5), (3), (4) находят сначала C_{sz} , α , \bar{z} [1], а затем производят вычисления по схеме (табл. 1).

Таблица 1

Обеспеченность p , %	1	2	3	и т. д.
$k_p = 1 + C_{sz}\Phi(p, C_{sz})$ (при $C_{sz} = 2C_{sz}$)				
$\lg k_p$				
$\lg z_p = \lg \bar{z} + \lg k_p$				
$\lg x_p = \frac{1}{\alpha} \lg z_p$				
x_p				

Как видно, построение кривой С. Н. Крицкого и М. Ф. Менкеля по способу Г. А. Алексеева требует громоздких вычислений по формулам и таблицам.

Нами разработан номографический метод нахождения ординат x_p кривой обеспеченности, заключающийся в том, что по номограмме, представленной на рис. 1, находим значение C_{sz} по трем опорным ординатам x_5 , x_{50} , x_{95} , а затем по номограмме (рис. 2 или 3) находим значения x_p .

Остановимся на описании конструирования номограмм. Записав уравнение (5) в виде

$$0,14C_{sz}(\lg x_5 - \lg x_{95}) - 2 \lg x_{50} + (\lg x_5 + \lg x_{95}) = 0,$$

приведем его к канонической форме Коши [2, 3].

Для этого уравнения построена номограмма с двумя параллельными прямолинейными шкалами переменных C_{sz} и x_{50} и бинарным полем (x_5, x_{95}).

После предварительных расчетов, подбора параметров, построения ряда эскизов получена номограмма, изображенная на рис. 1. Уравнения ее элементов приведены в табл. 2.

Таблица 2

Координаты	Шкала C_{sz}	Шкала x_{50}	Поле (x_5, x_{95})
x	0	100	$\frac{400}{\lg x_5 - \lg x_{95} + 4}$
y	$42C_{sz}$	$-150 \lg x_5 + 60$	$\frac{240 - 300(\lg x_5 + \lg x_{95})}{\lg x_5 - \lg x_{95} + 4}$

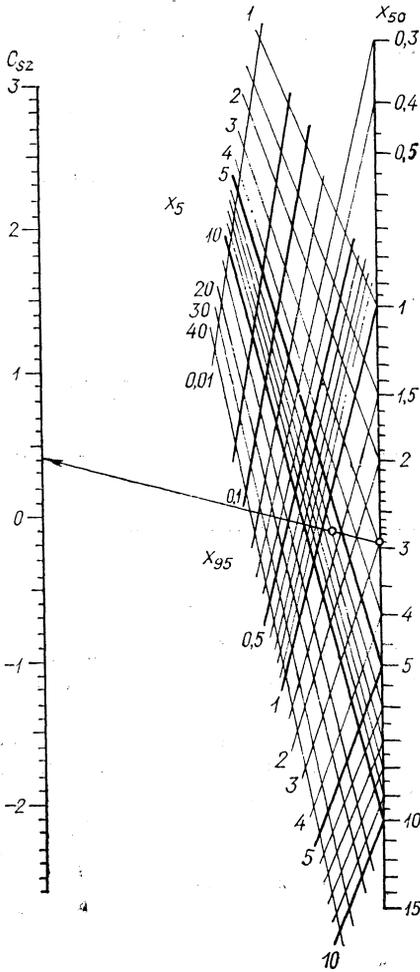


Рис. 1.

Чтобы построить номограмму для нахождения значений x_p при $C_{sz} > 0$, сделаны некоторые преобразования. Из уравнения (1) следует

$$z_p = x_p^\alpha$$

или

$$\lg x_p = \frac{1}{\alpha} \lg z_p.$$

Так как

$$k_p = \frac{z_p}{z},$$

то

$$\lg x_p = \frac{1}{\alpha} (\lg \bar{z} + \lg k_p).$$

Подставив в это уравнение значения α и $\lg \bar{z}$ из формул (3) и (4), получим

$$\begin{aligned} \lg x_p = & \lg x_{50} + (\lg x_5 - \lg x_{95}) \times \\ & \times \frac{\lg k_p - \lg k_{50}}{\lg k_5 - \lg k_{95}}. \end{aligned} \quad (6)$$

Выражение

$$\frac{\lg k_p - \lg k_{50}}{\lg k_5 - \lg k_{95}}$$

является функцией переменных C_{sz} и p , т. е.

$$\frac{\lg k_p - \lg k_{50}}{\lg k_5 - \lg k_{95}} = F(C_{sz}, p).$$

Уравнение (6) равносильно уравнению

$$\lg x_p - \lg x_{50} = \lg \frac{x_5}{x_{95}} F(C_{sz}, p)$$

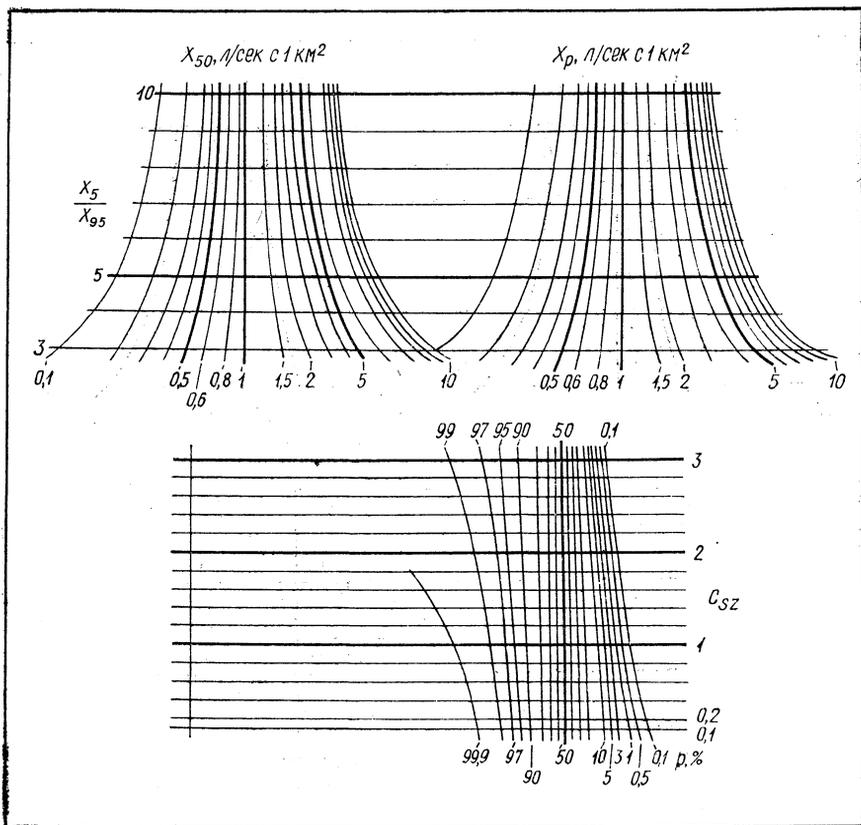
или

$$\frac{\lg x_p}{\lg \frac{x_5}{x_{95}}} - F(C_{sz}, p) = \frac{\lg x_{50}}{\lg \frac{x_5}{x_{95}}}. \quad (7)$$

Таким образом, уравнение (6) приведено к виду

$$f_{12} - f_{34} = f_{15}$$

и для него построена циркулярная номограмма [3].



$C_s < 0$
Рис. 2.

Для построения номограммы составляем систему

$$\left. \begin{aligned} f_{12} - f_{34} &= f_{15} - f_3 \\ g_1 - g_3 &= g_1 - g_3 \end{aligned} \right\}$$

где

$$f_{12} = \frac{\lg x_p}{\lg \frac{x_5}{x_{95}}}; \quad f_{34} = F(C_{sz}, p);$$

$$f_{15} = \frac{\lg x_{50}}{\lg \frac{x_5}{x_{95}}}; \quad f_3 = 0;$$

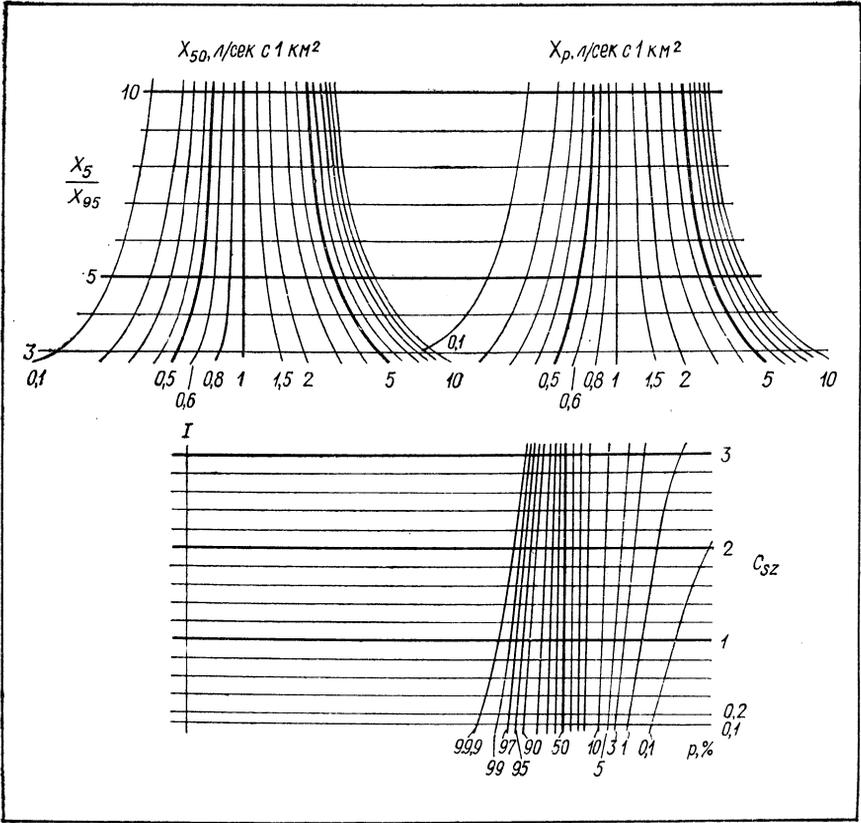
g_1, g_3 — произвольные функции соответственно аргументов

$$\frac{x_5}{x_{95}} \text{ и } C_{sz}.$$

Нами принято

$$g_1 = 10 \frac{x_5}{x_{95}}, \quad g_3 = 25 C_{sz}.$$

Номограмма приведена на рис. 2, а уравнения ее элементов — в табл. 3.



$C_{sz} < 0$

Рис. 3.

Таблица 3

Координаты	Поле $\left(x_p, \frac{x_5}{x_{95}}\right)$	Поле $\left(x_{50}, \frac{x_5}{x_{95}}\right)$	Фиксированная прямая I	Поле (C_{sz}, p)
x	$25 \frac{\lg x_p}{\lg \frac{x_5}{x_{95}}}$	$25 \frac{\lg x_{50}}{\lg \frac{x_5}{x_{95}}} - 105$	-105	$25F(C_{sz}, p)$
y	$10 \frac{x_5}{x_{95}}$	$10 \frac{x_5}{x_{95}}$	—	$25C_{sz} - 75$

Аналогично построена номограмма для $C_{sz} < 0$. В этом случае

$$F(C_{sz}, p) = \frac{\lg k_{100-p} - \lg k_{50}}{\lg k_{95} - \lg k_5}.$$

Номограмма изображена на рис. 3.

Пример. Даны три опорных значения модуля годового стока реки Туры у г. Тюмень: $x_5 = 5,9$ л/сек с 1 км^2 , $x_{50} = 2,9$ л/сек с 1 км^2 , $x_{95} = 1,3$ л/сек с 1 км^2 [1]. Построить кривую С. Н. Крицкого и М. Ф. Менкеля.

По номограмме (рис. 1) находим C_{sz} . Для этого прикладываем край линейки к точке шкалы x_{50} с пометкой 2,9 и точке бинарного поля (x_5, x_{95}) , соответствующей значениям $x_5 = 5,9$ и $x_{95} = 1,3$. Край линейки пересекает шкалу C_{sz} в точке с пометкой $C_{sz} = 0,42$.

Для нахождения значений ординат x_p кривой обеспеченности воспользуемся номограммой рис. 2, так как $C_{sz} > 0$.

Первый способ. Помещаем ножку циркуля в точку пересечения линии C_{sz} с пометкой 0,42 и прямой I . Вторую ножку устанавливаем в точку поля (C_{sz}, p) , соответствующую значениям $C_{sz} = 0,42$, $p = 1\%$. Не меняя расстояния между ножками циркуля, помещаем одну из них в точку поля $(x_{50}, \frac{x_5}{x_{95}})$, соответствующую значениям $x_{50} = 2,9$, $\frac{x_5}{x_{95}} = \frac{5,9}{1,3} = 4,5$. Второй ножкой проводим дугу окружности до пересечения

с линией $C_{sz} = 0,42$. Получаем ответ: $x_{1\%} = 8,05$ л/сек с 1 км^2 . Аналогично находим $x_{5\%} = 5,9$ л/сек с 1 км^2 , $x_{20\%} = 4,2$ л/сек с 1 км^2 и т. д.

Второй способ. Полоску бумаги помещаем на чертеж так, чтобы ее край совпал с линией $C_{sz} = 0,42$. Отмечаем точки пересечения края полоски с прямой I и линиями p с пометками 1; 5; 20% и т. д. Затем накладываем полоску бумаги на чертеж так, чтобы край ее совпадал с линией $\frac{x_5}{x_{95}} = \frac{5,9}{1,3} = 4,5$, а против точки A находилась линия $x_{50} = 2,9$. Точки, соответствующие значениям $p = 1; 5\%$ и т. д., пересекают линии x_p с пометками $x_{1\%} = 8,05$ л/сек с 1 км^2 , $x_{5\%} = 5,9$ л/сек с 1 км^2 , $x_{20\%} = 4,2$ л/сек с 1 км^2 и т. д.

Следует указать, что построенные номограммы также пригодны для расчетов кривых распределения максимальных и минимальных модулей стока. Для этого все эмпирические квантили следует увеличить или уменьшить в десять или сто раз. Как видно из формулы (5), при этом значение C_{sz} не изменится.

Литература

1. Г. А. Алексеев. Графоаналитические способы определения и приведения к длительному периоду наблюдений параметров кривых распределения. Труды ГГИ, вып. 73. 1960.
2. Н. А. Глаголев. Курс номографии. М., 1961.
3. Г. С. Хованский. Методы номографирования. М., 1964.

М. Г. Голченко

ГИДРОЛОГО-КЛИМАТИЧЕСКОЕ РАЙОНИРОВАНИЕ ТЕРРИТОРИИ БЕЛОРУССКОЙ ССР

Важным этапом комплексного изучения естественных природных ресурсов, в том числе и водных, является географическое районирование, содействующее решению ряда теоретических и практических задач.

Районирование в зависимости от признаков, положенных в его основу, может быть физико-географическим, агроклиматическим, почвенным, гидрологическим, гидролого-климатическим и др.

Применительно к территории Белоруссии существует несколько схем районирования. В частности, можно отметить физико-географическое районирование [1], почвенно-климатическое [2], агроклиматическое [3], мелиоративное районирование болот [4] и др.

Наиболее полное агроклиматическое районирование территории Белоруссии выполнено в работе А. Х. Шкляра [3]. В основу районирования был положен целый ряд показателей, в том числе физико-географические условия, коэффициенты увлажнения Г. Т. Селянинова, Н. И. Иванова, М. И. Будыко и др. При этом отмечено почти полное совпадение выделенных агроклиматических зон с физико-географическими провинциями [1]. В соответствии с результатами районирования на территории Белоруссии выделяются три области: северная — умеренно теплая, влажная; центральная — теплая, умеренно влажная; южная — теплая, неустойчиво влажная.

Все указанные виды районирования территории Белоруссии очень ценны для изучения природных ресурсов и направлены на решение вполне определенных научных и практических задач. Однако необходимо отметить и недостатки климатического районирования. Это касается вопроса выбора показателей условий естественного увлажнения и теплообеспеченности.

В настоящей работе проведено гидролого-климатическое районирование по методу В. С. Мезенцева [5], основанному на анализе характеристик естественного увлажнения и теплообеспеченности подстилающей поверхности земли в средний и характерные (повторяемость один раз в 5 лет) годы.

В основу метода гидролого-климатического районирования, как и метода в целом, положено учение А. А. Григорьева [5] об определяющей роли в развитии географической среды количества тепла и влаги и их соотношения. Признаками гидролого-климатического районирования является положение изолиний оптимума увлажнения и теплообеспеченности (избытки и недостатки тепла и влаги, коэффициенты увлажнения и теплообеспеченности, влажность почвы и др.) в средний и характерные годы [6]. При совмещении карт названных показателей

можно видеть, что изолинии оптимума формируются в пучки, которые и намечают границы районов. При этом нами учитывалось физико-географическое районирование, выполненное В. А. Дементьевым [1].

Опыт применения гидролого-климатического метода при районировании других территорий страны показал удовлетворительные результаты.

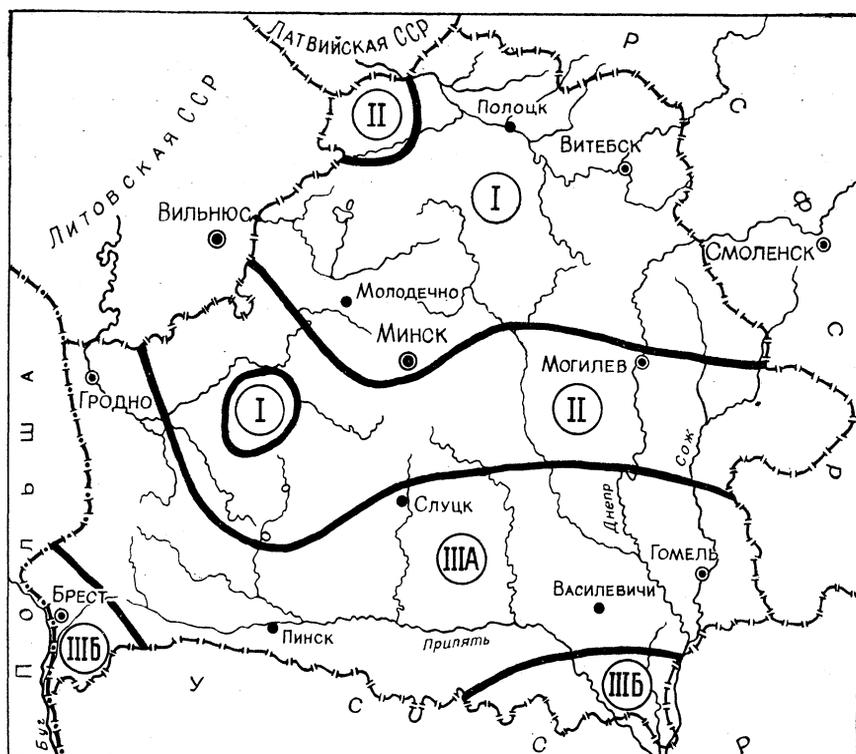


Рис. 1. Гидролого-климатические зоны Белорусской ССР.

В соответствии с изложенным на территории Белоруссии выделены три гидролого-климатические зоны. На рис. 1 приведена схематическая карта выделенных зон, а в табл. 1 даны некоторые основные характеристики естественного увлажнения и теплообеспеченности. При этом необходимо отметить удовлетворительное совпадение выделенных зон с физико-географическими районами Белоруссии [1]. В табл. 1 по зонам приводятся также оросительные нормы картофеля, капусты и клевера в годы различной обеспеченности, рассчитанные откорректированным нами биоклиматическим методом С. М. Алпатьева [7].

Методика расчетов показателей теплолагообеспеченности приведена в работах [5, 6]. Расчеты проводились с помощью ЭВМ. Все выполненные расчеты отражают условия естественного режима увлажнения, присущие местоположению метеорологических станций, т. е. суходольным участкам суши.

Первая зона (северная) охватывает большую часть Витебской области и северные районы Минской и Могилевской областей. Из Витебской области в эту зону не входит незначительная часть территории, которая в соответствии с физико-географическим районированием [1]

включается в провинцию восточной Прибалтики. К северной зоне относится также Новогрудская возвышенность.

В целом первая зона характеризуется избыточным увлажнением в средний и влажный годы и достаточным в сухой год. Отдельные районы в средний год за вегетационный период имеют достаточную увлажненность и теплообеспеченность. Годовое количество осадков составляет 750—850 мм, теплоресурсы климата 42 ккал/см². Коэффициент увлажненности за годовой период составляет 1,04—1,20, а теплообеспеченности соответственно 0,94—0,98. В средний год за вегетационный период (май — август) влажность метрового слоя почвы несколько выше наименьшей влагоемкости. Во влажный год (повторяемость один раз в 5 лет) за май — август наблюдается избыток влаги (1000—1500 м³/га). Однако переувлажнение вызвано прежде всего избытком влаги осенью и весной. В отдельные летние месяцы даже среднего года могут наблюдаться недостатки влаги, особенно в верхних слоях почвы.

Таблица 1

Количественные показатели тепло- и влагообеспеченности и нормы орошения сельскохозяйственных культур на территории Белоруссии по зонам

Наименование характеристик	Гидролого-климатические зоны			
	I	II	III	
			A	Б
1	2	3	4	5
Максимально возможное суммарное испарение за год Z_m , мм	690—710	710—730	730—760	760—780
То же, за теплый период (апрель—октябрь) Z_m , мм	620—650	640—660	660—690	680—710
Теплоресурсы процесса суммарного испарения за год LZ_m , ккал/см ²	42	43	45	46
Общее увлажнение (исправленные осадки) за год KX , мм	750—850	700—800	600—750	620—650
То же, за теплый период (апрель—октябрь) KX , мм	470—530	450—490	400—460	400—420
Суммарное испарение за год Z , мм	570—610	570—590	550—590	545—560
То же, за летний период (май—август) Z , мм	380—410	370—400	350—380	340—350
Относительное суммарное испарение за год β_z	0,82—0,86	0,79—0,82	0,74—0,79	0,71—0,74
Избытки (+) и недостатки (—) общего увлажнения за среднеголетний год ΔKX , мм	$\begin{matrix} + & + \\ 150 & -20 \end{matrix}$	$\begin{matrix} + \\ 50 & -0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} - \\ 0 & -100 \end{matrix}$	$\begin{matrix} - & - \\ 100 & -150 \end{matrix}$
То же, суммарного испарения ΔZ , мм	$\begin{matrix} + & + \\ 40 & -15 \end{matrix}$	$\begin{matrix} + \\ 25 & -0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} - \\ 0 & -50 \end{matrix}$	$\begin{matrix} - & - \\ 50 & -75 \end{matrix}$
Коэффициент увлажненности по осадкам в среднеголетний год U_{KX}	1,04—1,20	1,00—1,07	0,85—1,00	0,80—0,85
Коэффициент теплообеспеченности в среднеголетний год U_R	0,94—0,98	0,97—1,00	1,00—1,08	1,08—1,13
Избытки (+) и недостатки (—) общего увлажнения за летний период (май—август) в средний год ΔKX , мм	$\begin{matrix} + & - \\ 50 & -10 \end{matrix}$	$\begin{matrix} - \\ 0 & -75 \end{matrix}$	$\begin{matrix} - & - \\ 50 & -130 \end{matrix}$	$\begin{matrix} - & - \\ 120 & -160 \end{matrix}$
То же, в сухой год, повторяемостью один раз в 5 лет ΔKX , мм	$\begin{matrix} - & - \\ 60 & -160 \end{matrix}$	$\begin{matrix} - \\ 150 & -190 \end{matrix}$	$\begin{matrix} - & - \\ 190 & -250 \end{matrix}$	$\begin{matrix} - & - \\ 230 & -270 \end{matrix}$
То же, во влажный год, повторяемостью один раз в 5 лет ΔKX , мм	$\begin{matrix} + & + \\ 170 & -100 \end{matrix}$	$\begin{matrix} + & + \\ 100 & -75 \end{matrix}$	$\begin{matrix} + \\ 75 & -0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} - \\ 0 & -50 \end{matrix}$

Продолжение

1	2	3	4	5
Дефициты тепловых ресурсов за летний (май—август) период в средний год ΔR , ккал/см ²	— 1,5—0	0—1,5	+ + 1,2—3,0	+ + 3,0—3,5
То же, в сухой год	+ + 1,2—4,8	+ + 4,2—6,0	+ + 6,0—8,4	+ + 7,8—9,0
То же, во влажный год	— 6,6—3,6	— 4,2—1,5	— 2,1—0	+ 0—1,2
Средняя за май—август влажность метрового слоя почвы в долях от наименьшей влагоемкости в средний год V	0,98—1,05	0,90—1,00	0,80—0,90	0,75—0,80
То же, в сухой год V	0,76—0,90	0,71—0,79	0,63—0,71	0,59—0,63
То же, во влажный год V	1,16—1,23	1,10—1,16	1,10—1,16	0,92—1,00
Оросительные нормы в сухой год (75%-ной обеспеченности по дефициту водного баланса) M_{75} , м ³ /га				
овощи (капуста)	900—1600	1600—2000	2000—2500	2400—2600
картофель	600—900	900—1200	1200—1600	1600—1800
травы (клевер)	800—1000	1000—1400	1400—1750	1600—1800
Оросительные нормы в острозасушливый год (95%-ной обеспеченности по дефициту водного баланса) M_{95} , м ³ /га:				
овощи (капуста)	1900—2500	2500—3000	3000—3500	3500—3800
картофель	1400—1700	1700—2000	2000—2500	2500—2750
травы (клевер)	1400—1900	1900—2250	2250—2750	2500—2750

Необходимо отметить также и неравномерность выпадения осадков. Поэтому даже в средний год здесь необходимы поливы (1—2 полива). В сухой год (75%-ная обеспеченность по дефициту водного баланса) оросительные нормы составляют большую величину и принимаются равными для капусты 900—1600, картофеля 600—900 и клевера 800—1000 м³/га. Безусловно, с учетом низкой водопроницаемости почв этой зоны основным направлением гидротехнических мелиораций должно быть осушение. При этом необходимо иметь в виду возможность обратного регулирования водного режима почв.

Вторая зона (центральная) простирается в виде полосы через всю республику с запада на северо-восток. Сюда относится также и часть Витебской области, входящая в Прибалтийскую провинцию. Такое объединение обосновывается наличием близости гидролого-климатических показателей. Характеризуется эта зона оптимальным увлажнением в средний год. Во влажный год за май—август наблюдается избыток влаги (75—100 мм). Сухой год характеризуется понижением влажности метрового слоя почвы за летний период до 70% наименьшей влагоемкости, что по существу является нижним пределом оптимальной влажности почвы. Учитывая неравномерное внутригодовое перераспределение показателей теплолагообеспеченности для этой зоны, рекомендуются следующие оросительные нормы в сухой год (75%): для капусты 1600—2000, картофеля 900—1200 и клевера 1000—1400 м³/га. Осадки для этой зоны составляют 700—800 мм в год, суммарное испарение 570—590 мм, максимально возможное испарение 710—730 мм. Коэффициент увлажненности в среднемноголетний год равен 1,0—1,07, а теплообеспеченности — 0,97—1,00. На осушительных системах этой зоны, как и в целом по территории республики, необходимо предусматривать мероприятия по дополнительному увлажнению почв.

Третья зона (южная) занимает остальную часть территории. Несколько условно она подразделена на две подзоны (А и Б). Это объясняется тем, что часть самой южной территории, объединенной в подзону Б, не испытывает избытка влаги даже во влажные годы. Однако в целом эти подзоны имеют больше сходства, чем различий, поэтому характеризовать наиболее удобно всю зону.

В целом для этой зоны характерно недостаточное увлажнение, особенно в сухие годы, когда влажность даже метрового слоя почвы в среднем за май — август опускается ниже 70% наименьшей влагоемкости. Осадков здесь выпадает 620—750 мм в год, а теплоресурсы процесса суммарного испарения составляют 46 ккал/см². Коэффициент увлажненности в среднем за год равен 0,8—1,0, а теплообеспеченности 1,0—1,13. Для поддержания влажности метрового слоя почвы на уровне наименьшей влагоемкости даже в средний год необходимо 500—1600 м³/га. В годы 75%-ной обеспеченности по дефициту водного баланса оросительные нормы равны: для капусты 2000—2600, картофеля 1200—1800 и клевера 1400—1900 м³/га.

Приведенные показатели тепло- и влагообеспеченности этой зоны характерны для суходольных участков суши. Однако в силу равнинности территория зоны характеризуется большой степенью заболоченности. Поэтому здесь и впредь будут развиваться осушительные мелиорации, но с обязательным условием наличия мероприятий по регулированию водного режима. Эти вопросы наиболее полно обоснованы в работе [4].

Литература

1. В. А. Деметьев. Физико-географическое районирование Белоруссии. Сб. «Природное и сельскохозяйственное районирование СССР». М., 1961.
2. П. П. Роговой и др. Почвы БССР. Минск, 1952.
3. А. Х. Шкляр. Климат Белоруссии и сельское хозяйство. Минск, 1962.
4. В. Ф. Шебеко. Испарение с болот и баланс почвенной влаги. Минск, 1965.
5. В. С. Мезенцев. Метод гидролого-климатических расчетов и опыт его применения для районирования Западно-сибирской равнины по признакам увлажнения и теплообеспеченности. Труды Омск. с.-х. ин-та, т. 27, 1957.
6. М. Г. Голченко. К вопросу об увлажненности территории Белоруссии. Труды БСХА, т. 71, 1970.
7. М. Г. Голченко. Оросительные нормы для капусты и картофеля в Белоруссии. Сб. «Мелиорация и водное хозяйство». Вып. 6. Минск, 1971.

Ш. И. Брусиловский, Г. А. ПИЩЕЦКИЙ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДИНАМИКИ ГРУНТОВЫХ ВОД НА ОСУШАЕМЫХ ЗЕМЛЯХ ПРИ ВЗАИМНО ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОМ РАСПОЛОЖЕНИИ ВОДОПРОВОДЯЩЕЙ И РЕГУЛИРУЮЩЕЙ СЕТИ

Натурные наблюдения за водным режимом мелиорируемых земель показывают [1, 2], что при осушении со сравнительно хорошей водопроницаемостью (порядка 3—5 м сутки) водный режим этих почв складывается под влиянием не только регулирующей, но и водопроводящей сети. Особенно активно это проявляется в условиях Полесья, когда мелкий торфяник подстилается хорошо водопроницаемыми песками. В этих условиях редкая сеть водопроводящих каналов глубиной 2—3 м зачастую перекрывает осушительное действие мелких дрен и от строительства последних можно отказаться.

Прогноз водного режима в этих условиях требует учета наряду с регулирующей также и водопроводящей сети. Эта задача приближенно исследована А. М. Ивицким [3] при параллельном расположении осушительной и водопроводящей сети. Поэтому ниже рассматривается случай взаимно перпендикулярного расположения осушительной и водопроводящей сети.

Постановка задачи. Пусть мощность водоносного слоя в момент времени $t=0$ составляет H_0 . В некоторый момент времени $t>0$ начинает действовать система из двух водопроводящих и двух осушительных каналов (дрен) с мощностью водоносного слоя H_1, H_2, H_3, H_4 (рис. 1). Предполагается, что с поверхности грунтовых вод имеет место испарение (—) или инфильтрация осадков (+) интенсивностью ε . Требуется установить динамику грунтовых вод на осушаемом участке, ограниченном этими каналами. Расположив систему координат так, чтобы плоскость (x, y) совпала с начальным горизонтом уровня грунтовых вод (H_0), можно поставленную задачу математически сформулировать следующим образом.

Требуется найти решение дифференциального уравнения

$$\frac{\partial H}{\partial t} - \bar{k}^2 \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} \right) = \frac{\varepsilon}{\delta} \quad (1)$$

при следующих краевых условиях:

$$\begin{aligned} H(x, y, 0) = 0, \quad H(0, y, t) = H_1, \quad H(a, y, t) = H_2, \\ H(x, 0, t) = H_3, \quad H(x, b, t) = H_4, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\bar{k}^2 = \frac{kH_{\text{ср}}}{\delta}, \quad (3)$$

где k — коэффициент фильтрации; δ — удельная водоотдача; H_{cp} — средняя мощность водоносного горизонта.

Решение задачи. Используя принцип наложения, можно решение дифференциального уравнения (1) записать в виде

$$H(x, y, t) = U_1(x, y, t) + U_2(x, y, t), \quad (4)$$

где U_1 — решение однородного уравнения (1) (при $\varepsilon=0$) при граничных условиях (2); U_2 — решение неоднородного уравнения (1) при нулевых граничных условиях.

Решение однородной задачи известно из теории теплопроводности и может быть записано в таком виде [7, 8]:

$$\begin{aligned} H_1(x, y, t) = & \frac{4\bar{k}^2}{ab} \sum_{m, n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi mx}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi ny}{b}\right) \left\{ \frac{\pi m}{a} \int_0^b \int_0^t [H_1 + \right. \\ & \left. + (-1)^{m+1} H_2] \exp\left[-\bar{k}^2\pi^2\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)(t-\tau)\right] \sin\left(\frac{\pi n \eta}{b}\right) d\tau d\eta + \right. \\ & \left. + \frac{\pi n}{b} \int_0^a \int_0^t [H_3 + (-1)^{n+1} H_4] \exp\left[-\bar{k}^2\pi^2\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)(t-\tau)\right] \sin\left(\frac{\pi m \eta}{a}\right) \times \right. \\ & \left. \times d\tau d\eta \right\}. \end{aligned} \quad (5)$$

Вычисляя двойные интегралы и вводя обозначения

$$\xi = \frac{x}{a}; \quad \eta = \frac{y}{b}, \quad \sigma = \pi^2(m^2 + n^2l^2), \quad l = \frac{a}{b}, \quad (6)$$

$$\tau = \frac{\bar{k}^2 t}{a^2},$$

получим следующее искомое решение данной задачи

$$U_1 = H_1 A_1 + H_2 A_2 + H_3 A_3 + H_4 A_4, \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} A_1 = 4 \sum_{m, n=1}^{\infty} \frac{m}{n\sigma} [1 - (-1)^n] (\sin(\pi m \xi) \sin(\pi n \eta) - \\ - \sin(\pi m \xi) \sin(\pi n \eta) e^{-\sigma\tau}). \end{aligned} \quad (8)$$

Остальные коэффициенты имеют такой же вид. Для получения A_2 необходимо в A_1 ξ заменить на $1-\xi$; A_3 получается из A_1 , если поменять местами ξ с η и m с n ; A_4 получается соответственно из A_3 заменой η на $1-\eta$.

Ряды, входящие в выражения для A_i , сходятся весьма медленно для всех ξ, η .

Покажем (на примере A_1), как путем несложных преобразований можно улучшить сходимость рядов. Воспользовавшись соотношением [4]

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{m \sin(mx)}{m^2 + a^2} = \frac{\pi \operatorname{sh}[a(\pi-x)]}{2 \operatorname{sh}(\pi a)} \quad (9)$$

и учитывая, что при четных n $A_1=0$, просуммируем по m ряды первых слагаемых. Тогда

$$A_1 = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin [\pi(2n+1) \eta]}{(2n+1)} \frac{\operatorname{sh} [\pi(1-\xi)(2n+1) l]}{\operatorname{sh} [\pi(2n+1) l]} -$$

$$- 8 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m}{(2n+1) \sigma} \sin (\pi m \xi) \sin [\pi(2n+1) \eta] e^{-\sigma \tau}. \quad (10)$$

Так как согласно [4]

$$\frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2m+1} \frac{\operatorname{sh} [\pi(1-\xi)(2m+1) l]}{\operatorname{sh} [\pi(2m+1) l]} \sin [\pi(2m+1) \eta] =$$

$$= \frac{2}{\pi} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \operatorname{arctg} \left[\frac{\sin (\pi \eta)}{\operatorname{sh} [\pi l(2m+\xi)]} \right] - \sum_{m=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \left[\frac{\sin (\pi \eta)}{\operatorname{sh} [\pi l(2m-\xi)]} \right] \right\},$$

то

$$A_1 = \frac{2}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \operatorname{arctg} \left[\frac{\sin (\pi \eta)}{\operatorname{sh} [\pi l(2m+\xi)]} \right] - \sum_{m=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \left[\frac{\sin (\pi \eta)}{\operatorname{sh} [\pi l(2m-\xi)]} \right] -$$

$$- 8 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m}{(2n+1) \sigma} e^{-\sigma \tau} \sin (\pi m \xi) \sin [\pi(2n+1) \eta]. \quad (11)$$

Коэффициенты A_2, A_3, A_4 получаются аналогично вышеизложенному, формула (11) дает практически удобное представление искомой функции при больших τ . В работе [5] в выражениях для A_3, A_4 пропущено l^2 .

При малых же значениях τ ряды как формулы (8), так и (11) сходятся весьма медленно, что затрудняет их практическое использование. Поэтому ниже приводится решение этой же задачи, удобное для малых значений τ . Для этого вместо (5) можно записать решение в виде [7, 8]:

$$U_1(x, y, t) = \frac{2}{a} \sum_{m=1}^{\infty} \sin (\pi m \xi) \left\{ \int_0^t \int_0^a H_3 \frac{e^{-\beta_1^2}}{v} [y e^{-\frac{y^2}{4k^2(t-\theta)}} - \right.$$

$$- (2b-y) e^{-\frac{(2b-y)^2}{4k^2(t-\theta)}} + \dots] \sin \left(\frac{\pi m \xi}{a} \right) d\theta d\xi + \int_0^t \int_0^a H_4 \frac{e^{-\beta_1^2}}{v} \times$$

$$\times [(b-y) e^{-\frac{(b-y)^2}{4k^2(t-\theta)}} - (b+y) e^{-\frac{(b+y)^2}{4k^2(t-\theta)}} + \dots] \sin \left(\frac{\pi m \xi}{a} \right) d\theta d\xi \left. \right\} +$$

$$+ \frac{2}{b} \sum_{m=1}^{\infty} \sin \left(\frac{\pi m y}{b} \right) \left\{ \int_0^t \int_0^b H_1 \frac{e^{-\beta_2^2}}{v} [x e^{-\frac{x^2}{4k^2(t-\theta)}} - \right.$$

$$- (2a-x) e^{-\frac{(2a-x)^2}{4k^2(t-\theta)}} + \dots] \sin \left(\frac{\pi m \eta}{b} \right) d\theta d\eta +$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_0^t \int_0^b H_2 \frac{e^{-\beta_2^2}}{v} [(a-x) e^{-\frac{(a-x)^2}{4\bar{k}^2(t-\theta)}} - \\
 & - (a+x) e^{-\frac{(a+x)^2}{4\bar{k}^2(t-\theta)}} + \dots] \sin\left(\frac{\pi m \eta}{b}\right) d\theta d\eta \Big\}, \quad (12)
 \end{aligned}$$

где

$$\beta_1 = \frac{\pi m \bar{k}}{a} \sqrt{t-\theta}, \quad \beta_2 = \frac{\pi m \bar{k}}{b} \sqrt{t-\theta}, \quad v = 2 \sqrt{\pi \bar{k}^2 (t-\theta)^3}. \quad (13)$$

Вычислим первый двойной интеграл уравнения (12):

$$\begin{aligned}
 I_m = & \int_0^t \int_0^a \frac{e^{-\beta_1^2}}{v} [y e^{-\frac{y^2}{4\bar{k}^2(t-\theta)}} - (2b-y) e^{-\frac{(2b-y)^2}{4\bar{k}^2(t-\theta)}} + \\
 & + (2b+y) e^{-\frac{(2b+y)^2}{4\bar{k}^2(t-\theta)}} - \dots] \sin\left(\frac{\pi m \xi}{a}\right) d\theta d\xi. \quad (14)
 \end{aligned}$$

Вычисление этого интеграла будем производить почленно, обозначая через I_{mj} интеграл, который дает j -е слагаемое уравнения (14), т. е.

$$I_m = \sum_{j=1}^{\infty} I_{mj}. \quad (15)$$

Учитывая, что

$$\int_0^a \sin\left(\frac{\pi m \xi}{a}\right) d\xi = \frac{a}{\pi m} [1 + (-1)^{m+1}]$$

и вводя подстановку $z = t - \theta$, можем первый интеграл выражения (14) переписать в таком виде:

$$\begin{aligned}
 I_{m1} = & \int_0^t \int_0^a y \frac{e^{-\beta_1^2}}{2 \sqrt{\pi \bar{k}^2 (t-\theta)^3}} e^{-\frac{y^2}{4\bar{k}^2(t-\theta)}} \sin\left(\frac{\pi m \xi}{a}\right) d\theta d\xi = \\
 & = c \int_0^t e^{-\alpha z} e^{-\frac{\rho}{z}} z^{-\frac{3}{2}} dz, \quad (16)
 \end{aligned}$$

где

$$c = \frac{a [1 + (-1)^{m+1}]}{2\pi \sqrt{\pi m \bar{k}}}; \quad \rho = \frac{y^2}{4 \bar{k}^2}; \quad \alpha = \left(\frac{\pi m \bar{k}}{a}\right)^2. \quad (17)$$

Вычисление интеграла I_{m1} произведем операционным методом. Применяя к подынтегральной функции преобразование Лапласа, можем записать для изображения [6]

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-(s+\alpha)z} e^{-\frac{\rho}{z}} z^{-\frac{3}{2}} dz. \quad (18)$$

Введя в этот интеграл подстановку $\psi = \sqrt{\frac{\rho}{z}}$, получим после несложных преобразований

$$F(s) = \frac{2}{\sqrt{\rho}} e^{-2\sqrt{\rho(s+\alpha)}} \int_0^{\infty} e^{-\left(\psi - \frac{\sqrt{\rho(s+\alpha)}}{\psi}\right)^2} d\psi. \quad (19)$$

Поскольку

$$\int_0^{\infty} e^{-\left(\psi - \frac{\sqrt{\rho(s+\alpha)}}{\psi}\right)^2} d\psi = \frac{\pi}{2},$$

то

$$F(s) = \sqrt{\frac{\pi}{\rho}} e^{-2\sqrt{\rho(s+\alpha)}}. \quad (20)$$

Так как интегрирование оригинала от 0 до t соответствует в области изображения делению на переменную s , то искомое изображение интеграла (16) можно записать в таком виде:

$$L[I_{m1}] = C \sqrt{\frac{\pi}{\rho}} \frac{1}{s} e^{-2\sqrt{\rho(s+\alpha)}}. \quad (21)$$

Переходя в этом выражении от изображения к оригиналу с помощью табличного соотношения

$$L^{-1} \left[\frac{1}{s} e^{-2\sqrt{\rho(s+\alpha)}} \right] = \frac{1}{2} \left[e^{-2\sqrt{\alpha\rho}} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{\rho}{t}} - \sqrt{\alpha t} \right) + e^{2\sqrt{\alpha\rho}} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{\rho}{t}} + \sqrt{\alpha t} \right) \right],$$

получим следующее значение искомого интеграла (16):

$$I_{m1} = \frac{c}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\rho}} \left[e^{-2\sqrt{\alpha\rho}} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{\rho}{t}} - \sqrt{dt} \right) + e^{2\sqrt{\alpha\rho}} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{\rho}{t}} + \sqrt{dt} \right) \right]. \quad (22)$$

Подставляя в этот интеграл значения ρ , c , α согласно (17) окончательно будем иметь

$$I_{m1} = \frac{a[1 + (-1)^{m+1}]}{2\pi m} \left[e^{-\frac{\pi my}{a}} \operatorname{erfc} \left(\frac{y}{2k\sqrt{t}} - \pi m \sqrt{\frac{k^2 t}{a^2}} \right) + e^{\frac{\pi my}{a}} \operatorname{erfc} \left(\frac{y}{2k\sqrt{t}} + \pi m \sqrt{\frac{k^2 t}{a^2}} \right) \right]. \quad (23)$$

Поскольку каждое последующее слагаемое интеграла (14) отличается от первого наличием членов $(2b-y)$, $(2b+y)$, $(4b-y)$, $(4b+y)$ и т. д. вместо y , то можно получить любой из компонентов равенства (14) путем замены в (23) величины y на $(2b-y)$, $(2b+y)$ и т. д. Например:

$$I_{m4} = -\frac{a[1+(-1)^{m+1}]}{2\pi m} \left[e^{-\frac{\pi m(4b-y)}{a}} \operatorname{erfc} \left(\frac{4b-y}{2\bar{k}\sqrt{t}} - \pi m \sqrt{\frac{\bar{k}^2 t}{a^2}} \right) + e^{\frac{\pi m(4b-y)}{a}} \operatorname{erfc} \left(\frac{4b-y}{2\bar{k}\sqrt{t}} + \pi m \sqrt{\frac{\bar{k}^2 t}{a^2}} \right) \right].$$

Вводя обозначения

$$P_{m,n} = e^{-\frac{\pi m(2nb+y)}{a}} \operatorname{erfc} \left[\frac{(2nb+y)}{2\bar{k}\sqrt{t}} - \pi m \sqrt{\frac{\bar{k}^2 t}{a^2}} \right] + e^{\frac{\pi m(2nb+y)}{a}} \operatorname{erfc} \left[\frac{2nb+y}{2\bar{k}\sqrt{t}} + \pi m \sqrt{\frac{\bar{k}^2 t}{a^2}} \right], \quad (24)$$

$$\bar{P}_{m,n} = e^{-\frac{\pi m(2nb-y)}{a}} \operatorname{erfc} \left[\frac{(2nb-y)}{2\bar{k}\sqrt{t}} - \pi m \sqrt{\frac{\bar{k}^2 t}{a^2}} \right] + e^{\frac{\pi m(2nb-y)}{a}} \operatorname{erfc} \left[\frac{(2nb-y)}{2\bar{k}\sqrt{t}} + \pi m \sqrt{\frac{\bar{k}^2 t}{a^2}} \right], \quad (25)$$

запишем выражение интеграла (14) в такой компактной форме:

$$I_m = \frac{a[1+(-1)^{m+1}]}{2\pi m} \left[\sum_{n=0}^{\infty} P_{m,n} - \sum_{n=1}^{\infty} \bar{P}_{m,n} \right]. \quad (26)$$

Переходя в этом выражении к безразмерным величинам

$$\xi = \frac{x}{a}, \quad \eta = \frac{y}{b}, \quad \tau = \frac{\bar{k}^2 t}{a^2}, \quad l = \frac{a}{b}$$

и учитывая, что при m четном $I_m = 0$, запишем окончательное выражение для I_m

$$I_m = \frac{a}{\pi(2m+1)} \left[\sum_{n=0}^{\infty} F_{m,n} - \sum_{n=1}^{\infty} \bar{F}_{m,n} \right], \quad (27)$$

где

$$F_{mn} = e^{-\frac{\pi m}{l}(2n+\eta)} \operatorname{erfc} \left[\frac{2n+\eta}{2l\sqrt{\tau}} - \pi m \sqrt{\tau} \right] + e^{\frac{\pi m}{l}(2n+\eta)} \operatorname{erfc} \left[\frac{2n+\eta}{2l\sqrt{\tau}} + \pi m \sqrt{\tau} \right], \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \bar{F}_{mn} = & e^{-\frac{\pi m}{l}(2n-\eta)} \operatorname{erfc} \left[\frac{2n-\eta}{2l\sqrt{\tau}} - \pi m\sqrt{\tau} \right] + \\ & + e^{\frac{\pi m}{l}(2n-\eta)} \operatorname{erfc} \left[\frac{2n-\eta}{2l\sqrt{\tau}} + \pi m\sqrt{\tau} \right]. \end{aligned} \quad (29)$$

Таким образом, получим следующее выражение для коэффициента A_3 в формуле (7):

$$A_3 = \frac{2}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin[\pi(2m+1)]}{(2m+1)} \left[\sum_{n=0}^{\infty} F_{m,n} - \sum_{n=1}^{\infty} \bar{F}_{m,n} \right]. \quad (30)$$

Формула для A_4 получается из A_3 путем замены в выражениях (28—29) η на $(1-\eta)$. Очевидно, что A_1 и A_2 получаются соответственно из A_3 и A_4 заменой η на ξ ; a на b ; b на a .

Решение неоднородной задачи (4) при нулевых граничных условиях для больших τ может быть записано так [7, 8]:

$$\begin{aligned} U_2 = & \frac{4\varepsilon}{ab\delta} \sum_{m,n=1}^{\infty} \int_0^a \int_0^b \int_0^t \sin\left(\pi m \frac{\xi}{a}\right) \sin\left(\pi n \frac{\eta}{b}\right) \times \\ & \times \exp\left[-\frac{\bar{k}^2\pi^2}{a^2}\left(m^2+n^2\frac{a^2}{b^2}\right)\theta\right] d\xi d\eta d\theta. \end{aligned} \quad (31)$$

Поскольку

$$\begin{aligned} \int_0^a \sin\left(\pi m \frac{\xi}{a}\right) d\xi &= \frac{a}{\pi m} [1 + (-1)^{m+1}], \\ \int_0^t \exp\left[-\frac{\bar{k}^2\pi^2}{a^2}\left(m^2+n^2\frac{a^2}{b^2}\right)\theta\right] d\theta &= \frac{1}{\frac{\bar{k}^2\pi^2}{a^2}\left(m^2+n^2\frac{a^2}{b^2}\right)} \left[1 - \right. \\ & \left. - \exp\left[-\frac{\bar{k}^2\pi^2}{a^2}\left(m^2+n^2\frac{a^2}{b^2}\right)t\right] \right], \end{aligned}$$

то интеграл (31) приводится к следующему виду:

$$\begin{aligned} U_2 = & \frac{16\varepsilon a^2}{\pi^2\delta\bar{k}^2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 - e^{-\sigma\tau}}{(2m+1)(2n+1)\sigma} \sin[\pi(2m+ \\ & + 1)\xi] \sin[\pi(2n+1)\eta]. \end{aligned} \quad (32)$$

Здесь так же, как и ранее, введены безразмерные величины ξ , η , σ и τ , определяемые по (6).

Для малых значений τ более удобно вместо (31) записать такую зависимость [7, 8]:

$$U_2 = \frac{2\epsilon}{a\delta} \sum_{m=0}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi mx}{a}\right) \int_0^a \int_0^b \int_0^t \sin\left(\frac{\pi m\xi}{a}\right) \frac{1}{2\sqrt{\pi k^2(t-\theta)}} \times \exp\left[-\left(\frac{m\pi\bar{k}}{a}\sqrt{t-\theta}\right)^2\right] \left\{ \exp\left[-\left(\frac{y-\eta}{2\bar{k}\sqrt{t-\theta}}\right)^2\right] - \exp\left[-\left(\frac{y+\eta}{2\bar{k}\sqrt{t-\theta}}\right)^2\right] + \exp\left[-\left(\frac{2b-y+\eta}{2\bar{k}\sqrt{t-\theta}}\right)^2\right] + \exp\left[-\left(\frac{2b+y-\eta}{2\bar{k}\sqrt{t-\theta}}\right)^2\right] - \dots \right\} d\xi d\eta d\theta. \quad (33)$$

Приведем вычисление интегралов этого уравнения. Интеграл

$$I_1 = \int_0^b \exp\left[-\left(\frac{y-\eta}{2\bar{k}\sqrt{t-\theta}}\right)^2\right] d\eta$$

подстановкой

$$z = \frac{y-\eta}{2\bar{k}\sqrt{t-\theta}}; \quad d\eta = -2\bar{k}\sqrt{t-\theta} dz$$

приводится к следующему виду:

$$I_1 = 2\bar{k}\sqrt{t-\theta} \left[\operatorname{erf}\left(\frac{y}{2\bar{k}\sqrt{t-\theta}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{y-b}{2\bar{k}\sqrt{t-\theta}}\right) \right]. \quad (34)$$

Интеграл

$$I_2 = \int_0^t e^{-\alpha(t-\theta)} \left[\operatorname{erf}\left(\frac{y}{2\bar{k}\sqrt{t-\theta}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{y-b}{2\bar{k}\sqrt{t-\theta}}\right) \right], \quad (35)$$

где $\alpha = \frac{m^2\pi^2\bar{k}^2}{a^2}$, вычислим в такой последовательности. Вводя в него подстановку $t-\theta = z$, $d\theta = -dz$, интеграл от первого слагаемого (35) записываем так:

$$I'_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-\alpha z} \operatorname{erf}\left(\frac{y}{2\bar{k}\sqrt{z}}\right) dz.$$

Принимая

$$U = \operatorname{erf}\left(\frac{y}{2\bar{k}\sqrt{z}}\right); \quad dv = e^{-\alpha z} dz, \quad (36)$$

воспользуемся формулой интегрирования по частям.

Тогда (36) преобразуется так:

$$I'_1 = \frac{1}{\alpha} \left[1 - e^{-\alpha t} \operatorname{erf}\left(\frac{y}{2\bar{k}\sqrt{t}}\right) \right] + \frac{y}{2\alpha\bar{k}\sqrt{\pi}} \int_0^t z^{-\frac{3}{2}} e^{-\alpha z} e^{-\left(\frac{y}{2\bar{k}\sqrt{z}}\right)^2} dz. \quad (37)$$

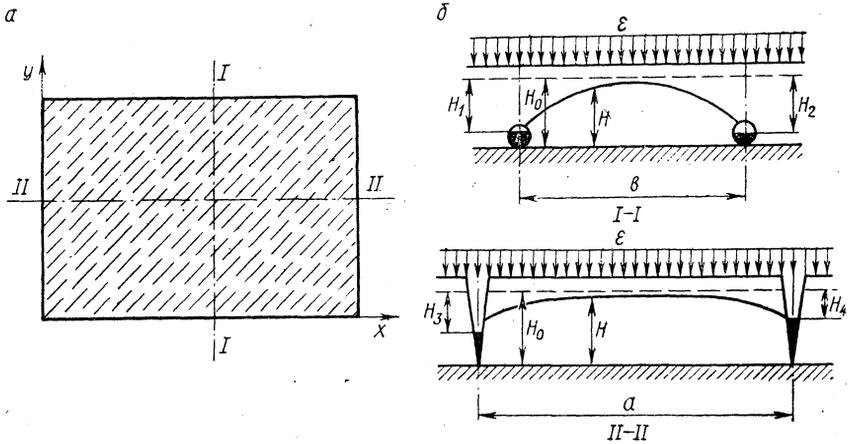


Рис. 1. Расчетная схема в плане (а) и разрезе (б).

Вычисление интеграла в этом уравнении было выполнено выше (формула (18)). Поэтому выражение (37) окончательно запишется так:

$$I_1 = \frac{1}{\alpha\sqrt{\pi}} \left[1 - e^{-\alpha t} \operatorname{erf} \left(\frac{y}{2k\sqrt{t}} \right) - \frac{1}{2} e^{-\frac{y}{k}\sqrt{\alpha}} \operatorname{erfc} \left(\frac{y}{2k\sqrt{t}} - \sqrt{\alpha t} \right) - \frac{1}{2} e^{\frac{y}{k}\sqrt{\alpha}} \operatorname{erfc} \left(\frac{y}{2k\sqrt{t}} + \sqrt{\alpha t} \right) \right].$$

По аналогии запишем значение второго интегрального выражения (35), которое отличается от I_1 наличием выражения $(y-b)$ вместо (y) :

$$I_1'' = \frac{1}{\alpha\sqrt{\pi}} \left[1 - e^{-\alpha t} \operatorname{erf} \left(\frac{y-b}{2k\sqrt{t}} \right) - \frac{1}{2} e^{-\frac{(y-b)}{k}\sqrt{\alpha}} \operatorname{erfc} \left[\frac{y-b}{2k\sqrt{t}} - \sqrt{\alpha t} \right] - \frac{1}{2} e^{\frac{(y-b)}{k}\sqrt{\alpha}} \operatorname{erfc} \left[\frac{y-b}{2k\sqrt{t}} + \sqrt{\alpha t} \right] \right].$$

Тогда

$$I_1 = I_1' - I_1'' = \frac{1}{\alpha\sqrt{\pi}} \left\{ e^{-\alpha t} \left[\operatorname{erf} \left(\frac{y-b}{2k\sqrt{t}} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{y}{2k\sqrt{t}} \right) \right] + \frac{1}{2} [F(y-b) - F(y)] \right\}, \quad (38)$$

где

$$F(y) = e^{-\frac{y\sqrt{\alpha}}{k}} \operatorname{erfc} \left(\frac{y}{2k\sqrt{t}} - \sqrt{\alpha t} \right) + e^{\frac{y\sqrt{\alpha}}{k}} \operatorname{erfc} \left(\frac{y}{2k\sqrt{t}} + \sqrt{\alpha t} \right).$$

Следовательно,

$$\int_0^b \int_0^a \int_0^t \sin \left(\frac{\pi m \xi}{a} \right) \frac{1}{2\sqrt{\pi k^2(t-\theta)}} \exp \left[- \left(\frac{y-\eta}{2k\sqrt{t-\theta}} \right)^2 \right] e^{-\alpha(t-\theta)} d\eta d\xi d\theta =$$

$$= \frac{a[1+(-1)^{m+1}]}{\alpha\pi\sqrt{\pi}} \left\{ e^{-\alpha t} \left[\operatorname{erf} \left(\frac{y-b}{2k\sqrt{t}} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{y}{2k\sqrt{t}} \right) \right] + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} [F(y-b) - F(y)] \right\}.$$

Аналогично

$$\int_0^b \int_0^a \int_0^t \sin \left(\frac{\pi m \xi}{a} \right) \frac{1}{2\sqrt{\pi k^2(t-\theta)}} \exp \left[- \left(\frac{y+\eta}{2k\sqrt{t-\theta}} \right)^2 \right] e^{-\alpha(t-\theta)} d\xi d\eta d\theta =$$

$$= \frac{a[1+(-1)^{m+1}]}{\alpha\pi\sqrt{\pi}} \left\{ e^{-\alpha t} \left[\operatorname{erf} \left(\frac{y}{2k\sqrt{t}} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{y+b}{2k\sqrt{t}} \right) \right] + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} [F(y) - F(y+b)] \right\},$$

$$\int_0^b \int_0^a \int_0^t \sin \left(\frac{\pi m \xi}{a} \right) \frac{1}{2\sqrt{\pi k^2(t-\theta)}} \exp \left[- \left(\frac{2b-y+\eta}{2k\sqrt{t-\theta}} \right)^2 \right] e^{-\alpha(t-\theta)} d\eta d\xi d\theta =$$

$$= \frac{a[1+(-1)^{m+1}]}{\alpha\pi\sqrt{\pi}} \left\{ e^{-\alpha t} \left[\operatorname{erf} \left(\frac{b+y}{2k\sqrt{t}} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{2b+y}{2k\sqrt{t}} \right) \right] + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} [F(b+y) - F(2b+y)] \right\}.$$

С учетом этих выражений, введя безразмерные величины (6), получим следующее искомое решение:

$$U_2 = \frac{2a^2\varepsilon}{\pi^3\sqrt{\pi k^2\delta}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{[1+(-1)^{m+1}]}{m^2} \sin(\pi m \xi) \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \left[2e^{-\pi^2 m^2 \tau} \times \right. \right.$$

$$\times \operatorname{erf} \left(\frac{n+\eta}{2l\sqrt{\tau}} \right) + F(n+\eta) \left. \right] + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left[2e^{-\pi^2 m^2 \tau} \operatorname{erf} \left(\frac{n-\eta}{2l\sqrt{\tau}} \right) + \right.$$

$$\left. + F(n-\eta) \right] \left. \right\}, \quad (39)$$

где

$$F(n \pm \eta) = e^{-\frac{\pi m(n \pm \eta)}{l}} \operatorname{erfc} \left[\frac{n \pm \eta}{2l\sqrt{\tau}} - \pi m \sqrt{\tau} \right] +$$

$$+ e^{\frac{\pi m(n \pm \eta)}{l}} \operatorname{erfc} \left[\frac{n \pm \eta}{2l\sqrt{\tau}} + \pi m \sqrt{\tau} \right]. \quad (40)$$

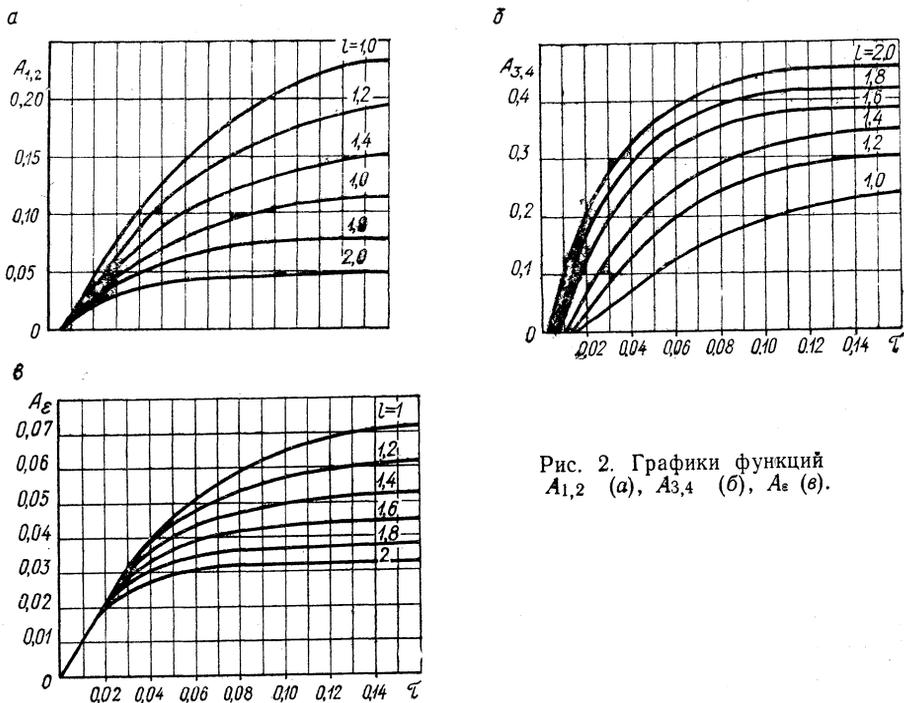


Рис. 2. Графики функций $A_{1,2}$ (а), $A_{3,4}$ (б), A_{ξ} (в).

Объединяя решение однородной и неоднородной задач, получим искомое решение задачи в таком общем виде:

$$H = U_1 + U_2 = H_1 A_1 + H_2 A_2 + H_3 A_3 + H_4 A_4 + \frac{a^2 \varepsilon}{k^2 \delta} A_{\xi}, \quad (41)$$

где A_i в зависимости от τ определяется по формулам (11) или (30); A_{ξ} обозначает выражения, стоящие в уравнении (39) под знаком

$$\frac{2}{\pi^3} \sqrt{\pi} \sum$$

Таблица 1

Значения A_i при $l=1$, $\xi=\eta=0,25$ по формулам		
τ	(11)	(30)
0,001	0,024	0,000
0,006	0,043	0,022
0,010	0,101	0,088
0,020	0,201	0,198
0,030	0,266	0,267
0,040	0,309	0,309
0,050	0,339	0,339
0,060	0,360	0,360
0,070	0,375	0,375
0,080	0,387	0,387
0,090	0,396	0,396
0,100	0,403	0,403
0,110	0,410	0,410
0,130	0,417	0,417
0,150	0,422	0,422
0,170	0,425	0,425
0,190	0,428	0,428

Применение полученных зависимостей для практических расчетов затрудняется бесконечными рядами, входящими в формулы для A_i и A_e . Чтобы облегчить пользование этими формулами, были проведены расчеты на ЭЦВМ «Минск-22» по определению значения параметров A_i и A_e в зависимости от ξ , η , l , τ . В результате были составлены детальные таблицы этих величин при различных сочетаниях ξ , η , l , τ . В этих расчетах A_i и A_e вычислялись по соответствующим формулам для малых и больших τ и затем проводилась их стыковка. Для примера в табл. 1 приводятся значения величин A_1 при $l=1$, $\xi=\eta=0,25$. Как видим, формула (11) до $\tau=0,020$ дает ощутимую погрешность; при больших значениях τ получаются одинаковые результаты. Поскольку представить здесь все результаты расчетов ввиду ограниченного объема статьи не представляется возможным, на рис. 2 приведены кривые изменения величин A_i и A_e в практически наиболее важной точке — центре прямоугольника. При значениях τ , близких к 0,16, режим фильтрации стабилизируется и приближается к стационарному. При этом время стабилизации тем меньше, чем больше l .

Литература

1. А. И. Ивицкий. Способы осушения болот в зависимости от подпочвы. Сб. «Мелиорация и использование осушенных земель». Т. 18. Минск, 1969.
2. В. М. Зубец. Реконструкция гидромелиоративных систем. Минск, 1966.
3. А. И. Ивицкий. Теория расчета расстояний между дренами с учетом осушительного действия проводящей сети. ДАН БССР, т. XII, № 11, 1968.
4. Г. А. Гринберг. Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. М., 1948.
5. С. В. Васильев и др. Методы фильтрационных расчетов гидромелиоративных систем. М., 1970.
6. А. В. Лыков. Теория теплопроводности. М., 1967.
7. А. В. Иванов. Аналитическое исследование теплопроводности в твердых телах методом операционного исчисления нескольких переменных. Дисс. Минск, 1957.
8. А. В. Иванов, А. В. Лыков. Конечные интегральные преобразования и их применение к решению задач теплопроводности. Сборник работ лаборатории молекулярной физики и массообмена ЭНИН АН СССР. М., 1957.

И. В. Минаев

МЕТОД АППРОКСИМАЦИИ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ В ТЕХНИКО-ЭКОНОМИЧЕСКОМ РАСЧЕТЕ ДРЕНАЖЕЙ

Для определения оптимальных параметров какого-либо сооружения необходимо составить функцию цели, выражающую зависимость ежегодных издержек или капитальных затрат от рассматриваемых переменных. В частности, для горизонтального сельскохозяйственного дренажа основными параметрами (которые в расчете становятся непрерывными переменными) являются глубина закладки дрен h и расстояние между ними B .

Для дренажа лучше использовать зависимость капитальных затрат от указанных величин, так как эксплуатационные затраты не зависят от обычного диапазона глубин и расстояний дрен [1]. Альтернативность параметров дренажа и их влияние на капитальные затраты можно выразить в общем виде функцией от двух переменных:

$$\bar{K}_{1,B} = \bar{K}_1(h, B) + \bar{K}_2(h, B) + \dots + \bar{K}_n(h, B) + Y_1(h, B) + Y_2(h, B) + \dots + Y_n(h, B), \quad (1)$$

где \bar{K}_i — удельные капитальные затраты по устройству дренажа, (*руб/га*), $i = 1, 2, 3, \dots, n$; Y — функция ущерба.

В такого рода задачах всегда имеется два противоположно направленных процесса по каждой переменной: один ведет к снижению капитальных затрат, другой — к их возрастанию. При некоторых сочетаниях расчетных параметров эти процессы уравниваются и функция (1) принимает свое минимальное значение, а затем затраты возрастают. Это так называемые задачи с унимодальными поверхностями [3], т. е. задачи, имеющие одну минимальную точку, которая и является глобальной; функции же по каждой переменной обычно гладкие и многократно дифференцируемые.

Функция (1) при рассмотрении ее только с математической точки зрения может быть вычислена при изменении параметров в любых пределах (от 0 до $\pm \infty$), и поэтому ее график может быть весьма сложным. С практической точки зрения изменения параметров носят весьма ограниченный характер (например, глубина дрен от 0,7 до 1,5), поэтому график функции (1) всегда рассматривается только в области положительных значений и в сравнительно небольших пределах. Если даже оптимизируемый параметр изменяется в достаточно больших пределах (например, расстояние между дренами B), то и в этом случае весь диапазон изменений параметров можно отнести к безразмерной шкале с равноотстоящими узлами интерполяции. Удобно весь практически приемлемый диапазон изменения h и B рассматривать на безразмерной оси

в пределах от 0,1 до 0,9 с шагом 0,1, т. е. при девяти узлах интерполяции. Не составляет труда переход от безразмерной шкалы к размерной по переходным формулам [2].

На рис. 1 изображены возможные графики функций, входящих в функцию (1) при изменении параметров в практически приемлемых диапазонах, и суммарный график функции (1), который определяет точку минимума (\surd — знак «или»).

Линии 1, 2, ... и т. д. (рис. 1) представляют собою частные функции, являющиеся слагаемыми в функции (1); результирующим будет график, имеющий вид «седла».

Будем вначале рассматривать такие функции (и их графики), которые имеют вид монотонно возрастающих или монотонно снижающихся.

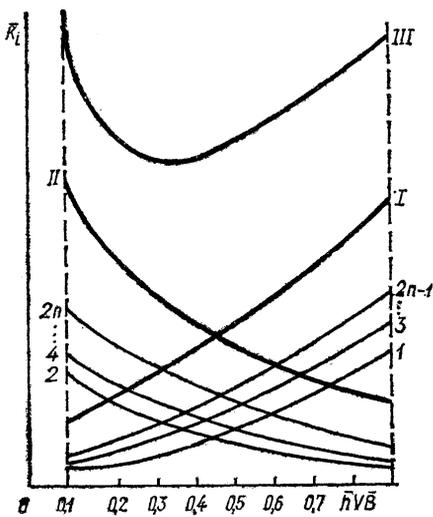


Рис. 1. Графики функции цели.

Такие графики могут возникать и в результате сложения каких-либо двух частных функций, входящих в функцию цели (1). Если обобщить это частное сложение функций, то можно сказать, что, сложив все функции, имеющие своими графиками монотонно убывающие кривые, можно получить суммирующую (результирующую) кривую, монотонно убывающую (кривая II на рис. 1). Сложив возрастающие функции, получим результирующий возрастающий график (кривая I на рис. 1). Результирующим графиком функции (1) будет график, имеющий вид «седла» (кривая III на рис. 1).

Метод аппроксимации предполагает замену результирующей (I или II) функции (или общей III) и ее графика в диапазоне практического изменения параметра другой функцией, более простой из-за ограниченного изменения переменной. Если рассматривать графики I и II отдельно, то результирующий график, очевидно, можно представить следующей зависимостью:

$$\bar{K}_{III}(\bar{h} \surd \bar{B}) = \bar{K}_I(\bar{h} \surd \bar{B}) + K_{II}(\bar{h} \surd \bar{B}). \quad (2)$$

Если удастся с достаточной степенью точности аппроксимировать отдельно функции K_I и K_{II} по одной переменной, то общую результирующую функцию по той же переменной можно получить по зависимости (2).

Таким образом, задача сводится к аппроксимации по одной переменной возрастающей и убывающей функций. Эту аппроксимацию можно осуществить с помощью известных методов [4, 5], однако для наших целей необходимо производить аппроксимацию не многочленными формулами, содержащими несколько слагаемых, а одночленными. В качестве аппроксимирующих полиномов мы выбираем полиномы для возрастающей функции вида

$$a_0^1 \prod_{i=1}^{i=n} (a_{+i} + x) \quad (3)$$

и для убывающей функции вида

$$a_0^n \prod_{i=1}^{i=n} (a_{-i} + x)^{-1}. \quad (4)$$

Для этих полиномов нами разработан способ определения всех коэффициентов a_{+i} и a_{-i} . Кроме того, метод обобщается и на аппроксимацию дробно-рациональными функциями вида

$$A_0 \frac{\prod_{i=1}^{i=k} (a_{\pm i} \pm x)}{\prod_{j=1}^{j=n} (a_{\pm j} \pm x)}, \quad (5)$$

где в числителе и знаменателе — несократимые произведения двучленов.

Предположим, что необходимо аппроксимировать функцию $\overline{K}_1(h=x)$, заданную своей таблицей. Используем метод равных сумм [5] при двух участках. Аппроксимирующее уравнение можно записать в виде

$$y = A_{+1}\beta + A_0 \quad (6)$$

или в матричной форме

$$y = [A_{+1}A_0] \begin{bmatrix} \beta \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (6')$$

где A_{+1} , A_0 — постоянные коэффициенты, определяемые по данным $\overline{K}_1(x)$; β — некоторая функция от переменной x ; а $\begin{bmatrix} \beta \\ 1 \end{bmatrix}$ — базовый вектор в уравнении (6).

В качестве аппроксимирующего полинома возьмем следующий:

$$\beta = \prod_{i=1}^{i=n} (a_{+i} + x).$$

Для определения коэффициентов A_{+1} и A_0 выпишем систему двух линейных уравнений [6]:

$$\left. \begin{aligned} z_1 &= \beta_1 A_{+1} + n_1 A_0, \\ z_2 &= \beta_2 A_{+1} + n_2 A_0, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

где z_1 и z_2 — суммы n_1 и n_2 ординат на соответствующих участках.

При девяти узлах интерполяции на первом участке может быть четыре или пять ординат, тогда соответственно на втором участке их будет пять или четыре. Однако если для (7) принять на первом участке четыре ординаты, а на втором пять, то справедлива будет и такая система, когда на первом участке будет пять ординат, а на втором — четыре:

$$\left. \begin{aligned} z_1^* &= \beta_1^* A_{+1}^* + n_2^* A_0^*, \\ z_2^* &= \beta_2^* A_{+1}^* + n_1^* A_0^*. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Из систем (7) и (8) найдем коэффициенты:

$$A_{+1} = -\frac{\Delta_\beta}{\Delta}, \quad A_0 = -\frac{\Delta_n}{\Delta}, \quad A_{+1}^* = -\frac{\Delta_\beta^*}{\Delta^*}, \quad A_0^* = -\frac{\Delta_n^*}{\Delta^*}, \quad (9)$$

где Δ, Δ^* — определители систем (7) и (8); $\Delta_\beta, \Delta_n, \Delta_\beta^*, \Delta_n^*$ — определители систем (7) и (8), написанные по правилу Крамера.

Ввиду того, что системы (2) и (3) относятся к одной и той же функции, то $A_{+1} = A_{+1}^*, A_0 = A_0^*$. Из равенства коэффициентов следуют также и равенства:

$$\frac{\Delta_\beta}{\Delta} = \frac{\Delta_\beta^*}{\Delta^*}; \quad \frac{\Delta_\beta}{\Delta_\beta^*} = \frac{\Delta}{\Delta^*}; \quad \frac{\Delta_n}{\Delta} = \frac{\Delta_n^*}{\Delta^*}; \quad \frac{\Delta_n}{\Delta_n^*} = \frac{\Delta}{\Delta^*}. \quad (10)$$

Равенства (10) используем для участков с меньшим числом узлов интерполяции, а для упрощения расчетов применяем не двучленные равенства (7) и (8), а одночленные:

$$z_1 = \beta_1 A_{+1}; \quad z_1^* = \beta_1^* A_{+1}^*. \quad (11)$$

Имея в виду равенства (9) и (10), из (11) получим

$$-\frac{z_1}{z_1^*} = \bar{z}_1 = -\frac{\beta_1}{\beta_1^*}. \quad (12)$$

Введем обозначения:

$$\theta_{ij} = (a_{+i} + x_j),$$

где θ_{ij} — число, в котором известны значения a_{+i} и x_j .

Если записать равенство (11) в векторной форме аналогично (6'), то β_1 и β_1^* будут базовыми векторами этих равенств.

Рассмотрим часть кривой $\bar{K}_1(x)$ и выберем на ней два участка для аппроксимации по методу равных сумм. На первом участке возьмем один узел интерполяции [0,7], на втором — два [0,7; 0,9], в качестве аппроксимирующего берем базовый вектор $\beta = \theta_{1j}\theta_{2j}\theta_{3j}$.

Для своих узлов интерполяции базовые векторы β и β_1^* запишутся так:

$$\beta_1 = (a_{+1} + 0,7)(a_{+2} + 0,7)(a_{+3} + 0,7),$$

$$\beta_1^* = (a_{+1} + 0,7)(a_{+2} + 0,7)(a_{+3} + 0,7) + (a_{+1} + 0,9)(a_{+2} + 0,9)(a_{+3} + 0,9).$$

Тогда равенство (12) можно представить в виде

$$(a_{+1} + 0,7)\theta_{27}\theta_{37} = \bar{z}_1(a_{+1} + 0,7)\theta_{27}\theta_{37} + \bar{z}_1(a_{+1} + 0,9)\theta_{29}\theta_{39}$$

или

$$z_1(a_{+1} + 0,7)\theta_{27}\theta_{37} = (a_{+1} + 0,9)\theta_{29}\theta_{39}, \quad (13)$$

где

$$z_1 = \frac{1 - \bar{z}_1}{\bar{z}_1} = \frac{y_9}{y_7}.$$

Проделав те же операции на узлах интерполяции [0,8] и [0,8, 0,9], получим равенство

$$z_{II}(a_{+1} + 0,8) \theta_{28}\theta_{38} = (a_{+1} + 0,9) \theta_{29}\theta_{39}, \quad (14)$$

где

$$z_{II} = \frac{1 - \bar{z}_2}{z_2} = \frac{y_9}{y_8}.$$

Из равенств (13) и (14) можно получить уравнения, в которых будет содержаться одно неизвестное a_{+1} :

$$\left. \begin{aligned} a_{+1}(z_1\theta_{27}\theta_{37} - \theta_{29}\theta_{39}) + (0,7z_1\theta_{27}\theta_{37} - 0,9\theta_{29}\theta_{39}) &= 0, \\ a_{+1}(z_{II}\theta_{28}\theta_{38} - \theta_{29}\theta_{39}) + (0,8z_{II}\theta_{28}\theta_{38} - 0,9\theta_{29}\theta_{39}) &= 0. \end{aligned} \right\} \dots \quad (15)$$

Заметим также, что уравнений, аналогичных (15), можно составить практически неограниченное количество.

Если положить θ_{2j} и θ_{3j} равными единице, т. е. аппроксимацию производить линейным вектором $\beta = (a_{+1} + x)$, то из любого уравнения (15) можно найти значение a_{+1} . Если аппроксимируемая функция действительно линейная, то по любому из уравнений (15) мы получим одно и то же значение a_{+1} . Если же аппроксимируемая функция более высокого порядка, то следует положить равным единице только множитель θ_{3j} и считать множитель θ_{2j} исправляющей функцией, т. е. изменяющей аппроксимирующую функцию до квадратичной зависимости.

Действительно, выразив оба уравнения (15) относительно a_{+1} , приравняем их (т. е. исключим a_{+1}), затем разрешим полученное равенство относительно a_{+2} . Если аппроксимируемая функция действительно квадратичная, то найдем a_{+2} и подставляя его значение в θ_{2j} , получаем число θ_{2j} , по которому из уравнений (15) находится значение a_{+1} . Таким образом можно получить аппроксимирующий базовый вектор β для равенств (11).

Однако для отыскания всех коэффициентов a_{+i} базового вектора мы применим более универсальный метод. Известно [6], что если два полинома любой степени содержат хотя бы один общий корень, то их результат (определитель, составленный из коэффициентов этих полиномов) должен быть равен нулю; это справедливо и для уравнений первого порядка. Найдем результат уравнений (15):

$$\begin{vmatrix} (z_1\theta_{27}\theta_{37} - \theta_{29}\theta_{39})(0,7z_1\theta_{27}\theta_{37} - 0,9\theta_{29}\theta_{39}) \\ (z_{II}\theta_{28}\theta_{38} - \theta_{29}\theta_{39})(0,8z_{II}\theta_{28}\theta_{38} - 0,9\theta_{29}\theta_{39}) \end{vmatrix} = 0. \quad (16)$$

Раскрыв определитель (16) и выразив z_1 через y_j , получим

$$y_7\theta_{28}\theta_{38}\theta_{29}\theta_{39} - 2y_8\theta_{27}\theta_{37}\theta_{29}\theta_{39} + y_9\theta_{28}\theta_{38}\theta_{27}\theta_{37} = 0. \quad (17)$$

Обратим внимание на следующее обстоятельство: если заменить θ_2 и θ_{3j} единицами, то уравнение (17) можно записать в виде

$$y_7 - 2y_8 + y_9 = 0. \quad (18)$$

Но равенство (18) не иное, как конечная разность второго порядка на равноотстоящих узлах интерполяции [7]. Это равенство справедливо только для линейной функции. Если разность второго порядка равна

нулю, то функция линейная и значение $+^1pa$ находится по одному из уравнений (15).

Из равенства (18) следует, что результат уравнений (15) равен нулю только в том случае, если конечная разность второго порядка равна нулю.

В равенстве (17) запишем θ_{2j} на их узлах интерполяции:

$$\theta_{27} = (a_{+2} + 0,7); \theta_{28} = (a_{+2} + 0,8); \theta_{29} = (a_{+2} + 0,9).$$

Подставив эти значения в (17) и произведя необходимые алгебраические операции, получим следующее квадратное уравнение относительно a_{+2} :

$$c_2 a_{+2}^2 + c_1 a_{+2} + c_0 = 0, \quad (19)$$

в котором коэффициенты выражаются через ординаты y_j ($j=7, 8, 9$) следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} c_2 &= (y_7 \theta_{38} \theta_{39} - 2y_8 \theta_{37} \theta_{39} + y_9 \theta_{37} \theta_{38}), \\ c_1 &= (1,7y_7 \theta_{38} \theta_{39} - 3,2y_8 \theta_{37} \theta_{39} + 1,5y_9 \theta_{37} \theta_{38}), \\ c_0 &= (0,72y_7 \theta_{38} \theta_{39} - 1,26y_8 \theta_{37} \theta_{39} + 0,56y_9 \theta_{37} \theta_{38}). \end{aligned} \right\}$$

Если положить $\theta_{3j}=1$, то коэффициент c_2 будет выражаться через y_j следующим образом:

$$c_2 = y_7 - 2y_8 + y_9. \quad (20)$$

Но это последнее сочетание ординат, как известно из (18), равно нулю только в том случае, если функция линейная. Для любой другой функции, в том числе и квадратной, оно не равно нулю.

Следовательно, если мы ошибочно предполагаем, что базовый вектор β не линейный, то подставив ординаты в равенство (20), получим коэффициент c_2 , равный нулю, и тогда коэффициент a_{+1} определится из (15). Если же функция не линейная, то равенство (18) недействительно. Однако встает вопрос: если $c_2 \neq 0$, то является ли базовый вектор квадратичной функцией или он более высокой степени? Чтобы разрешить этот вопрос, найдем еще одно линейное уравнение, аналогичное уравнениям (15). Для этого рассмотрим узлы интерполяции $[0,6]$ и $[0,6, 0,9]$. Для них линейное уравнение будет иметь вид

$$a_{+1} (z_{III} \theta_{26} \theta_{36} - \theta_{29} \theta_{39}) + (0,6z_{III} \theta_{26} \theta_{36} - 0,9\theta_{29} \theta_{39}) = 0, \quad (21)$$

где

$$z_{III} = \frac{1 - \bar{z}_3}{z_3} = \frac{y_9}{y_6}.$$

Далее сделаем уже известные операции: найдем результат для двух линейных уравнений, например первого из (15) и (21). Затем положим $\theta_{26} = (a_{+2} + 0,6)$; $\theta_{29} = (a_{+29} + 0,9)$ и разрешим равенство относительно a_{+2} . В результате получаем второе квадратное уравнение:

$$b_2 a_{+2}^2 + b_1 a_{+2} + b_0 = 0, \quad (22)$$

где

$$\left. \begin{aligned} b_2 &= (2y_6\theta_{37}\theta_{39} - 3y_7\theta_{36}\theta_{39} + y_9\theta_{36}\theta_{37}), \\ b_1 &= (3,2y_6\theta_{37}\theta_{39} - 4,5y_7\theta_{36}\theta_{39} + 1,3y_9\theta_{36}\theta_{37}), \\ b_0 &= (1,26y_3\theta_{37}\theta_{39} - 1,62y_7\theta_{36}\theta_{39} + 0,42\theta_{36}\theta_{37}). \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Если уравнения (18) и (22) содержат хотя бы один общий корень, то их результат равен нулю.

Результантом для уравнений (18) и (22) будет следующий определитель [6]:

$$\begin{vmatrix} c_2 & c_1 & c_0 & 0 \\ 0 & c_2 & c_1 & c_0 \\ b_2 & b_1 & b_0 & 0 \\ 0 & b_2 & b_1 & b_0 \end{vmatrix} = (c_2b_0 - c_0b_2)^2 - (c_2b_1 - c_1b_2)(c_1b_0 - c_0b_1) = 0. \quad (24)$$

Раскрыв определитель (24) с использованием равенств (23) и (19), получим выражение, из которого следует, что результат (24) будет равен нулю только в том случае, если будет равно нулю следующее выражение:

$$y_6\theta_{37}\theta_{38}\theta_{39} - 3y_7\theta_{36}\theta_{38}\theta_{39} + 3y_8\theta_{36}\theta_{37}\theta_{39} - y_9\theta_{36}\theta_{37}\theta_{38} = 0. \quad (25)$$

Заменив в (25) θ_{3j} их значениями $\theta_{36} = (a_{+3} + 0,6)$; $\theta_{37} = (a_{+3} + 0,7)$; $\theta_{38} = (a_{+3} + 0,8)$; $\theta_{39} = (a_{+3} + 0,9)$ и произведя алгебраические преобразования, получим:

$$p_3a_{+3}^3 + p_2a_{+3}^2 + p_1a_{+3} + p_0 = 0, \quad (26)$$

$$\left. \begin{aligned} p_3 &= (y_6 - 3y_7 + 3y_8 - y_9), \\ p_2 &= (2,4y_6 - 6,9y_7 + 6,6y_8 - 2,1y_9), \\ p_1 &= (1,91y_6 - 5,22y_7 + 4,77y_8 - 1,46y_9), \\ p_0 &= (0,504y_6 - 1,296y_7 + 1,134y_8 - 0,336y_9). \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

В качестве старшего члена уравнения (26) выступает разность ординат третьего порядка. Это означает, что если старший член уравнения (26) будет равен нулю, то функция может быть аппроксимирована многочленом меньшей степени (второй или первой).

Если же старший член в (26) не равен нулю, то аппроксимация может быть произведена или многочленом третьей степени или более высокого порядка. Для того чтобы решить вопрос о порядке аппроксимирующего многочлена, необходимо рассмотреть уравнения, аналогичные (26), не относительно a_{+4} , a_{+5} , ..., a_{+n} , причем степень многочленов соответственно будет увеличиваться на единицу.

Предположим однако, что функция аппроксимируется многочленом третьей степени и a_{+3} находится из уравнения (26). Тогда, вычислив корни этого уравнения, находим числа (поскольку значение a_{+3} известно):

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}_{38} &= (a_{+3} + 0,8); \quad \tilde{\theta}_{36} = (a_{+3} + 0,6); \\ \tilde{\theta}_{37} &= (a_{+3} + 0,7); \quad \tilde{\theta}_{39} = (a_{+3} + 0,9). \end{aligned}$$

Числа $\tilde{\theta}_{3j}$ необходимо подставить в уравнения (19) и (22) и найти общий корень. Далее вычисляем числа $\tilde{\theta}_{2j}$ ($j=7, 8, 9$) и находим корень a_{+1} по одному из уравнений (15). В результате аппроксимирующим базовым вектором будет полином, разложенный по своим корням:

$$\beta = (a_{+1} + x)(a_{+2} + x)(a_{+3} + x), \quad (28)$$

где a_{+i} — известные теперь числа, $i = 1, 2, 3, \dots, n$.

Следует иметь в виду, что базовый вектор аппроксимирующего уравнения может содержать и такие двучлены, как $(a_{+i} - x)$, где i — один или несколько индексов в равенстве (28). Присутствие двучленов с отрицательным x изменяет знак в равенствах (23), (27).

Следует отметить, что при определении коэффициента a_{+1} используются всего две ординаты (по (15) y_7, y_9 или y_8, y_9). При определении коэффициента a_{+2} используются три ординаты, a_{+3} — четыре ординаты и т. д. Привлекая новые ординаты, мы захватываем новые участки кривой и тем самым отыскиваем аппроксимирующую функцию, которая будет содержать коэффициент не a_{+1} , полученный подсчетом по двум ординатам, а коэффициент $a'_{+1} \neq a_{+1}$ (если аппроксимируемая функция — не сама эта функция, содержащая коэффициент a_{+1}). Для избежания ошибки в определении коэффициентов следует изменить масштаб оси абсцисс, захватив весь отрезок, на котором определена аппроксимируемая функция.

По индукции можно написать общее выражение для отыскания коэффициентов a_{+i} ($i=1, 2, 3, \dots$) в полиноме (3):

$$\begin{aligned} & y_j^{(n)} \theta_{n(j+1)} \theta_{n(j+2)} \dots \theta_{n(j+n)} - n y_{(j+1)}^{(n)} \theta_{nj} \theta_{n(j+2)} \dots \theta_{n(j+n)} + \\ & + \frac{n(n-1)}{2!} y_{(j+2)}^{(n)} \theta_{nj} \theta_{n(j+1)} \theta_{n(j+3)} \dots \theta_{n(j+n)} - \\ & - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} y_{(j+3)}^{(n)} \theta_{nj} \dots \theta_{n(j+2)} \theta_{n(j+4)} \dots \theta_{n(j+n)} + \\ & + (-1)^n y_{(j+k)}^{(n)} \theta_{nj} \theta_{n(j+1)} \dots \theta_{n(j+n-1)} = 0, \end{aligned} \quad (29)$$

где индекс — номер узла интерполяции; n — порядок разности.

Рассмотрим затраты по устройству дренажа (табл. 1) в зависимости от переменной \bar{h} (глубина заложения): $\bar{K}_h^I = f(\bar{h})$.

Таблица 1

\bar{h}	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
\bar{K}_h^I	29,1	46,1	64,7	85,0	107,0	130,2	155,5	182,1	210,3
Номер узла интерполяции	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Вторые разделенные разности равны (табл. 1):

$$y_7 - 2y_8 + y_9 = 192,0 - 2 \cdot 225,0 + 260,0 = +2,$$

$$y_6 - 3y_7 + 3y_8 - y_9 = 161,0 - 3 \cdot 192,0 + 3 \cdot 225,0 - 260,0 = 0.$$

Второе и первое соотношения верны для всех равноотстоящих узлов интерполяции, например, $y_1 - 3y_3 + 3y_5 - y_7 = 0$.

Поскольку разность третьего порядка равна нулю, то аппроксимация возможна полиномом второй степени. Положив $\theta_{3j} = 1$, подсчитаем коэффициенты уравнений (19) и (22):

$$2a_{+2}^2 - 3,6a_{+2} + 0,34 = 0,$$

$$6a_{+2}^2 - 10,8a_{+2} + 1,02 = 0.$$

Однако если каждое из этих уравнений разделить на коэффициент при его старшем члене, то получим одно неполное квадратное уравнение:

$$a_{+2}^2 - 1,8a_{+2} + 0,17 = 0. \tag{30}$$

Отсюда следует, что два корня предыдущих уравнений одинаковы. В связи с этим можно ожидать, что оба корня (30) являются коэффициентами в аппроксимирующем базовом векторе. Действительно, взяв любой из корней $a'_{+2} = 1,7$, $a''_{+2} = 0,1$ и подставив их в любое из уравнений (15) (при $\theta_{3j} = 1$), получаем те же самые значения коэффициента a_{+1} . Таким образом, базовым будет вектор $\beta_h = (1,7 + x) (0,1 + x)$. Отсюда найдем аппроксимирующей уравнение:

$$\bar{K}_h^I = A_{+1h} \beta_h, \tag{31}$$

где $A_{+1h} = 80,9$ — коэффициент, определяемый из уравнения (11).

Рассмотренный метод пригоден и для аппроксимации функций гиперболического типа. Базовым вектором в этом случае будет вектор

$$\alpha = q_{1j} q_{2j} \dots q_{nj}, \tag{32}$$

где

$$q_{1j} = \frac{1}{(a_{-1} + x_j)}, \quad q_{2j} = \frac{1}{(a_{-2} + x_j)}, \quad \dots, \quad q_{nj} = \frac{1}{(a_{-n} + x_j)};$$

j — порядковый номер интерполяции. При этом среди q_{ij} могут быть значения и с отрицательным x .

Повторяя все выкладки буквально так же, как и для функций параболического типа, можно получить следующее выражение для построения цепочки аппроксимирующих полиномов:

$$\begin{aligned} & \bar{y}_j^{(n)} q_{nj} - n \bar{y}_{j+1}^{(n)} q_{n(j+1)} + \frac{n(n-1)}{2!} \bar{y}_{j+2}^{(n)} q_{n(j+2)} - \\ & - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \bar{y}_{j+3}^{(n)} q_{n(j+3)} + \dots + (-1)^n \bar{y}_{j+n}^{(n)} q_{n(j+n)} = 0, \end{aligned} \tag{33}$$

где \bar{y}_j — обратная величина ординат на рассматриваемых узлах интерполяции $\left(\frac{1}{y_j} \right)$.

Для $n = 3$ по уравнению (33) будем иметь:

$$\bar{y}_1^{(3)} q_{31} - 3 \bar{y}_2^{(3)} q_{32} + 3 \bar{y}_3^{(3)} q_{33} - \bar{y}_4^{(3)} q_{34} = 0. \tag{34}$$

Подставив в уравнение (34) значения

$$q_{31} = \frac{1}{(a_{-3} + 0,1)}; \quad q_{32} = \frac{1}{(a_{-3} + 0,2)}; \quad q_{33} = \frac{1}{(a_{-3} + 0,3)}; \quad q_{34} = \frac{1}{(a_{-3} + 0,4)},$$

получим кубическое уравнение относительно a_{-3} , у которого коэффициент при старшем члене будет разность ординат третьего порядка обратных величин ординат на узлах интерполяции 1, 2, 3, 4.

Рассмотрим следующий пример (табл. 2). Разность обратных ординат третьего порядка равна нулю.

Т а б л и ц а 2

$\bar{h}(x)$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
$\bar{K}_h^{II}(y)$	361,11	203,13	130,00	90,25	66,40	50,80	40,10	32,50	29,55
Номер узла интерполяции	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Вторая разность обратных ординат не равна нулю. Из выражения (33) находим уравнение для коэффициента a_{-2}^2 , полагая в нем $n=2$:

$$\bar{y}_1 q_{21} - 2\bar{y}_2 q_{22} + \bar{y}_3 q_{23} = 0. \quad (35)$$

Подставив в уравнение (35) значения

$$q_{21} = \frac{1}{(a_{-2} + 0,1)}; \quad q_{22} = \frac{1}{(a_{-2} + 0,2)}; \quad q_{23} = \frac{1}{(a_{-2} + 0,3)},$$

получим уравнение второго порядка относительно коэффициента a_{-2} :

$$a_{-2}^2 (\bar{y}_1 - 2\bar{y}_2 + \bar{y}_3) + a_{-2} (0,5\bar{y}_1 - 0,8\bar{y}_2 + 0,3\bar{y}_3) + (0,06\bar{y}_1 - 0,06\bar{y}_2 + 0,02\bar{y}_3) = 0. \quad (36)$$

Так как дискриминант уравнения (36) равен нулю, то находим двукратный корень $a_{-2} = 0,2$. Уравнение (36) справедливо и для других узлов интерполяции, поэтому принимаем

$$\bar{K}_h^{II} = \frac{A_{-1h}}{(0,2 + x)^2}, \quad (37)$$

где $A_{-1h} = 32,4$ — коэффициент, определяемый из уравнения (11).

Для кривой гиперболического типа, определяемой табл. 3, получено следующее аппроксимирующее уравнение:

$$\bar{K}_B^{II} = \frac{A_{-1B}}{(0,4 + x)^3}, \quad (38)$$

где $A_{-1B} = 30,0$ — коэффициент, определяемый из уравнения (11).

Таблица 3

\bar{B}	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
\bar{K}_B^{II}	240,0	139,0	87,5	58,5	41,2	30,0	22,6	17,3	13,6
Номер узла интерполяции	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Рассмотрим далее подсчет затрат по переменной B (расстояние между дренами): $\bar{K}_B^{\text{I}} = f(\bar{B})$ (табл. 4).

Таблица 4

\bar{B}	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
\bar{K}_B^{I}	52,9	78,5	106,1	136,8	169,6	205,5	244,5	288,5	337,5
Номер узла интерполяции	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Вторая и третья разделенные разности будут равны (табл. 4):

$$1) y_7 - 2y_8 + y_9 = +4,04,$$

$$2) y_6 - 3y_7 + 3y_8 - y_9 = 0.$$

Аппроксимирующим полиномом будет полином второй степени. Как и в первом случае, находим коэффициенты уравнений (19) и (22). Однако, решая эти уравнения, получаем мнимые корни. Для этого случая в качестве аппроксимирующего подбираем уравнение с базовым вектором в виде дробно-рациональной функции:

$$\beta = \frac{a_{+1} + x}{a_{-1} - x}.$$

Заменяем в уравнении (35) q_{2i} на $\theta_{1j} = (a_{+1} + x_j)$, определив их на узлах интерполяции $j=7, 8, 9$. В результате получим уравнение

$$a_{+1}(-\bar{y}_7 + 2\bar{y}_8 + \bar{y}_9) + (-0,7\bar{y}_7 + 1,6\bar{y}_8 - 0,9\bar{y}_9) = 0.$$

Подставив значения обратных ординат из табл. 4, получаем, что $a_{+1} = 0,135$. Далее находим числа $\tilde{\theta}_{1j}$ и выписываем уравнение, полученное из первого уравнения (15) (при $\theta_{3j} = 1$):

$$a_{-1}(y_9\tilde{\theta} - y_7\tilde{\theta}_{29}) + (0,7\tilde{\theta}_{29}y_7 - 0,9y_9\tilde{\theta}_{27}) = 0. \quad (39)$$

Из уравнения (39) получаем, что $a_{-1} = 2,66$. Отсюда

$$\bar{K}_B^{\text{I}} = A_{+1B} \beta_B, \quad (40)$$

где $A_{+1B} = 577$ — коэффициент, получаемый по уравнению (11) при использовании данных табл. 4. Уравнение (40) хорошо аппроксимирует значения табл. 4 и на других узлах интерполяции.

Поскольку для каждой кривой получено аппроксимирующее уравнение, то полные уравнения по каждой переменной будут найдены суммированием:

$$\bar{K}_h = \bar{K}_h^I + \bar{K}_h^{II} = A_{-1h}\alpha_h + A_{+1h}\beta_h \quad (41)$$

$$\bar{K}_B = \bar{K}_B^I + \bar{K}_B^{II} = A_{-1B}\alpha_B + A_{+1B}\beta_B. \quad (42)$$

Для того чтобы получить функцию от двух переменных, представим уравнения (41) и (42) в векторной форме и перемножим их с матрицей коэффициентов аппроксимирующего уравнения по двум переменным [2]:

$$\bar{K}_{hB} = [\alpha_h \beta_h] \begin{bmatrix} A_{11} A_{12} \\ A_{21} A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_B \\ \beta_B \end{bmatrix}, \quad (43)$$

где $\alpha_h, \alpha_B, \beta_h, \beta_B$ — базовые векторы в уравнениях (31), (37), (38), (40).

После перемножения матриц в равенстве (43) и подстановки базовых векторов получим аппроксимирующее уравнение по двум переменным:

$$\begin{aligned} \bar{K}_{hB} = & \frac{A_{11}}{(0,2 + \bar{h})^2 (0,4 + \bar{B})^2} + \frac{A_{21}(1,7 + \bar{h})(0,1 + \bar{h})}{(0,4 + \bar{B})^3} + \\ & + \frac{A_{12}(0,135 + \bar{B})}{(0,2 + \bar{h})^2 (2,66 - \bar{B})} + \frac{A_{22}(1,7 + \bar{h})(0,1 + \bar{h})(0,135 + \bar{B})}{(2,66 + \bar{B})}. \end{aligned} \quad (44)$$

Для того чтобы вычислить коэффициенты A_{ij} , в уравнении (44) положим $\bar{h} = \bar{B} = x$. Тогда уравнение (44) от двух переменных становится зависящим от одного переменного. Далее придаются значения h и B в функции цели (1) через промежутики, определяемые шагами каждой переменной. В результате вычисляется таблица значений \bar{K}_{hB} при одновременном изменении переменных (табл. 5).

Таблица 5

\bar{x}	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
\bar{K}_{hB}	425,7	253,4	202,8	195,3	210,9	244,3	296,3	367,1	460,8
Номер узла интерполяции	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Данные табл. 5 используются для вычисления коэффициентов A_{ij} методом равных сумм [5]. Они группируются по участкам: три участка по два узла интерполяции [0,1; 0,2], [0,3; 0,4], [0,5; 0,6] и один участок объединяет три узла [0,7; 0,8; 0,9]. В результате получаем систему из четырех линейных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} 117,824A_{11} + 5,519A_{21} + 1,870A_{12} + 0,110A_{22} &= 679,1, \\ 17,087A_{11} + 4,383A_{21} + 1,395A_{12} + 0,396A_{22} &= 398,1, \\ 4,363A_{11} + 3,422A_{21} + 1,158A_{12} + 0,962A_{22} &= 455,2, \\ 1,882A_{11} + 3,928A_{21} + 1,515A_{12} + 3,478A_{22} &= 1124,2. \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

Решив систему уравнений (45), получаем следующие значения коэффициентов: $A_{11}=2,8$; $A_{21}=21,2$; $A_{12}=114,1$; $A_{22}=247,9$.

Найденные коэффициенты позволяют вычислить таблицу значений \bar{K}_{hB} при изменении \bar{h} и \bar{B} в пределах от 0,1 до 0,9 с шагом 0,1 по уравнению (44). Минимальное значение \bar{K}_{hB} определит оптимальные параметры функции цели, которая аппроксимируется уравнением (44) в ограниченных пределах изменения переменных; границы изменения переменных должны быть указаны в размерных единицах (например, $1,5 \leq h \leq 0,7$; $10 \leq B \leq 90$). Оптимальные параметры h и B могут быть найдены с меньшим объемом вычислений. Для этого следует взять частные производные по \bar{h} и \bar{B} в уравнении (44) и приравнять их нулю. Вычисление оптимальных параметров осуществляется аналогично тому, как это проведено в работе [2].

Таким образом, порядок расчета по методу аппроксимации следующий: производятся вычисления ординат для нахождения дополнительных коэффициентов a_{+i} , в базовых векторах, а затем для нахождения коэффициента A_{ij} в аппроксимирующем уравнении и, наконец, вычисляются оптимальные параметры.

Литература

1. *И. В. Минаев*. Технико-экономический расчет оптимальных параметров дренажа. Сб. «Водное хозяйство Белоруссии». Вып. 1. Минск, 1971.
2. *И. В. Минаев*. Технико-экономический расчет параметров вертикального дренажа методом аппроксимации. Сб. «Водное хозяйство Белоруссии». Вып. 2. Минск, 1972.
3. *Д. Дж. Уайлд*. Методы поиска экстремума. М., 1967.
4. *Б. П. Демидович, И. А. Марон*. Основы вычислительной математики. Изд. 2-е. М., 1963.
5. *П. В. Мелентьев*. Приближенные вычисления. М., 1962.
6. *А. Г. Курош*. Курс высшей алгебры. Изд. 7-е. М., 1962.
7. *Б. С. Ястремский*. Некоторые вопросы математической статистики. М., 1961.

Э. П. Коваленко

О ТУРБУЛЕНТНЫХ ПУЛЬСАЦИЯХ СКОРОСТЕЙ НА ГРАНИЦЕ ВЯЗКОГО ПОДСЛОЯ В ПЛОСКОМ РАВНОМЕРНОМ ПОТОКЕ

Знание составляющих пульсационных скоростей необходимо для решения задач, связанных с размывающей способностью потока, диффузией растворов и тепла и т. д.

Ранее было показано [1], что в плоском равномерном потоке толщина вязкого подслоя, в котором наблюдается линейное распределение осредненных скоростей, описывается соотношением

$$\delta_d = 4 \sqrt{2} \frac{\nu}{u_*}, \quad (1)$$

где δ_d — толщина вязкого подслоя, в котором наблюдается линейное распределение осредненных скоростей; ν — коэффициент динамической вязкости; u_* — динамическая скорость.

При этом в таком потоке у дна зарождаются вихри, которые в пределах δ_d от дна имеют

$$\text{rot } v = \frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x}, \quad (2)$$

где

$$\left| \frac{\partial v_x}{\partial y} \right| = \left| \frac{\partial v_y}{\partial x} \right| = \left| \frac{v}{\delta} \right|.$$

Линейный размер

$$\delta = 2 \sqrt{2} \frac{\nu}{u_*}, \quad (3)$$

где v — осредненная скорость на расстоянии δ от дна.

Образовавшиеся вихри при своем движении нарушают установившуюся структуру мгновенных скоростей не только в пределах самого вихря, но и на некотором расстоянии от него. В пределах такого возмущения это приводит к изменению условий формирования и отрыва последующих вихрей, которые будут иметь уже другие характеристики, в частности линейные. Но такие осредненные характеристики, можно полагать, будут близки к характеристикам рассматриваемого вихря. Учитывая это, поставленную задачу решим при следующих дополнительных условиях [2, 4].

1. При прохождении расчетного вихря через границу подслоя толщиной δ_d не происходит существенного изменения в продольной скорости вихря.

2. Линии эквипотенциальных мгновенных скоростей достаточно удовлетворительно описываются синусоидами.

В рассматриваемом подслое изменение осредненных скоростей описывается соотношением

$$\frac{\bar{v}}{u_*} = \frac{u_* \delta}{\nu}, \quad (4)$$

где \bar{v} — осредненная скорость.

Тогда возможная максимальная разница между продольными мгновенными скоростями при двух крайних положениях вихря относительно рассматриваемой границы (рис. 1, положение I и II) равняется, учитывая (2) и (3),

$$\Delta v = 2\sqrt{2} u_*. \quad (5)$$

Исходя из условия (2) и неразрывности, а также принимая Δ за амплитуду расчетной синусоиды, возможное максимальное изменение мгновенных скоростей, осредненных в отмеченном смысле, запишем в виде

$$\frac{v'_0}{u_*} = (4\sqrt{2} \pm 2\sqrt{2}), \quad (6)$$

где v'_0 — значение мгновенной скорости (осредненной относительно характеристик расчетного вихря).

Отсюда, зная, что $v'_{0d} = v'_{0l} \pm \bar{v}'_{x \max} = \bar{v}'_{0l} \pm 2\sqrt{2} u_*$, имеем

$$|\bar{v}'_{x \max}| = 2\sqrt{2} u_*.$$

Для среднеквадратичной величины этих пульсаций

$$\sqrt{(\bar{v}'_{x \max})^2} \cong 2\sqrt{2} u_*, \quad (7)$$

где черта обозначает знак осреднения.

Но при условии (2) максимальное значение среднеквадратичных составляющих пульсационных скоростей равно

$$\sqrt{(\bar{v}'_0)'_0} \cong 0,75 \sqrt{(\bar{v}'_{x \max})^2}. \quad (8)$$

Подставив из (7) значение $\sqrt{(\bar{v}'_{x \max})^2}$ в (8), получим

$$\sqrt{(\bar{v}'_0)'_0} \approx 2,12 u_*, \quad (9)$$

где $(\bar{v}'_0)'_0$ — среднеквадратичная составляющая пульсационной скорости по оси x на расстоянии δ_d от дна.

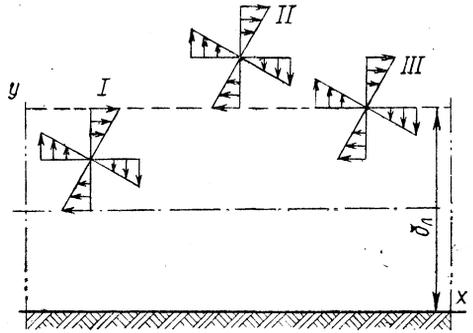


Рис. 1. Схема прохождения расчетного вихря через границу вязкого подслоя, в котором наблюдается линейное распределение осредненных скоростей.

Согласно исследованиям И. К. Никитина [3],

$$\sqrt{\overline{(v'_x)_0^2}} = 2,1 u_* \quad (10)$$

Соотношения (9) и (10) хорошо согласуются между собой. Полученные максимальные значения среднеквадратичных составляющих по оси x пульсационных скоростей на рассматриваемой границе вязкого подслоя также хорошо соответствуют экспериментальным данным, полученным для плоского равномерного потока [3, 4].

Найдем максимальное значение изменения мгновенной скорости, осредненное в периоде колебания по оси y . Так как рассматриваются максимальные значения скоростей v_y , то $\frac{\partial v_y}{\partial x} = 0$ и $\frac{\partial v_y}{\partial t} = 0$: Пренебрегаем силами сопротивления движению.

Тогда дифференциальное уравнение движения для оси y запишется в виде

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = v_y \frac{\partial v_y}{\partial y}, \quad (11)$$

где p — давление.

Проинтегрировав (11) от 0 до y , получим

$$p_0 - p_y = \rho \left(\frac{v_y^2}{2} - \frac{v_0^2}{2} \right).$$

В рассматриваемом случае $v_0 = 0$.

Давление, создаваемое силой, действующей на всплывающий вихрь, в центре вихря равно [1]

$$p_v = \gamma Hi.$$

Максимальная возможная разница в давлении $|p_0 - p_y|$ не будет превышать $|p_v|$. Отсюда

$$\rho \frac{v_y'^2}{2} \leq \gamma Hi$$

или

$$\sqrt{\overline{(v'_y)^2}} \leq \sqrt{2} u_*.$$

Тогда максимальное возможное значение пульсаций скоростей, осредненное по характеристикам расчетного вихря, вдоль оси y в пределах периода изменения пульсаций можно полагать равным

$$\sqrt{\overline{(v'_y)_{\max}^2}} = \sqrt{2} u_* \quad (12)$$

Но в силу условия (2) имеем

$$\sqrt{\overline{(v'_y)_0^2}} = 0,75 \sqrt{\overline{(v'_y)_{\max}^2}} \quad (13)$$

Учитывая (12), получим

$$V \overline{(\bar{v}'_y)_0^2} = 1,06 u_* \quad (14)$$

что также хорошо согласуется с соотношением, полученным И. К. Никитиным [3]:

$$V \overline{(\bar{v}'_y)_0^2} = 1,05 u_* \quad (15)$$

Соотношения (13) можно также вывести, рассматривая прохождение вихря через рассматриваемую границу. Действительно, если ось вихря находится в плоскости границы, то (рис. 1, положение III), учитывая (2) и (3), находим

$$v'_{\max} = \sqrt{2} u_*$$

$$v'_{\min} = -\sqrt{2} u_*$$

или

$$\overline{(\bar{v}'_y)_{\max}^2} = V \overline{2} u_* \quad (16)$$

Учитывая (13), из (16) получим (14). Из (10) и (14) имеем

$$\frac{V \overline{(\bar{v}'_x)_0^2}}{V \overline{(\bar{v}'_y)_0^2}} = \frac{2,1}{1,06} \approx 2 \quad (17)$$

Согласно экспериментальным данным [2], вблизи стенок

$$\frac{V \overline{(\bar{v}'_x)_0^2}}{V \overline{(\bar{v}'_y)_0^2}} \approx 2 \quad (18)$$

Соотношения (17) и (18) совпадают.

Таким образом, зависимости, полученные на основе экспериментальных данных, хорошо соответствуют полученным аналитически выше. Поэтому принятая расчетная модель может служить достаточно надежной основой для определения турбулентных характеристик, аналогичных рассмотренным, и в других точках равномерного плоского турбулентного потока.

Литература

1. Э. П. Коваленко. Об устойчивости вязкого подслоя в плоском равномерном потоке. Сб. «Проблемы водного хозяйства». Минск, 1971.
2. Ж. Конт-Белло. Турбулентное течение в канале с параллельными стенками. М., 1968.
3. И. К. Никитин. Турбулентный русловый поток и процессы в придонной области. Киев, 1963.
4. Shigemitsu Yutaka. Experimental studies on laminar sublayer in turbulent boundary layer involving separation. I. Phys. Soc. Japan, 1957.

Д. А. Козлов

ВЛИЯНИЕ УСЛОВИЙ ПОДХОДА ПОТОКА К ВОДОПРИЕМНОМУ ОТВЕРСТИЮ НА ЕГО РАБОТУ

Классическая схема истечения из-под щита в горизонтальный канал, наиболее полно исследованная теоретически [1, 2], не позволяет учесть влияние на пропускную способность и остальные гидродинамические параметры направления потока при подходе к щиту, а также стенок, ограничивающих течение. При работе башенных водосбросов, донных водовыпусков, при водозаборе, где картина течения близка к изображенной на рис. 1, эти факторы являются решающими.

В связи с этим исследуется истечение жидкости из-под плоского щита по схеме (рис. 1), отличной от классической. Задача решается теоретически при тех же допущениях [3]: течение считается плоским, жидкость идеальной.

Характеризующий истечение коэффициент сжатия $\varepsilon = \frac{h_c}{a}$ будет функцией не только относительного открытия щита и его угла наклона β , но и размеров подводящего тракта

$$\varepsilon = f\left(\beta, \frac{a}{l+a}, \frac{h}{a}, -\frac{L}{a}\right),$$

где a — открытие щита; h_c — глубина в сжатом сечении; l — длина щита; h — глубина в подводящем канале; L — расстояние до ограничивающей стенки.

Используя принцип симметрии, рассматриваем только верхнюю половину схемы в плоскости течения z , изображенную сплошными линиями на рис. 1. Решение приводится для случая $\beta = 0,5$ ($\beta\pi = 90^\circ$).

В плоскости комплексного потенциала W рассматриваемому течению соответствует бесконечная полоса ширины

$$q = v_0 h,$$

где v_0 — скорость подхода; q — расход.

Область W отображается на верхнюю полуплоскость переменного t с указанным на рис. 2 соответствием точек функций

$$W = -\frac{q}{\pi} \ln(t-1) + qi. \quad (1)$$

Нахождение функции Н. Е. Жуковского, применяемой для решения задач теории струй:

$$\omega = \ln \frac{dW}{V_c dz} = \ln \frac{v}{V_c} - i\vartheta,$$

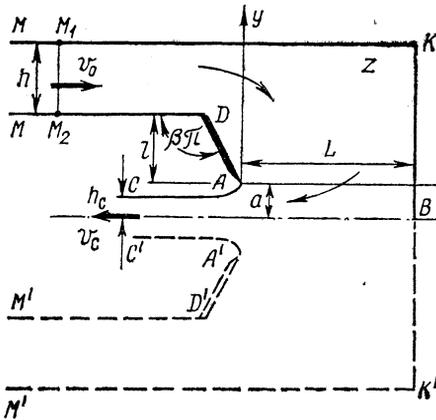


Рис. 1. Расчетная схема.

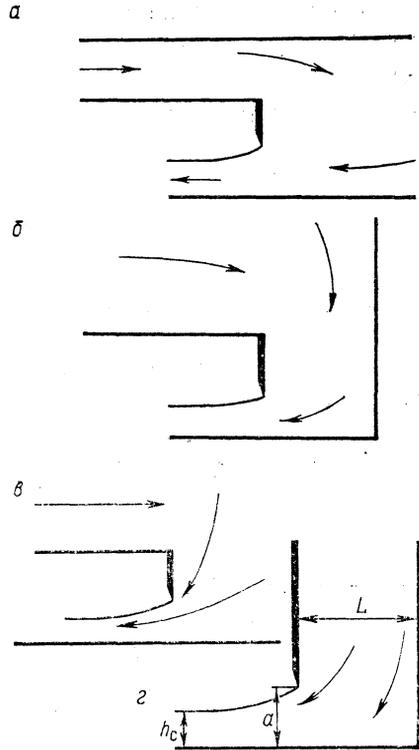


Рис. 3. Схемы частных случаев.

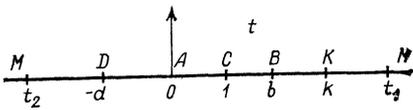


Рис. 2. Вспомогательная область.

(где v — модуль вектора скорости; ϕ — ее угол наклона; v_c — скорость в сжатом сечении) сводится к решению смешанной краевой задачи. Применяя формулу Келдыша — Седова, находим искомую функцию ω в виде

$$\omega = \ln \frac{\sqrt{(t-b)(t-k)}(\sqrt{t(d+1)} + \sqrt{d(t-1)})}{\sqrt{d+t}(\sqrt{t(b-1)} + \sqrt{b(t-1)})(\sqrt{t(k-1)} + \sqrt{k(t-1)})}. \quad (2)$$

Полученное выражение дает возможность связать скорость подхода v_0 со скоростью в сжатом сечении. Сечению MM соответствует $t = \infty$. Подставляя это значение в (2), получаем

$$\frac{v_0}{v_c} = \exp[\omega_{t=\infty}] = \frac{\sqrt{1+d} + \sqrt{d}}{(\sqrt{b-1} + \sqrt{b})(\sqrt{k-1} + \sqrt{k})}, \quad (3)$$

а уравнение постоянства расхода дает

$$\frac{h}{h_c} = \frac{v_c}{v_0}. \quad (4)$$

При найденных функциях $W(t)$ и $\omega(t)$ характерные геометрические размеры течения могут быть найдены из соотношения

$$z = \frac{1}{v_c} \int \exp[-\omega] \frac{dW}{dt} dt. \quad (5)$$

Интегрируя (5) на участке DA ($-d \leq t \leq 0$) и используя значения функций (1) и (2), найдем длину щита l :

$$\frac{l}{h_c} = \frac{1}{\pi} \int_{-d}^0 \frac{\sqrt{d+t}(\sqrt{-t(b-1)} + \sqrt{b(1-t)})(\sqrt{-t(k-1)} + \sqrt{k(1-t)})}{\sqrt{(b-t)(k-t)}(\sqrt{-t(d+1)} + \sqrt{d(1-t)})} \times \times \frac{dt}{t-1}. \quad (6)$$

Пусть M_1M_2 является эквипотенциалью, т. е. $\varphi M_1 = \varphi M_2$; тогда из (1) $t_1 = 2 - t_2$. Если выбрать t_2 достаточно малым, чтобы $M_2D > (3-5)h$, то можно приближенно считать эквипотенциаль M_1M_2 вертикальной прямой и найти расстояние до ограничивающей стенки L :

$$\frac{L}{h_c} = \frac{M_1K}{h_c} - \frac{M_2D}{h_c} = \frac{1}{\pi} \int_k^{t_1} \exp[-\omega] \frac{dt}{t-1} - \frac{1}{\pi} \int_{-d}^{t_2} \exp[-\omega] \frac{dt}{t-1}, \quad (7)$$

а также ее длину BK

$$\frac{BK}{h_c} = \frac{1}{\pi} \int_b^k \exp[-\omega] \frac{dt}{t-1}. \quad (8)$$

Из геометрических соображений открытие щита выразится так:

$$\frac{a}{h_c} = \frac{BK}{h_c} - \frac{l}{h_c} - \frac{h}{h_c}. \quad (9)$$

Используя (4), (6), (7), (8), (9), можно найти коэффициент сжатия $\varepsilon = \frac{h_c}{a}$ и безразмерные геометрические параметры, характеризующие истечение:

$$\frac{h}{a} = \varepsilon \frac{h}{h_c}, \quad \frac{a}{l+a} = \frac{1}{\varepsilon \frac{l}{h_c} + 1}, \quad \frac{L}{a} = \varepsilon \frac{L}{h_c}. \quad (10)$$

Задавшись значениями параметров b , d , k , входящих в решение, по полученным формулам находим соответствующие им значения параметров $\frac{h}{a}$, $\frac{L}{a}$, $\frac{a}{l+a}$ и величину ε . Используя (2) и уравнение Бернулли, можно получить также распределение скорости и давления по щиту и стенкам, ограничивающим течение.

Из рассмотренной общей схемы (рис. 1) следует целый ряд частных случаев. Полагая в приведенном решении $b=k$, получаем расчетные формулы для случая, приведенного на рис. 3, а, т. е. для аналогичной схемы без учета влияния стенки BK ($\frac{L}{a} = \infty$).

Если $k = \infty$, то получим расчетные формулы для случая, приведенного на рис. 3, б, т. е. без учета влияния на характер истечения границы МК $\left(\frac{h}{a} = \infty\right)$.

Положив $b = k = \infty$, получим решение схемы, представленной на рис. 3, в $\left(\frac{L}{a} = \infty, \frac{h}{a} = \infty\right)$.

Если приравнять $k = d = \infty$, получим схему, изображенную на рис. 3, г. В этом простейшем случае интегралы в формулах легко вычисляются. Получается, что при значительном удалении ограничивающей стенки $\frac{L}{a} > 10$ ее влияние на истечение не сказывается и коэф-

фициент сжатия для малых относительных открытий $\frac{a}{l+a} < 0,1$ получается равным $\varepsilon_0 = 0,611$, что совпадает с известным результатом И. Е. Жуковского и Р. Мизеса [2]. По мере уменьшения расстояния до стенки L коэффициент сжатия ε уменьшается (табл. 1).

Таблица 1

$\frac{L}{a}$	20	10	6	4	3	2	1,5	1	0,8	0,6	0,5	0,4	0,35
$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$	1	0,996	0,992	0,980	0,972	0,953	0,925	0,864	0,809	0,725	0,663	0,579	0,520

Литература

1. О. Ф. Васильев, В. М. Лятхер. Гидравлика. Сб. «Механика в СССР за 50 лет». М., 1970.
2. R. Mises. Berechnung von Ausfluss und Überfallzahlen. Zeitschrift des vereines Deutscher Ingenieure, d. 61, № 21, 1917.
3. М. И. Гуревич. Теория струй идеальной жидкости. М., 1961.

Г. Г. Богданов

ИССЛЕДОВАНИЕ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПОТОКА В БЕСПОРОГОВЫХ ВОДОСЛИВАХ НА ОСНОВАНИИ АНАЛИЗА ГЛУБИННЫХ ОБТЕКАНИЙ СТЕНОК СООРУЖЕНИЯ

Беспороговый водослив — гидротехническое сооружение с боковым стеснением потока без порога на дне укрепленного русла. В пространственном водосливе, например в водосливе с широким порогом и боковым стеснением потока, в углу между дном и порогом возникают восходящие токи, приводящие к восходящему течению. Чем выше порог, тем более мощно это течение. При обтекании береговых опор с лобовой стороны в потоке создается зона с повышенным давлением, вследствие чего появляются нисходящие токи, причем в нижнем слое потока у стенки образуется обратное течение [1].

Взаимодействие нисходящего и восходящего течений в пространственном водосливе порождает ту сложную картину, на которую обращает внимание ряд авторов [1, 2]. Отсутствие порога приводит к новому качественному состоянию, так как устраняется восходящее течение, бьефы взаимодействуют более непосредственно, а плановое стеснение превращается в определяющий фактор [3]. Все это и заставляет выделять беспороговые водосливы, имеющие обычно самые различные уклоны и длины вдоль течения, в особый тип водосливов (малые мосты и безнапорные водопропускные трубы в насыпях железных и автомобильных дорог).

При встрече потока с такого рода препятствием придонный слой затормаживается, что ведет к образованию вторичных локальных неоднородностей течения — фрагментов течения в пространстве в результате отрыва пространственных пограничных слоев перед опорами и возникновения вторичных течений.

В случае малых удельных расходов в опытах хорошо заметно донное или глубинное вторичное обтекание опоры. При увеличении удельного расхода выявляются неоднородности течения по вертикали из-за существования приближающейся к опоре снизу вверх поверхности отрыва: над зонами глубинных обтеканий располагаются поверхностные обтекания, а также местные (при неплавном очертании входа в сооружение), имеющие вид конуса с опрокинутой вниз вершиной и распространяющиеся обычно не на всю глубину потока (рис. 1).

Исследования [1, 3, 4] показали, что контуры глубинных и поверхностных обтеканий близки к окружностям. На основании анализа взаимодействия контуров глубинных обтеканий при различных относительных стеснениях потока $\frac{B-b}{B}$ или коэффициентах стеснения $\frac{b}{B}$ (b —

сливное отверстие; B — ширина русла) можно составить классификацию стеснений потока в русле.

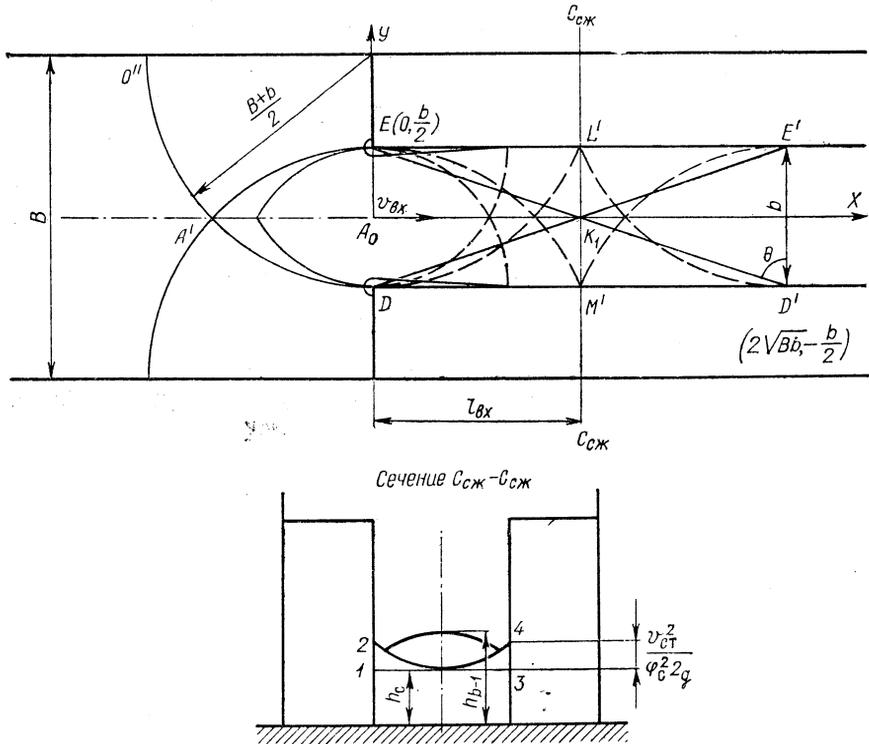


Рис. 1. Взаимодействие глубинных волновых обтеканий при малых удельных расходах.

При граничном стеснении, т. е. при $\frac{b}{B} = 0,50$ и менее, происходит поперечное столкновение глубинных обтеканий: совершается качественный скачок. Обтекания приобретают волновой характер, становятся волновыми течениями.

Когда контуры глубинных волновых обтеканий достигнут противоположных стенок опор, будет наблюдаться большое стеснение, при котором $\frac{b}{B} = 0,33$, а $\frac{B-b}{B} = 0,67$, причем $\frac{b}{B}$ изменяется в пределах 0,33—0,20. Случай максимальных размеров соприкасающихся контуров глубинных обтеканий опор соответствует среднему стеснению ($\frac{b}{B} = 0,67$).

При $\frac{b}{B} > 0,67$ контуры глубинных обтеканий опор значительно расходятся, и становятся заметными сверху главным образом поверхностные обтекания.

Наши исследования охватывают в основном беспороговые водосливы, у которых $\frac{b}{B} = 0,2-0,67$. Особенно часто встречаются случаи, когда $\frac{b}{B} = 0,5-0,2$.

Если $\frac{b}{B} = 0,33$, то взаимодействие глубинных волновых обтеканий приводит к образованию ярко выраженных косых волн, которые, возникнув на входе в сооружение, не только пересекаются между собой, но и отражаются от стенок сооружения.

В беспороговом водосливе из-за стеснения русла в плане возникает искривление струй в горизонтальной плоскости, являющееся причиной искривления струй в вертикальной плоскости. Вследствие этого дополнительный напор 1—2 (или 3—4) в сжатом живом сечении $C_{сж} - C_{сж}$ на входе (рис. 1) с кривизной вдоль течения, обращенной выпуклостью вниз из-за действия центробежной силы [2] $k \frac{v_c^2}{g} h_c$, равен скоростному напору от скорости $v_{сг}$ глубинного обтекания опор в плане (по $O''DL'$) при взаимодействии воды со стенкой с учетом бокового сжатия и потерь энергии на входе (φ_c):

$$k \frac{v_c^2}{g} h_c = \left(\frac{v_{сг}}{\varphi_c} \right)^2 \frac{1}{2g} = \frac{v_{сг}^2}{2g\varphi_c^2}, \quad (1)$$

откуда кривизна

$$k = \left(\frac{v_{сг}}{v_c} \right)^2 \frac{1}{2h_c\varphi_c^2}. \quad (1')$$

По закону площадей при динамическом вращении жидкости $v_i r_i = \text{const}$. Применительно к глубинному волновому обтеканию опоры (см. рис. 1)

$$\frac{B+b}{2} v_{сг} \cong \frac{B}{2} v_{вх}$$

и

$$v_{сг} = \frac{B}{B+b} v_{вх} = \frac{v_{вх}}{1 + \frac{b}{B}};$$

по (1')

$$k = \left(\frac{v_{вх}}{v_c} \right)^2 \frac{1}{\left(1 + \frac{b}{B} \right)^2 2h_c\varphi_c^2}. \quad (1'')$$

В. В. Смыслов ввел [2] коэффициент $\chi = \frac{k_n}{k}$; это отношение кривизны поверхностной струйки k_n к кривизне потока k .

Кривизну поверхностной струйки можно выразить через производные

$$k_n = \frac{\frac{d^2h}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dh}{dx} \right)^2 \right]^{3/2}}.$$

В сжатом сечении $C_{сж} - C_{сж} \frac{dh}{dx} = 0$,

поэтому $k_{п} = \frac{d^2h}{dx^2}$, а

$$k = \frac{1}{\chi} \cdot \frac{d^2h}{dx^2}. \quad (2)$$

Приравняв правые части (1'') и (2), получим

$$\left[\frac{v_{вх}}{v_c \varphi_c \left(1 + \frac{b}{B}\right)} \right]^2 \frac{\chi}{2h_c} = \frac{d^2h}{dx^2},$$

но

$$\frac{v_{вх}}{v_c} = \frac{Qh_c b}{h_{вх} b Q} = \frac{h_c}{h_{вх}},$$

$$\text{тогда } \frac{d^2h}{dx^2} = \frac{\chi h_c}{2h_{вх}^2 \varphi_c^2 \left(1 + \frac{b}{B}\right)^2}. \quad (3)$$

Для решения дифференциального уравнения (3) применим подстановку $\frac{dh}{dx} = t$, которая дает

$$\frac{d^2h}{dx^2} = \frac{dt}{dh} \cdot \frac{dh}{dx} = t \frac{dt}{dh}$$

и

$$\frac{t dt}{dh} = \frac{\chi h_c}{2h_{вх}^2 \varphi_c^2 \left(1 + \frac{b}{B}\right)^2}.$$

Разделив переменные и проинтегрировав, получим

$$\frac{t^2}{2} = \frac{\chi h_c h}{2h_{вх}^2 \varphi_c^2 \left(1 + \frac{b}{B}\right)^2} + C_1.$$

При $h = h_c$ производная $\frac{dh}{dx} = 0$, т. е. и $t = \frac{dh}{dx} = 0$, поэтому $C_1 = -\frac{\chi h_c^2}{2h_{вх}^2 \varphi_c^2 \left(1 + \frac{b}{B}\right)^2}$, а

$$\frac{dh}{dx} = \pm \frac{\sqrt{\chi h_c}}{h_{вх} \varphi_c \left(1 + \frac{b}{B}\right)} \sqrt{h - h_c}. \quad (4)$$

Снова разделив переменные и проинтегрировав, получим выражение

$$\pm 2\varphi_c h_{\text{вх}} \left(1 + \frac{b}{B}\right) \frac{1}{\sqrt{\chi}} \sqrt{\frac{h}{h_c} - 1} = x + C_2.$$

Если $x=0$ и $h=h_{\text{вх}}$ (см. рис. 1), то

$$C_2 = \pm 2\varphi_c h_{\text{вх}} \left(1 + \frac{b}{B}\right) \sqrt{\frac{1}{\chi} \left(\frac{h_{\text{вх}}}{h_c} - 1\right)}.$$

При этих условиях получим следующее уравнение осевой линии на свободной поверхности потока:

$$x = 2\varphi_c h_{\text{вх}} \left(1 + \frac{b}{B}\right) \frac{1}{\sqrt{\chi}} \left(\mp \sqrt{\frac{h_{\text{вх}}}{h_c} - 1} \pm \sqrt{\frac{h}{h_c} - 1} \right).$$

Чтобы выбрать вид решения относительно знака, рассмотрим частный случай (см. рис. 1): $x=l_{\text{вх}}$, а $h=h_c$. Так как $h_{\text{вх}} > h_c$, то принимаем второе решение

$$x = 2\varphi_c h_{\text{вх}} \left(1 + \frac{b}{B}\right) \frac{1}{\sqrt{\chi}} \left(\sqrt{\frac{h_{\text{вх}}}{h_c} - 1} - \sqrt{\frac{h}{h_c} - 1} \right), \quad (5)$$

при котором длина входного перепада получается положительной

$$l_{\text{вх}} = 2\varphi_c h_{\text{вх}} \left(1 + \frac{b}{B}\right) \sqrt{\frac{1}{\chi} \left(\frac{h_{\text{вх}}}{h_c} - 1\right)}. \quad (6)$$

Первое решение дает отрицательный входной перепад, что не имеет физического смысла.

Определяя из (5) отношение $\frac{h}{h_c}$, можно уравнение осевой линии свободной поверхности с учетом (6) переписать так:

$$\frac{h}{h_c} = 1 + \frac{\chi (l_{\text{вх}} - x)^2}{4\varphi_c^2 h_{\text{вх}}^2 \left(1 + \frac{b}{B}\right)^2}. \quad (7)$$

Для участков с отрицательной кривизной и убывающей глубиной

$$\frac{h}{h_c} = 1 - \frac{\chi (l_{\text{вх}} - x)^2}{4\varphi_c^2 h_{\text{вх}}^2 \left(1 + \frac{b}{B}\right)^2}$$

или

$$\frac{h}{h_c} = 1 - \frac{\chi (x - l_{\text{вх}})^2}{4\varphi_c^2 h_{\text{вх}}^2 \left(1 + \frac{b}{B}\right)^2}. \quad (8)$$

Например, в случае определения глубины на выходе из одноперепадного неподтопленного беспорогового водослива [3] по (8)

$$h_{\text{вых}} = h_c \left[-1 - \frac{\chi (L' - l_{\text{вх}})^2}{4\varphi_c^2 h_{\text{вх}}^2 \left(1 + \frac{b}{B}\right)^2} \right]. \quad (9)$$

Для участков с возрастающей (по длине водослива) глубиной (первая полуволна за сечением $C_{\text{сж}} - C_{\text{сж}}$) по формуле (7)

$$\frac{h}{h_c} = 1 + \frac{\chi (x - l_{\text{вх}})^2}{4\varphi_c^2 h_{\text{вх}}^2 \left(1 + \frac{b}{B}\right)^2} = 1 + \frac{\chi l_1^2}{4\varphi_c^2 h_{\text{вх}}^2 \left(1 + \frac{b}{B}\right)^2}. \quad (10)$$

Глубину на выходе из двухперепадного беспорогового водослива по формуле (9) определять нельзя, так как на водобойной части неподтопленного водослива образуются волны [3], распространяющиеся на сливную часть водослива. Образование волн объясняется в конечном итоге действием гидравлических сопротивлений из-за относительно большой длины водослива и наличия водобойной части в нем: движущиеся граничные волновые глубинные контуры наталкиваются на боковые стенки сооружения (см. рис. 1) и примерно под таким же углом отражаются. Отраженное течение движется к противоположной стенке и вновь отражается и т. д.

В результате взаимодействия глубинных волновых обтеканий от обеих опор граничные контуры периодически то пересекаются, то вновь расходятся, а на поверхности потока наблюдаются прямые в плане линии — косые волны, которые возникают вследствие взаимодействия граничных глубинных волновых контуров и также то сходятся, то расходятся (см. рис. 1). Сходятся они в сечении $C_{\text{сж}} - C_{\text{сж}}$ т. е. там, где граничные волновые контуры натекают на стенки, и расходятся, вновь доходя до стенок в сечении, в котором отраженные граничные движущиеся контуры касаются стенок сооружения.

При $\frac{b}{B} = 0,67 - 0,2$ (среднее, граничное, большое стеснение) косые волны хорошо видны на потоке в экспериментах [3, 5]. Если сравнивать глубины на неподтопленном двухперепадном беспороговом водосливе с критической глубиной плавно изменяющегося потока $h_k = \sqrt[3]{\frac{\alpha q^2}{g}}$, то можно сказать, что поток околокритический: на входном перепаде по осевому профилю он в основном спокойный, а на водобойной части бурный, поэтому за сечением $C_{\text{сж}} - C_{\text{сж}}$ бурный поток, которому предстоит преодолевать волнообразно изменяющиеся существенные гидравлические сопротивления на водобойной части, сначала увеличивает глубину с h_c до h_{b-1} (см. рис. 1) в передней полуволне с тем, чтобы приблизительно такое же количество удельной энергии ($h_{b-1} - h_c$) и также волнообразно преобразовать на выходе из водослива снова в удельную кинетическую [3].

Следовательно, в первом приближении глубина на выходе из двухперепадного беспорогового водослива

$$h_{\text{вых}} \cong h_c - (h_{b-1} - h_c) = 2h_c - h_{b-1}. \quad (11)$$

Например, в опыте ЦАГИ-57 [6] $h_c = 2,40$ м, $h_{b-1} = 2,84$ м, тогда по (11) $h_{\text{вых}} = 1,96$ м при опытной $h_{\text{вых}} = 2,03$ м (табл. 1). В одноперепадных беспороговых водосливах водобойной части нет, поэтому $h_{\text{вых}}$ определяется по формуле (9).

Глубина потока возле стенок сооружения в сечении $C_{\text{сж}} - C_{\text{сж}}$ рассчитывается с учетом (1) и выражения для $v_{\text{ст}} = \frac{v_{\text{вх}}}{1 + \frac{b}{B}}$:

$$h_{\text{ст}} = \frac{v_{\text{ст}}^2}{2g\varphi_c^2} + h_c = \frac{Q^2}{2g\varphi_c^2 \left(1 + \frac{b}{B}\right)^2 b^2 h_{\text{вх}}^2} + h_c. \quad (12)$$

Так, в нашем опыте ЧИМЭСХ-82 $Q = 4,4$ л/сек; $\varphi_c = 0,852$; $h_{\text{вх}} = 13,87$ см; $\frac{b}{B} = 0,285$; $h_c = 7,45$ см; $b = 5,7$ см.

По (12) $h_{\text{ст}} = 8,77$ см при опытной $h_{\text{ст}} = 8,14$ см.

Глубины около стенки в других сечениях могут быть также определены при известных глубинах по осевому профилю [3, 7]. Здесь же дан метод расчета промежуточных волн для различных случаев, т. е. в итоге можно построить пространственный поток на беспороговом водосливе с глубинами, в общем близкими к h_k . На беспороговом водосливе мы наблюдаем ярко выраженное пространственное резко изменяющееся течение, существенным признаком которого является криволинейность потока. Это важное обстоятельство следует учитывать и при «эталонной» глубине состояния потока — критической глубине резко изменяющегося течения, которая обозначена В. Г. Веземским через h_* [8].

В. Г. Веземский уточнял также и понятие h_* , правильно поставив вопрос о направлении изменения критической глубины и числа Фруда в пространственном потоке. Он связал критическую глубину резко изменяющегося течения с кривизной свободной поверхности [8], как это сделал В. В. Смыслов [2], давший формулу для критической скорости в криволинейном потоке

$$v_N = \sqrt{gh_N \frac{1}{1 \pm k_N h_N}},$$

из которой можно получить критическую глубину

$$h_N = \frac{v_N^2}{g \mp v_N^2 k_N} = h_*. \quad (13)$$

В приведенных зависимостях перед кривизной поставлены два знака $\pm k_N$. Это отсутствует в формуле В. В. Смылова, но является следствием его вывода о том, что наряду с абсолютной величиной здесь играет роль направление (знак) кривизны, а также величина ее изменения при переходе от одного сечения к другому.

Характерно, что на основании приведенного соображения В. В. Смыслов приходит к заключению о некоторой условности терминов «спокойный» и «бурный» потоки при исследовании криволинейного течения. Такой же вывод делает и А. А. Турсунов [9], обративший внимание на существование обширной зоны околочитических потоков.

Обобщая рассмотренные соображения о критической глубине криволинейного пространственного потока применительно к беспороговым водосливам, можно сказать, что косые волны на потоке в пределах этих водосливов — прямые линии критических глубин криволинейного пространственного потока h_* . Например, прямая ED' (рис. 1) — прямая критических глубин с учетом искривления струй. Она начинается у входа (при больших удельных расходах весьма заметны местные обтекания у неплавных входных кромок), где кривизна отрицательна (выпуклостью обращена вверх), поэтому в соответствии с формулой (13) $h_* = h_N > h_k$. Далее эта прямая в точке K_1 пересекается с другой прямой критических глубин DE^1 .

В точке K_1 кривизна наибольшая и положительная, поэтому здесь в соответствии с (13) $h_* = h_N < h_k$, что совпадает с выводом В. Г. Веземского [8] о том, что глубина потока равна критической в сечении, где наблюдается наибольшая положительная кривизна свободной поверхности.

Подобная картина наблюдается при $\frac{b}{B} = 0,33$ и небольших удельных расходах, поэтому длина входного перепада в соответствии с формулой (6) относительно небольшая, так как $h_{вх}$ незначительно больше h_c . Как видно из рис. 1, $l_{вх} = \sqrt{Bb}$. При повышении удельного расхода соотношение $\frac{h_{вх}}{h_c}$ в формуле (6) резко возрастает, поэтому увеличивается и $l_{вх}$, а местоположение сечения $C_{сж} - C_{сж}$ изменяется за счет поступления дополнительных количеств воды над глубинными затопленными волновыми зонами обхода опор сооружения при прежнем водосливном отверстии b .

Правда, изменяется кривизна, но из-за изменения глубин потока изменяется и скорость v_N в формуле (13), коэффициент же стеснения $\frac{b}{B}$ остается постоянным. Все это приводит к тому, что угол косины волн Θ (см. рис. 1) не изменяется [3], хотя сечение $C_{сж} - C_{сж}$ и передвигается вдоль течения, а величина $l_{вх}$ возрастает. Длина входного перепада увеличивается также при возрастании уклона дна i за счет увеличения приведенной глубины на входе в водослив относительно горизонтальной плоскости, проходящей через наинизшую точку сечения $C_{сж} - C_{сж}$, $h_{вх_i} = h_{вх} + il_{вх_i}$, причем по (6)

$$l_{вх_i} = 2\varphi_c(h_{вх} + il_{вх_i}) \left(1 + \frac{b}{B}\right) \sqrt{\frac{1}{\chi} \left(\frac{h_{вх} + il_{вх_i}}{h_c} - 1\right)}.$$

Отбрасывая члены, содержащие i^2 , и решая полученное уравнение относительно $l_{вх_i}$, приходим к такой зависимости:

$$l_{вх_i} = l_{вх} \left[\frac{i}{\chi} \varphi_c \left(1 + \frac{b}{B}\right) \left(3 \frac{h_{вх}}{h_c} - 2\right) + 1 \right]. \quad (14)$$

В формуле (14) фигурирует коэффициент кривизны χ . Этот коэффициент входит и во многие полученные формулы, поэтому следует остановиться на выборе его величины в различных расчетных случаях.

По В. В. Смыслову [2] для течения вдоль водослива $\chi \approx \tau + 2$, причем τ характеризует закон изменения струек по сечению и не является

постоянной по течению. На участке вблизи начала водослива искривляется большинство струек по сечению потока и $\tau \approx 0$. Для течения вдоль водослива $\tau = [(+1,0) - (-0,50)]$.

На входных участках в зависимости от планового очертания боковых стенок струйки заметно искривляются лишь у свободной поверхности или у дна. При этих условиях показатель τ может быть больше 1 с положительным или отрицательным знаком. Это относится к водосливам с широким порогом. В. В. Смыслов рекомендует в первом приближении принимать значение τ постоянным, например $\tau = 0$ или $\tau = 1$, что соответствует $\chi = 2$ или $\chi = 3$.

В случае беспороговых водосливов искривление струй в вертикальной плоскости — следствие искривления струй в горизонтальной плоскости, причем искривление это носит весьма сложный пространственный характер, поэтому применять закон $k_i = k_n \left(\frac{z}{h}\right)^c$, предложенный В. В. Смысловым, можно лишь весьма приближенно. Уменьшение порога до $p = 0$ приводит к исчезновению восходящего течения в углу между дном русла и порогом. Такое течение способствует непосредственному искривлению струй в вертикальной плоскости, а его отсутствие уменьшает искривление, особенно на входе в беспороговый водослив, т. е. и в сжатом сечении $C_{сж} - C_{сж}$. Следовательно, для $C_{сж} - C_{сж}$ логично предположить $\tau = 0$, а $\chi = 2$ и в соответствии с (6)

$$l_{вх} = 2\varphi_c h_{вх} \left(1 + \frac{b}{B}\right) \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{h_{вх}}{h_c} - 1\right)}. \quad (6')$$

Формулу (6') можно применять при $\frac{b}{B} = 0,33 - 0,67$. При малом стеснении, т. е. при $\frac{b}{B} = 0,67 - 0,95$, разница между k_n и k должна быть еще больше, поэтому $\chi \approx 3$. Наоборот, при граничном и большом стеснении $\frac{b}{B} < 0,33$. При таком же расходе избыток воды размещается над глубинными волновыми обтеканиями, что уменьшает разницу между k_n и k , поэтому можно принять $\chi = 1,5$.

Оголовки в сооружениях эту разницу еще более сглаживают, поэтому $\chi \approx 1,15$.

Наличие относительно тонкой разделительной стенки (двухочковая труба) также способствует сближению k_n и k (табл. 1). Как показывают экспериментальные данные, (см. табл. 1), в общих случаях величина $\left(1 + \frac{b}{B}\right)$ больше 1, а $\sqrt{\frac{1}{\chi} \left(\frac{h_{вх}}{h_c} - 1\right)}$ меньше 1, поэтому для расчетов в первом приближении можно предполагать

$$l_{вх} \approx 2\varphi_c h_{вх}, \quad (6'')$$

что совпало с формулой для $l_{вх}$, полученной автором из совершенно иных предположений.

Как видно из табл. 1, формулы (6) и (14) хорошо подтверждаются экспериментальными данными. В табл. 1 приведены также результаты расчета глубины на выходе из беспорогового водослива по формулам (9), (10) и (11), причем для случаев $i > 0$ к значению глубины по (11)

Таблица 1

Наименование моделей в опытах	Расход Q , л/сек	Отверстие b , см	$\frac{b}{B}$	i	$h_{вх}$, см	$h_{сг}$, см	χ	φ	φ_c	Длина входного перепада, см		$h_{вых}$ в одноперепадных водосливах, см		Глубина h_{b-1} , см		$h_{вых}$ в двухперепадных водосливах, см		
										по формуле (11)	по опыту	по формуле (9)	по опыту	по формуле (10)	по опыту	по формуле (II)	по опыту	
ЧИМЭСХ-68 без оголовков ($\varepsilon=0,80$)	3,5	11,4	0,570	0	6,92	4,01	2,00	0,950	0,926	12,1	12,0	—	—	—	—	3,30	3,33	
ЧИМЭСХ-82 без оголовков ($\varepsilon=0,80$)	4,4	5,7	0,285	0	13,87	7,45	1,50	0,898	0,852	23,1	26,0	—	—	8,31	8,41	6,49	6,75	
ЧИМЭСХ-71 без оголовков ($\varepsilon=0,80$, $m=0,313$)	3,5	5,7+	0,570	0	7,57	5,39	1,60	0,813	0,747	9,0	9,0	—	—	7,20	6,54	4,24	4,03	
ЦАГИ-57 с расходящимися оголовками ($\varepsilon=0,90$ [6])	$60 \cdot 10^3$	400,0	0,133	0	392,0 (огол)	240,00	1,15	0,987	0,984	645,0	645,0	—	—	—	300,0	273,00	284,0	196,00
ЧИМЭСХ-69 без оголовков, $l_b=46,7$ см	3,5	11,4	0,570	0,01963	6,81	3,49	2,00	0,962	0,943	14,7	14,0	—	—	4,63	4,27	3,89	3,91	
ЦАГИ-34 с расходящимися оголовками [8], $\varepsilon=0,90$, $l_b=27,47$ м	$60 \cdot 10^3$	400,0	0,133	0,01000	396,0 (огол)	242,00	1,15	0,963	0,955	657,0	675,0	—	—	—	300,0	272,00	279,00	237,00
ЧИМЭСХ-83 без оголовков, $l_b=24,8$ см	4,4	5,7	0,285	0,01963	13,75	6,93	1,50	0,901	0,865	26,2	27,0	—	—	7,57	7,53	7,35	7,00	
ЧИМЭСХ-96, $L' = 30,2$ см, $b < l_{вх}$	4,0	5,7	0,285	0	14,34	7,21	1,50	0,850	0,791	23,7	23,5	$\chi=3$ 6,09	6,13	—	—	—	—	
ЦАГИ-74 [6], $L' = 4,50$ м, $b > l_{вх}$	$4 \cdot 10^3$	600,0	0,200	0	222,0	140,00	1,00	0,850	0,791	322,0	352,0	$\chi=2$ 114,00	116,0	—	—	—	—	
ИГИ-7 [10], $L' = 3$ м (длина водослива), $b > l_{вх}$	23,4	30,0	0,300	0	12,5	6,56	1,00	0,961	0,949	29,3	26,5	$\chi=2$ 6,4	6,4	—	—	—	—	

надо прибавлять величину $i(l_{b_i} + l_{сл_i})$, где $l_{b_i} + l_{сл_i}$ — длина водобойной части и слива двухперепадного беспорогового водослива [3], которая равна $L_i'' - l_{вх_i}$, и полная глубина

$$h_{\text{вых}} = 2h_c - h_{b-1} + i(L_i'' - l_{вх_i}). \quad (11')$$

Следует заметить, что на поверхности явно пространственного криволинейного потока в беспороговом водосливе из-за стеснения русла сооружением возникают косые волны — прямые различных критических глубин этого криволинейного потока. Опыты показали, что это прямые в плане.

Аналитически можно доказать, что это отрезки прямых линий. Составим определитель третьего порядка для нашей расчетной схемы, имея в виду, что три точки с координатами (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) лежат на одной прямой, если

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Применительно к нашему случаю (см. рис. 1) необходимо проверить, что три точки $E \left(0, \frac{b}{2}\right)$, $K_1(\sqrt{Bb}, 0)$ и $D' \left(2\sqrt{Bb}, -\frac{b}{2}\right)$ лежат на одной прямой. Действительно, определитель третьего порядка

$$\begin{vmatrix} 0 & \frac{b}{2} & 1 \\ \sqrt{Bb} & 0 & 1 \\ 2\sqrt{Bb} & -\frac{b}{2} & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

т. е. линии косых волн — прямые в плане, но не являются прямыми в профиле, так как соединяют точки с различными критическими глубинами в разных направлениях в пространственном криволинейном потоке.

В заключение следует подчеркнуть, что в табл. 1 помещены наиболее характерные опыты на установках с различными данными, полученными не только на основании экспериментов автора в Челябинском институте механизации и электрификации сельского хозяйства (ЧИМЭСХ), но и экспериментов в ЦАГИ [6], а также в Институте гидрологии и гидротехники (ИГГИ) в Киеве [10]. Расчет свободной поверхности воды в беспороговых водосливах для частного случая $\frac{b}{B} = 0,50$

можно было бы сделать в соответствии с работой [5], однако при этом необходимо предварительно знать величину амплитуды a и уточнять длинный ряд других данных, не говоря уже о трудностях построения пространственной картины потока в этом методе, основанном на многочисленных недостаточно обоснованных допущениях.

Результаты рассмотренных исследований с учетом [3, 7] дают возможность более успешно и полно решать ряд теоретических и практических задач, так как они учитывают не только изменение стеснения потока, но и изменение длины сооружений.

Литература

1. Н. Ф. Дanelия. Водозаборные сооружения на реках с обильными донными наносами. М., 1964.
2. В. В. Смыслов. Теория водослива с широким порогом. Киев, 1956.
3. Г. Г. Богданов. Гидравлический расчет беспороговых водосливов в укрепляемых руслах. Минск, 1968.
4. А. И. Богомолов, К. А. Михайлов. Гидравлика. М., 1965.
5. F. Englund, J. Munch—Petersen. Steady flow in contracted and expanded rectangular channels. La Houille Blanche, n. 4. Grenoble, 1953.
6. М. М. Протодьяконов. Протекание воды в малых мостах и трубах. М., 1973.
7. Г. Г. Богданов. Расчет пространственных волн на поверхности потока в водобойной части беспорогового водослива. Сб. «Вопросы прикладной гидравлики и теплотехники». Вып. 87. Гомель, 1970.
8. В. Г. Веземский. Косой прыжок и критическая глубина открытого потока. Сб. «Труды координационных совещаний по гидротехнике. Гидравлика высоконапорных водосборных сооружений». Вып. 52. Л., 1969.
9. А. А. Турсунов. Управление гесметрическими формами бурных потоков при помощи конечных возмущений. Сб. «Труды координационных совещаний по гидротехнике. Гидравлика высоконапорных водосборных сооружений». Вып. 52. Л., 1969.
10. В. В. Смыслов. Исследование формы свободной поверхности при протекании воды через отверстия малых мостов. Изв. ин-та гидрологии и гидротехники АН УССР, т. 9 (XVI), 1952.

Д. А. Козлов, А. В. Молочко

ВЛИЯНИЕ ВХОДНОГО ПОРОГА НА СЖАТИЕ СТРУИ ЗА ЩИТОМ

Наличие входного порога оказывает некоторое влияние на пропускную способность щитового отверстия. Рассмотрим схему (рис. 1), позволяющую учесть влияние на величину коэффициента сжатия не только относительного открытия щита

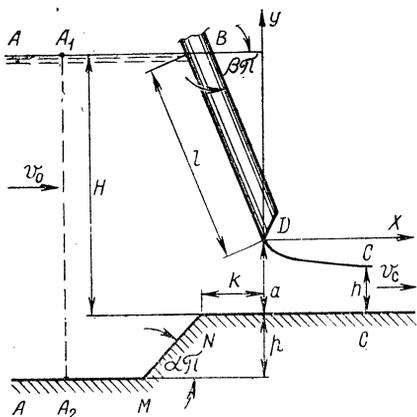


Рис. 1. Расчетная схема.

и его угла наклона β , но и геометрических размеров входного порога.

В данном случае коэффициент сжатия

$$\epsilon = f \left(\frac{a}{H}; \beta; \alpha; \frac{p}{a}; \frac{k}{a} \right),$$

где α — угол наклона входного порога MN ; p — высота порога; k — расстояние от входного ребра N до нижней кромки щита D .

Жидкость считается идеальной, течение плоским [1]. Указанной плоскости течения $z = x + iy$ соответ-

ствует в плоскости комплексного потенциала W бесконечная полоса шириной

$$q = \frac{Q}{b} = v_0(H + p),$$

где q — расход на единицу ширины канала; v_0 — скорость подхода.

Конформное отображение области изменения комплексного потенциала W на верхнюю полуплоскость вспомогательного параметрического переменного t осуществляется функцией

$$W(t) = \frac{q}{\pi} \ln(t + 1). \tag{1}$$

Для нахождения комплексной скорости $\frac{dW}{dz}(t)$ вводится функция Н. Е. Жуковского [2]:

$$\omega = \ln \frac{1}{v_c} \cdot \frac{dW}{dz} = \ln \frac{v}{v_c} - i\theta, \tag{2}$$

где v — модуль скорости; θ — ее угол наклона.

Решение сводится к смешанной краевой задаче — найти функцию ω , аналитическую, в верхней полуплоскости t по известным значениям ее действительной и мнимой частей на действительной оси t . Пользуясь формулой Келдыша—Седова, находим функцию ω в виде

$$\omega = \alpha \ln \frac{(m+t) [\sqrt{t(n-1)} + \sqrt{n(1+t)}]^2}{(n+t) [\sqrt{t(m-1)} + \sqrt{m(1+t)}]^2} - \beta \ln \frac{[\sqrt{t(1+b)} + \sqrt{b(1+t)}]^2}{t-b}. \quad (3)$$

Используя (3), можем получить соотношение, связывающее скорость подхода со скоростью в сжатом сечении:

$$\frac{v_0}{v_c} = \omega(t=\infty) = \frac{[\sqrt{n-1} + \sqrt{n}]^{2\alpha}}{[\sqrt{m-1} + \sqrt{m}]^{2\alpha} [\sqrt{1+b} + \sqrt{b}]^{2\beta}}, \quad (4)$$

а из уравнения постоянства расхода

$$\frac{H}{h} = \frac{H+p}{h} - \frac{p}{h} = \frac{v_c}{v_0} - \frac{p}{h}. \quad (5)$$

Исходя из (1) и (3), переход на физическую плоскость осуществляем следующим образом:

$$z = \frac{1}{v_c} \int e^{-\omega} \frac{dW}{dt} dt = -\frac{h}{\pi} \int e^{-\omega} \frac{dt}{t+1}. \quad (6)$$

Таким образом, относительная длина щита равна

$$\frac{l}{h} = \frac{1}{\pi} \int_0^b \left\{ \frac{(n+t) [\sqrt{t(m-1)} + \sqrt{m(1+t)}]^2}{(m+t) [\sqrt{t(n-1)} + \sqrt{n(1+t)}]^2} \right\}^\alpha \times \left\{ \frac{[\sqrt{t(1+b)} + \sqrt{b(1+t)}]^2}{b-t} \right\}^\beta \frac{dt}{t+1}, \quad (7)$$

а высота порога

$$\frac{p}{h} = \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \int_{-m}^{-n} e^{-\omega} \frac{dt}{t+1}. \quad (8)$$

Если A_1A_2 — линия равного потенциала скорости $\varphi_{A_1} = \varphi_{A_2}$, тогда из (1) получаем $t_{A_1} = -2 - t_{A_2}$. Задав t_{A_2} достаточно малым, чтобы A_2M получалось больше $3(H+P)$, можно считать эквипотенциаль A_1A_2 вертикальной прямой. Удаление входного ребра от кромки щита k найдется по следующей зависимости:

$$\frac{k}{h} = \frac{|A_1B|}{h} + \frac{l}{h} \cos \beta \pi - \frac{|A_2M|}{h} - \frac{p}{h} \operatorname{ctg} \alpha \pi, \quad (9)$$

$$\frac{|A_1 B|}{h} = \frac{1}{\pi} \int_b^{A_1} e^{-\omega} \frac{dt}{t+1}, \quad \frac{|A_2 M|}{h} = \frac{1}{\pi} \int_{A_2}^{-m} e^{-\omega} \frac{dt}{t+1}. \quad (10)$$

Из геометрических соотношений с учетом (5) и (7) относительное открытие равно

$$\frac{a}{H} = 1 - \frac{l}{h} \cdot \frac{h}{H} \sin \beta \pi, \quad (11)$$

а коэффициент сжатия ε будет равен

$$\varepsilon = \frac{h}{a} \frac{1}{\frac{H}{h} - \frac{l}{h} \sin \beta \pi}. \quad (12)$$

С учетом (8), (9) и (11) относительные геометрические размеры входного порога равны

$$\frac{p}{a} = \varepsilon \frac{p}{h}; \quad \frac{k}{a} = \varepsilon \frac{k}{h}. \quad (13)$$

При заданных углах α и β , задаваясь значениями m , n , b ($\infty > m > n$; $1 < n < m$; $0 < b < \infty$), по полученным формулам находим соответствующие им относительные геометрические характеристики

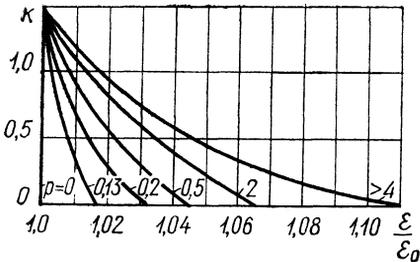


Рис. 2. Зависимость $\varepsilon = f(k, p)$ для $\alpha \pi = 45^\circ$, $\beta \pi = 90^\circ$, $\frac{a}{H} = 0,1$.

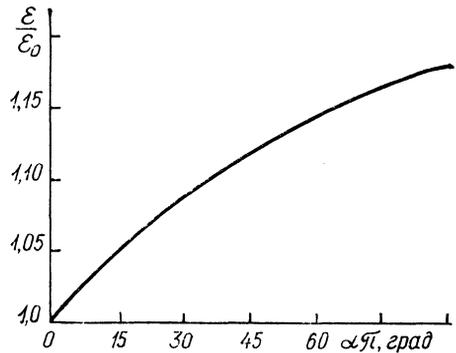


Рис. 3. Зависимость $\varepsilon = f(\alpha \pi)$ для $\beta \pi = 90^\circ$, $k=0$, $p > 4a$, $\frac{a}{H} = 0,1$.

течения $\frac{h}{a}$; $\frac{p}{a}$; $\frac{k}{a}$ и коэффициент сжатия ε . При $\alpha=0$ полученные формулы дают решение известной задачи истечения из-под плоского щита в канале с горизонтальным дном.

Для вертикального щита ($\beta \pi = 90^\circ$) при значениях $\alpha \pi = 30^\circ$; 45° ; 60° ; 90° и различных комбинациях значений b , m , n , что соответствует различным k и p по формулам (7)–(13) были выполнены примеры числовых расчетов на ЭВМ «Одра-1204».

Расчеты показывают, что при $k > 1,5$ а наличие порога перед щитом не оказывает влияния на истечение и коэффициент сжатия ε остается

практически таким же, как при истечении в канале с горизонтальным дном. При уменьшении расстояния между щитом и входным порогом $k < 1,5a$ присутствие порога несколько уменьшает сжатие потока за щитом и величина ϵ растет (рис. 2). Увеличение высоты порога вызывает аналогичное влияние. При увеличении $p > 4a$ коэффициент сжатия остается неизменным. При увеличении угла наклона входного порога α ϵ также увеличивается (рис. 3).

Анализ принятых при построении решения допущений и сравнение полученных результатов с некоторыми предварительными опытами указывают на применимость приведенных формул только при малых относительных открытиях $\left(\frac{a}{H} < 0,2\right)$. Опыты показывают, что при больших α возможно возникновение отрывного течения за точкой N , однако его влияние на общую картину течения пренебрежимо мало.

Литература

1. М. И. Гуревич. Теория струй идеальной жидкости. М., 1961.
2. Н. Е. Жуковский. Видоизменение метода Кирхгофа для определения движения жидкости в двух измерениях при постоянной скорости, данной на неизвестной линии тока. Поли. собр. соч., т. III. М., 1936.

В. Т. Парахневич

К ВОПРОСУ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СКОРОСТЕЙ ВДОЛЬ ТРАНЗИТНОЙ СТРУИ СБОЙНОГО ТЕЧЕНИЯ

В имеющихся исследованиях достаточно хорошо отражается картина сбойного течения, раскрываются основные причины его возникновения, а также устанавливается граница перехода от растекания к сбойному течению [1—4]. Вопрос количественной оценки скоростной структуры транзитной струи изучен недостаточно. В некоторых работах [3, 4] отмечается лишь качественный характер изменения скоростей вдоль транзитной струи сбойного течения. Сложность явления и небольшое число опытов не позволили пока еще установить закономерности изменения скоростей вдоль транзитной струи. Данная работа посвящается этому вопросу.

Исследования проводились в прямоугольном гидравлическом лотке шириной $B=150$ см и длиной нижнего бьефа $L=750$ см на модели плотины практического профиля высотой $P=35$ см с водосливной гранью, выполненной по координатам Кригера—Офицерова для профилирующего напора $H_{пр}=30$ см. Уровни в верхнем и нижнем бьефах фиксировались системой стационарных и одним переносным пьезометрами.

Опыты проводились по схеме внезапного расширения потока при работающем центральном отверстии, ширина которого изменялась в пределах $b=(3,0—30,0)$ см, т. е. относительная ширина бьефов $\beta = \frac{b}{B} = 0,02—0,20$. Скорости в транзитной струе измерялись с помощью

трубки Пито в пяти точках на каждой вертикали, расстояние между вертикалями в поперечном сечении потока составляло 5—10 см. По данным измерений подсчитывались средние скорости по вертикалям, на основании которых были построены плановые эпюры для каждого сечения транзитной струи. Затем рассматривалось изменение максимальной скорости плановой эпюры вдоль транзитной струи, т. е. средней скорости вдоль динамической оси транзитной струи.

Было проведено 42 опыта при $Fr=10—40$ и расходе $Q=(3,0—63,0)$ л/сек. Число Фруда для потока в сжатом сечении на входе в нижний бьеф

$$Fr = \frac{v^2}{gh},$$

где v , h — соответственно скорость и глубина в сжатом сечении.

На основании опытного материала построены зависимости изменения скорости вдоль транзитной струи при различных β в координатах

$\frac{v_x}{v}$ и $\frac{l}{B}$, где v — скорость в сжатом сечении; v_x — средняя скорость на динамической оси транзитной струи для данного сечения; l — расстояние от сжатого до данного сечения; B — ширина нижнего бьефа.

Анализ кривых (рис. 1) позволил установить два характерных участка транзитной струи: формирования и плавного расширения.

Интенсивное гашение скорости на участке формирования транзитной струи объясняется повышенной турбулентностью. Кроме этого, на этом участке происходит отдача значительной части энергии входного потока водоворотным зонам. Незначительное уменьшение скорости на участке плавного расширения транзитной струи обуславливается лишь увеличением размеров струи в плане и по ширине, а также потерями на трение.

Вопрос формирования транзитной струи на начальном участке нижнего бьефа и длины этого участка рассмотрен в работе [5], где получены формулы для средней скорости на динамической оси транзитной струи сбойного течения начального ее участка. В случае подтопленного растекания зависимость имеет вид

$$v_1 = 2,3 \cdot v \cdot \beta^{0,46} \left(\frac{h_1}{h} \right)^{0,3}, \tag{1}$$

а для сбойного сопряжения бьефов

$$v_1 = 1,6 \cdot v \cdot \beta^{0,4} \sqrt{\frac{h}{h_1}}, \tag{2}$$

где v, h — соответственно скорость и глубина потока в сжатом сечении на входе в нижний бьеф; h_1, v_1 — соответственно глубина и средняя по глубине скорость на динамической оси транзитной струи для начального ее участка.

В случае подтопленного растекания длина участка формирования транзитной струи

$$l_\phi = (6 - 10) h,$$

где l_ϕ — расстояние от конца зоны растекания до сечения, в котором определялись v_1 и h_1 .

Длина участка формирования при сбойном сопряжении

$$l'_\phi = (8 - 16) h.$$

Это расстояние от места внезапного расширения русла до сечения, в котором определялись v_1 и h_1 .

Большие значения l_ϕ и l'_ϕ относятся к опытам с большими числами F_r в сжатом сечении потока, а меньшие соответственно при меньших значениях F_r .

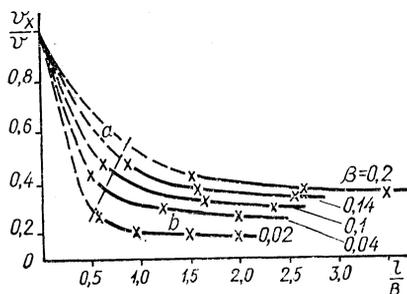


Рис. 1. График изменения относительной скорости вдоль транзитной струи сбойного течения:

a — участок формирования; *b* — плавного расширения.

Остановимся на определении количественной зависимости изменения скорости в транзитной струе на участке ее плавного расширения. В результате статистической обработки опытного материала была получена зависимость

$$v_2 = 1,4 \cdot v_1 \left(\frac{h_1}{h_2} \right)^{0,04} \left(\frac{B}{l} \right)^{0,38} \beta^{0,21}, \quad (3)$$

где v_1 , h_1 — соответственно средняя скорость и глубина на динамической оси транзитной струи для начального участка плавного расширения; v_2 , h_2 — соответственно средняя скорость и глубина на динамической оси транзитной струи в некотором последующем сечении; l — расстояние между сечениями.

Средняя скорость v_1 может быть определена по зависимостям (1) и (2).

Зависимость (3) дает хорошее совпадение с результатами опытов (рис. 2) по определению средней по вертикали скорости на динамической оси транзитной струи для участка плавного ее расширения.

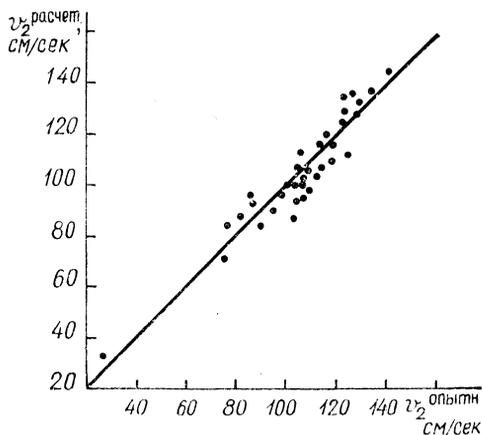


Рис. 2. Сравнение величины скорости v_2 , полученной по формуле (3), с опытными ее значениями.

Выводы

1. Транзитная струя сбойного течения имеет два характерных участка: формирования и плавного расширения.
2. Для определения средней по вертикали скорости на динамической оси транзитной струи рекомендуются зависимости (1), (2), (3).

Литература

1. С. К. Кузнецов. К вопросу о растекании потока в плане и сбойном течении. Новочеркасск. инж.-мелиоративн. ин-та, т. VI, 1958.
2. Н. М. Константинов. Условия существования различных форм движения потока за водопроводными трубами и малыми мостами. Сб. «Труды первой Всесоюзной научно-технической конференции по гидравлике дорожных сооружений». М., 1969.
3. Н. Позьяк. Экспериментальное исследование сбойного течения в прямоугольных руслах. Изв. ин-та гидрологии и гидротехники АН УССР, т. 15 (XXII), 1959.
4. Ф. Г. Гунько. Экспериментальные характеристики основных форм сопряжения бьефов в пространственных условиях при донном режиме течения на гладком водобое. Изв. ВНИИГ, т. 55, 1966.

В. С. Усенко

РАСТЕКАНИЕ БУГРОВ ГРУНТОВЫХ ВОД ПРИ ПЕРЕМЕННОЙ ИНФИЛЬТРАЦИИ ИЗ БАСЕЙНОВ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ФОРМЫ

В настоящее время все шире начинается внедрение методов искусственного регулирования запасов подземных вод. Однако методы фильтрационного расчета системы искусственного пополнения разработаны еще недостаточно. Разработка способов такого расчета представляет теоретический и практический интерес.

В соответствии с типовой схемой работы инфильтрационного бассейна исследуем два вида переменной во времени интенсивности инфильтрации (бассейн фильтрует только дном [1]):

$$1) \quad q = \frac{1}{\sqrt{\alpha t}}; \quad 2) \quad q = q_1 e^{-\varepsilon t},$$

где

$$\alpha = \frac{2\rho}{\gamma k_0 H_0}; \quad \varepsilon = \frac{k_0}{h_n^k}; \quad q_1 = \frac{H_1}{h_n^k} k_0. \quad (1)$$

Здесь $H_1 = H_0 q^{t_2}$; ρ — мутность сырой воды; k_0 — коэффициент фильтрации коагулирующих отложений; H_0 — действующий напор в бассейне; h_n^k — толщина коагулирующей пленки; γ — объемный вес коагулирующей пленки (рис. 1).

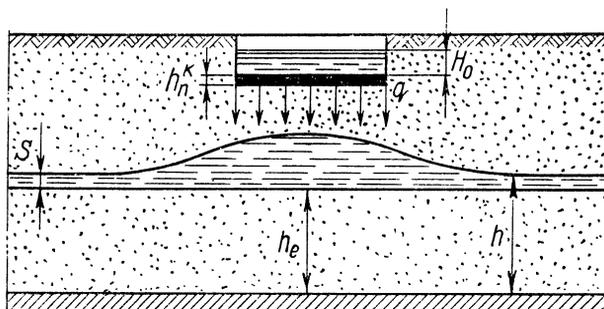


Рис. 1. Схема бугра грунтовых вод в разрезе.

Будем считать, что растекание грунтовых вод описывается двумерным линейризованным уравнением Буссинеска

$$a \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad (2)$$

где

$$a = \frac{k_m}{\delta}; \quad u = \frac{h - h_e}{h_e} \quad \text{или} \quad u = \frac{h^2 - h_e^2}{h_e^2}.$$

Здесь k — коэффициент фильтрации грунта; m — средняя глубина потока грунтовых вод; δ — коэффициент недостатка насыщения (водотдачи); h_e — бытовая глубина грунтового потока; h — текущая глубина грунтового потока; $h - h_e = s$ — подъем уровней грунтовых вод в некоторой точке пласта (x, y) в момент времени t .

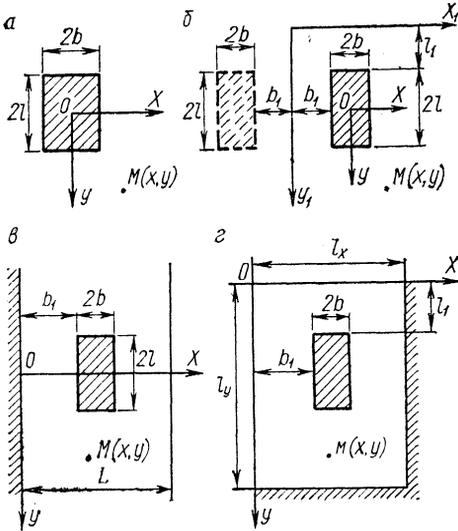


Рис. 2. Расчетные схемы пластов в плане:

a — неограниченного; b — пласта-квадранта; c — пласта-полосы; d — квадратного.

Рассмотрим сначала растекание бугров грунтовых вод при первом виде инфильтрационного питания.

Используя известный в математической физике метод источников и стоков для неограниченного в плане пласта (рис. 2, a), можно записать [2—4]

$$s = \frac{1}{\delta \sqrt{\alpha}} \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\tau}{4\pi a \tau \sqrt{\tau}} \int_{-b}^b \int_{-l}^l e^{-\frac{(x-\xi)^2 + (y-\zeta)^2}{4a\tau}} d\xi d\zeta, \quad (3)$$

где $2h$ — ширина бассейна; $2l$ — длина бассейна ($l > b$); ξ, ζ, τ — переменные интегрирования.

Интегрирование по ξ и ζ дает [3]

$$s = \frac{1}{4\delta \sqrt{\alpha}} \int_{t_1}^{t_2} \left[\operatorname{erf} \left(\frac{x+b}{2\sqrt{a\tau}} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{x-b}{2\sqrt{a\tau}} \right) \right] \times \left[\operatorname{erf} \left(\frac{y-l}{2\sqrt{a\tau}} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{y+l}{2\sqrt{a\tau}} \right) \right] \frac{d\tau}{\sqrt{\tau}}. \quad (4)$$

Далее найдем интеграл

$$I = \int_{t_1}^{t_2} \operatorname{erf} \left(\frac{\lambda_1}{\sqrt{\tau}} \right) \operatorname{erf} \left(\frac{\lambda_2}{\sqrt{\tau}} \right) \frac{d\tau}{\sqrt{\tau}}, \quad (5)$$

где $\lambda_1 = \frac{x+b}{2\sqrt{a}}$; $\lambda_2 = \frac{y+l}{2\sqrt{a}}$.

Учитывая, что интегрирование ведется в таком промежутке времени $(t_2 - t_1)$, что $\left| \frac{y \pm l}{2\sqrt{at_1}} \right| \leq 0,7$, ибо $t_1 = \beta/\alpha = \frac{\gamma(h_0^k)^2}{2\rho k_0 H_0}$ почти всегда достаточно велико [1] (h_0^k — толщина кольтатирующей пленки в момент времени t_1), интеграл (5) можно вычислить приближенно.

Принимая [5]

$$\operatorname{erf}(u) \approx \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(u - \frac{u^3}{3} \right),$$

можно (5) приближенно записать в виде

$$\begin{aligned} I &= \frac{4}{\pi} \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\lambda_1}{\sqrt{\tau}} - \frac{\lambda_1^3}{3\tau\sqrt{\tau}} \right) \left(\frac{\lambda_2}{\sqrt{\tau}} - \frac{\lambda_2^3}{3\tau\sqrt{\tau}} \right) \frac{d\tau}{\sqrt{\tau}} = \\ &= \frac{4}{\pi} \lambda_1 \lambda_2 \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{1}{\tau} - \frac{\lambda_1^2 \lambda_2^2}{3\tau^2} + \frac{\lambda_1^2 \lambda_2^2}{9\tau^3} \right) \frac{d\tau}{\sqrt{\tau}}. \end{aligned} \quad (6)$$

Интегрируя (6) и подставляя пределы, получим

$$\begin{aligned} I_1(\lambda_1, \lambda_2, t) &= \frac{8}{\pi} \lambda_1 \lambda_2 \left[\frac{1}{\sqrt{t_1}} - \frac{1}{\sqrt{t_2}} + \frac{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}{9} \times \right. \\ &\times \left. \left(\frac{1}{t_2 \sqrt{t_2}} - \frac{1}{t_1 \sqrt{t_1}} \right) + \frac{\lambda_1^2 \lambda_2^2}{45} \left(\frac{1}{t_1^2 \sqrt{t_1}} - \frac{1}{t_2^2 \sqrt{t_2}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (7)$$

Аналогично можно найти интегралы

$$I_2(\lambda_1, \lambda_4, t), \quad I_3(\lambda_2, \lambda_3, t), \quad I_4(\lambda_3, \lambda_4, t),$$

$$\text{где } \lambda_3 = \frac{x-b}{2\sqrt{a}}, \quad \lambda_4 = \frac{y-l}{2\sqrt{a}}. \quad (8)$$

Тогда повышение зеркала грунтовых вод под влиянием работы прямоугольного в плане бассейна в неограниченном пласте можно рассчитать по формуле

$$s = \frac{2}{\pi \delta \sqrt{\alpha}} \sum_{i=1}^4 \bar{I}_i, \quad \bar{I}_i = \frac{\pi}{8} J_i. \quad (9)$$

В случае квадратного бассейна $|\lambda_1| = |\lambda_2|$ и $|\lambda_3| = |\lambda_4|$.

Если прямоугольный бассейн расположен относительно начала координат так, что (рис. 2, б)

$$\xi_1 = \xi + b_1 + b \quad \text{и} \quad \zeta_1 = \zeta + l_1 + l, \quad (10)$$

а

$$\left| \frac{x \pm b}{2\sqrt{at_1}} \right|, \quad \left| \frac{y_1 \pm l}{2\sqrt{at_1}} \right| \leq 0,7,$$

то расчеты растекания бугров грунтовых вод можно вести по формуле (9), сделав в выражении для I_i замену переменных (10).

На достаточно большом удалении расчетной точки от границы бассейна для прогноза динамики уровней грунтовых вод целесообразно пользоваться расчетной схемой для круглого бассейна, сделав приведение прямоугольного в плане бассейна к равновеликому по дебиту и площади круглому бассейну (1).

Результирующее положение поверхности грунтовых вод от действия нескольких бассейнов можно получить, используя принцип суперпозиций

$$s = \sum_{j=1}^n s_j, \quad (11)$$

где s_j — подъем поверхности грунтовых вод под влиянием j -го бассейна; n — число бассейнов.

Для полуограниченного пласта результирующее положение грунтового потока рассчитывается по формуле

$$s = \sum_{j=1}^n (s_j + ps_j^*), \quad (12)$$

где $p=1$ для непроницаемой границы пласта; $p=-1$ для проницаемой границы; s_j^* — изменение поверхности грунтовых вод под влиянием бассейна, отраженного относительно границы (параллельной одной из сторон бассейна) пласта.

При расчете s_j^* необходимо в λ_j подставить вместо b и l величины b^* и l^* для отраженных источников.

Решение для пласта-полосы (рис. 2, в) можно получить из (3), воспользовавшись принципом отражения и наложения источников по формуле

$$s = \frac{1}{\delta V \alpha} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\tau}{4\pi a \tau V \tau} \int_{b_1}^{b_2} \int_{-l}^l \left[e^{-\frac{(x-\xi+2nl)^2+(y-\zeta)^2}{4a\tau}} + p_x e^{-\frac{(x+\xi+2nl)^2+(y-\zeta)^2}{4a\tau}} \right] d\xi d\zeta, \quad (13)$$

где $p_x=1$ для обеих непроницаемых границ; $p_x=-1$ для обеих проницаемых границ; $b_2=b_1+2b$. Интегрируя (13) по ζ_1 , получим

$$s = \frac{1}{4\delta V \alpha} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\tau}{V \pi a \tau} \int_{b_1}^{b_2} \left[\operatorname{erf} \left(\frac{y+l}{2\sqrt{a\tau}} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{y-l}{2\sqrt{a\tau}} \right) \right] \times \\ \times \left[e^{-\frac{(x-\xi+2nl)^2}{4a\tau}} + p_x e^{-\frac{(x+\xi+2nl)^2}{4a\tau}} \right] d\xi. \quad (14)$$

Далее, применяя формулу Пуассона [6], перепишем (14) в виде

$$s = \frac{1}{4\delta\sqrt{\alpha}} \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\tau}{l_x \sqrt{\tau}} \left[\operatorname{erf} \left(\frac{y+l}{2\sqrt{a\tau}} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{y-l}{2\sqrt{a\tau}} \right) \right] \int_{b_1}^{b_2} \left[(1+p_x) + \right. \\ \left. + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2\pi^2 a\tau}{l_x}} \cos \frac{n\pi(x-\xi)}{l_x} + p_x 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2\pi^2 a\tau}{l_x}} \cos \frac{n\pi(x+\xi)}{l_x} \right] d\xi, \quad (15)$$

где l_x — ширина полосы.

Вводя относительные координаты и интегрируя по ξ , получим

$$s = \frac{l_x}{4\delta\sqrt{\alpha}} \int_{t_1}^{t_2} \left[\operatorname{erf} \left(\frac{\bar{y}_2}{2\sqrt{\bar{\tau}}} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{\bar{y}_1}{2\sqrt{\bar{\tau}}} \right) \right] \left\{ (1+p_x)\bar{b} - \right. \\ \left. - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-\pi^2 n^2 \bar{\tau}} [p_x (\sin n\pi \bar{x}_1 - \sin n\pi \bar{x}_2) - \right. \\ \left. (\sin n\pi \bar{x}_3 - \sin n\pi \bar{x}_4)] \right\} \frac{d\bar{\tau}}{\sqrt{\bar{\tau}}},$$

$$\text{где } \bar{b} = \frac{2b}{l_x}; \quad \bar{x}_1 = \frac{x-b_2}{l_x}; \quad \bar{x}_2 = \frac{x-b_1}{l_x}; \quad \bar{x}_3 = \frac{x+b_2}{l_x}; \quad \bar{x}_4 = \\ = \frac{x+b_1}{l_x}; \quad \bar{x}_2 = \frac{y+l}{l_x}; \quad \bar{y}_1 = \frac{y-l}{l_x}.$$

Введем следующую функцию

$$\sigma(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\bar{t}} \left[\operatorname{erf} \left(\frac{\bar{y}}{2\sqrt{\bar{\tau}}} \right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-\pi^2 n^2 \bar{\tau}} \sin n\pi \bar{x} \right] \frac{d\bar{\tau}}{\sqrt{\bar{\tau}}}, \quad (17)$$

которую можно протабулировать.

Тогда (16) можно переписать в виде

$$s = \frac{l_x}{4\delta\sqrt{\alpha}} \left\{ \frac{(1+p_x)\bar{b}}{\sqrt{\pi}} \left[\ln \frac{\bar{t}_2}{\bar{t}_1} (\bar{y}_2 - \bar{y}_1) + \left(\frac{1}{\bar{t}_2} - \frac{1}{\bar{t}_1} \right) \frac{\bar{y}_2^2 - \bar{y}_1^2}{12} \right] + \right. \\ \left. + p_x \left[\sigma(\bar{x}_2, \bar{y}_2, \bar{t}) - \sigma(\bar{x}_2, \bar{y}_1, \bar{t}) - \sigma(\bar{x}_2, \bar{y}_2, \bar{t}) + \sigma(\bar{x}_2, \bar{y}_1, \bar{t}) \right] \frac{\bar{t}_2}{\bar{t}_1} - \right. \\ \left. - \left[\sigma(\bar{x}_3, \bar{y}_2, \bar{t}) - \sigma(\bar{x}_3, \bar{y}_1, \bar{t}) - \sigma(\bar{x}_4, \bar{y}_2, \bar{t}) + \sigma(\bar{x}_4, \bar{y}_1, \bar{t}) \right] \frac{\bar{t}_2}{\bar{t}_1} \right\}. \quad (18)$$

Если на границах полосы заданы разнородные предельные условия, то функция $\sigma(x, y, t)$ принимается следующий вид [3]:

$$\sigma^*(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\bar{t}} \operatorname{erf} \left(\frac{\bar{y}}{2\sqrt{\bar{\tau}}} \right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\pi^2(n-0,5)^2 \bar{\tau}}}{(n-0,5)} \sin \pi(n-0,5)\bar{x} \frac{d\bar{\tau}}{\sqrt{\bar{\tau}}}.$$

Результирующее положение поверхности грунтовых вод при работе нескольких бассейнов можно рассчитать по формуле (11), где s_j определяются по (18) с учетом расположения бассейнов относительно общего начала координат.

Если бассейны действуют в пласте-полуполосе, то расчеты ведутся по формуле (12) с учетом предыдущих замечаний, где $p = p_y = \pm 1$ отражает влияние поперечной границы пласта-полуполосы.

Решения для пласта-квадранта (рис. 2, б) легко получить, если отобразить реальный бассейн относительно границ пласта (совпадающих с осями координат) и относительно вершины пласта и произвести наложение потоков, создаваемых каждым из четырех бассейнов по формуле

$$s = \frac{2}{\pi \delta \sqrt{a}} \left\{ \sum_{i=1}^4 I_i + p_x \sum_{i=1}^4 I_i^* + p_y \left[\sum_{i=1}^4 I_i^{**} + \sum_{i=1}^4 I_i^{***} \right] \right\}, \quad (20)$$

где I_i^* , I_i^{**} , I_i^{***} вычисляются по (7) для соответствующих значений $\lambda = \frac{x \pm \varepsilon}{2 \sqrt{a}}$ (ε — переменная интегрирования, которая для мнимых (отраженных) бассейнов отсчитывается от общей для всех четырех бассейнов системы координат); p_x и p_y — коэффициенты, учитывающие характер предельных условий на границах пласта-квадранта, $p_x = \pm 1$; $p_y = \pm 1$.

Решение поставленной задачи для пласта-прямоугольника (рис. 2, г), можно получить, воспользовавшись решением задачи о растекании бугра грунтовых вод единичной высоты в пласте-прямоугольнике [2]. Для этого необходимо вычислить следующий интеграл:

$$s(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) = \frac{l_x}{4\delta \sqrt{\alpha a}} \int_{t_1}^{t_2} \bar{s}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) \frac{d\bar{\tau}}{\sqrt{\bar{\tau}}}, \quad (21)$$

где $\bar{s}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t})$ — функция, описывающая растекание бугра грунтовых вод единичной высоты для пласта-прямоугольника, значение которой приведено в работе [2] для различных предельных условий на границах пласта-прямоугольника.

Если все четыре границы пласта-прямоугольника непроницаемы, то

$$\begin{aligned} \bar{s}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) = & t [s(\bar{x}_2, \bar{t}) - s(\bar{x}_1, \bar{t}) + s(\bar{x}_3, \bar{t}) - s(\bar{x}_4, \bar{t})] \times \\ & \times [s(\bar{y}_2, \bar{t}) - s(\bar{y}_1, \bar{t}) + s(\bar{y}_3, \bar{t}) - s(\bar{y}_4, \bar{t})], \end{aligned} \quad (22)$$

где

$$\bar{y}_1 = \frac{y - l_2}{l_x}, \quad \bar{y}_2 = \frac{y + l_1}{l_x}, \quad \bar{y}_3 = \frac{y + l_2}{l_x}; \quad \bar{y}_4 = \frac{y - l_1}{l_x}.$$

При всех четырех проницаемых границах функция $\bar{s}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t})$ принимает вид

$$\begin{aligned} \bar{s}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) = & [s(\bar{x}_2, \bar{t}) - s(\bar{x}_1, \bar{t}) - s(\bar{x}_3, \bar{t}) + s(\bar{x}_4, \bar{t})] \times \\ & \times [s(\bar{y}_2, \bar{t}) - s(\bar{y}_1, \bar{t}) + s(\bar{y}_3, \bar{t}) - s(\bar{y}_4, \bar{t})], \end{aligned} \quad (23)$$

где

$$s(\bar{x}, \bar{t}) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-n^2 \pi^2 \bar{t}} \sin n \pi \bar{x}. \quad (24)$$

Чтобы записать выражение для $s(\bar{y}, \bar{t})$, необходимо в (24) \bar{x} заменить на \bar{y} , а n на λm , $\lambda = \frac{l_x}{l_y}$.

Если одна из границ области, например $x = l_x$, непроницаема, то функция, описывающая растекание бугра, имеет вид (22), где в первой квадратной скобке функции $s(\bar{x}, \bar{t})$ заменены на функции

$$T(\bar{x}, \bar{t}) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n - 0,5} e^{-\pi^2 (n-0,5)^2 \bar{t}} \sin \pi (n - 0,5) \bar{x}. \quad (25)$$

В случае непроницаемости двух непараллельных границ в (22) необходимо заменить все формулы $s(\bar{x}, \bar{t})$ и $s(\bar{y}, \bar{t})$ на $T(\bar{x}, \bar{t})$ и $T(\bar{y}, \bar{t})$.

Аналогичным образом записываются решения для любых комбинаций предельных условий на границах пласта-прямоугольника.

Таким образом, чтобы получить решение поставленной задачи, необходимо вычислить три типа следующих интегралов:

$$\begin{aligned} N(\bar{x}_i, \bar{y}_j, \bar{t}) &= \int_{\bar{t}_1}^{\bar{t}_2} \left[\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-n^2 \pi^2 \bar{\tau}} \sin n \pi \bar{x}_i \right] \times \\ &\times \left[\frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} e^{-\lambda^2 m^2 \pi^2 \bar{\tau}} \sin m \pi \bar{y}_j \right] \frac{d\bar{\tau}}{\sqrt{\bar{\tau}}} = \\ &= \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin n \pi \bar{x}_i \sum_{m=1}^{\infty} \sin m \pi \bar{y}_j \int_{\bar{t}_1}^{\bar{t}_2} e^{-\pi^2 (n^2 + \lambda^2 m^2) \bar{\tau}} \frac{d\bar{\tau}}{\sqrt{\bar{\tau}}}. \end{aligned}$$

Интегрирование дает следующую первообразную функцию:

$$\begin{aligned} N(\bar{x}_i, \bar{y}_j, \bar{t}) &= \frac{4}{\pi^2 \sqrt{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin n \pi \bar{x}_i \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin m \pi \bar{y}_j}{m \sqrt{n^2 + \lambda^2 m^2}} \times \\ &\times \operatorname{erf} \left[\sqrt{(n^2 + \lambda^2 m^2) \bar{t} \pi} \right]. \quad (26) \end{aligned}$$

Аналогично можно записать

$$\begin{aligned} N^*(\bar{x}_i, \bar{y}_j, \bar{t}) &= \frac{4}{\pi^2 \sqrt{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \sin n \pi \bar{x}_i \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin (m - 0,5) \pi \bar{y}_j}{(m - 0,5) \sqrt{n^2 + \lambda^2 (m - 0,5)^2}} \times \\ &\times \operatorname{erf} \left\{ \pi \sqrt{[n^2 + \lambda^2 (m - 0,5)^2] \bar{t}} \right\} \quad (27) \end{aligned}$$

и

$$N^{**}(\bar{x}_i, \bar{y}_j, \bar{t}) = \frac{4}{\pi^2 \sqrt{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n-0,5)\pi \bar{x}_i}{n-0,5} \times \\ \times \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin(m-0,5)\pi \bar{y}_j}{(m-0,5)\sqrt{(n-0,5)^2 + \lambda^2(m-0,5)^2}} \operatorname{erf}\left\{\pi \sqrt{[(n-0,5)^2 + \lambda^2(m-0,5)^2] \bar{t}}\right\}. \quad (28)$$

Причем в выражении (27) в зависимости от сочетания предельных условий на границах пласта-полосы \bar{x}_i и \bar{y}_j совместно с n и m могут меняться местами.

Для практического использования решений необходимо выражения для функций N , N^* , N^{**} протабулировать, и тогда расчеты можно вести по формуле

$$s(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) = \frac{l_x}{4\delta \sqrt{\alpha a}} \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 N(\bar{x}_i, \bar{y}_j, \bar{t}) \left| \frac{\bar{t}_2}{\bar{t}_1} \right|, \quad (29)$$

в которой знаки перед каждым слагаемым, как и само значение функции, берутся в зависимости от предельных условий на границах пласта в соответствии со знаками в формулах (22) и (23).

Например, если все четыре границы пласта непроницаемы, то в соответствии с (22)

$$s(\bar{x}, \bar{y}, t) = \frac{1}{4\delta \sqrt{\alpha}} \left[N(\bar{x}_2, \bar{y}_2, t) - N(\bar{x}_1, \bar{y}_2, t) + N(\bar{x}_3, \bar{y}_2, t) - \right. \\ \left. - N(\bar{x}_4, \bar{y}_2, t) - N(\bar{x}_2, \bar{y}_1, t) + N(\bar{x}_1, \bar{y}_1, t) - N(\bar{x}_3, \bar{y}_1, t) + \right. \\ \left. + N(\bar{x}_4, \bar{y}_1, t) + N(\bar{x}_2, \bar{y}_3, t) - N(\bar{x}_1, \bar{y}_3, t) - N(\bar{x}_3, \bar{y}_3, t) - \right. \\ \left. - N(\bar{x}_4, \bar{y}_3, t) - N(\bar{x}_2, \bar{y}_4, t) - N(\bar{x}_1, \bar{y}_4, t) - N(\bar{x}_3, \bar{y}_4, t) + \right. \\ \left. + N(\bar{x}_4, \bar{y}_4, t) \right] \left| \frac{\bar{t}_2}{\bar{t}_1} \right|. \quad (30)$$

При всех проницаемых границах в (30) следует лишь поменять знаки в соответствии (23). В случае непроницаемости двух непараллельных границ в (29) необходимо функции $N(\bar{x}_i, \bar{y}_j, \bar{t})$ заменить на функции $N^{**}(\bar{x}_i, \bar{y}_j, \bar{t})$. Если одна из границ проницаема или непроницаема, то используются функции $N^*(\bar{x}_i, \bar{y}_j, \bar{t})$, а знаки записываются в соответствии со знаками, получающимися в итоге, например, перемножения выражений первой скобки в (22) на выражение второй скобки (23), если проницаемая граница пласта $x = l_x$ и т. д.

Далее перейдем к рассмотрению растекания бугров грунтовых вод при переменной интенсивности инфильтрации второго вида.

Чтобы получить решение для неограниченного пласта, необходимо в (3) вместо $\frac{1}{\sqrt{\alpha t}}$ подставить величину $q_1 e^{-st}$, т. е. необходимо найти значение интеграла вида

$$I = \int_{t_2}^{t_3} \operatorname{erf} \left(\frac{\lambda_1}{\sqrt{\tau}} \right) \operatorname{erf} \left(\frac{\lambda_2}{\sqrt{\tau}} \right) e^{-\varepsilon \tau} d\tau.$$

Его приближенное значение будет

$$\begin{aligned} I_1 - \frac{4\lambda_1\lambda_2}{\pi} \int_{t_2}^{t_3} \left(\frac{1}{\tau} - \frac{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}{3\tau^2} + \frac{\lambda_1^2\lambda_2^2}{9\tau^3} \right) e^{-\varepsilon\tau} d\tau = \\ = \frac{4}{\pi} \lambda_1\lambda_2 \left\{ Ei(-\varepsilon\tau) \left[1 + \frac{\varepsilon}{3} (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) + \frac{\lambda_1^2\lambda_2^2}{18} \varepsilon^2 \right] + \right. \\ \left. + \frac{e^{-\varepsilon\tau}}{\tau} \left[\frac{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}{3} + \frac{\lambda_1^2\lambda_2^2}{18} \varepsilon \right] - \frac{\lambda_1^2\lambda_2^2}{18} \frac{e^{-\varepsilon\tau}}{\tau^2} \right\}_{t_2}^{t_3}. \end{aligned} \quad (31)$$

Тогда изменение зеркала грунтовых вод с учетом (8), (9) и (31) можно рассчитать по формуле

$$s = \frac{q_1}{\pi\delta} \sum_{i=1}^4 \bar{I}_i, \quad \bar{I}_i = \frac{\pi}{4} I_i \quad (32)$$

$$\bar{I}_1(\lambda_1, \lambda_2, t), \bar{I}_2(\lambda_1, \lambda_4, t), \bar{I}_3(\lambda_2, \lambda_3, t), \bar{I}_4(\lambda_3, \lambda_4, t)$$

вычисляются по (31), а

$$\lambda_1 = \frac{x+b}{2\sqrt{a}}, \quad \lambda_2 = \frac{y+l}{2\sqrt{a}}, \quad \lambda_3 = \frac{x-b}{2\sqrt{a}} \quad \text{и} \quad \lambda_4 = \frac{y-l}{2\sqrt{a}}.$$

Для полуограниченного пласта решение (32) принимает вид

$$s = \frac{q_1}{\pi\delta} \left[\sum_{i=1}^4 (\bar{I}_i + \bar{I}_i^*) \right], \quad (33)$$

где \bar{I}_i^* вычисляются по формуле (31), в которую подставляются сопряженные (относительно границы) значения λ_i^* .

Для пласта-квадрата решения записываются по (20), куда вместо I_i подставляются интегралы \bar{I}_i .

Решение задачи о растекании бугра грунтовых вод для пласта-полосы можно найти из (16), заменив в этой формуле $\frac{1}{\sqrt{at}}$ на $q_1 e^{-\varepsilon t}$, т. е. можно записать

$$\begin{aligned} s = \frac{l_x^2 q_1}{2\delta a} \int_{\bar{t}_2}^{\bar{t}_3} \left\{ (1 + \rho_x) \bar{b} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\pi^2 n^2 \bar{\tau}}}{n} [\rho_x (\sin n \pi \bar{x}_1 - \right. \\ \left. - \sin n \pi \bar{x}_2) - (\sin n \pi \bar{x}_3 - \sin n \pi \bar{x}_4)] \right\} \left[\operatorname{erf} \left(\frac{\bar{y}_2}{2\sqrt{\bar{\tau}}} \right) - \right. \\ \left. - \operatorname{erf} \left(\frac{\bar{y}_1}{2\sqrt{\bar{\tau}}} \right) \right] e^{-\bar{\tau}} d\bar{\tau}, \end{aligned} \quad (34)$$

где $\gamma = \frac{\varepsilon l^2}{a}$, а остальные обозначения соответствуют формуле (16).

Введем следующую функцию:

$$H(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin n \pi \bar{x} I(\bar{y}, \bar{t}), \quad (35)$$

где

$$I(\bar{y}, \bar{t}) = \int_{\bar{t}_2}^{\bar{t}_3} \operatorname{erf} \left(\frac{\bar{y}}{2 \sqrt{\bar{t}}} \right) e^{-(n^2 \pi^2 + \gamma) \bar{t}} d\bar{t} \approx$$

$$\approx \left\{ \frac{6\bar{y} + \bar{y}^3 (n^2 \pi^2 + \gamma)}{6V \frac{n^2 \pi^2 + \gamma}{\pi}} \left[\operatorname{erf} \sqrt{(n^2 \pi^2 + \gamma) \bar{t}_3} - \operatorname{erf} \sqrt{(n^2 \pi^2 + \gamma) \bar{t}_2} \right] + \right.$$

$$\left. + \frac{\bar{y}_3}{6 \sqrt{\pi}} \left[\frac{e^{-(n^2 \pi^2 + \gamma) \bar{t}_3}}{\sqrt{\bar{t}_3}} - \frac{e^{-(n^2 \pi^2 + \gamma) \bar{t}_2}}{\sqrt{\bar{t}_2}} \right] \right\}. \quad (36)$$

Тогда общее решение для рассматриваемого случая можно записать в виде

$$s = \frac{l_x^2 q_1}{4\delta \sqrt{a}} \left\{ \frac{(1 + \rho_x) \bar{b}}{\gamma} (e^{-\gamma \bar{t}_2} - e^{-\gamma \bar{t}_3}) + \sum_{i=1}^4 [H(\bar{x}_i, \bar{y}_1, \bar{t}) + \right.$$

$$\left. + \rho_x H(\bar{x}_i, \bar{y}_2, \bar{t}) \right]_{\bar{t}_2}^{\bar{t}_3}. \quad (37)$$

Чтобы получить решение для пласта-полуполосы необходимо формулу (37) применить также для отраженных относительно поперечной границы бассейнов и результаты просуммировать по формуле (12).

Решение для пласта-прямоугольника для рассматриваемого случая согласно (21) будет иметь вид

$$s(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) = \frac{q_1 l^2}{4\delta a} \int_{\bar{t}_2}^{\bar{t}_3} \bar{s}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\tau}) e^{-\gamma \bar{\tau}} d\bar{\tau}, \quad (38)$$

где функция $\bar{s}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\tau})$ имеет тот же вид, что и в первом случае, т. е. определяется формулами (22) и (23).

Для построения решения, которое можно было бы использовать в практических расчетах, необходимо вычислить следующие интегралы:

$$M(\bar{x}_i, \bar{y}_j, \bar{t}) = - \int_{\bar{t}_2}^{\bar{t}_3} \left[\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-n^2 \pi^2 \bar{\tau}} \sin n \pi \bar{x}_i \right] \times$$

$$\times \left[\frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} e^{-\lambda^2 m^2 \pi^2 \bar{\tau}} \sin m \pi y_j \right] e^{-\gamma \bar{\tau}} d\bar{\tau} =$$

$$= \frac{4}{\pi^2} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \pi \bar{x}_i}{n} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin m \pi \bar{y}_j}{m [(n^2 + \lambda^2 m^2) \pi^2 + \lambda]} e^{-[(n^2 + \lambda^2 m^2) \pi^2 + \lambda] \bar{t}} \right\}_{\bar{t}_2}^{\bar{t}_3}. \quad (39)$$

Аналогично

$$M^* (\bar{x}_i, \bar{y}_j, \bar{t}) = \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \pi \bar{x}_i}{n} \times \\ \times \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin (m - 0,5) \pi \bar{y}_j e^{-\lambda \pi^2 [n^2 + \lambda^2 (m - 0,5)^2] + \gamma} \bar{t}}{(m - 0,5) \{\pi^2 [n^2 + \lambda^2 (m - 0,5)^2] + \gamma\}} \Big|_{\bar{t}_2}^{\bar{t}_3}; \quad (40)$$

$$M^{**} (\bar{x}_i, \bar{y}_j, \bar{t}) = \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin (n - 0,5) \pi \bar{x}_i}{n - 0,5} \times \\ \times \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin (m - 0,5) \pi \bar{y}_j e}{(m - 0,5) \{\pi^2 [(n - 0,5)^2 + \lambda^2 (m - 0,5)^2] + \gamma\}} \Big|_{\bar{t}_2}^{\bar{t}_3}. \quad (41)$$

Подставляя полученные формулы, которые можно протабулировать в (38), получаем расчетные формулы, аналогичные выражению (29), где перед квадратной скобкой стоит множитель $q_1/4\delta$. Замечания относительно учета предельных условий на границах пласта остаются такие же, как и к (29).

Результатирующее изменение поверхности грунтовых вод под действием нескольких бассейнов подсчитывается по принципу суперпозиции.

Рассмотренные здесь расчетные схемы инфильтрационного питания потока грунтовых вод из бассейнов охватывают большое количество вариантов расположения (прямоугольных в плане) инфильтрационных бассейнов относительно границ пласта и существенны для практического прогнозирования искусственного регулирования запасов подземных вод. Полученные решения имеют вид, поддающийся табулированию с использованием ЭЦВМ.

Для дальнейших разработок представляет интерес рассмотрение многослойных сред.

Литература

1. В. С. Усенко. Фильтрационные расчеты искусственного восполнения запасов подземных вод. Сб. «Проблемы использования водных ресурсов». Минск, 1971.
2. А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. Уравнения математической физики. М., 1966.
3. С. В. Васильев и др. Методы фильтрационных расчетов гидромелиоративных систем. М., 1970.
4. П. Я. Полубаринова-Кочина. Теория движения грунтовых вод. М., 1952.
5. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, разрядов и произведений. М., 1971.
6. Г. Карслоу, Д. Егер. Операционные методы в прикладной математике. М., 1948.

Н. И. Гамаюнов, К. С. Пантелей

ИССЛЕДОВАНИЕ АНОМАЛИИ ФИЛЬТРАЦИИ В ТОРФЕ

Вопросы передвижения влаги в дисперсных материалах в связи со сложностью процессов фильтрации и гидромеханическим подходом к решению этой проблемы изучены еще недостаточно. Предполагалось, что решающее значение имеет лишь дисперсность материала, гидравлическое сопротивление пористой среды потоку и вязкостные свойства жидкости. Вопросам взаимодействия дисперсионной среды и дисперсной фазы, поверхностным явлениям в тонких порах и пленках, диффузионным процессам на границе раздела фаз не уделялось должного внимания. Между тем в коллоидных высокодисперсных системах, таких как торф, глины, илы, сапрпель, гумифицированные почвы, влияние физико-химических процессов на перенос влаги становится особенно заметным. Наличие коллоидной фракции, легко изменяющей свои свойства и компактность в зависимости от внешних условий, приводит к нестабильности пористой структуры и водных свойств перечисленных сред в ходе рассматриваемых явлений массопереноса.

Многие исследователи отмечали нарушение зависимости Дарси в связных грунтах, по-разному трактуя физический смысл этих аномалий. Значительное уменьшение коэффициентов фильтрации грунтов во времени (закон затухания и восстановления фильтрации) объяснялось вымыванием мелких частиц и скоплением их в слоях, перпендикулярных движению воды, закупоркой пор и фильтров коллоидной фракцией, деформированием структур переплетения гидродинамическими силами, набуханием гумусовых веществ, что в условиях жесткой кюветы влечет сжатие водопроводящих каналов, влиянием заземленного и растворенного воздуха, капиллярным противодействием, направлением фильтрационного потока (закон зональности потока), режимом потока (ламинарный и турбулентный), пристенной неустановившейся фильтрацией, структурированностью поровой влаги, вымыванием из образца водорастворимых гидрофильных веществ, зарастанием крупных пор непрочными коллоидными структурами, аномальной вязкостью рыхлосвязанной воды и др.

Количественному исследованию аномалий фильтрации и их механизма на таком сложном многокомпонентном полифракционном полуколлоидно-высокомолекулярном соединении, каковым является торф, посвящена данная работа.

Весь комплекс исследований выполнен на образцах шести видов низинного и верхового торфа в фильтрационно-компрессионном приборе. Для образцов разной плотности снимались полные фильтрационные характеристики, и в зависимости от дифференциальной пористости рас-

считывались параметры структуры. Начальные градиенты напора определялись графически по зависимостям скорости фильтрации v от градиентов напора i .

На рис. 1 показана зависимость $v=f(i)$ для низинного осокового торфа $R=20-25\%$ при вертикальных нагрузках $P=0,25 \cdot 10^5$; $0,5 \cdot 10^5$; $0,75 \cdot 10^5$; 10^5 и $1,5 \cdot 10^5$ н/м² (соответственно кривые 1—6) и $K_{\phi}=f(i)$ (кривые 1'—6'). Следовательно, с увеличением градиентов давления от

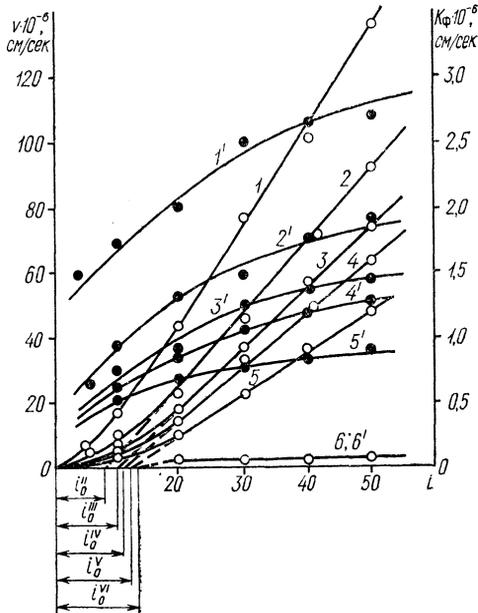


Рис. 1. Зависимость скорости фильтрации v и коэффициента фильтрации K_{ϕ} от градиента напора i при различной плотности образцов (торф низинный осоковый, $R=20-25\%$):

1, 2, 3, 4, 5, 6 — $v=f(i)$ соответственно при значениях коэффициента пористости $\epsilon = 10,5$; $10,4$; $10,2$; $10,1$; $10,0$; $6,8$; 1', 2', 3', 4', 5', 6' — $K_{\phi}=f(i)$ для тех же значений $\epsilon \cdot i_0^I, i_0^{II}, i_0^{III}, i_0^{IV}, i_0^V, i_0^{VI}$ — начальные градиенты напора соответственно при вертикальных уплотняющих нагрузках $P=0,25 \cdot 10^5$; $0,5 \cdot 10^5$; $0,75 \cdot 10^5$; 10^5 ; $1,5 \cdot 10^5$ н/м².

0 до 50 закон Дарси в виде прямой линии $v=K_{\phi} i$ не соблюдается, а значения K_{ϕ} не остаются постоянными во всем диапазоне изменения i . Это нарушение зависимости Дарси является формальным, так как с увеличением напоров мы имеем дело не с исходной поровой структурой, а с совершенно другой. Дело в том, что с ростом гидравлических градиентов в фильтрацию вовлекается все большее количество ультрапор ($<0,5$ мк), которые до этого вследствие наличия следов сдвиговой прочности в паровой влаге, осмотических и электровязкостных эффектов не участвовали в транзитном переносе влаги. Это подтверждается увеличением среднего диаметра пор приблизительно в 1,40 раза для всех исследованных образцов торфа с увеличением градиентов давления от 10 до 50 (табл. 1).

В данном случае налицо не увеличение эквивалентного диаметра пор, а вступление в фильтрацию микрокапилляров. А. А. Головач [1] в опытах с применением радиоактивного индикатора $Na_2S_{35}O_4$ показал, что при высоких градиентах давления становится возможной фильтра-

Таблица 1

Градиенты напора i	Эквивалентный диаметр пор D_g , мк				
	медиум-торф $R=5-10\%$, $\varepsilon_0=19$	осоковый $R=20-25\%$, $\varepsilon_0=10,5$	медиум-торф $R=30-35\%$, $\varepsilon_0=10,9$	осоковый $R=30-35\%$, $\varepsilon_0=11,5$	тростниково- осоковый $R=30-35\%$, $\varepsilon_0=11,2$
10	5,74	2,30	1,83	1,27	3,23
20	6,16	2,46	1,89	1,80	4,34
30	6,48	2,78	1,91	1,89	4,98
40	6,58	2,80	1,92	2,26	5,08
50	6,71	2,90	1,91	2,37	5,38

ция воды через пронизанные тончайшими порами растительные остатки. Так, для медиум-торфа ($R=15-20\%$) с увеличением i от 10 до 50 активная пористость m и кинетическая удельная поверхность увеличиваются соответственно в 1,25 и 1,75 раза, в то же время средний диаметр водопроводящих пор (D_{cp}) и гидравлический радиус пор уменьшаются в 1,2 и 1,4 раза. Следовательно, специфическое строение части торфа приводит к росту активной пористости, что и вызывает формальное нарушение закона Дарси и диспропорциональное увеличение водопроницаемости при росте градиента напора.

При нагружении образца, когда деформируется большое количество сравнительно однородных мелких пор, увеличение напоров уже в меньшей мере сказывается на изменении K_{Φ} , что подтверждается снижением отношения K_{Φ} , полученного при $i=50$, к K_{Φ} , рассчитанного при $i=10$, по мере увеличения вертикальных уплотняющих нагрузок (табл. 2).

Таблица 2

Вертикальная нагрузка $P \cdot 10^5$, Н/м ²	0	0,25	0,5	0,75	1,0	1,5
$a = \frac{K_{\Phi, i=50}}{K_{\Phi, i=10}}$ раз	2,05	1,95	1,90	1,85	1,65	1,35

Это и понятно, так как при больших нагрузках межагрегатные поры становятся соизмеримыми с порами форменной части растений и одинаково труднопроницаемыми в широком диапазоне градиентов давления ($i=10-50$). Поэтому крутизна линий $K_{\Phi}=f(i)$ (см. рис. 1, кривые 1'-6') с увеличением сжимающих нагрузок уменьшается, а торфяная система в целом приближается к такой пористой среде, для которой при описании фильтрации прибегают к формулам Козени-Кармана, Шведова-Бингама, Букингема. Решение задачи о фильтрации жидкости через дисперсную систему с учетом функции распределения пор по размерам и начального градиента напора i_0 дано Н. В. Чураевым (на основе вывода С. В. Нерпина и Н. Ф. Бондаренко о наличии предельного напряжения сдвига в поровой воде) при рассмотрении уравнения Букингема для расхода структурированной жидкости (вязкопластичного тела) для модели грунта из цилиндрических пор одинаковых размеров [2]. В том случае, когда фильтрация возможна во всем объеме порового пространства ($m=n$), зависимость скорости фильтрации от градиента напора характеризуется нелинейным законом фильтрации и описывается уравнением типа

$$v = AI - B + C/I^3,$$

где A, B, C — постоянные коэффициенты, зависящие от размеров пор, характера их распределения, пористости образца и реологических свойств жидкости.

При дальнейшем увеличении i это уравнение преобразуется в следующее:

$$v = AI - B$$

и при значительных градиентах напоров и выравнивании размеров пор модифицируется в широкоиспользуемое при решении ряда фильтрационных задач уравнения вида

$$v = K_{\phi}(I - I_0).$$

Графический способ [3] нахождения начальных градиентов напора иллюстрируется рис. 1. Отметим, что подобный метод определения дает значительно завышенные результаты по сравнению с прямым определением начальных градиентов.

Так, при отсутствии вертикальных нагрузок графический метод определения i_0 дает значение, приблизительно равное 5,0. В то же время непосредственным определением по фильтрующей способности образца получаем $i_0=0,35$. Но для качественных сравнений i_0 графический метод вполне приемлем, так как снятие фильтрационных характеристик для уплотненного образца при больших градиентах напора не требует значительных затрат времени и усилий. В данной серии опытов i_0 для естественного неуплотненного торфа получены прямым определением, а для плотных — графически. В зависимости от плотности образцов $i_0=0,1-14,0$. Незначительные значения i_0 для низинного торфа (или даже их полное отсутствие) сменяются при уже небольших сжимающих нагрузках стремительным увеличением их абсолютных величин. При дальнейшем уплотнении (снижении ϵ) крутой участок функции $i_0=f(\epsilon)$ сменяется пологим. Причиной этого является наличие дефектов в структуре торфа, содержащего множество неоднородностей. Наличие в начале опыта крупных водопроводящих полостей и каналов практически делает систему водопроницаемой при любых малых напорах, а их быстрое закрытие, даже при малых нагрузках, приводит к резкому увеличению значений i_0 (на рис. 2. кривые 1—6).

Природа начального градиента в торфяных грунтах может быть объяснена реологическими свойствами дисперсионной среды [4], процессами структурообразования [5], осмотическим скоплением жидкости [6], электровязкостным эффектом [7].

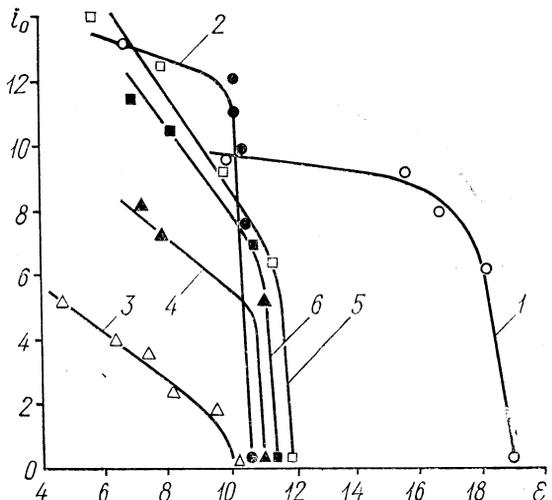


Рис. 2. Зависимость начальных градиентов напора i_0 от коэффициента пористости образцов ϵ_0 :

- 1 — мелиум-торф, $R=5-10\%$; 2 — осоковый, $R=20-25\%$; 3 — тростниково-осоковый, $R=30-35\%$; 4 — мелиум-торф, $R=30-35\%$; 5 — осоковый, $R=30-35\%$; 6 — тростниковый, $R=30-35\%$.

Табл. 3 дает наглядное представление о вкладе электроосмоса, термоосмоса и капиллярного (солевого) осмоса в общий расход напорной фильтрации через образцы низинного осокового торфа $R=30-35\%$.

По эффективности воздействия на фильтрующую способность образца, вносимого этими возмущениями в фильтрационное поле, они располагаются в следующий ряд: электроосмос, термоосмос, капиллярный (солевой) осмос. Малая изменчивость найденных коэффициентов массопереноса в зависимости от тока, температуры, вида и концентрации электролита, плотности образца позволяет рекомендовать их для выполнения предварительных инженерно-технических расчетов баланса влаги при осушении, естественной сушке и искусственном обезвоживании торфа.

Некоторое представление о влиянии на фильтрационные свойства коллоидно-химических превращений, проходящих в образцах осокового торфа $R=30-35\%$ при пропуске через них дистиллированной воды, дает рис. 3. Вымывание из образца катионов (кривые 3, 4, 5, 6 на рис. 3, б) и диффузия водородных ионов (кривая 1) в мигрирующую влагу приводят к снижению числа водородных связей и «сшивок» макромолекул поливалентными катионами. Диспергирование агрегатов торфа и их набухание вследствие сил кулонового отталкивания уменьшает

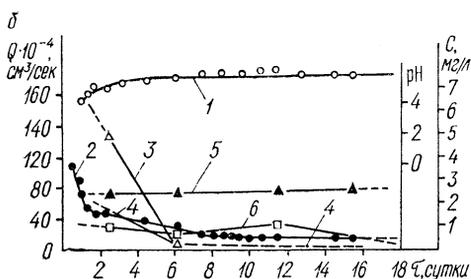
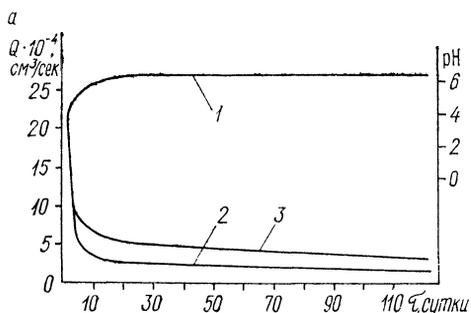


Рис. 3. Изменение расходов Q , кислотности фильтра pH и его катионного состава при пропуске через образец дистиллированной воды:

а: 1 — pH фильтрата; 2, 3 — расходы Q ; б: 1 — pH фильтрата; 2 — расходы Q ; 3, 4, 5, 6 — соответственно концентрация ионов K^+ , Na^+ , Ca^{2+} , Fe^{3+} в фильтрате.

на протяжении 12—15 суток исходные расходы в 6—10 раз (кривые 2, 3 на рис. 3, а; кривая 2 на рис. 3, б). Даже через 110 суток фильтрации продолжается снижение расходов с суточной интенсивностью $(0,01-0,015) 10^{-4}$ см³/сек. Следовательно, применительно к коллоидным капиллярно-пористым средам можно говорить о каком-то условном структурно-фильтрационном равновесном состоянии системы. Одновременно эти опыты свидетельствуют, что при лабораторных определениях коэффициентов фильтрации подобных материалов необходимо пользоваться естественной дисперсионной средой, отобранной одновременно с образцом.

Процессы структурообразования зачастую и приводят к возникновению начальных градиентов напора вследствие развития структур гелевого типа, пептизации ассоциатов торфа и электрокинетического торможения течения в тонких пленках и порах, соизмеримых по толщине с размером граничных слоев [7]. Измеренные для этого торфа электрокинетический потенциал и потенциал протекания, как правило, не превышают 1—2 мВ, и, следовательно, электровязкостным эффектов можно пренебречь.

Таблица 3

Электроосмос			Термоосмос			Капиллярный осмос		
напряженность поля Φ , В/см	коэффициент электроосмоса $K_{\Phi} \times 10^{-6}$, см ² /В·сек	напор, эквивалентный действию электроосмоса, h_{Φ} , см	градиент температур ΔT , град/см	коэффициент термоосмоса $K_T \times 10^{-6}$, см ² /град·сек	напор, эквивалентный действию термоосмоса h_T , см	градиент концентрации и вид раствора τC , моль/см ³	коэффициент солевого осмоса $K_C \times 10^{-5}$, см ² /моль·сек	напор, эквивалентный действию солевого осмоса, h_0 , см
1,00	5,80	12,5	2	0,44	0,432	0,263 MgCl ₂	3,80	0,019
2,46	5,50	29,2	3	0,41	0,570	0,525 MgCl ₂	2,86	0,019
3,92	5,20	43,9	4	0,40	0,705	0,525 MgCl ₂	3,70	0,013
5,19	5,65	63,0	5	0,39	0,816	0,525 MgCl ₂	4,50	0,189
7,00	5,55	84,0	6	0,38	0,915	1,050 MgCl ₂	3,38	0,071
9,10	4,80	94,0	7	0,37	0,980	1,314 MgCl ₂	3,40	0,068
			8	0,37	1,080	0,090 CaCl ₂	11,50	0,014
						0,025 KCl	11,60	0,005

В этих же опытах определена удельная поверхностная проводимость торфа $K=3,7 \cdot 10^{-9}$ см⁻¹, характеризующая степень насыщенности электропроводящего пространства торфа активными ионогенными диссоциирующими функциональными группами. Сравнение коэффициента структурного сопротивления торфяной диафрагмы $\beta=4,3$ и коэффициента ее эффективности $\alpha=2,8$ указывает на отсутствие в торфяной системе явления электрической «сверхпроводимости» [8], т. е. для I—I-валентных электролитов (стандартным раствором служил 0,1 N KCl) поправка на поверхностную электропроводность адсорбционных слоев и электрокинетическое торможение потока жидкости не существенны.

Таким образом, передвижение влаги в пористом влагонасыщенном теле может происходить не только под действием сил гидродинамической природы, но и под влиянием градиентов концентрации веществ, электричества и температуры. В случае осмотического движения жидкости причиной его является скольжение влаги по стенкам, которые при обычной фильтрации препятствуют ее течению. Для реализации этих сил физико-химической природы вовсе нет необходимости предполагать наличие стенок у капилляров, следует лишь допустить определенное чередование вдоль потока функциональных ионогенных групп — активных центров сорбции — десорбции влаги, массопереноса, процессов ионообмена и структурообразования.

На основании результатов исследования фильтрационных аномалий в торфах можно сделать следующие выводы:

1. Нарушение основного фильтрационного закона Дарси в торфяных системах объясняется их микрогетерогенностью и реологическими свойствами поровой влаги.

2. Основными причинами существования начальных градиентов в тонкодисперсных коллоидных телах являются осмотические, структурообразовательные, электрокинетические явления. Для осокового торфа $R=30-35\%$ исследован количественно каждый из этих факторов.

3. С уменьшением размеров пор начальный градиент напора i_0 увеличивается по кривой, близкой к экспоненте, и в целом находится в пределах $i_0=0,1-14$ при варьировании значений коэффициента пористости.

4. При уплотнении образцов отношение коэффициентов фильтрации, полученных при $i=50$, K_{Φ} , рассчитанному при $i=10$, уменьшается

с 1,80—6,75 раза до 1,15—1,35 раза вертикальная нагрузка $(0-2) \times 10^5 \text{ Н/м}^2$), так как межагрегатные поры становятся соизмеримыми с порами растительных остатков и одинаково трудноводопроницаемыми в широком диапазоне градиентов давления.

5. При расчетах фильтрационной консолидации торфяных оснований вследствие дефектности структуры и наличия массы неоднородностей значения i_0 исчезающе малы и в формулах ими можно пренебречь.

6. Найденные коэффициенты массопереноса для насыщенного торфа можно рекомендовать для предварительных инженерно-технических расчетов водного баланса при осушении, естественной сушке и искусственном (осмотическом) обезвоживании торфа вследствие их незначительной изменчивости в зависимости от силы тока, температуры, концентрации и вида электролита, плотности проводящей среды.

Литература

1. А. А. Головач. Изучение водных свойств и пористой структуры верховых торфов низкой степени разложения. Автореф. дисс. Калинин, 1968.
2. Н. В. Чураев. Фильтрация структурированных жидкостей через гетеропористые тела. Изв. АН СССР, механика и машиностроение. Вып. 1. 1964.
3. С. А. Роза. К вопросу о начальном градиенте напора при фильтрации воды через бетон. «Гидротехническое строительство», 1961, № 6.
4. Н. Ф. Бондаренко. Влияние межмолекулярных водородных связей на характер течения жидкостей в капиллярах. ЖФХ, т. 42, вып. 1, 1968.
5. Б. Ф. Рельтов. Влияние структурообразовательных процессов на водопроницаемость грунта (природа начального градиента). Сб. «Инженерно-геологические свойства горных пород и методы их изучения». М., 1962.
6. М. П. Воларович, Н. В. Чураев. Влияние поверхностных сил на передвижение влаги в пористых телах. Сб. «Исследования в области поверхностных сил». М., 1964.
7. Н. В. Чураев, Б. В. Дерягин. Влияние перекрытия ионных слоев на электрокинетические явления в тонких пленках и порах. Коллоид. журн., т. 28, № 5, 1966.
8. И. И. Жуков, Д. А. Фридрихсберг. Электрокинетические характеристики капиллярных систем. Поверхностная проводимость. Коллоид. журн., т. 11, № 3, 1949.

Ю. А. Соболевский, В. А. Рыжков

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ХАРАКТЕРА ДЕФОРМАЦИЙ АНИЗОТРОПНЫХ ПО ВОДОПРОНИЦАЕМОСТИ БЫСТРОЗАГРУЖАЕМЫХ МОДЕЛЕЙ ОСНОВАНИЙ

В природном сложении грунтовые основания в большинстве своем обладают анизотропией, обусловленной процессами седиментации — накопления осадков частиц. И если механической анизотропией можно пренебречь в виду малого соотношения модулей деформации и коэффициентов бокового расширения грунтов в разных направлениях, то фильтрационную анизотропию следует обязательно учитывать при рассмотрении устойчивости фильтрующих откосов и быстрозагружаемых водонасыщенных оснований.

Показателем фильтрационной анизотропности может служить отношение коэффициентов фильтрации в двух взаимно перпендикулярных направлениях (чаще всего по горизонтали и по вертикали)

$$\alpha = \frac{k_x}{k_y}. \quad (1)$$

Для торфа этот показатель может иметь порядок от $i \cdot 10^1$ до $i \cdot 10^2$, для ленточных глин от $i \cdot 10^2$ до $i \cdot 10^4$, для лессовидных грунтов и лесса от $i \cdot 10^{-1}$ до $i \cdot 10^{-5}$ (где i — любое число от 1 до 10).

Быстрое загрузеие водонасыщенных оснований (при $k_x > k_y$), особенно слабых, может привести к значительным деформациям, причиной которых являются фильтрационные силы неустановившегося грунтового потока.

Так, дорожные насыпи на торфяном или илистом основании расползаются вследствие выжимания грунтов, а по оси насыпи часто появляются трещины.

Освоение торфяных массивов под застройку методом пригрузки слабой толщи сопровождается как уплотнением, так и большими горизонтальными деформациями по всему фронту гидронамыва или насыпки. При намыве песчаного слоя в Архангельске наблюдались значительные подвижки: трубопровод $d=540$ мм, находящийся на расстоянии 40—50 м от кромки песчаного пригрузочного слоя, был сдвинут на 2,5—3,0 м на протяжении 130 м. Столбы линий электропередач на этом участке были перемещены на 6—8 м от створа, некоторые из них были опрокинуты [1].

Согласно полученным ранее аналитическим решениям о распределении начальных напряжений при быстром загрузеии анизотропных по водопроницаемости оснований [2] было установлено, что при преобладании горизонтальной водопроницаемости над вертикальной ($k_x > k_y$) максимальные касательные напряжения τ_{\max} охватывают значительные зоны за пределами загрузеия, а если $k_x < k_y$, то зоны максимальных касательных напряжений вытянуты в глубь массива.

На рис. 1 представлены графики линий равных начальных напряжений τ_{xy} , τ_{\max} и $\sigma_y = -\sigma_x$. Их сравнение указывает на большие

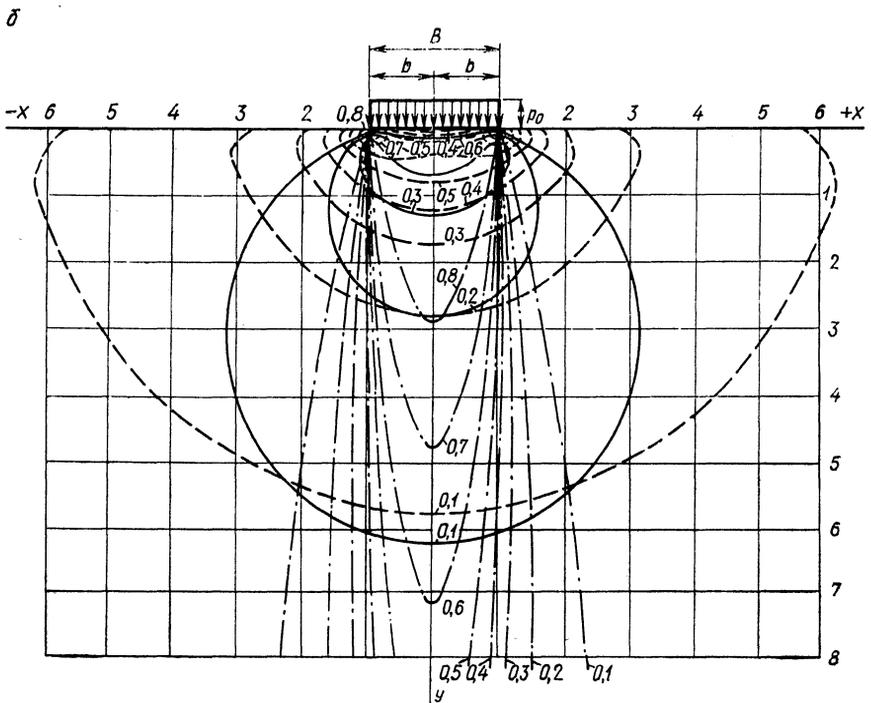
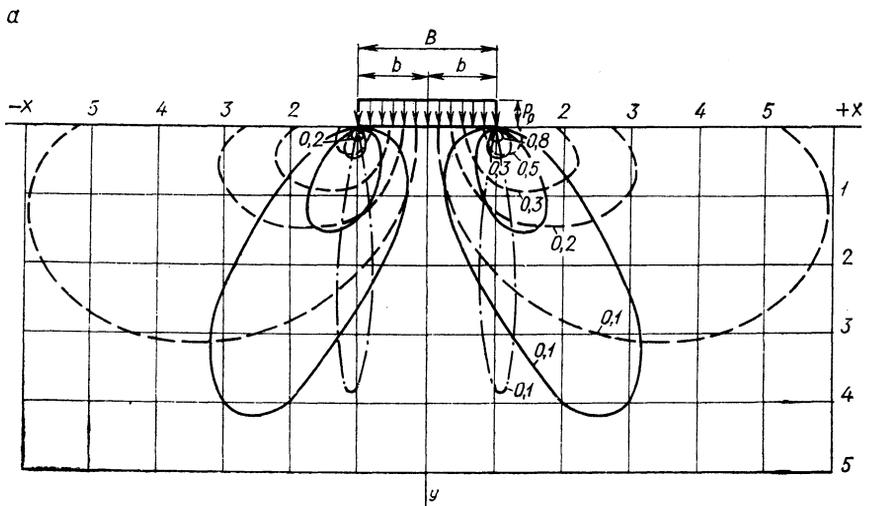


Рис. 1. Линии равных начальных напряжений (сплошные — для изотропного основания, пунктирные — для основания с преобладающей

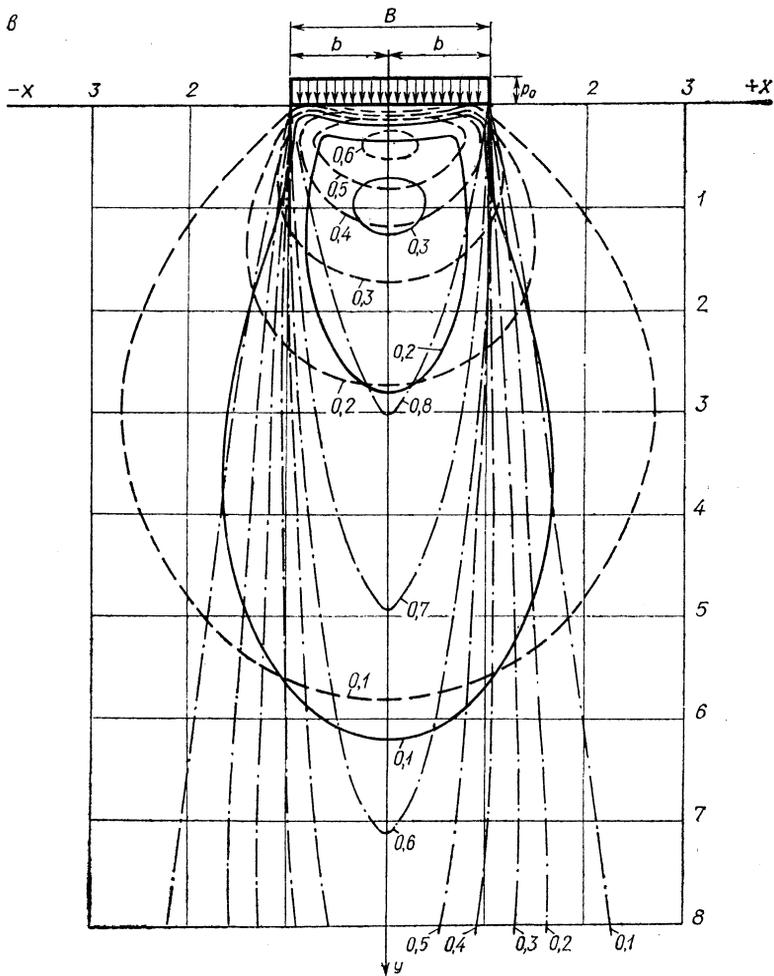
различия в картинах начального напряженного состояния изотропных и анизотропных по водопроницаемости оснований.

Очевидно, что эта разница предполагает и различия в характере деформирования водонасыщенных грунтов с доминирующей водопроницаемостью во взаимно перпендикулярных направлениях.

Для выявления качественной картины деформации нами производились опыты во вращающемся лотке со сборно-разборными стенками системы А. С. Кананяна. Передняя стенка лотка изготовлялась из толстого органического стекла, боковые стенки и днище были выполнены двойными. Металлические листы, примыкающие к грунту, имели отверстия.

Заполнение лотка производилось слоями мелкого сухого песка толщиной 3—5 мм и порошком каолиновой глины толщиной 10—12 мм.

При горизонтальном расположении слоев в какой-то мере воспроизводилась текстура ленточных глин; при их вертикальном расположе-



горизонтальной водопроницаемостью $\frac{k_x}{k_y} = 100$, штрихпунктирные — для основания с преобладающей вертикальной водопроницаемостью $\frac{k_x}{k_y} = \frac{1}{100}$):

$$a - \tau_{xy}; \quad b - \tau_{\max}; \quad \sigma - \sigma_y = -\sigma_x.$$

нии имитировались фильтрационные свойства лессовых и лессовидных грунтов. Уплотнение слоев производилось вручную.

После отсыпки и уплотнения грунта в лоток заливалась вода, и грунт выдерживался до полного насыщения. Фильтрация воды происходила со стороны боковых стенок и дна при гидравлическом градиенте, равном единице. Для устранения фильтрационного взвешивания и набухания грунт прижимался металлической плитой, прикрепляемой к лотку болтами.

После полного насыщения вода сливалась, лоток опрокидывался, передняя прозрачная стенка из плексигласа снималась и на грунт наносилась деформационная сетка при помощи вдавливания специального шаблона с ячейками 5×5 см. В образовавшиеся борозды засыпался окрашенный песок. Затем лоток устанавливался в прежнее положение, а его боковые карманы вновь заполнялись водой.

Грунтовая масса как при горизонтальном, так и при вертикальном расположении слоев в среднем характеризуется следующими показателями: объемный вес грунта $\gamma_{нас} = 1,79$ т/м³; объемный вес скелета грунта $\gamma_{ск} = 1,34$ т/м³; относительная влажность $w = 32,3\%$; коэффициент фильтрации вдоль песчаных слоев $k_{\parallel} = 1,34$ м/сутки; коэффициент фильтрации поперек песчаных слоев $k_{\perp} = 0,0039$ м/сутки; их соотношение $\alpha = \frac{k_{\parallel}}{k_{\perp}} \approx 350$; коэффициент пористости $e = 0,936$; модуль деформации поперек слоев $E_{\perp} = 9,311$ кг/см²; модуль деформации вдоль слоев $E_{\parallel} = 8,392$ кг/см² (по данным компрессионных испытаний соотношение

$$\beta = \frac{E_{\parallel}}{E_{\perp}} = \frac{1}{1,1}.$$

Всего было выполнено 10 опытов, в том числе пять с горизонтальными слоями и пять — с вертикальными. Загружение производилось штампом площадью 260 см² ступенями по 6 кг в течение 1—2,5 мин до полного разрушения основания. Разрушение происходило при небольших удельных давлениях порядка 0,1—0,25 кг/см².

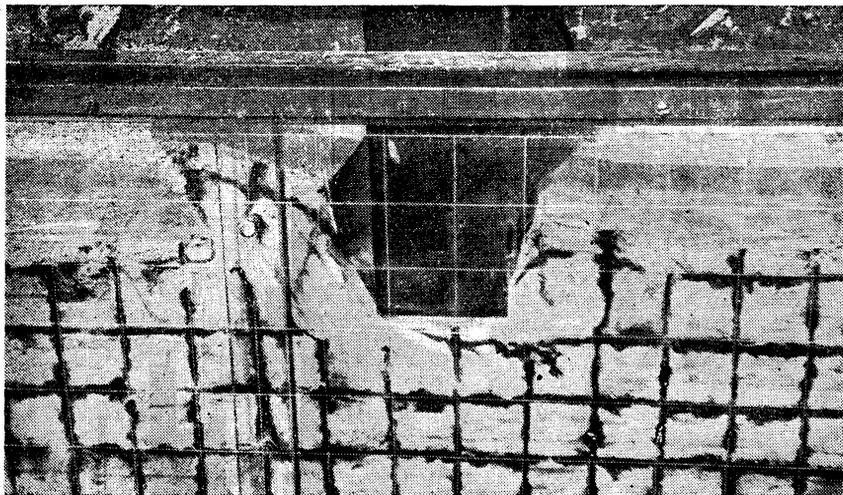
Характер деформаций устанавливался путем анализа нанесенной координатной сетки и общей картины разрушения. Деформации грунтовой среды с преобладающей горизонтальной водопроницаемостью характеризуются выжиманием грунта в стороны с образованием четко очерченной призмы выпирания с началом в центре штампа.

Образование грунтового упругого ядра не происходило. Деформация выпора захватывала всего две клетки по вертикали, расположенные ниже не искажались (рис. 2, а).

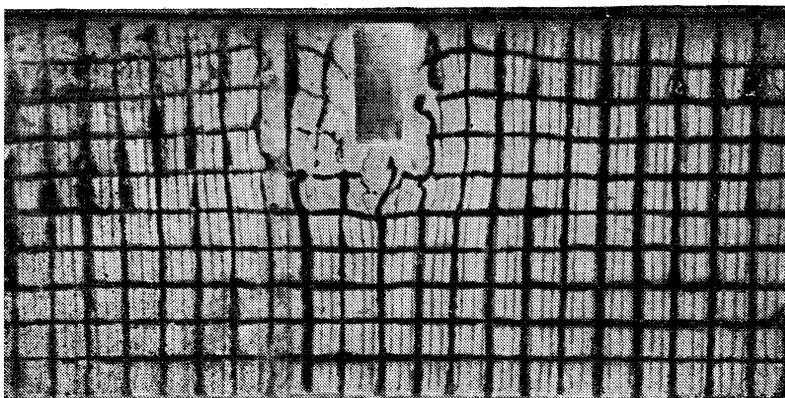
Очертание призмы выпора в общих чертах согласуется с очертаниями поверхностей скольжения, построенными для подобного случая на основе решения теории предельного напряженного состояния грунтов (рис. 3).

Для среды с преобладающей вертикальной водопроницаемостью характерной является деформация глубинного выпора. Установлено, что осадки штампа развиваются с момента приложения внешней нагрузки и нарастают при последующих ее ступенях.

Осадка сопровождалась некоторым подъемом поверхностей с боков штампа без видимого нарушения ее сплошности. Нарушения наблюдались в глубине массива по обеим сторонам упругого ядра, которое четко обозначалось за передней прозрачной стенкой (рис. 2, б).



а



б

Рис. 2. Деформации анизотропного по водопроницаемости основания с преобладающей горизонтальной (а) и вертикальной (б) водопроницаемостью.

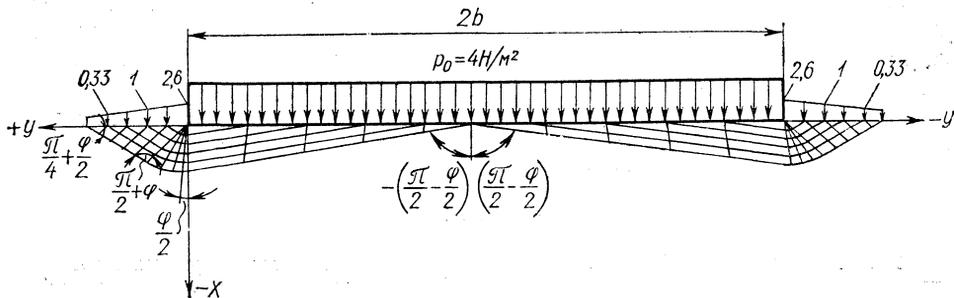


Рис. 3. Сетка линий скольжения для быстро загружаемого основания с преобладающей горизонтальной водопроницаемостью (при угле внутреннего трения $\varphi=15^\circ$ и удельной силе сцепления $c=0,2 \text{ H/m}^2$).

Глубина деформируемой зоны значительно превышала ту, которая имела место у среды с горизонтальным расположением слоев. При одинаковых нагрузках осадки штампов были всегда большими для среды с преобладающей вертикальной водопроницаемостью. Аналогичные опыты выполнялись и для слоистой сухой среды. Предельное равновесие наступало при нагрузках порядка $1-1,5 \text{ кг/см}^2$ (рис. 4).

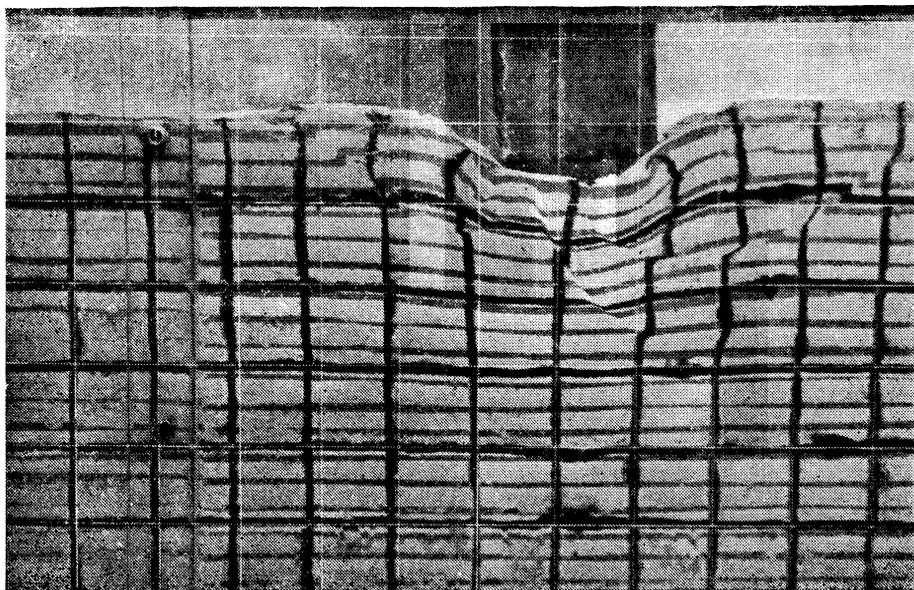


Рис. 4. Деформация сухого мелкослоистого основания.

Выводы

1. Фильтрационная анизотропия оказывает существенное влияние на характер деформирования и устойчивость быстрозагружаемых водонасыщенных оснований.

2. Для водонасыщенной среды с преобладающей горизонтальной водопроницаемостью потеря устойчивости сопровождается образованием призм поверхностного выпора по четко очерченным поверхностям при отсутствии упругого клина.

3. Для водонасыщенной среды с преобладающей вертикальной водопроницаемостью имеет место значительная по величине осадка штампа, завершающаяся образованием четко выраженных упругого клина и глубинного выпора.

4. При одинаковых нагрузках и деформативных характеристиках осадка штампа во втором случае большая, а в первом случае потеря устойчивости наступает раньше.

Литература

1. В. А. Рыжков, Н. П. Коваленко, Д. Д. Козьмин. Быстрое нагружение водонасыщенной торфяной залежи песчаным слоем. Сб. «Вопросы строительства и архитектуры. Основания, фундаменты и механика грунтов». Вып. 2. Минск, 1972. 2. Ю. А. Соболевский, В. А. Рыжков. Распределение фильтрационных напряжений в анизотропных по водопроницаемости основаниях при быстром приложении полосовой нагрузки. «Основания, фундаменты и механика грунтов», 1972, № 4.

Ю. А. Соболевский, В. А. Рыжков

УСТОЙЧИВОСТЬ ВОДОНАСЫЩЕННЫХ БЫСТРОЗАГРУЖАЕМЫХ ОСНОВАНИЙ

При аналитическом исследовании начального напряженного состояния анизотропных по водопроницаемости оснований нами была обнаружена существенная разница в распределении напряжений по сравнению с изотропными грунтами [1, 2, 3]. Анализ проводился на основе решения задачи теории фильтрации и упругости в отношении начального напряженного состояния.

В данной работе начальные условия фильтрации и граничные напряжения по ширине полосы загрузки $2b$ используются для решения задачи о начальной устойчивости быстрозагружаемых водонасыщенных оснований методами статики сыпучей среды.

Задача сводится в определению двусторонней нагрузки $q(y)$, которая будет препятствовать выпору основания, при заданных значениях угла внутреннего трения φ , удельной силы сцепления c и соотношения коэффициентов фильтрации в горизонтальном и вертикальном направ-

лениях $\frac{k_y}{k_x}$.

Если рассматривать грунт как сыпучую среду, сопротивляющуюся сдвигу силами трения, то можно предположить, что в предельном состоянии максимальная разность между абсолютной величиной касательного напряжения и сопротивления сдвигу равна нулю

$$\max \{ |\tau_n| - (\sigma_n \operatorname{tg} \varphi + c) \} = 0. \quad (1)$$

Площадки, на которых удовлетворяется соотношение (1), являются площадками скольжения. В любой точке предельно напряженной области грунта их всегда две, и они пересекаются под углами

$$\frac{\pi}{2} - \varphi, \quad \frac{\pi}{2} + \varphi.$$

Обозначая угол наклона большего главного напряжения к вертикальной оси x через δ , а углы наклона площадок скольжения первого и второго семейств к оси x — соответственно через β_1, β_2 , получим

$$\beta_1 = \delta + \mu, \quad \beta_2 = \delta - \mu,$$

$$\text{где } \mu = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}. \quad (2)$$

Плоская задача статики сыпучей среды сводится к решению системы уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial \delta_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = X, \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = Y, \\ (\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = (\sigma_x + \sigma_y + 2\sigma_c)^2 \sin^2 \varphi, \end{cases} \quad (3)$$

решение которой при статических граничных условиях дает возможность определить напряжения в любой точке среды и установить очертаения линий скольжения.

Уравнение предельного равновесия может быть выражено через главные напряжения следующим образом:

$$(\sigma_1 - \sigma_2) = (\sigma_1 + \sigma_2 + 2\sigma_c) \sin \varphi. \quad (4)$$

Напряжения σ_x , σ_y , τ_{xy} , входящие в уравнения (3), можно выразить через главные напряжения σ_1 , σ_2 и углы δ и β :

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) + \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \cos 2\delta, \\ \sigma_y &= \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) - \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \cos 2\delta, \\ \tau_{xy} &= \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \sin 2\delta. \end{aligned} \quad (5)$$

Если обозначить

$$\sigma = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) + \sigma_c,$$

то

$$\frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) = \sigma - \sigma_c. \quad (6)$$

Из (4) и (6) путем сопоставления можно получить зависимость

$$\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) = \sigma \sin \varphi. \quad (7)$$

Используя зависимости (6) и (7), выражения (5) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma (1 + \sin \varphi \cos 2\delta) - \sigma_c, \\ \sigma_y &= \sigma (1 - \sin \varphi \cos 2\delta) - \sigma_c, \\ \tau_{xy} &= \sigma \sin \varphi \sin 2\delta. \end{aligned} \quad (8)$$

На основании зависимостей (2) выражения (8) можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \sigma [1 + \sin \varphi \sin (2\beta_1 + \varphi)] - \sigma_c, \\ \sigma_y &= \sigma [1 - \sin \varphi \sin (2\beta_1 + \varphi)] - \sigma_c, \\ \tau_{xy} &= -\sigma \sin \varphi \cos (2\beta_1 + \varphi).\end{aligned}\quad (9)$$

Дифференцируя зависимости (9) по dx и dy , подставляя производные в уравнения равновесия (3) и учитывая, что

$$\cos \beta_1 = \frac{dx}{ds_1}, \quad \cos \beta_2 = \sin (\beta_1 + \varphi) \cdot \frac{dx}{ds_2}, \quad (10)$$

получаем систему двух дифференциальных уравнений равновесия, удовлетворяющих условию предельного состояния:

$$\left. \begin{aligned}\frac{\partial \sigma}{\partial s_1} + 2\sigma \operatorname{tg} \varphi \frac{\partial \beta_1}{\partial s_1} &= -\frac{A}{\cos \varphi \cos \beta_1} \cdot \frac{dx}{ds_1}, \\ \frac{\partial \sigma}{\partial s_2} - 2\sigma \operatorname{tg} \varphi \frac{\partial \beta_1}{\partial s_2} &= -\frac{B}{\cos \varphi \sin (\beta_1 + \varphi)} \cdot \frac{dx}{ds_2},\end{aligned}\right\} \quad (11)$$

где $A = -X \cos (\beta_1 + \varphi) - Y \sin (\beta_1 + \varphi)$; $B = -X \sin \beta_1 + Y \cos \beta_1$. Здесь

$X = -\gamma_{взв} + \gamma_0 \frac{\partial H}{\partial x}$ и $Y = \gamma_0 \frac{\partial H}{\partial y}$ представляют собой объемные силы.

Для решения задачи необходимо добавить для первого и второго семейств линий скольжения выражения

$$\begin{aligned}\frac{\partial y}{\partial s_1} \cos \beta_1 - \frac{\partial x}{\partial s_1} \sin \beta_1 &= 0, \\ \frac{\partial y}{\partial s_1} \sin (\beta_1 + \varphi) + \frac{\partial x}{\partial s_2} \cos (\beta_1 + \varphi) &= 0.\end{aligned}\quad (12)$$

В. В. Соколовским [4] был разработан общий метод решения уравнений (11) и (12), который мы используем при решении вопросов начальной устойчивости быстроагружаемых анизотропных по водопроницаемости оснований.

Предельное состояние анизотропного основания при преобладании горизонтальной водопроницаемости над вертикальной. Полагаем, что грунт имеет преобладающую горизонтальную водопроницаемость над вертикальной. Как следует из решения задачи о распределении начальных напряжений, при передаче всей нагрузки на воду в пограничном с полосовой нагрузкой слое возникают касательные напряжения, нормальные же напряжения равны нулю.

Тогда

$$\begin{aligned}\sigma_x = \sigma_y = \sigma_n &= 0, \\ \tau_{xy} = \tau_n &\neq 0.\end{aligned}$$

Из выражений (5) и (7) вытекает, что в этом слое

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \sigma \sin \varphi \cos 2\delta, \\ \sigma_y &= -\sigma \sin \varphi \cos 2\delta, \\ \tau_{xy} &= \sigma \sin \varphi \sin 2\delta,\end{aligned}\quad (13)$$

тогда как $\sigma_1 = -\sigma_2$.

При $\sigma_x = 0$, $\sin \varphi \neq 0$ и $\delta \neq 0$ и только $\cos 2\delta = 0$, откуда

$$\delta = -\frac{\pi}{4}, \quad \tau_{xy} = -\sigma \sin \varphi. \quad (14)$$

Полагаем также, что на участке граничной поверхности OD при $x=0$ и $y>0$ напряжения $\tau_{xy}=0$, а напряжения σ_x и σ_y неизвестны и подлежат определению из условия, что основание находится в предельном состоянии. В этом случае в области максимального напряженного состояния наибольшее главное напряжение направлено параллельно оси y , вследствие чего $\delta = -\frac{\pi}{2}$. Отсюда из (13) при $\sigma_n = q(y)$ получаем

$$q(y) = \sigma \sin \varphi, \quad (15)$$

где $q(y)$ — неизвестный закон распределения пригрузки на участке OD .

Выражения для объемных сил (фильтрационных и сил тяжести взвешенного в воде грунта) имеют вид

$$X = -\gamma_{взв} + \gamma_0 \frac{\partial H}{\partial x}; \quad (16)$$

$$Y = \gamma_0 \frac{\partial H}{\partial y}, \quad (17)$$

где H — напорная функция; $\gamma_{взв}$ — объемный вес взвешенного в воде грунта; γ_0 — объемный вес воды.

Значения $\frac{\partial H}{\partial x}$ и $\frac{\partial H}{\partial y}$ для каждой точки основания могут быть найдены из полученных ранее выражений [3]:

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\rho_0}{\gamma_0 \pi} \left[\frac{\sqrt{\frac{k_y}{k_x} (y+2b)}}{(y+2b)^2 + \frac{k_y}{k_x} x^2} - \frac{\sqrt{\frac{k_y}{k_x} y}}{y^2 + \frac{k_y}{k_x} x^2} \right] \quad (18)$$

и

$$\frac{\partial H}{\partial y} = \frac{\rho_0}{\gamma_0 \pi} \left[-\frac{\sqrt{\frac{k_y}{k_x} x}}{(y+2b)^2 + \frac{k_y}{k_x} x^2} + \frac{\sqrt{\frac{k_y}{k_x} x}}{y^2 + \frac{k_y}{k_x} x^2} \right]. \quad (19)$$

Прежде чем приступить к численному решению задачи, необходимо найти величину скачка внешней нагрузки в особой точке O .

В соответствии с выражением (14) при $\delta = -\frac{\pi}{4}$

$$\sigma = -\frac{\tau_{xy}}{\sin \varphi}, \tag{20}$$

а из выражения (2)

$$\beta'_1 = -\frac{\varphi}{2}. \tag{21}$$

В особой точке O при $y=0$ и $x=0$ находим величину скачка внешней нагрузки по формуле

$$\sigma'_1 = \sigma_1 \exp [2(\beta'_1 - \beta'_i) \operatorname{tg} \varphi]. \tag{22}$$

Вдоль положительной полуоси при $x=0$ из (2)

$$\beta''_1 = -\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right). \tag{23}$$

В точке O величины β'_1 и β''_2 означают углы наклона к касательным крайних кривых пучка линий скольжения первого семейства и очерчивают так называемую переходную область предельного напряженного состояния.

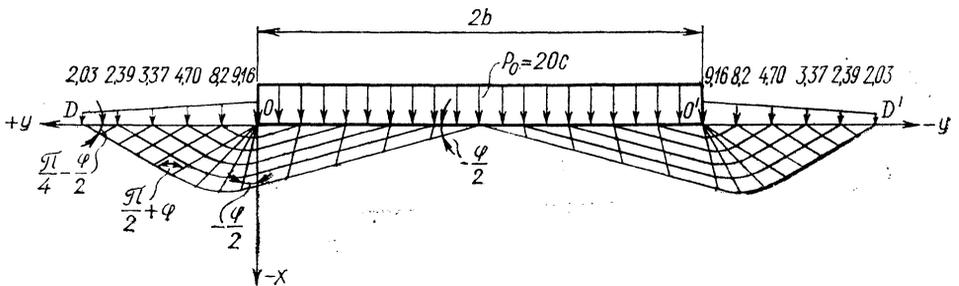


Рис. 1. Стека линий скольжения для водонасыщенного анизотропного основания с преобладающей горизонтальной водопроницаемостью

$$\left(\frac{k_y}{k_x} = 100; \varphi = 25^\circ; \gamma_{взв} = 0\right).$$

Для всех узлов пересечения (рис. 1) линий скольжения двух семейств вычисления для функций x , y , σ , β производятся по формулам

$$\left. \begin{aligned} x_3 &= \frac{y_2 - y_1 + x \operatorname{tg} \beta_{11} + x_2 \operatorname{ctg}(\beta_{12} + \varphi)}{\operatorname{tg} \beta_{11} + \operatorname{ctg}(\beta_{12} + \varphi)}, \\ y_3 &= y_1 - (x_3 - x_2) \operatorname{ctg}(\beta_{12} + \varphi); \\ \beta_{13} &= \frac{1}{\sigma_2 + \sigma_1} \left[\sigma_2 \beta_{12} + \sigma_1 \beta_{11} + \frac{1}{2} \operatorname{ctg}(\sigma_1 - \sigma_2) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{B_2(x_3 - x_2)}{2 \sin \varphi \sin(\beta_{12} + \varphi)} - \frac{A_1(x_3 - x_1)}{2 \sin \varphi \cos \beta_{11}} \right], \\ \sigma_3 &= \sigma_2 + 2 \operatorname{tg} \varphi \left[\sigma_2(\beta_{13} - \beta_{12}) - \frac{B_2(x_3 - x_2)}{2 \sin \varphi \sin(\beta_{12} + \varphi)} \right], \end{aligned} \right\} \tag{24}$$

где:

$$A = -X_1 \cos(\beta_{12} + \varphi) - Y_1 \sin(\beta_{11} + \varphi),$$

$$B = -X_2 \sin \beta_{12} + Y \cos \beta_{12}.$$

Значения же функций y , β и σ при $x=0$ на положительной оси (рис. 1) определяются по формулам:

$$\left. \begin{aligned} y_3 &= x_2 \operatorname{ctg}(\beta_{12} + \varphi) + y_2, \quad x_3 = 0, \\ \sigma_3 &= \sigma_2 + 2 \operatorname{tg} \varphi \left[\sigma_2 (\beta_{13} - \beta_{12}) - \frac{B_2 (x_3 - x_2)}{2 \sin \varphi \sin(\beta_{12} + \varphi)} \right], \\ \beta_{13} &= \operatorname{const}. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

На рис. 1 показана одна из полученных сеток линий скольжения для $\varphi=25^\circ$, $\gamma_{\text{взв}}=0$ и $p_0=20$ с.

В табл. 1 приводятся для этого примера результаты вычислений, где x , y и σ выражены в безразмерных величинах, а β — в радианах.

Вычисления производились на электронно-вычислительной машине «Минск-22» при $p_0=20$ с для следующих значений: $\varphi=5^\circ, 10^\circ, 15^\circ, 20^\circ, 25^\circ, 30^\circ, 35^\circ, 40^\circ, 45^\circ, 50^\circ$; $\frac{k_y}{k_x}=100, 90, 80, 70, 60, 50, 40, 30, 20, 10$.

В табл. 2 даны значения пригрузки $q(y)$, необходимой для обеспечения устойчивости основания для приведенных φ , $\frac{k_y}{k_x}$ и $\gamma_{\text{взв}}$ при

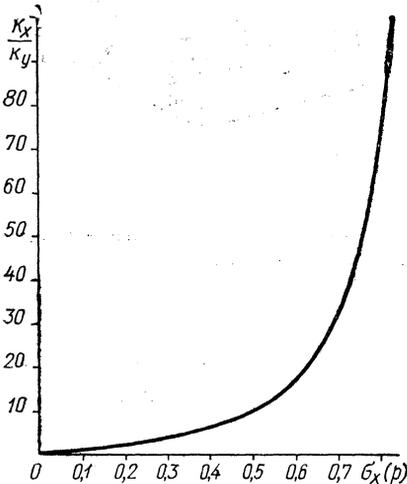


Рис. 2. Зависимость σ_x при $y=0$ и $-b < x < +b$ от отношения $\frac{k_x}{k_y}$.

быстром приложении нагрузки $p_0 = 20$ с.

Предельное состояние анизотропного основания при преобладании вертикальной водопроницаемости над горизонтальной. Как следует из решения задачи о распределении начальных напряжений [3] в водонасыщенном анизотропном основании с преобладающей вертикальной водопроницаемостью, на скелет грунта действуют напряжения от быстро приложенной нагрузки и фильтрационные напряжения пришедшей в движение грунтовой воды.

Таким образом, на граничной поверхности в пределах загружаемого участка при $x=0$, $y>0$ созданы напряжения

$$\sigma_x = p_0 \frac{1 - \sqrt{\frac{k_y}{k_x}}}{1 + \sqrt{\frac{k_y}{k_x}}}, \quad \tau_{xy} = 0. \quad (26)$$

Направление главного напряжения σ_1 параллельно оси x , вследствие чего угол $\delta=0$.

Таблица 1

Значения функций x , y , β_1 , σ в узлах сетки линий скольжения для основания с преобладающей горизонтальной водопроницаемостью

Определение функции	i j														
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
x y β_1 σ	0						0,00 0,00 -0,2181 47,326	0,00 0,00 -0,4799 37,074	0,00 0,00 -0,7417 29,042	0,00 0,00 -1,0035 22,751					
x y β_1 σ	1					0,00 -0,20 -0,2181 27,082	-0,0466 0,0103 -0,2181 45,279	-0,0501 0,0260 -0,4799 34,103	-0,0492 0,0451 -0,7417 25,777	-0,0424 0,0667 -1,0035 19,559	0,000 0,1334 -1,0035 19,388				
x y β_1 σ	2				0,00 -0,40 -0,2181 17,085	-0,0466 -0,1896 -0,2181 27,321	-0,0932 0,0206 -0,2181 28,947	-0,1002 0,0521 -0,4799 21,872	-0,0985 0,0903 -0,7417 16,764	-0,0849 0,1334 -1,0035 13,120	-0,0424 0,2001 -1,0035 13,876	0,000 0,2668 -1,0035 11,130			
x y β_1 σ	3		0 -0,60 -0,2181 10,751	-0,0466 -0,0896 -0,2181 18,549	-0,0923 -0,1793 -0,2181 22,262	-0,1398 0,0782 -0,2181 23,140	-0,1503 0,1043 -0,4799 17,563	-0,1478 0,1355 -0,7417 13,642	-0,1274 0,2001 -1,0035 10,973	-0,0849 0,2668 -1,0035 11,835	-0,0424 0,3335 -1,0035 11,795	0,00 0,4002 -1,0035 7,972			
x y β_1 σ	4		0,00 -0,80 -0,2181 4,1120	-0,0466 -0,5896 -0,2181 10,935	-0,0932 -0,3793 -0,2181 15,540	-0,1398 -0,1689 -0,2181 17,319	-0,1865 0,1043 -0,2181 18,075	-0,2004 0,1806 -0,4799 13,783	-0,1971 0,2668 -0,7417 10,847	-0,1699 0,3335 -1,0035 8,954	-0,1274 0,4002 -1,0035 9,747	-0,0849 0,4002 -1,0035 10,228	-0,0424 0,4669 -1,0035 9,589	0,000 0,5336 -1,0035 5,647	
x y β_1 σ	5	0,00 -1,0 -0,2181 0	-0,0466 -0,7896 -0,2181 6,551	-0,0932 -0,5793 -0,2181 11,573	-0,1398 -0,3689 -0,2181 14,092	-0,1865 -0,1586 -0,2181 15,287	-0,2331 0,0516 -0,2181 15,928	-0,2506 0,1304 -0,4799 12,185	-0,2464 0,2258 -0,7417 9,656	-0,2124 0,3335 -1,0035 8,078	-0,1699 0,4002 -1,0035 8,764	-0,1274 0,4669 -1,0035 9,342	-0,0849 0,5336 -1,0035 9,497	-0,0424 0,6003 -1,0035 8,460	0,000 0,6670 -1,0035 4,800

Таблица 2

Значения боковой пригрузки в безразмерных величинах от действия равномерно распределенной полосовой нагрузки интенсивностью $p_0=20$ с

$\frac{k_y}{k_x}$ / k°	5°	10°	15°	20°	25°	30°	35°	40°
$\frac{100}{1}$	16,06	13,97	12,09	10,40	8,860	7,441	6,135	4,933
$\frac{1}{100}$	6,299	3,244	1,366	0,239	0	0	0	0
$\frac{90}{1}$	16,00	13,91	12,05	10,86	8,825	7,412	6,111	4,914
$\frac{1}{90}$	6,185	3,172	1,322	0,211	0	0	0	0
$\frac{80}{1}$	15,92	13,85	11,99	10,31	8,783	7,377	6,083	4,890
$\frac{1}{80}$	6,054	3,088	1,269	0,178	0	0	0	0
$\frac{70}{1}$	15,83	13,76	11,92	10,25	8,731	7,333	6,046	4,861
$\frac{1}{70}$	5,894	2,988	1,206	0,139	0	0	0	0
$\frac{60}{1}$	15,70	13,66	11,83	10,17	8,664	7,277	6,00	4,824
$\frac{1}{60}$	5,701	2,86	1,12	0,06	0	0	0	0
$\frac{50}{1}$	15,54	13,52	11,71	10,07	8,576	7,203	5,939	4,775
$\frac{1}{50}$	5,457	2,711	1,032	0,032	0	0	0	0
$\frac{40}{1}$	15,32	13,32	11,54	9,926	8,452	7,099	5,853	4,706
$\frac{1}{40}$	5,135	2,506	0,904	0	0	0	0	0
$\frac{30}{1}$	14,98	13,03	11,28	9,707	8,265	6,942	5,724	4,602
$\frac{1}{30}$	4,679	2,217	0,722	0	0	0	0	0
$\frac{20}{1}$	14,40	12,52	10,84	9,330	7,944	6,672	5,501	4,423
$\frac{1}{20}$	3,955	1,758	0,435	0	0	0	0	0
$\frac{10}{1}$	13,08	11,38	9,855	8,475	7,217	6,062	4,998	4,018
$\frac{1}{10}$	2,488	0,824	0	0	0	0	0	0

Граничные условия на участке OA на основании (8) принимаем в виде

$$\sigma = \frac{p_0 \left(\frac{1 - \sqrt{\frac{k_y}{k_x}}}{1 + \sqrt{\frac{k_y}{k_x}}} \right) + \sigma_c}{1 + \sin \varphi}, \quad (27)$$

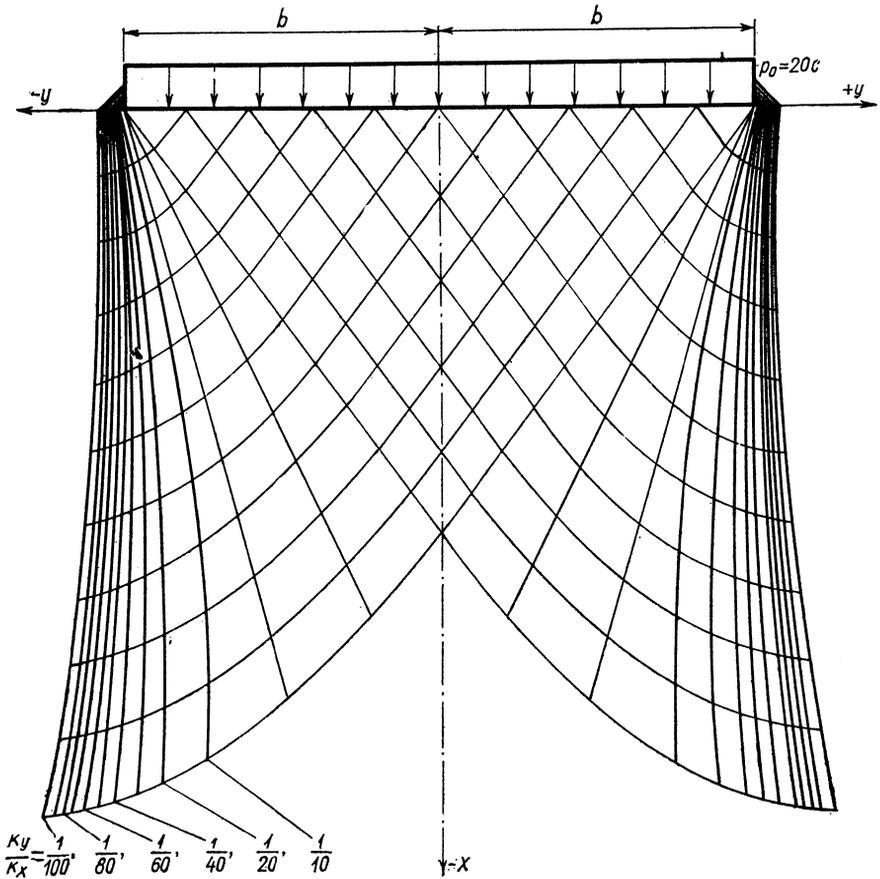


Рис. 3. Сетка линий скольжения для водонасыщенного анизотропного основания с преобладающей вертикальной водонепроницаемостью

$$\left(\frac{k_y}{k_x} = \frac{1}{100}, \varphi = 15^\circ, \gamma_{взв} = 0 \right).$$

$$\beta_1 = \beta'_1 = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}. \tag{28}$$

Из (26) видно, что при $\frac{k_x}{k_y} = 1$ $\sigma_x = 0$, а при $\frac{k_x}{k_y} \rightarrow \infty$ $\sigma_x \rightarrow P_0$. Изменение σ_x в зависимости от отношения $\frac{k_x}{k_y}$ показано на рис. 2. На участке граничной поверхности при $x=0$ и $y>0$ напряжения $\tau_{xy} = 0$, а σ_x и σ_y неизвестны и подлежат определению. Из уравнения (22) получаем выражение для определения скачка внешней нагрузки в точке O ($x=0, y>0$):

$$\frac{q_0 + \sigma_c}{1 - \sin \varphi} = \frac{p_0 \left(\frac{1 - \sqrt{\frac{k_y}{k_x}}}{1 + \sqrt{\frac{k_y}{k_x}}} \right) + \sigma_c}{1 + \sin \varphi} \cdot \exp(-\pi t g \varphi).$$

x	y_{01}	3							-0,130	-0,261	-0,391	-0,466	-0,534	-0,591	-0,635			
									-0,50	-0,40	-0,30	-0,242	-0,168	-0,078	+0,028			
σ	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{50}$	$\frac{1}{100}$						0,654	0,654	0,654	0,654	0,480	0,305	0,130			
									10,82	10,24	9,321	7,538	5,486	2,80	0			
x	y_{01}	4							-0,130	-0,261	-0,391	-0,521	-0,621	-0,712	-0,788	-0,84		
									-0,70	-0,60	-0,50	-0,40	-0,323	-0,224	-0,104	0,037		
σ	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{50}$	$\frac{1}{100}$						0,654	0,654	0,654	0,654	0,654	0,48	0,305	0,131		
									10,88	10,48	9,933	9,152	7,397	5,380	2,733	0		
x	y_{01}	5							-0,130	-0,261	-0,391	-0,521	-0,652	-0,776	-0,90	-0,986	-1,058	
									-0,90	-0,80	-0,70	-0,60	-0,50	-0,404	-0,281	-0,130	0,046	
σ	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{50}$	$\frac{1}{100}$						0,654	0,654	0,654	0,654	0,654	0,654	0,48	0,305	0,131	
									10,90	10,57	10,18	9,686	9,026	7,303	5,326	2,722	0	
x	y_{01}	6							-0,130	-0,261	-0,391	-0,521	-0,652	-0,782	-0,931	-1,068	-1,183	-1,270
									-1,10	-1,0	-0,90	-0,80	-0,70	-0,60	-0,485	-0,337	-0,156	0,055
σ	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{50}$	$\frac{1}{100}$						0,654	0,654	0,654	0,654	0,654	0,654	0,48	0,305	0,131	
									10,88	10,57	10,27	9,914	9,482	8,924	7,242	5,315	2,764	0
x	y_{01}	6							14,82	14,74	14,66	14,56	14,41	14,20	12,51	10,66	8,13	2,59
									15,91	15,88	15,87	15,86	15,82	15,77	15,68	14,01	12,27	9,97

откуда

$$q_0 = \left[p_0 \left(\frac{1 - \sqrt{\frac{k_y}{k_x}}}{1 + \sqrt{\frac{k_y}{k_x}}} \right) + \sigma_c \right] \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} \exp(-\pi \operatorname{tg} \gamma) - \sigma_c.$$

Неизвестные функции x , y , σ , β во всех узлах вычисляем по формулам (24) и (25). Выражения для объемных сил в этих формулах находим из (16) и (17).

На рис. 3 показана сетка линий скольжения для $\varphi = 15^\circ$, $\varphi_{взв} = 1$ и $p_0 = 20$.

В табл. 3 приведены для этой сетки результаты вычислений. Вычисления производились на ЭВМ «Минск-22» для следующих значений: $\varphi = 5^\circ, 10^\circ, 15^\circ, 20^\circ, 25^\circ, 30^\circ, 35^\circ, 40^\circ, 45^\circ, 50^\circ$; $\frac{k_y}{k_x} = \frac{1}{100}; \frac{1}{90}; \frac{1}{80}; \frac{1}{70}; \frac{1}{60}; \frac{1}{50}; \frac{1}{40}; \frac{1}{30}; \frac{1}{20}; \frac{1}{10}$.

Как видно из табл. 2, при угле внутреннего трения $\varphi > 25^\circ$ имеет место предельное состояние грунта внутри массива.

Сравнение показывает на весьма значительные различия в величине пригрузки и очертании поверхностей скольжения. Начальное напряженное состояние при преобладании горизонтальной водопроницаемости оказывается значительно неблагоприятнее, чем напряженное состояние в более отдаленных стадиях. Для оснований с преобладающей вертикальной водопроницаемостью наиболее опасным является последующий период. Поэтому представляет интерес рассмотрение задачи предельного равновесия с учетом уплотнения.

Литература

1. Н. М. Герсеванов. Основы динамики грунтовой массы. М., 1934.
2. В. А. Флорин. Основы механики грунтов. Т. 2. М., 1961.
3. Ю. А. Соболевский, В. А. Рыжков. Распределение фильтрационных напряжений в анизотропных по водопроницаемости основаниях при быстром приложении полосовой нагрузки. «Основания, фундаменты и механика грунтов», 1972, № 2.
4. В. В. Соколовский. Статика сыпучей среды. М., 1954.

В. Н. Заяц

УРАВНЕНИЕ КОМПРЕССИОННОЙ КРИВОЙ ДЛЯ БОЛОТНЫХ ГРУНТОВ

Практика гидромелиоративного строительства богата примерами возведения сооружений (особенно земляных) на слабых основаниях, сложенных различными болотными образованиями. Во всех случаях ввиду сильной сжимаемости болотных грунтов, имели место большие осадки сооружений. При этом грунты в основании уплотнились, несущая способность их значительно повышалась.

Способность слабых грунтов улучшать под нагрузкой свои несущие свойства позволяет использовать их в качестве оснований, даже при возведении сооружений с достаточно большими давлениями на основание. В таких случаях рекомендуется применять поэтапное строительство. На каждом этапе назначается безопасная для основания нагрузка и выдерживается до завершения консолидации уплотнения слабых грунтов. Нагрузка последующего этапа выбирается с учетом улучшения свойств основания в результате уплотнения грунтов под нагрузками предыдущих этапов.

Решение подобных и других задач возможно только при наличии у проектировщика характеристик строительных свойств грунтов основания. Одной из важнейших характеристик в этом случае является компрессионная зависимость. Для ее получения в лабораториях выполняются компрессионные испытания образцов каждой прослойки будущего основания. Это весьма кропотливые и для высокопористых грунтов очень длительные опыты. Снятие одной кривой продолжается не менее полугодом. Следует добавить, что полученная экспериментальная зависимость имеет ограниченное применение из-за невозможности совместного аналитического решения общей задачи. При использовании счетно-решающих устройств она совсем неприменима.

Перечисленные задачи решаются, если вместо экспериментальных зависимостей использовать аппроксимирующие их функции. Такие попытки за последние десятилетия делались неоднократно. Только для торфяных грунтов предлагались параболические, логарифмические, экспоненциальные и другие виды уравнений. Причем каждое из них находило свою область применения, ограниченную значениями нагрузки, видом грунта или другими факторами.

Территория Белоруссии изобилует различными по степени сжимаемости болотными образованиями органического и органо-минерального строения. Нами проведено большое количество компрессионных испытаний образцов, взятых на различных болотных массивах и с разных глубин. Значения коэффициентов пористости исследованных грунтов колебались от 0,7 до 36. Получены экспериментальные компрессионные

зависимости для образцов естественного и нарушенного состояния в условиях полного водонасыщения.

Анализ экспериментального материала позволяет отметить, что независимо от происхождения и состава грунта характер сжимаемости образцов под нагрузкой во всех случаях оставался одинаковым. Получена только различная степень сжимаемости в зависимости от начального состояния плотности грунта. Такая оценка работы грунтов под уплотняющими нагрузками позволяет выбрать для аппроксимации экспериментальных зависимостей один вид уравнения.

Тщательное сопоставление результатов эксперимента с ранее предлагаемыми уравнениями позволило отдать предпочтение логарифмической функции, имеющей вид [1]

$$\varepsilon = \varepsilon_0 - a_k \ln \frac{p}{p_0}, \quad (1)$$

где ε — коэффициент пористости грунта, соответствующий нагрузке p , H/m^2 ; ε_0 — начальный коэффициент пористости; a_k — коэффициент полной компрессии; p_0 — нагрузка, соответствующая структурной прочности грунта.

Для функции (1) были найдены значения параметров a_k и p_0 в зависимости от начального коэффициента пористости, что позволило использовать ее в качестве уравнения для построения компрессионных кривых без проведения опытов. Полученная из нее расчетная формула осадки оснований под насыпями была рекомендована для практического применения [2]. Проверка формулы на материалах осадки дорожных насыпей на торфяных основаниях показала достаточную для практики пригодность.

Существенный недостаток функции (1) заключается в том, что она аппроксимирует экспериментальную компрессионную кривую только на определенном участке L (рис. 1, а). Этот участок, хотя и соответствует наиболее часто встречающимся в практике значениям нагрузок, в ряде случаев занимает только часть кривой. Начало и конец кривой уравнением не определяются. Начало экспериментальной кривой характеризуется более низкими значениями коэффициентов пористости, а конец — более высокими по сравнению с расчетными.

В работе [2] рекомендуется применять расчетные формулы, основанные на функции (1), при нагрузках не менее $2p_0$. В ряде случаев, особенно в заиленных грунтах с коэффициентом пористости, близким к

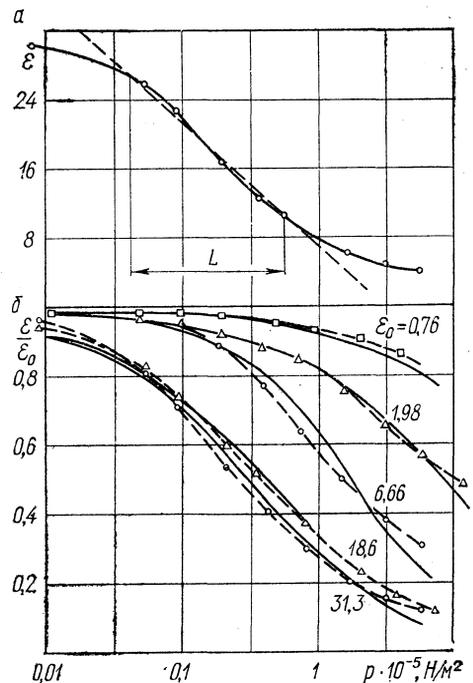


Рис. 1. Компрессионные зависимости в полулогарифмических координатах: L — участок логарифмической функции.

единице, p_0 достигает значений $(0,3—0,5) \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2$. Это соответствует давлению на основание в зависимости от веса земляной насыпи высотой 2 м. Если осадка такой насыпи на отмеченных грунтах окажется не столь опасной для нее, то этого нельзя сказать о других, более ответственных сооружениях. Кроме того, невозможность учета начального участка затрудняет аналитические расчеты осадки слоистых оснований, составление прогнозов поэтапной технологии и, что самое важное, сводит на нет применение счетно-решающих устройств.

Экспериментальные компрессионные зависимости представляют собой плавно убывающие кривые. Начальные участки кривых характеризуются более высокой интенсивностью убывания. Причем в тщательно выполненных экспериментах с очень малыми ступенями нагрузки можно отметить некоторое возрастание интенсивности на начальном участке кривой. Это означает, что экспериментальные кривые могут иметь точку перегиба. До этой точки кривая обращена выпуклостью вверх. Остальная (значительно большая) часть такой кривой имеет выпуклость вниз.

Этим требованиям отвечает математическая функция [3] вида

$$y = \frac{1}{ax^2 + bx + c}, \quad (2)$$

которая именуется кривой третьего порядка. Она симметрична относительно вертикальной прямой $x = -b/2a$ и имеет асимптотами ось x . Поведение функции зависит от знаков постоянной a и параметра $\Delta = 4ac - b^2$. Рассмотрим случай положительных a и Δ .

Поскольку экспериментальная компрессионная кривая является убывающей, то максимум функции должен находиться на оси ординат. Тогда абсцисса максимума $x = -b/2a = 0$. Из этого следует, что $b = 0$. Функция (2) приобретает более простой вид:

$$y = \frac{1}{ax^2 + c}. \quad (3)$$

Для функции (3) параметр $\Delta = 4ac$. Так как a и Δ приняты положительными, то и c — величина положительная. Ордината максимума функции $y_0 = 4a/\Delta = 1/c$. Отсюда $c = 1/y_0$. Функция (3) приводится к виду

$$y = \frac{y_0}{1 + ay_0x^2}. \quad (4)$$

Значение постоянной a находится из экспериментальных данных. Для этого функция (4) приводится к удобному для логарифмирования виду

$$Y = Ax^2, \quad (5)$$

где $Y = \frac{y_0}{y} - 1$; $A = ay_0$.

На рис. 2 приведены графики, построенные по опытным данным применительно к уравнению (5), которое в логарифмических координатах выражается прямой. Линии на графике можно считать прямыми. Только угол наклона прямых Θ оказался неодинаковым. Это означает,

Таблица 1

Вид грунта	Коэффициент пористости	Постоянные функции (6)	
		a	n
Торф верховой	28—36	0,089—0,104	0,62—0,85
Торф низинный	4—19	0,084—0,118	0,65—1,00
Заторфованные грунты	3,2—6,6	0,075—0,087	0,90—1,00
Зайленные грунты	0,7—2,0	0,073—0,136	0,57—0,95
Мергеля	3,8—5,1	0,074—0,097	0,92—1,12
Запрпель тонкодетритовый (органический)	9,8—18,6	0,085—0,130	0,64—0,90
известковый (зайленный)	4—4,2	0,048—0,095	0,88—1,15
известковый	8—10	0,20—0,21	0,57—0,65

что в функции (4) необходимо вместо постоянного ввести переменный показатель степени $n = \operatorname{tg} \theta$. Тогда уравнение компрессионной кривой в координатах p и ϵ можно представить в виде

$$\epsilon = \frac{\epsilon_0}{1 + a\epsilon_0 (10^{-5} p)^n} \quad (6)$$

После графоаналитической обработки опытных данных получены значения постоянной a и показателя степени n для большого числа эк-

спериментальных компрессионных кривых, характеризующих различные виды болотных грунтов (табл. 1). Результаты обработки позволили принять постоянную $a=0,1$ для всех болотных грунтов, находящихся в естественном состоянии. Исключение составили образцы известкового сапрпеля, у которого можно считать $a=0,2$. Этот грунт отличался от других тем, что представлял светлую (почти белую) студенистую массу с очень слабой водопроницаемостью. Под нагрузкой свободная вода отжималась с большим трудом, поэтому деформации образцов были меньшими, чем деформации других грунтов одинаковой плотности.

Наглядным доказательством оценки достоверности величины $a=0,1$ может служить график (рис. 3), где точками отмечены значения коэффициента пористости ϵ_1 , полученные из компрессионных испытаний образцов под уплотняющей нагрузкой $p=10^5 \text{ Н/м}^2$. Сплошная линия построена по уравнению

$$\epsilon_1 = \frac{\epsilon_0}{1 + 0,1\epsilon_0} \quad (7)$$

полученному из уравнения (6) при $a=0,1$ и для случая $p=10^5 \text{ Н/м}^2$. Точки для упомянутых образцов известкового сапрпеля обособились.

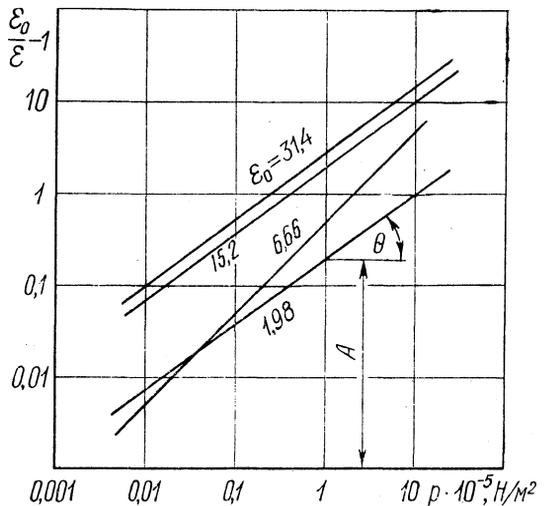


Рис. 2. Графическое определение постоянных аналитической функции.

Крестиками на этом графике показаны результаты графоаналитической обработки опытных данных, опубликованных А. Ф. Печуровым [4].

Значения показателей степени n для всех болотных грунтов укладываются в зону 0,5—1. Причем размеры этой зоны определяются для каждого вида грунта в естественном состоянии. Разброс значений n связан с какими-то случайными факторами. Была сделана попытка проследить влияние на величину n изменения влажности образца, нарушения естественной структуры. Оказалось, что не только для перемятого или подсушенного торфа, но даже для сухой торфяной крошки показатель степени n попадает в ту же зону. Зона значений постоянной n достаточно устойчива для всех болотных грунтов в различных их состояниях, а постоянная a при изменении состояния грунта в отличие от естественного залегания сильно изменяется.

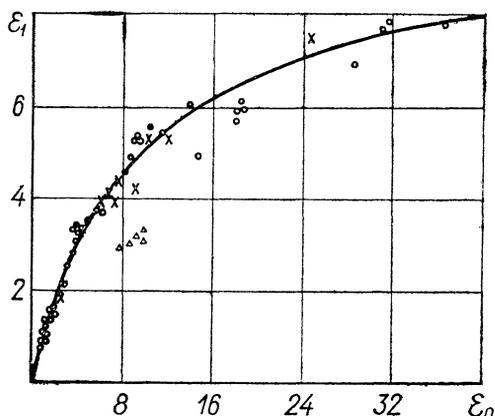


Рис. 3. Зависимость коэффициентов пористости болотных грунтов под нагрузкой $p=10^5 \text{ Н/м}^2$ от начальных.

Несмотря на достаточную устойчивость зоны показателей степени n , значения их для практического использования оказываются неопределенными, поскольку отклонения показателя степени, даже на небольшую величину, сильно влияют на результаты расчетов. В большей степени это заметно для грунтов с высокими показателями коэффициентов пористости, когда единица в знаменателе становится не столь существенной. В то же время, при нагрузках, близких к 10^5 Н/м^2 , отклонения в результатах расчетов снижаются.

Так, если принять нагрузку $p=10^4 \text{ Н/м}^2$, то для грунта с начальным коэффициентом пористости $\epsilon_0=30$ получим расчетные значения $\epsilon=15,3; 19,6$ и $23,0$ при показателях степени $n=0,5; 0,75$ и $1,0$ в уравнении (6). Как видно, отклонения от среднего значения могут достигать 20% и более. При нагрузках, достигающих $5 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2$, отклонения расчетных значений от среднего для этого же грунта могут превысить 25%. Для обычных осушенных болот с низинным торфом, отличающимся от приведенного (нетипичного) грунта тем, что начальные коэффициенты пористости не превышают 10—12%, такие отклонения расчетных значений от среднего не выйдут за пределы 10—15%. В случае грунтов с более низкими значениями начального коэффициента пористости, а также при нагрузках, близких к 10^5 Н/м^2 , указанные отклонения значительно снизятся.

Предварительные расчеты на начальной стадии проектирования можно выполнять, используя осредненные значения показателя n . Можно также смещать значения к границам зоны, сообразуясь с требуемой степенью надежности расчетов. В случае необходимости уточнения предварительных расчетов желательно выполнить испытания образцов по сокращенной методике, ибо при известном законе изменения достаточно иметь три-четыре опытные точки, чтобы построить график в ко-

ординатах $\lg \left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} - 1 \right)$ и $\lg p$ и получить необходимые частные значения a и n .

Построенные затем по этим параметрам компрессионные кривые достаточно хорошо описывают экспериментальные зависимости. На рис. 1, б приведено сопоставление аналитических кривых с экспериментальными точками для ряда грунтов с различными начальными коэффициентами пористости. Для удобства построения их на общем графике значения коэффициентов пористости взяты в долях по отношению к начальному.

Предлагаемая аналитическая функция описывает экспериментальные компрессионные зависимости на большом протяжении, включая и начальные участки. С осредненными табличными или уточненными в опытах значениями постоянных она может быть применима во всех видах расчетов, связанных с использованием экспериментальных кривых.

Применение в расчетах осадки оснований аналитической функции позволит ускорить вычислительную работу, так как дает возможность построить расчетные графики, номограммы или же составить алгоритмы для вычислительных машин. При использовании осредненных значений постоянных функций отпадает необходимость в проведении компрессионных испытаний.

Литература

1. Н. А. Цитович. Механика грунтов. М., 1963.
2. П. А. Дрозд, В. Н. Заяц. Расчет осадки насыпей на болотах. «Гидротехника и мелиорация», 1968, № 3.
3. И. Н. Бронштейн, К. А. Семендяев. Справочник по математике. М., 1956.
4. А. Ф. Печкуров. Устойчивость русел рек и каналов. Минск, 1964.

К. И. Шимко, А. И. Алтунин, С. В. Валицкий

РАСЧЕТ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ЭФФЕКТИВНОСТИ ВНЕДРЕНИЯ СИСТЕМЫ СПУ В ГИДРОМЕЛИОРАТИВНОМ СТРОИТЕЛЬСТВЕ

Экономический эффект в народном хозяйстве может определяться по объему в целом и на годовой объем работы [1].

Полный народнохозяйственный эффект по объекту в целом определяется по формуле [1]:

$$\mathcal{E}_{об} = (C_1 - C_2 - C_3) + E_n(K_1 T_n T_{\phi} - K_d T_{\phi}) + \mathcal{E}_д + \mathcal{E}_р. \quad (1)$$

Годовой народнохозяйственный эффект определяется по формуле

$$\mathcal{E}_{год} = A(C_1 - C_2 - C_3) + E_n(K_1 - K_2 - K_d) + \mathcal{E}_д + \mathcal{E}_р. \quad (2)$$

В формулах (1) и (2) не учитывается эффект от использования земледельцами введенных площадей в период строительства объектов.

Указанный экономический народнохозяйственный эффект достигается в результате применения сетевого планирования и управления (СПУ), дающего возможность наиболее точно и четко согласовывать календарные сроки дренирования площадей на объектах, осушаемых и переустраиваемых материальным дренажом, между строительной организацией и земледельцем.

По данным исследований, согласование строительного процесса с сельскохозяйственным производством позволяет приблизительно 40% дренируемой площади использовать в период строительства, около 30% — под озимые культуры под урожай будущего года и около 30% дренировать с допустимым ущербом [2].

Эффект от использования земледельцем введенных площадей в период строительства предлагается определять по формуле

$$\mathcal{E}_c = F_n D P_1 P_2,$$

где F_n — площадь (нетто) дренирования по объекту или ряда объектов, принимается согласно техно-рабочего проекта, га; D — дополнительный чистый доход с 1 га дренируемой площади согласно техно-рабочего проекта достигается через два—три года после освоения и составляет 200—300 руб. [2]; P_1 — часть площади, используемой земледельцем в период строительства, % (по данным исследований, $P_1 = 40\%$ от F_n [2, 3]; P_2 — часть дополнительного чистого дохода с 1 га, получаемого земледельцем в период строительства, % (по данным исследований, в первый год освоения $P_2 = 50—60\%$ от D) [2, 3].

Таким образом, 1 га дренируемой площади в период строительства дает чистый доход

$$\mathcal{E}_c = 1 \text{ (га)} \cdot 250 \text{ (руб.)} \cdot 0,4 \cdot 0,5 = 50 \text{ (руб.)}$$

Рассматриваемый дополнительный эффект характерен для объектов, осушаемых и переустраиваемых материальным дренажом, площадь которых в 1966—1970 гг. в среднем составляла около 40% от плана, а в 1971 г. около 60% [4, 5].

По плану на 1971—1975 гг. площадь, осушаемая и переустраиваемая материальным дренажом, по республике в среднем будет составлять 70—80% от плана, или 100 тыс. га в год (100 000 га) · 50 (руб.) = = 5 млн. руб. в год).

Поощрение строителей за достижение эффекта (\mathcal{E}_c) следует производить за счет отчислений в премиальный фонд СМУ из получаемого землепользователем дохода.

Параллельно с премированием в случае невыполнения одной из договаривающихся сторон (СМУ или землепользователем) намеченного плана ввода площадей необходимо ввести выплату неустойки. Этим мероприятиям следует придать юридическую основу.

Рассмотрим конкретный пример по определению экономической эффективности внедрения СПУ в гидромелиоративном строительстве.

Пример. Определить экономическую эффективность внедрения сетевого планирования и управления при переустройстве осушительной сети на объект с общей сметной стоимостью строительства $K=750$ тыс. руб., в том числе строительно-монтажных работ $S_{\text{стр.раб}}=652$ тыс. руб. площадью $F_n=1100$ га плановой продолжительностью $T_n=24$ мес. В результате внедрения СПУ объект построен и сдан за $T_\phi=21$ мес. = = 1,75 года.

Расчетная формула

$$\mathcal{E}_{об} = (C_1 - C_2 - C_3) + K_n(K_1T_n - K_2T_\phi K_dT_\phi) + \mathcal{E}_д + \mathcal{E}_р + \mathcal{E}_c$$

Расчет 1. Условно постоянные расходы (C_1) в составе себестоимости строительно-монтажных работ по заменяемому варианту (этапону) составят [1]:

а) условно-постоянная часть накладных расходов

$$\frac{S_{\text{стр.раб}} \cdot 0,157 \cdot 0,6}{1,06 \cdot 1,157} = \frac{652 \cdot 0,157 \cdot 0,6}{1,06 \cdot 1,157} = 50 \text{ (тыс. руб.)}$$

где 0,157 — норматив накладных расходов (15,7%); 0,6 — норматив плановых накоплений (6%); 0,6 — часть условно-постоянных расходов от общей величины накладных расходов (60%);

б) условно-постоянная часть расходов по эксплуатации строительных машин

$$S_{\text{стр. раб}} \cdot 0,4 \cdot 0,3 = 652 \cdot 0,4 \cdot 0,3 = 78,2 \text{ (тыс. руб.)}$$

где 0,4 — удельный вес затрат по эксплуатации машин в стоимости строительно-монтажных работ (40%); 0,3 — часть условно-постоянных расходов от общих затрат по эксплуатации машин (30%);

в) условно-постоянная часть заготовительно-складских расходов

$$S_{\text{стр. раб}} \cdot 0,217 \cdot 0,021 \cdot 0,55 = 652 \cdot 0,217 \cdot 0,021 \cdot 0,55 = 1,60 \text{ (тыс. руб.)}$$

где 0,217 — удельный вес затрат на материалы в себестоимости строительно-монтажных работ (21,7%); 0,021 — средний размер заготовительно-складских расходов и затрат на материалы (2,1%); 0,55 — для условно-постоянных расходов в общей сумме заготовительно-складских расходов (55%).

Всего условно-постоянные расходы в составе себестоимости строительно-монтажных работ по заменяемому варианту составят

$$C_1 = 50 + 78,2 + 1,6 = 129,8 \text{ (тыс. руб.)}$$

Расчет 2. Условно-постоянные расходы в составе себестоимости строительно-монтажных работ при внедрении системы сетевого планирования и управления (C_2) составят

$$C_2 = \frac{C_1 \cdot T_{\Phi}}{T_{\text{н}}} = \frac{129,8 \cdot 1,75}{2} = 113,6 \text{ (тыс. руб.)}$$

Расчет 3. Дополнительные затраты, связанные с внедрением СПУ, относимые на себестоимость строительно-монтажных работ (C_3), складываются из заработной платы работников, командировочных расходов и определяются прямым счетом (в примере примем $C_3 = 3,5$ тыс. руб.).

Расчет 4. Среднегодовая стоимость основных ($K_{\text{осн}}$) и оборотных ($K_{\text{обор}}$) производственных фондов, необходимых при производстве строительно-монтажных работ по заменяемому варианту (K_1), участвующих в строительстве объекта, берется по данным техно-рабочего проекта и принятой организации и технологии строительства:

а) стоимость основных производственных фондов, участвующих в строительстве, определяется в соответствии с временем пребывания их на объекте:

$$K_{\text{осн}} = \frac{\sum \Phi_i t_i}{T_{\text{год}}},$$

где Φ_i — полная балансовая стоимость отдельной машины, руб.; t_i — продолжительность пребывания отдельной машины на объекте, календарные дни; $T_{\text{год}}$ — общее количество дней в году.

В примере $K_{\text{осн}} = 290$ тыс. руб.;

б) размер оборотных фондов определяется в соответствии с запрокированной организацией и технологией строительства (в примере размер оборотных фондов составляет 16% от сметной стоимости, $K_{\text{обор}} = 652 \cdot 0,16 = 104,3$ тыс. руб. Следовательно, $K_1 = K_{\text{осн}} + K_{\text{обор}} = 290 + 104,3 = 394,3$ (тыс. руб.).

Расчет 5. При производстве работ с применением СПУ стоимость среднегодовых основных производственных фондов уменьшилась и составила 274 тыс. руб., а стоимость оборотных фондов в соответствии с организацией и технологией строительства на основе применения СПУ увеличилась и составила 116,4 тыс. руб. Тогда среднегодовая стоимость основных и оборотных производственных фондов с применением СПУ равна $K_2 = 274 + 116,4 = 390,4$ (тыс. руб.).

Расчет 6. Среднегодовые дополнительные капитальные затраты, связанные с разработкой и внедрением СПУ ($K_{\text{д}}$) определяются прямым счетом и равны $K_{\text{д}} = 1,2$ тыс. руб.

Расчет 7. Эффект от дополнительного выпуска продукции на досрочно введенном в эксплуатацию объекте ($\mathcal{E}_д$) определяется как сумма чистого дохода за продукцию по формуле

$$\mathcal{E}_д = E_n \Phi (T_n - T_\phi),$$

где E_n — нормативный коэффициент эффективности для сельскохозяйственного производства (0,15 в год); Φ — сметная стоимость введенных в действие основных производственных фондов (750 тыс. руб.); T_n , T_ϕ — продолжительность строительства соответственно плановая и фактическая.

Подставляя численные значения, получим

$$\mathcal{E}_д = 0,15 \cdot 750 (2 - 1,75) = 28,1 \text{ (тыс. руб.)}.$$

Расчет 8. При различном распределении капитальных вложений по календарным периодам строительства в сравниваемых вариантах экономический эффект ($\mathcal{E}_р$) от более рационального распределения капитальных вложений определяется по формуле

$$\mathcal{E}_р = E_n (K_n T_n - K_\phi T_\phi).$$

Здесь E_n — нормативный коэффициент эффективности в строительстве (0,17 в год); K_n , K_ϕ — средний за период строительства нормативный и фактический размер капитальных вложений

$$K_n \text{ или } K_\phi = \frac{K_1 + K_2 + \dots + K_n}{n},$$

где K_1, K_2, \dots, K_n — нарастающие итоги капитальных вложений к концу каждого календарного периода за все время строительства по нормам и фактически; n — число календарных периодов за время строительства.

Распределение капитальных вложений по кварталам строительства дано в табл. 1.

Таблица 1

Кварталы	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
Заменяемый вариант (эталон), тыс. руб.	25	90	143	150	150	100	62	25
Проектные данные при применении СПУ, тыс. руб.	20	40	70	150	250	150	70	—

Подставляя численные значения K из табл. 1, получим

$$K_n = \frac{25 + 115 + 263 + 413 + 563 + 663 + 725 + 750}{8} = 439,6 \text{ (тыс. руб.)},$$

$$K_\phi = \frac{20 + 60 + 130 + 280 + 530 + 680 + 750}{7} = 350,0 \text{ (тыс. руб.)},$$

$$\mathcal{E}_р = 0,17 (439,6 \cdot 2 - 350,0 \cdot 1,75) = 45,3 \text{ (тыс. руб.)}.$$

Эффект от использования землепользователем введенных площадей в период строительства объекта (\mathcal{E}_c):

$$\mathcal{E}_c = F_n D P_1 P_2,$$

где $F_n = 1100$ га; $D = 250$ руб.; $P_1 = 0,35$; $P_2 = 0,55$.

Находим

$$\mathcal{E}_c = 1100 \cdot 0,25 \cdot 0,35 \cdot 0,55 = 52,9 \text{ (тыс. руб.)}.$$

Полный народнохозяйственный эффект по объекту

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= (C_1 - C_2 - C_3) + E_n (K_1 T_n - K_2 T_\phi - K_d T_\phi) + \mathcal{E}_d + \mathcal{E}_p + \mathcal{E}_c = \\ &= (129,8 - 113,6 - 3,5) + 0,17 (394,3 \cdot 2 - 390,4 \cdot 1,75 - 1,2 \cdot 1,75) + \\ &\quad + 28,1 + 45,3 + 52,9 = 156 \text{ (тыс. руб.)}. \end{aligned}$$

Приведенные расчеты показывают большой народнохозяйственный эффект применения СПУ в гидромелиоративном строительстве, особенно при одновременном проведении сельскохозяйственных работ.

Литература

1. Временные положения по определению экономической эффективности комплексных систем сетевого планирования и управления строительством. М., 1967.
2. К. И. Шимко и др. Сетевое планирование и управление в гидромелиоративном строительстве. (Временные методические указания по составлению сетевых графиков). Минск, 1968.
3. А. И. Алтунин. Исследование методов сетевого планирования и управления в гидромелиоративном строительстве БССР при переустройстве осушительных систем. Дисс. Минск, 1968.
4. К. И. Шимко и др. Сетевой график, как его применить в мелиоративном строительстве. «Сельское хозяйство Белоруссии», 1968, № 4.
5. К. И. Шимко и др. Сетевое планирование и управление — дело прогрессивное. «Сельское хозяйство Белоруссии», 1971, № 6.

Е. М. Левкевич, В. Н. Юхновец

НЕКОТОРЫЕ ОСОБЕННОСТИ ВЕТРОВОГО ВОЛНЕНИЯ НА ВОДОЕМАХ С МАЛЫМИ РАЗГОНАМИ ВОЛН

Развитие многочисленных отраслей народного хозяйства БССР требует рационального использования водных ресурсов республики. Важное место при этом отводится поверхностному стоку, аккумулируемому искусственными водоемами. На территории БССР насчитывается 63 водохранилища, и в текущем десятилетии намечается построить еще 17 водохранилищ с различными площадями зеркала. Кроме того, имеется значительное количество прудов рыбхозов Главного управления рыбного хозяйства при СМ БССР, а также прудов колхозных и совхозных рыбхозов. Для большинства этих водоемов характерна малая длина разгона волн (от 0,2 до 2 км). Но и на этих водоемах ветровое волнение развивается такой интенсивности, что для предупреждения разрушения верховых откосов плотин и дамб требуется предусматривать защитную одежду откосов.

В некоторых случаях инженерные мероприятия по защите откосов от разрушений, выполненные с учетом требований нормативных документов, не являются эффективными. Причина здесь в том, что недостаточно известен механизм взаимодействия нерегулярного волнения с откосами гидросооружений. Еще не раскрыты надлежащим образом условия работы этих сооружений при ветровом волнении. Это распространяется и на элементы ветрового волнения не только перед сооружением, но и на акватории.

Исследованию ветрового волнения на крупных водохранилищах посвящен ряд работ. Параметры ветрового волнения на акватории во взаимосвязи с волнообразующими факторами изучены в этих условиях относительно хорошо. Однако на водоемах с малой длиной разгона волн, где ветровому волнению в целом присущи основные черты морского волнения [1], данный вопрос исследован недостаточно из-за одновременного действия на волнение многих факторов.

Особенности волнения на малых водоемах обусловлены специфической обстановкой развития и затухания волнения. Эта специфика в основном заключается в недостаточной глубине водоема и сравнительно небольшом объеме воды, участвующей в движении при волнении, что ограничивает размеры волн. Но даже и тогда, когда по кинематическому признаку водоем является глубоководным ($H > \lambda/2$), ветровые волны на нем будут ниже волн в открытых частях морей при одинаковых волнообразующих факторах [2].

Высота волн в этих условиях есть функция

$$h = f(\omega^n D^m),$$

где D — длина разгона волн, км; показатели степени n и m — переменные и зависят от величины относительного разгона

$$d = \frac{D}{\omega^2}.$$

Величина $n \geq 1$, а величина $m < 0,5$. Для сопоставления уместно отметить, что на больших разгонах $n=2$, $m=0$ [3].

Для совсем малых разгонов тесная связь между h , ω , D не существует [4]. По-видимому, здесь имеет место неустойчивость воздушного потока при его переходе на водную поверхность. Степень воздействия ветра на поверхность воды на этом переходном участке, простирающемся по направлению действия ветра до 1 км [5], обусловлена рядом причин и неоднозначно связана со средней скоростью ветра, измеренной на фиксированной высоте. На разгонах $D < 1$ км с увеличением ω отмечается весьма заметная тенденция уменьшения безразмерных высот волн $g\bar{h}/\omega^2$ и безразмерных периодов gt/ω^2 .

Обычно характер волнения в какой-либо точке любого водоема определяется ветром, действующим над водной поверхностью в течение определенного времени. Для водоемов с большими разгонами это время может быть значительным и достигает нескольких десятков минут. Для водоемов с малыми длинами разгона волн оно определяется ветром, действующим в течение нескольких минут. Изменение параметров волн происходит почти синхронно с изменением ветра во времени. С переменой ветра по направлению в пределах 90 — 180° волны новой системы быстро вытесняют волны старой системы.

На размеры ветровых волн на малых водоемах оказывает также влияние конфигурация водоема, угол встречи воздушного потока с поверхностью воды, обусловленный наличием препятствий у береговой черты (лесные массивы, крутые обрывистые берега), гидрологические, морфометрические характеристики водоема и др.

Многообразие факторов, влияющих на элементы ветровых волн на малых водоемах, усложняет изучение этого явления. Именно поэтому не всегда возможно использовать рекомендации морской волновой гидравлики, где они имеют надежную физическую и теоретическую базу. Имеются в виду теория ветрового волнения акад. В. В. Шулейкина [6], не гарантирующая точность расчетов при малом значении отношения

$\frac{D}{\omega\tau_\infty}$ (конкретно предел не указывается); статистическая и спектральная теории [7], также не дающие точности решения при величине отношения $gD/\omega^2 < 50$.

Так как материал натуральных наблюдений отличается разнородностью, то для определения расчетных параметров волн на водоемах с малой длиной разгона волн используются только эмпирические зависимости [7].

Особенностью волнения на малых водоемах является еще и то, что формы волнующейся поверхности более правильные, чем в море [8, 9], что объясняется ограниченностью или невозможностью образования и развития волн вторичных систем и их наложения и пр. Это обуславливает более легкий режим работы сооружений в условиях воздействия волнения, развивающегося на малых разгонах. Действующими же нормативами [11] спектр волн рекомендуется единым и для моря и для водохранилищ. Естественно, что это приведет к удорожанию сооружений.

В то же время еще нет полной ясности в том, какой же действительный волновой спектр характерен для волн на малых водоемах. Это касается и крутизны волн на малых разгонах. Для водохранилищ принято считать, что наиболее высокие волны являются наиболее крутыми [9]. Вместе с тем известно [10], что на малых разгонах высоким волнам отвечают только большие значения периодов и наоборот, т.е. коэффициент корреляции между h и τ близок к единице. Последнее обстоятельство свидетельствует о том, что ветровые волны на малых разгонах обладают большей энергией, а следовательно, и большей разрушающей способностью. Это следует принимать во внимание в инженерных расчетах.

Нами изучалось ветровое волнение на относительно небольших водоемах БССР. Первым объектом исследований явилось водохранилище Осиповичской ГЭС, его приплотинная озеровидная часть (длина около 1750 м, средняя ширина 1000 м), расположенная длинной стороной по направлению с юго-востока на северо-запад. Береговая линия в этой части относительно ровная, без заливов и бухт. Левый, восточный, берег, подвергающийся действию наиболее часто повторяющихся ветров западного направления, высокий (2—6 м), обрывистый (результат происходящих процессов абразии). Правый, западный, берег более низкий, покрыт густым лесом, северная часть его занята полями, на восточном берегу (в нижней части) расположено селение.

Осенью 1971 г. на водохранилище был проведен цикл волновых наблюдений. Гидролого-гидрометеорологические условия характеризовались следующими данными: D — длина разгона волн 0,25—1,5 км; H — глубина водоема по пути разгона в среднем 3,5 м; ω_{10} — анемометрическая скорость ветра, приведенная к высоте 10 м над уровнем воды, 5—12 м/сек. Была произведена регистрация 22 серий волн.

Датчиком для записи волн послужили электроконтактные вехи с контактами через 5 см, установленные на расстоянии 16 м перед откосом земляной плотины, верховой откос которой укреплен каменной наброской. Записи осуществлялись при помощи осциллографа Н-700. В каждой серии регистрировалось от 100 до 200 волн.

В результате обработки получены спектры высоты волны, характеризующиеся модульными коэффициентами $k_h = \frac{h_i\%}{h}$. Экспериментальные

данные сравнивались с расчетными по действующим нормативам или рекомендациям.

Относительно связи h с волнообразующими факторами выявилось следующее. В простых условиях волнообразования, когда ветер дул с открытых участков берега, при расчетной длине разгона более 0,7 км опытные значения высоты волны сопоставимы с расчетными (табл. 1), которые определялись по нормативной литературе [11].

В сложных условиях волнообразования, когда воздушный поток перед тем как перейти на водную поверхность преодолевал препятствие в виде густого леса, такого соответствия между высотами волн не имеется. Опытные значения $h_{i\%}$ значительно больше расчетных, что видно из табл. 2.

Следует отметить, что эти данные относятся к области акватории, где процессу волнообразования присущи свойства переходного участка. Значительное превышение опытных высот волн над расчетными в условиях опытов (табл. 2) можно связать с наличием повышенных нормальных напряжений, действующих на водную поверхность при встрече

Таблица 1

ω_{10} , м/сек	9,1	9,1	6,8	6,8	9,1	10,7	10,7	13,0	13,0
D_p , км	1,5	1,5	1,5	1,5	0,93	0,72	0,72	0,72	0,72
$h_{1\%(p)}$, см	34	34	26,0	26,0	28	29,0	29,0	35	35
$h_{1\%(o)}$, см	35,5	38,2	26,5	29,2	29,0	31,0	31,2	33,1	35,5
$\frac{h_0 - h_p}{h_0}$ 100, %	4	11	2	11	3	6	7	6	1

Примечание. Обозначения: ω_{10} — скорость ветра на высоте 10 км над уровнем моря; D_p — расчетная длина разгона волн; $h_{1\%}$ высота волны 1%-ной обеспеченности в группе.

Таблица 2

ω_{10} , м/сек	7,5	7,5	7	7	7,2	7,2	7,2	8,5	8	10,2	10,6	6,0
D_p , км	0,35	0,35	0,29	0,29	0,29	0,29	0,29	0,35	0,35	0,35	0,6	0,6
$h_{1\%(p)}$, см	14	14	13	13	14	14	14	17	16	20	27	14
$h_{1\%(o)}$, см	26,7	27,9	24,7	25,9	25,5	27,6	28,6	29,2	29,2	34,2	33,1	22,3
$\frac{h_0 - h_p}{h_0}$ 100, %	47	50	47	50	45	49	51	42	45	42	18	37

с ней воздушного потока под углом, в результате обтекания им лесного массива, вплотную подступающего к урезу воды. В таких условиях неизвестен механизм передачи волнам ветровой энергии.

Полученный в результате обработки всех осциллограмм безразмерный спектр высоты волны значительно уже не только нормативного [11], но достаточно хорошо изученного спектра на больших водохранилищах Европейской части СССР [9]. Характеристики этих спектров приведены в табл. 3.

Таблица 3

Обеспеченность, %	1	2	5	10	20	30	40	50	70	90	95
по СН 92—60 [11]	2,52	2,28	1,91	1,69	1,38	1,21	1,05	0,93	0,69	0,37	0,23
по данным 6,9	2,1	1,8	1,6	1,5	1,3	1,2	1,1	0,97	0,8	0,6	0,5
k_h опытное	1,81	1,7	1,54	1,41	1,26	1,16	1,07	0,97	0,88	0,76	—

Данные табл. 3 качественно согласуются с результатами других авторов [8, 9]. Однако фактических материалов по спектру h и других элементов волн на малых водоемах в литературе крайне недостаточно.

Учитывая актуальность рассматриваемого физического явления, в заключение следует указать на необходимость дальнейшего всестороннего изучения ветрового волнения на малых водоемах для разработки новой или совершенствования и развития уже существующих методик по расчету параметров ветровых волн в таких условиях.

Литература

1. А. С. Судольский. Ветровое волнение на Кайракумском водохранилище. Труды ГГИ, вып. 106, 1963.
2. Ю. М. Крылов. Метод расчета высоты волн глубокого моря с учетом формы береговой черты. Труды Союзморниипроекта, вып. 8, 1965.
3. Л. Г. Сидорова, Г. Ф. Красножон. Расчет параметров ветровых волн при определении волновых нагрузок на гидротехнические сооружения. Труды океанографической комиссии, вып. 9, 1960.
4. Г. Ф. Красножон. Некоторые актуальные вопросы волновых исследований. Труды координационных совещаний по гидротехнике, вып. 61, 1970.
5. М. П. Тимофеев. Метеорологический режим водоемов. М., 1963.
6. В. В. Шулейкин. Физика моря. М., 1968.
7. Руководство по расчету параметров ветровых волн. М., 1969.
8. Л. Н. Иконникова. О разнообразии высот волн на малых разгонах. «Океанология», 1971, № 5.
9. В. С. Шайтан. Крепление земляных откосов сооружений и берегов водохранилищ. Автореф. дисс. М., 1972.
10. Г. В. Ржеплинский и др. Новый метод анализа и расчета элементов ветровых волн. Труды ГОИН, вып. 93, 1968.
11. Технические условия определения волновых воздействий на морские, речные сооружения и берега. СН 92-60. М., 1960.

М. В. Кравцов, В. В. Суворов

СВОБОДНОЕ НЕУСТАНОВИВШЕЕСЯ ПАДЕНИЕ ШАРА В ЖИДКОСТИ

Для случая свободного падения тела в вязкой среде в поле земного тяготения можно записать:

$$m \frac{dv}{dt} = G - F, \quad (1)$$

где m , v , G , F — соответственно масса, скорость движения, вес в жидкости и сила сопротивления тела; t — время падения.

Уравнение (1) имеет два решения [1]. Первое решение получается при предположении, что сила сопротивления может быть определена по формуле Стокса ($F = 3\pi\eta dv$), второе — по формуле Ньютона ($F = 0,5 \times \frac{\pi d^2}{4} \cdot \frac{\rho v^2}{2}$).

Тот факт, что при движении тела в жидкости существуют одновременно и сопротивление вязкого трения, пропорциональное скорости, и сопротивление гидродинамического давления, пропорциональное квадрату скорости, был подмечен еще И. Ньютоном. В настоящее время это легко показать на основе элементарных измерений гидравлических сопротивлений при движении тела в жидкости.

При движении тел с любой малой или большой скоростью действуют одновременно и сила трения, и сила гидродинамического давления жидкости на движущееся тело [2, 3]. Однако при различных режимах движения соотношения этих сопротивлений могут быть разными. Так, при движении тел в жидкостях с весьма малой скоростью можно говорить о том, что сила гидродинамического давления несоизмеримо мала по сравнению с силой вязкого трения. При движении же тел в жидкости с весьма большой скоростью уже сила вязкого трения становится несоизмеримо малой по сравнению с силой гидродинамического давления, хотя она и достигает больших величин.

При правильном применении формул Стокса и Ньютона требуется указывать не только на пределы применения их, но и на то приближение, с которым производится расчет. Так, если в основу расчетов положить 1-, 5-, 10- или 15%-ную точность расчета, то и пределы применения формул Стокса и Ньютона будут соответственно разными. Какую долю от общего занимает сопротивление, устанавливаемое по формулам Стокса или Ньютона при тех или иных условиях, а также пределы применения этих формул можно указать лишь при наличии общего выра-

жения, определяющего силу сопротивления движению тела в жидкости, или на основе опытных данных.

До настоящего времени пределы применения формул Стокса и Ньютона находятся на основе опытных данных, либо через критерий режима движения числа Рейнольдса $\left(\text{Re} = \frac{vd\rho}{\mu}\right)$, либо через размер тела. В первом случае нельзя установить, какой из указанных формул можно пользоваться при тех или иных условиях, вследствие того, что пределы применения формул выражены через неизвестную и искомую величину скорости движения. При использовании же размеров тела для установления пределов применения пользоваться формулами затруднительно, так как эти пределы следует определять экспериментально: размер тела не обуславливает характер режима движения. При одном и том же размере тело может двигаться с весьма малой скоростью (когда разность плотностей тела и среды мала) и большой (когда разность плотностей тела и среды велика). В первом случае будет преобладать сила вязкого трения, во втором — сила гидродинамического давления. Кроме этого, в результате экспериментальных исследований установлено существование переходной области, где сопротивление не может быть определено ни по формуле Стокса, ни по формуле Ньютона.

Для случая свободного падения шара в жидкости при числах Re до 10^4 известно общее выражение, позволяющее найти силу сопротивления [2]:

$$F = 2,85 \pi \mu d v + K \pi d \frac{\rho v^2}{2} + \frac{1}{3} \frac{\pi d^2}{4} \cdot \frac{\rho v^2}{2}, \quad (2)$$

где ρ , μ — соответственно плотность и динамический коэффициент вязкости среды;

$$K = \frac{3,68}{\sqrt[3]{\frac{\Delta \rho \rho g}{\mu^2}}}.$$

Введем обозначения $G = a$, $b = 2,85 \pi \mu d$, $c = \pi d^{5/2} (K + d/12)$ и запишем решение дифференциального уравнения (1):

$$t = m \int_0^v \frac{dv}{a - bv - cv^2},$$

$$t = \frac{m}{2 \sqrt{ac + \frac{b^2}{4}}} \ln \left(\frac{\sqrt{a + \frac{b^2}{4c}} + \sqrt{c} v + \frac{b}{2 \sqrt{c}}}{\sqrt{a + \frac{b^2}{4c}} - \sqrt{c} v - \frac{b}{2 \sqrt{c}}} \right) + \frac{m}{\sqrt{c}} C_1.$$

Принимая

$$\frac{m}{2 \sqrt{ac + \frac{b^2}{4}}} = A,$$

$$\sqrt{a + \frac{b^2}{4c}} + \frac{b}{2 \sqrt{c}} = k_1, \quad \sqrt{a + \frac{b^2}{4c}} - \frac{b}{2 \sqrt{c}} = k_2,$$

окончательный результат запишем в виде

$$t = A \ln \frac{k_1 + \sqrt{c} v}{k_2 - \sqrt{c} v} + \frac{m}{\sqrt{c}} C_1. \quad (4)$$

Граничные условия будут выполнены, если $v=0$, когда $t=0$. Следовательно, постоянная интегрирования

$$C_1 = - \frac{A}{m} \sqrt{c} \ln \frac{k_1}{k_2}.$$

Тогда

$$t = A \ln \frac{(k_1 k_2 + k_2 \sqrt{c} v)}{(k_1 k_2 - k_1 \sqrt{c} v)}. \quad (5)$$

При $v=0,99 v_k$ ($k_1 k_2 = a$, $k_2 / \sqrt{c} = v_k$) можно считать движение равномерным. Тогда время ускоренного движения шара

$$t_0 = A \left[+4,605 + \ln \left(1 + 0,99 \frac{k_2}{k_1} \right) \right]. \quad (6)$$

Соотношение между пройденным расстоянием s и временем падения t может быть получено интегрированием уравнения (5) после замены v на $\frac{ds}{dt}$:

$$t = A \ln \frac{k_1 k_2 + k_2 \sqrt{c} \frac{ds}{dt}}{k_1 k_2 - k_1 \sqrt{c} \frac{ds}{dt}}.$$

После приведения членов с ds и dt найдем

$$ds = \frac{k_1}{\sqrt{c}} \frac{\exp t/A - 1}{\frac{k_1}{k_2} \exp t/A + 1} dt.$$

Принимая $t/A = \omega$; $dt = A d\omega$, получаем

$$ds = A \frac{k_1}{\sqrt{c}} \frac{\exp \omega - 1}{\frac{k_1}{k_2} \exp \omega + 1} d\omega.$$

При замене переменной величины $\exp \omega$ на z , т. е. $dz = \exp \omega d\omega$, $d\omega = \frac{dz}{z}$, находим

$$ds = A \frac{k_1}{\sqrt{c}} \frac{z - 1}{\frac{k_1}{k_2} z + 1} \frac{dz}{z}. \quad (7)$$

Интегрируя (7), получим

$$s = \frac{Ak_1}{\sqrt{c}} \left(\int_0^z \frac{dz}{\frac{k_1}{k_2} z - 1} - \int_0^z \frac{dz}{\left(\frac{k_1}{k_2} z + 1\right) z} \right) =$$

$$= \frac{Ak_1}{\sqrt{c}} \left[\frac{k_2}{k_1} \ln \left(\frac{k_1}{k_2} z + 1 \right) + \ln \frac{\left(\frac{k_1}{k_2} z + 1\right)}{z} + C_2 \right].$$

Граничные условия будут выполнены, если $s=0$, когда $t=0$ ($z=1$). Тогда

$$C_2 = - \left(\frac{k_2}{k_1} + 1 \right) \ln \left(\frac{k_1}{k_2} + 1 \right).$$

После всех преобразований и подстановок окончательно получим

$$s = \frac{Ak_1}{\sqrt{c}} \left[\frac{k_2}{k_1} \ln \frac{k_1 \exp t/A + k_2}{k_1 + k_2} + \ln \frac{k_1 \exp t/A + k_2}{\exp t/A (k_1 + k_2)} \right]. \quad (8)$$

Следует отметить, что из общих уравнений (5) и (8) получаются как частные случаи решения с использованием формул Стокса ($c=0$, $b=3\pi\mu d$) и Ньютона ($b=0$, $c = \frac{\pi d^2 \rho}{16}$).

Для проверки соотношения (1) нами проведены опыты по исследованию ускоренного участка движения металлических ($\rho_1=7,8$) шаров диаметром 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,674 см в воде при температуре 288°K ($\mu = 0,01056$ пуаз, $\rho=0,9986$ г/см³). Опыты проводились в сосуде с поперечным сечением 20×20 см и высотой 160 см. Пуск шаров осуществлялся с помощью электромагнита.

Пройденный шаром путь к заданному моменту времени фиксировался с помощью киносъемки со скоростью 64 кадра в 1 сек. Внутри сосуда помещалась масштабная линейка, по которой производился отсчет пути, пройденного шаром. Время прохождения шаром заданного участка пути определялось по числу кадров.

Сопоставление расчетных и опытных данных для различных диаметров шаров и для заданных условий приведено в табл. 1.

Таблица 1

$d, \text{см}$	$t_0, \text{сек}$ (6)	$t_0, \text{сек}$ (опыт)	$S_0, \text{см}$ (8)	$S_0, \text{см}$ (опыт)
0,200	0,178	0,174	7,6	6,1
0,300	0,235	0,249	13,1	13,8
0,400	0,283	0,292	19,1	18,8
0,500	0,326	0,312	25,5	25,6
0,674	0,384	0,396	34,1	35,1

Литература

1. *А. М. Годен*. Основы обогащения полезных ископаемых. М., 1946.
2. *М. В. Кравцов*. Сопротивление свободному установившемуся движению сферы в вязкой среде. ИФЖ, 1968, № 3.
3. *М. В. Кравцов, В. В. Суворов*. К вопросу седиментации частиц сферической формы. Сб. «Водное хозяйство Белоруссии». Вып. 2. Минск, 1971.

И. Г. Лазаревич, В. И. Кузменков, И. П. Вопнярский

К ВОПРОСУ О РАЗДЕЛЬНЫХ СТЕНКАХ НА БЫСТРОТОКАХ

На широких быстротоках входная часть делится быками на пролеты. В некоторых случаях в пределах верхней части длины быстротока устраиваются отдельные пролеты, являющиеся продолжением быков. Расчет сопряжения в нижнем бьефе быстротока обычно выполняется при условии работы всех пролетов на пропуск расчетного расхода. В подобных случаях имеет место сопряжение потоков в условиях плоской задачи. В процессе эксплуатации таких сооружений возможен пропуск воды через отдельные пролеты. Сопряжение потока в нижнем бьефе при этом осуществляется в условиях пространственной задачи. Пространственное сопряжение бьефов может сопровождаться образованием сбойного течения. Интенсивность сбойного течения зависит от характера распределения удельных расходов в сечении перед гидравлическим прыжком.

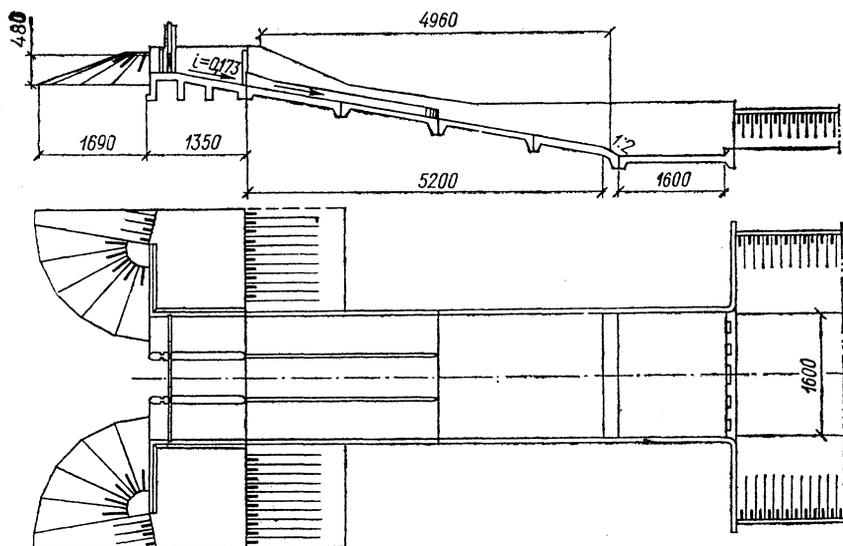


Рис. 1. План и продольный разрез по оси быстротока.

Для изучения влияния отдельных стенок на гидравлический режим в пределах водоската и в нижнем бьефе нами были проведены лабораторные исследования на модели водосброса, выполненного по типу быстротока, запроектированного институтом «Белгипроводхоз». Общая схема и основные размеры водосброса представлены на рис. 1. Модель,

установленная в лотке шириной 1,55 м и длиной 9,0 м, была выполнена в масштабе 1:25 и включала в верхнем бьефе сопрягающие конуса и участок водохранилища с горизонтальным дном длиной 18 м, а в нижнем бьефе — участок отводящего канала длиной 90 м.

Опыты проводились при наличии и отсутствии на водоскате раздельных стенок и различной комбинации работы отдельных пролетов. Глубина нижнего бьефа устанавливалась в соответствии с пропускаемым расходом по кривой расходов.

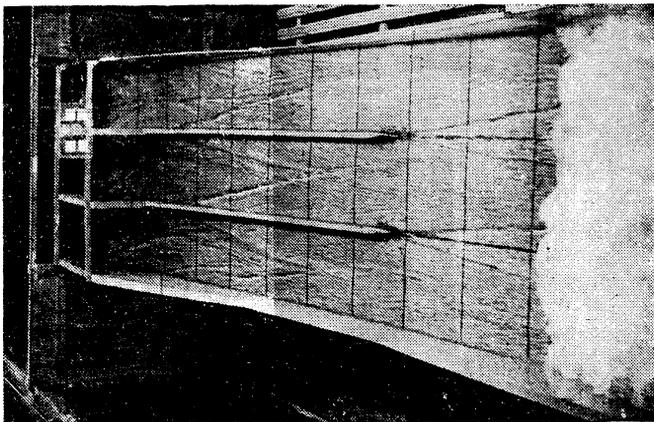


Рис. 2. Движение потока на быстротоке.

Установлено, что при полностью открытых пролетах и различных напорах вследствие сжатия потока при входе в оголовок быстротока в верхней части водоската наблюдаются линии повышения, образующие ромбовидную фигуру в плане. На последующем участке водоската происходит выравнивание глубин в поперечном сечении, и только от нижней кромки раздельных стенок образуются линии повышения, расходящиеся в плане. Гидравлический прыжок начинался в нижней части водоската; длина прыжка увеличивалась с увеличением напора.

Общий характер движения потока на водоскате и в водобойном колодце для расчетного напора $H=2,5$ м характеризуется рис. 2. При работе трех пролетов с одинаковым открытием их и при наличии раздельных стенок также имеет место симметричное движение потока в пределах водоската и водобойного колодца.

Однако при различной комбинации работы одного или двух пролетов (как при полном их открытии, так и при маневрировании затворами) раздельные стенки препятствуют растеканию потока, в результате чего удельный расход перед прыжком различен. Это приводит к образованию косых прыжков, за которыми наблюдается сбивность течения значительной интенсивности, сопровождающаяся образованием водоворотов в водобойном колодце и на рисберме. На рис. 3 показан характер движения потока на водоскате и в водобойном колодце при открытии среднего пролета и напоре $H=2,5$ м. Таким образом, наличие раздельных стенок на водоскате не допускает пропуска расходов неполным водосливным фронтом.

В случае отсутствия раздельных стенок и работе одного или двух пролетов наблюдалось растекание потока на водоскате. При расчетном

напоре и различном открытии затвора среднего пролета сопряжение потока происходило с гидравлическим прыжком, надвинутым на водоскат. В этих опытах фронт прыжка располагался нормально к оси симметрии потока.

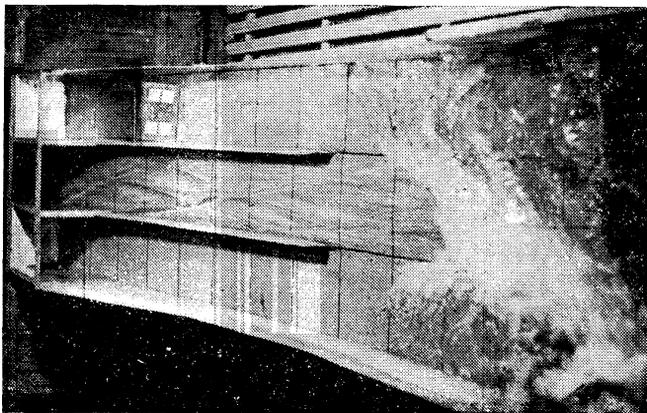


Рис. 3. Движение потока на быстротоке при открытии среднего пролета и наличии отдельных стенок.

На рис. 4 представлен общий характер движения потока при полном открытии среднего пролета. Изменение глубины на участке свободного растекания потока в пределах водоската для различных попереч-

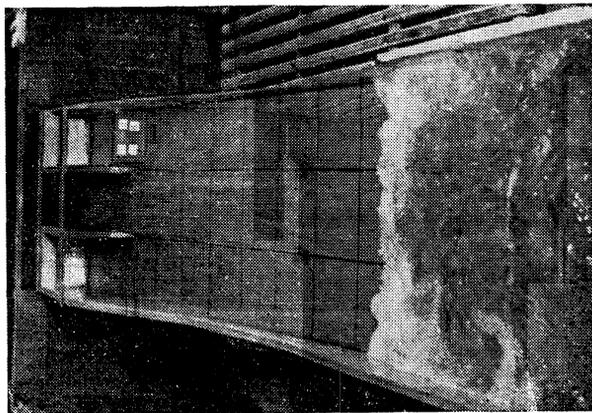


Рис. 4. Движение потока на быстротоке при полном открытии среднего пролета и отсутствии отдельных стенок.

ников в рассмотренном опыте представлено на рис. 5. Здесь же приведена эпюра удельных расходов в сечении перед прыжком. Удельные расходы вычислялись исходя из замеренных в опыте одноточечным способом скоростей на каждой вертикали. В табл. 1 приводятся значения скоростей, глубин и удельных расходов на различных вертикалях в сечении перед прыжком, отстоящем от начала водоската на расстоянии 45,7 м.

Таблица 1

	Расстояние от оси, м	Средняя скорость v , м/сек	Глубина потока h , м	Удельный расход, q , м ² /сек
справа	7,75	8,25	0,37	3,05
	6,50	9,85	0,33	3,26
	5,25	10,05	0,16	1,61
	4,00	9,65	0,15	1,45
	2,75	10,55	0,18	1,90
Ось	1,50	10,3	0,16	1,65
		10,1	0,12	1,21
слева	1,50	10,25	0,18	1,84
	2,75	10,95	0,15	1,64
	4,00	9,25	0,14	1,30
	5,25	9,9	0,11	1,09
	6,50	9,3	0,31	2,88
	7,75	8,2	0,32	2,63

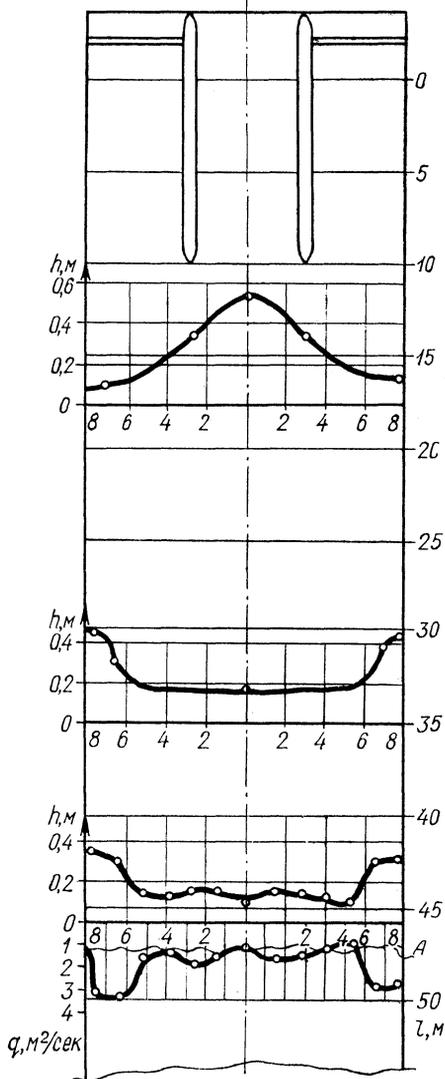


Рис. 5. Распределение глубин и удельных расходов на быстротоке при работе среднего пролета и отсутствии раздельных стенок: А — фронт гидравлического прыжка.

Как видно, в сечении перед прыжком на участках, примыкающих к боковым стенкам быстротока, наблюдаются большие глубины потока, чем в средней части. Увеличение глубины на участках рассматриваемого сечения сопровождается соответственным увеличением удельных расходов.

Неравномерность распределения удельных расходов перед прыжком обуславливает характер движения потока за прыжком. В рассматриваемом опыте в водобойном колодце на участках, прилегающих к боковым стенкам, имели место более значительные скорости, а в средней части наблюдалась застойная область, в которой возникали водовороты слабой интенсивности с периодически изменяющимся направлением. На выходе из водобойного колодца скорости практически выравнялись. На начальном участке отводящего канала наибольшие скорости наблюдались по оси канала.

В случае работы двух крайних пролетов по схеме истечения из-под щита при открытии затворов на 0,5 м (0,2 Н) и 1,0 м (0,4 Н) в нижнем

бьефе сбойность течения практически отсутствовала, а при полном их открытии наблюдалась сбойность значительной интенсивности. Это свидетельствует о том, что увеличение расхода двух крайних пролетов приводит к более неравномерному распределению удельных расходов перед прыжком.

При работе одного крайнего или двух смежных пролетов, включая и маневрирование их затворами, сопряжение потока в конце водоската осуществлялось посредством косых гидравлических прыжков, что приводило к сбойности течения в нижнем бьефе. Интенсивность сбойности возрастала с увеличением расхода.

Растекание в пределах водоската приводит к уменьшению глубины потока и удельного расхода. Так, при работе трех пролетов и расчетном напоре глубина потока перед прыжком составляла 0,43 м, а удельный расход 5,75 м²/сек, тогда как при работе среднего пролета (табл. 1) по оси симметрии потока эти величины соответственно равнялись 0,12 м и 1,21 м²/сек. Несмотря на уменьшение удельного расхода при растекании потока, скорость перед прыжком уменьшается незначительно. Так, в первом случае скорость составляет 13,4 м/сек, а во втором — 10,1 м/сек.

Выводы

1. Раздельные стенки на водоскате не оказывают влияния на характер сопряжения потока в нижнем бьефе при одинаковом открытии всех пролетов.
2. При наличии раздельных стенок работа отдельными пролетами, включая маневрирование затворами, недопустима, так как приводит к явно выраженному сбойному течению в нижнем бьефе.
3. В случае отсутствия раздельных стенок на водоскате сбойности течения в нижнем бьефе практически не существует во всех диапазонах открытия среднего пролета или двух крайних при одинаковом открытии их затворов на величину не более 0,4 Н. При полном же открытии двух крайних пролетов в нижнем бьефе имеет место значительная сбойность течения.
4. Пропуск расходов через один крайний или два смежных пролета без раздельных стенок на водоскате не может быть рекомендован в связи с возникновением сбойного течения в нижнем бьефе.

И. В. Минаев

ОДИН СПОСОБ ПОДБОРА ЭМПИРИЧЕСКИХ ФОРМУЛ К ДАННЫМ ЭКСПЕРИМЕНТА

Представление данных эксперимента в виде формул наряду с табличным и графическим часто позволяет выявить многие особенности изучаемой зависимости двух величин. Иногда, однако, формульное представление дает наибольшую информацию об изучаемом явлении, поскольку используется математический аппарат, например дифференцирование и интегрирование.

Подбор эмпирических формул включает в основном две операции: предположение вида формулы (прямолинейная, квадратичная, кубическая, гиперболическая и т. д.) и подбор коэффициентов при неизвестных. Нами предлагается способ подбора коэффициентов к параболической зависимости, которые вычисляются последовательно один за другим (метод последовательных вычислений) без решения системы линейных уравнений, например в методе наименьших квадратов [1] или методе равных сумм [2]. Преимущество такого вычисления коэффициентов заключается не только в простоте, но и в большей точности.

Рассмотрим многочлен третьей степени

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \quad (1)$$

с действительными коэффициентами и целыми положительными степенями неизвестной. Неизвестная величина x может принимать любые значения на числовой оси, но тогда график функции (1) будет пересекать ось абсцисс один (в случае одного действительного корня) или три раза (в случае трех действительных корней). Мы будем рассматривать только часть графика функции (1), причем возрастающую ветвь ($a_3 > 0$).

Изменение величины x приводится к безразмерной шкале, т. е. x принимает значения на отрезке $[0,1—0,9]$ с шагом 0,1 (девять узлов интерполяции [3]).

Рассмотрим следующий многочлен третьей степени с числовыми коэффициентами на отрезке $[0,1—0,9]$:

$$y_1 = 0,085 + 1,07x + 2,3x^2 + x^3 \quad (2)$$

Построим график функции (2) и следующих многочленов:

$$y_{10} = 0,085 + 0x, \quad (3)$$

$$y_{11} = 0,085 + 1,07x, \quad (4)$$

$$y_{12} = 0,085 + 1,07x + 2,3x^2, \quad (5)$$

полученных последовательным присоединением членов многочлена (2) (рис. 1). Значения y_i ($i=0,1-0,9$) многочленов (2) — (5) приведены в табл. 1.

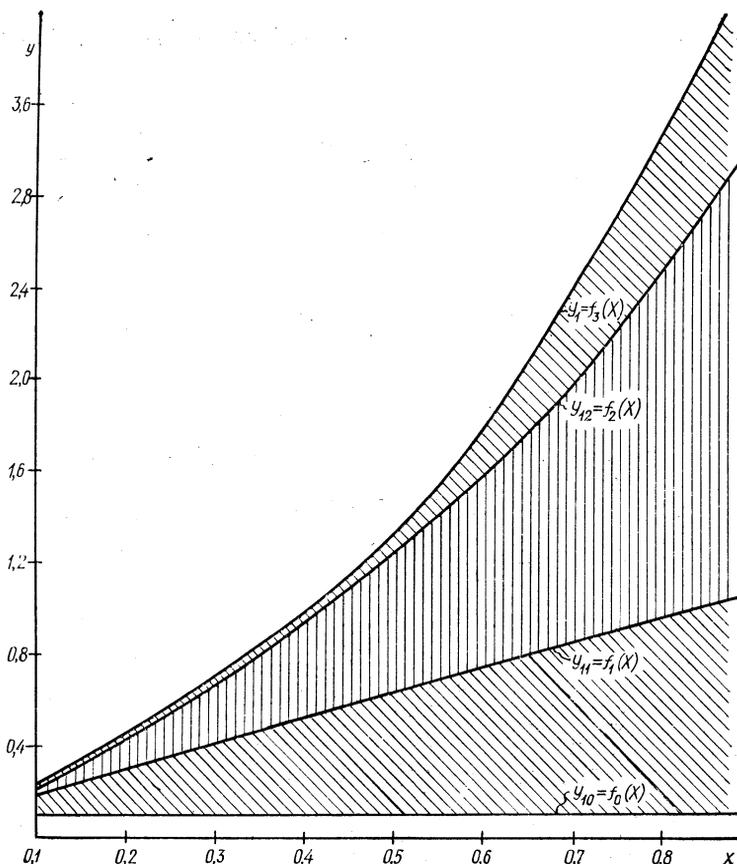


Рис. 1. График кубического многочлена.

Таблица 1

x	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
y_1	0,216	0,399	0,640	0,945	1,320	1,771	2,304	2,925	3,640
y_{11}	0,192	0,299	0,406	0,513	0,620	0,727	0,834	0,941	1,048
y_{12}	0,215	0,391	0,613	0,881	1,195	1,555	1,961	2,413	2,911

Рассмотрим часть графика многочлена (2) на узлах интерполяции [0,6—0,9]. Поскольку многочлен (2) третьей степени, то третья раздельная разность ординат графика $y_1=f_3(x)$ на указанных узлах интерполяции не равна нулю [3]:

$$\Delta y_{6,7,8,9} = y_6 - 3y_7 + 3y_8 - y_9 \neq 0, \quad (6)$$

где индексы указывают номера узлов интерполяции.

Но для графика $y_{12}=F_2(x)$ третья разделенная разность уже равна нулю. Поэтому комбинация ординат (6) обратится в нуль, если от каждой ординаты в выражении (6) вычтеть член $(a_3 x_i^3)$ ($x_i=0,6-0,9$):

$$(y_6 - a_3 0,6^3) - 3(y_7 - a_3 0,7^3) + 3(y_8 - a_3 0,8^3) - (y_9 - a_3 0,9^3) = 0. \quad (7)$$

Отсюда найдем значение a_3 :

$$a_3 = \frac{y_6 - 3y_7 + 3y_8 - y_9}{(0,6^3 - 3 \cdot 0,7^3 + 3 \cdot 0,8^3 - 0,9^3)} = \frac{\Delta y_i^3}{-0,006}. \quad (8)$$

Действительно, подставив в формулу (8) ординаты $y_1=f_3(x)$ из табл. 1, получим

$$a_3 = \frac{1,771 - 3 \cdot 2,304 + 3 \cdot 2,925 - 3,64}{-0,006} = +1.$$

Вычислим далее ординаты y_{12} многочлена (5):

$$y_{26} = y_6 - a_3 0,6^3 = 1,771 - 1 \cdot 0,216 = 1,555,$$

$$y_{27} = y_7 - a_3 0,7^3 = 2,304 - 1 \cdot 0,343 = 1,961,$$

$$y_{28} = y_8 - a_3 0,8^3 = 2,925 - 1 \cdot 0,512 = 2,413,$$

$$y_{29} = y_9 - a_3 0,9^3 = 3,640 - 1 \cdot 0,729 = 2,911.$$

Для полученных ординат (в полном соответствии с табл. 1) разделенная разность третьего порядка (6) равна нулю, но уже вторая нулю не равна:

$$\Delta y_{7,8,9}^{(2)} = y_{37} - 2y_{38} + y_{39} = +0,046. \quad (9)$$

Для того чтобы обратить вторую разделенную разность (9) в нуль, вычтем из каждой ординаты y_{3i} ($i=7-9$) величину $(a_2 x_i^2)$:

$$(y_{37} - a_2 0,7^2) - 2(y_{38} - a_2 0,8^2) + (y_{39} - a_2 0,9^2) = 0,$$

$$a_2 = \frac{\Delta y_{7,8,9}^{(2)}}{0,02}. \quad (10)$$

Для ординат y_{12} коэффициент a_2 по формуле (10) равен

$$a_2 = \frac{0,046}{0,02} = 2,3.$$

Аналогично определим коэффициенты a_1 и a_0 :

$$y_{28} = y_{38} - a_2 0,8^2 = 2,413 - 1,472 = 0,941,$$

$$y_{29} = y_{39} - a_2 0,9^2 = 2,911 - 1,863 = 1,048,$$

$$(y_{29} - a_1 0,9) - (y_{28} - a_1 0,8) = 0,$$

$$a_1 = \frac{y_{29} - y_{28}}{0,9 - 0,8} = \frac{\Delta y_{9,8}^{(1)}}{0,1} \dots \quad (11)$$

$$a_0 = y_{29} - a_1 0,9 = 1,048 - \frac{1,048 - 0,941}{0,1} \cdot 0,9 = 0,085. \quad (12)$$

Таким образом, все коэффициенты многочлена третьей степени вычислены без решения системы линейных уравнений четвертой степени. Из изложенного последовательность вычислений достаточно ясна: вначале вычисляется коэффициент при неизвестной высшей степени, затем находятся ординаты многочлена, не содержащего члена с неизвестной в наибольшей степени, и вычисления повторяются.

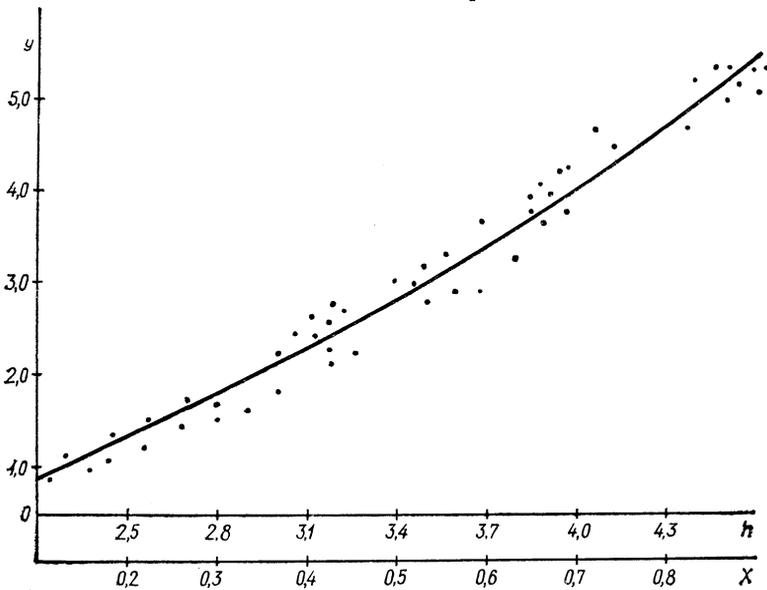


Рис. 2. Кривая экспериментальных данных.

Рассмотрим пример. Экспериментальные данные зависимости величины y от h нанесены на координатную сетку. Кривая, осредняющая экспериментальные точки, проведена по лекалу (рис. 2). Предполагается, что эта кривая — часть графика квадратичной параболы

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2, \quad (13)$$

где x — безразмерная переменная, связанная с переменной h соотношением

$$x = \frac{h - (h_1 - h_{ш})}{10 \cdot h_{ш}}, \quad (14)$$

где $h_1 = 2,2$ — начальная величина переменной на рассматриваемом отрезке; $h_{ш} = 0,3$ — шаг изменения переменной (той же размерности, что и h).

Следует отметить, что переход от размерной шкалы к безразмерной всегда возможен. Безразмерная шкала позволяет унифицировать подсчет коэффициентов эмпирической формулы.

В отличие от метода наименьших квадратов в рассматриваемом случае проверяется степень и подбираются коэффициенты формулы, график которой вычерчивается по эмпирическим данным приближенно.

В связи с этим проверим функцию (13) на различных участках. Вначале возьмем участок, включающий узлы интерполяции [0,6—0,9], а затем [0,1—0,4]. Ординаты (y) кривой, снятые с графика, приведены в табл. 2.

Таблица 2

x	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
y	0,79	1,19	1,64	2,13	2,75	3,35	4,0	4,69	5,43
\bar{y}	0,84	1,24	1,69	2,18	2,92	3,32	3,96	4,66	5,40

Получаем

$$\Delta y_{6,7,8,9}^{(3)} = y_6 - 3y_7 + 3y_8 - y_9 = 3,35 - 3 \cdot 4,0 + 3 \cdot 4,69 - 5,43 = -0,01.$$

Абсолютная величина разделенной разности не является показателем правильного предположения степени эмпирической формулы. Однако если брать более высокие порядки разностей, то они должны стремиться к нулю. В частности, мы предполагаем, что третья разделенная разность близка к нулю. Тогда коэффициент a_2 из (12) найдем, обращая в нуль вторую разделенную разность:

$$(y_7 - a_2 \cdot 0,7^2) - 2(y_8 - a_2 \cdot 0,8^2) + (y_9 - a_2 \cdot 0,9^2) = 0,$$

$$a_2 = \frac{\Delta y_{7,8,9}^{(2)}}{0,02} = \frac{0,05}{0,02} = 2,5,$$

$$y_{19} = y_9 - 2,5 \cdot 0,9^2 = 5,43 - 2,025 = 3,405,$$

$$y_{17} = y_7 - 2,5 \cdot 0,7^2 = 4,0 - 1,225 = 2,775,$$

$$\Delta y_{9,7}^{(1)} = (y_{19} - a_1 \cdot 0,9) - (y_{17} - a_1 \cdot 0,7) = 0,$$

$$a_1 = \frac{y_{19} - y_{17}}{0,2} = \frac{3,405 - 2,775}{0,2} = 3,15,$$

$$a_0 = y_{19} - a_1 \cdot 0,9 = 0,57.$$

Таким образом, коэффициенты в уравнении (13) на узлах интерполяции [0,7—0,9] равны: $a_2=2,5$, $a_1=3,15$, $a_0=0,57$. Производя аналогичные вычисления для участка с узлами интерполяции [0,1—0,3], получаем следующие коэффициенты для уравнения (13): $a_2=2,5$, $a_1=3,25$, $a_0=0,44$.

Учитывая малую разность в значениях коэффициентов, осредняем их и принимаем для эмпирической формулы (13): $a_2=2,5$, $a_1=3,2$, $a_0=0,5$. В табл. 2 приведены значения \bar{y} , вычисленные по уравнению

$$\bar{y} = 0,5 + 3,2x + 2,5x^2. \quad (15)$$

Если бы на различных участках кривой были подобраны две различные функции, например линейная и квадратичная, то приближенную эмпири-

ческую формулу можно получить следующим образом. Пусть на первом участке [0,1—0,4] получена линейная зависимость

$$\bar{y}_1 = b_0 + b_1x,$$

а на втором [0,5—0,9] квадратичная

$$\bar{y}_2 = a_0 + a_1x + a_2x^2.$$

Представим их в виде

$$\bar{y}_1 = b_0 \left(1 + \frac{b_1}{b_0} x \right) = b_0 \bar{f}_1(x),$$

$$y_2 = a_0 \left(1 + \frac{a_1}{a_0} x + \frac{a_2}{a_0} x^2 \right) = a_0 \bar{f}(x).$$

Эмпирическую формулу для такой функции (назовем ее состыкованной) можно получить, используя $\bar{f}_1(x)$ и $\bar{f}_2(x)$, для чего напишем сумму

$$\bar{y} = A_1 \bar{f}_1(x) + A_2 \bar{f}(x). \quad (16)$$

Коэффициенты A_1 и A_2 находятся с помощью метода равных сумм [2].

При подсчете a_0 по (12) коэффициент a_1 заменен его выражением через разделенную разность; подобную замену можно произвести и для других коэффициентов. Начнем с общего выражения для старшего коэффициента многочлена (1).

Из равенства (7) получим

$$(y_6 - 3y_7 + 3y_8 - y_9) - a_3(0,6^3 - 3 \cdot 0,7^3 + 3 \cdot 0,8^3 - 0,9^3) = 0. \quad (17)$$

Вводя обозначения, запишем для коэффициента a_3 :

$$a_3 = \frac{\Delta y_{6,7,8,9}^{(3)}}{\Delta^3 x_{6,7,8,9}^{(3)}}. \quad (18)$$

Показатель при Δ означает степень, в которую возводятся значения узлов интерполяции, указанные индексами при x .

Вторую разделенную разность (9) представим в виде

$$\begin{aligned} & [(y_7 - a_3 0,7^3) - a_2 0,7^2 - 2[(y_8 - a_3 0,8^3) - a_2 0,8^2] + \\ & + [(y_9 - a_3 0,9^3) - a_2 0,9^2] = 0, \end{aligned} \quad (19)$$

$$\Delta y_{7,8,9}^{(2)} - a_3 \Delta^3 x_{7,8,9}^{(2)} - a_2 \Delta^2 x_{7,8,9}^{(2)} = 0. \quad (20)$$

Заменив в (18) a_3 его значением по (17), получим

$$a_2 = \frac{\Delta y_{7,8,9}^{(2)}}{\Delta^2 x_{7,8,9}^{(2)}} - \frac{\Delta y_{6,7,8,9}^{(3)}}{\Delta^3 x_{6,7,8,9}^{(3)}} \cdot \frac{\Delta^3 x_{7,8,9}^{(2)}}{\Delta^2 x_{7,8,9}^{(2)}}. \quad (21)$$

Для коэффициента a_1 формула, аналогичная (21), будет получена из выражения для первой разделенной разности:

$$\begin{aligned} & \{[(x_9 - a_3 0,9^3) - a_2 0,9^2] - a_1 0,9\} - \{[(y_8 - a_3 0,8^3) - \\ & - a_2 0,8^2] - a_1 0,8\} = 0. \end{aligned} \quad (22)$$

Общие выражения для коэффициентов a_2 и a_1 здесь не приводятся из-за их громоздкости. Поскольку разности различных порядков для узлов интерполяции легко вычислить, используя безразмерную шкалу (в этом сказывается преимущество перехода к безразмерной шкале), то коэффициенты кубического многочлена представляются через разделенные разности своих ординат:

$$\left. \begin{aligned} a_3 &= (-166,66) \Delta y_{6,7,8,9}^{(3)}, \\ a_2 &= 50 \Delta y_{7,8,9}^{(2)} + 400 \Delta y_{6,7,8,9}^{(3)}, \\ a_1 &= 10 \Delta y_{9,8}^{(1)} - 85 \Delta y_{7,8,9}^{(2)} - 318,33 \Delta y_{6,7,8,9}^{(3)}, \\ a_0 &= \Delta y_8^{(0)} - 9 \Delta y_{9,8}^{(1)} + 36 \Delta y_{7,8,9}^{(2)} + 84 \Delta y_{6,7,8,9}^{(3)}. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

В выражениях для коэффициентов по (23) входят разделенные разности различных порядков, что приводит к необходимости их вычисления. Однако эти выражения можно упростить, представив все коэффициенты многочлена в виде

$$a_i = k_1(y_6) + k_2(-3y_7) + k_3(3y_8) + k_4(-y_9), \quad (24)$$

где k_i — коэффициенты, зависящие от выбранных узлов интерполяции.

Для кубического многочлена коэффициенты можно определить по следующим формулам для узлов интерполяции [0,6—0,9]:

$$\left. \begin{aligned} a_3 &= (-166,66)(y_6 - 3y_7 + 3y_8 - y_9), \\ a_2 &= 400(+y_6) + 416,66(-3y_7) + 366,66(+3y_8) + 350(-y_9), \\ a_1 &= -[318,33(+y_6) + 290(-3y_7) + 265(+3y_8) + 243,33(-y_9)], \\ a_0 &= 84(+y_6) + 72(-3y_7) + 63(+3y_8) + 56(-y_9). \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Приведем также формулы для вычисления коэффициентов квадратного многочлена и многочлена четвертой степени.

Для квадратного многочлена (13) на узлах интерполяции [0,7—0,9] формулы для коэффициентов имеют вид

$$\left. \begin{aligned} a_2 &= 50(y_7 - 2y_8 + y_9), \\ a_1 &= -[85(+y_7) + 80(-2y_8) + 75(+y_9)], \\ a_0 &= 36(+y_7) + 31,5(-2y_8) + 28(+y_9). \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Для многочлена четвертой степени

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$$

на узлах интерполяции [0,5—0,9] формулы для коэффициентов имеют вид

$$\begin{aligned}
 a_4 &= 416,66(y_5 - 4y_6 + 6y_7 - 4y_8 + y_9), \\
 a_3 &= -[1250(+y_5) + 1208,33(-4y_6) + 1166,66(+6y_7) + \\
 &\quad + 1125(-4y_8) - 1083,33(+y_9)], \\
 a_2 &= 1770,833(+y_5) + 1658,33(-4y_6) + 1554,166(+6y_7) + \\
 &\quad + 1458,33(-4y_8) + 1370,833(+y_9), \\
 a_1 &= -[1325(+y_5) + 1224,166(-4y_6) + 1137,5(+6y_7) + \\
 &\quad + 1062,5(-4y_8) + 996,66(+y_9)], \\
 a_0 &= 396(+y_5) + 366(-4y_6) + 342(+6y_7) + 321,75(-4y_8) + \\
 &\quad + 304(+y_9).
 \end{aligned} \tag{27}$$

Для других узлов интерполяции коэффициенты в формулах (25), (26), (27) изменятся, однако, изменяя масштабы оси абсцисс, можно воспользоваться и приведенными формулами для достаточно большого диапазона изменения переменной.

Если подставить в формулу для коэффициента a_1 из (26) значения ординат из табл. 2, то получим $a=3,15$, т. е. то же значение, которое было ранее получено с помощью разделенных разностей различных порядков.

Полученные формулы позволяют получить коэффициенты с большей точностью, что не всегда возможно при решении систем линейных уравнений. Точность подбора эмпирической формулы оценивается вычислением коэффициента корреляции или коррелятивного отношения.

Если степень эмпирической формулы предположена большей, чем необходимо, то старший коэффициент (a_3 в (25), a_2 в (26), a_4 в (27)) будет равен нулю. В этом случае необходимо предположить меньшую степень и вычислить все коэффициенты.

Литература

1. Б. М. Шиголов. Математическая обработка наблюдений. М., 1962.
2. П. В. Мелентьев. Приближенные вычисления. М., 1962.
3. А. О. Гельфонд. Исчисление конечных разностей. М., 1967.

РЕФЕРАТЫ СТАТЕЙ, ПОМЕЩЕННЫХ В СБОРНИКЕ**УДК 626.81**

Использование ресурсов поверхностных вод при регулировании почвенной влаги осушаемых земель БССР. Шебеко В. Ф. «Водное хозяйство Белоруссии», 1973, вып. 3, с. 5—13.

Сделана оценка ресурсов речного стока территории БССР в целях использования воды для орошения сельскохозяйственных угодий в маловодные годы разной повторяемости. Определены дефициты почвенной влаги в засушливые годы и показана возможность обеспечения оптимального увлажнения на сельскохозяйственных землях. — Табл. 4.

УДК 351.792

Оценка водного режима осушенных болот в весенний период. Закржевский П. И. «Водное хозяйство Белоруссии», 1973, вып. 3, с. 14—21.

Предложена методика оценки длительности и вероятности затопления в половодье осушенных земель.

Разработан способ расчета режима уровня грунтовых вод после схода полых вод, учитывающий неустановившийся режим движения грунтовых вод. — Ил. 3. Библ. 4.

УДК 613.37

Применение критериев различия для анализа однородности летних и зимних минимумов рек Полесской низменности. Артемьева Н. П., Лившиц И. М. «Водное хозяйство Белоруссии», 1973, вып. 3, с. 22—31.

С помощью критерия различия Колмогорова—Смирнова проведен анализ однородности расходов летней и зимней межени (суточных и среднемесячных) для 40 рек Полесской низменности. Установлено, что большинство исследованных выборок однородны, корреляционно независимы. Объединение их в один статистический ряд приводит к увеличению объема информации и, следовательно, к уточнению параметров кривых распределения. — Табл. 5. Библ. 8.

УДК 551.482.2.518.3

Номографический метод построения кривой распределения С. Н. Крицкого и М. Ф. Менкеля по способу Г. А. Алексева. Хейнман В. Б. «Водное хозяйство Белоруссии», 1973, вып. 3, с. 32—37.

Приведен разработанный автором номографический метод построения кривой распределения С. Н. Крицкого и М. Ф. Менкеля по способу Г. А. Алексева. Предлагаемый метод дает возможность заменить расчет по формулам и таблицам двумя номограммами.

При построении номограмм использованы методы, разработанные Г. С. Хованским. — Ил. 3. Табл. 3. Библ. 3.

УДК 351.792

Гидролого-климатическое районирование территории Белорусской ССР. Голченко М. Г. «Водное хозяйство Белоруссии», 1973, вып. 3, с. 38—42.

На основании анализа характеристик тепло- и влагообеспеченности на территории Белоруссии выделены три гидролого-климатические зоны. Дается краткая характеристика зон. Указываются также оросительные нормы для картофеля, капусты и клевера в выделенных зонах. — Ил. 1. Табл. 1. Библ. 7.

УДК 631.432:626.86

Определение динамики грунтовых вод на осушаемых землях при взаимно перпендикулярном расположении водопроводящей и регулирующей сети. Брусиловский Ш. И., Писецкий Г. А. «Водное хозяйство Белоруссии», 1973, вып. 3, с. 43—54.

Дается решение задачи по прогнозу водного режима на мелиорируемых землях при взаимно перпендикулярном расположении водопроводящей и регулирующей сети. Учет осушительного действия водопроводящей сети позволяет в ряде случаев значительно увеличить расстояние между осушительными каналами и дренами. — Ил. 2. Табл. 1. Библ. 8.

УДК 628.367

Метод аппроксимации и его применение в технико-экономическом расчете дренажей. Минаев И. В. «Водное хозяйство Белоруссии», 1973, вып. 3, с. 55—67.

Рассмотрен метод аппроксимации функций, входящих в функцию цели, для расчета параметров дренажа. В результате аппроксимации отдельных функций находится аппроксимирующая функция для функций цели. Дается пример расчета. — Ил. 1. Табл. 5. Библ. 7.

УДК 627.83

О турбулентных пульсациях скоростей на границе вязкого подслоя в плоском равномерном потоке. Коваленко Э. П. «Водное хозяйство Белоруссии», 1973, вып. 3, с. 68—71.

Предлагается расчетная модель определения пульсационных скоростей на границе вязкого подслоя в плоском равномерном потоке исходя из наличия в потоке вихревых сил.

Значения пульсационных скоростей, полученные по предлагаемой методике, хорошо согласуются с экспериментальными данными. — Ил. 1. Библ. 4.

УДК 532.543:627.833

Влияние условий подхода потока к водоприемному отверстию на его работу. Козлов Д. А. «Водное хозяйство Белоруссии», 1973, вып. 3, с. 72—75.

Рассматривается схема истечения жидкости из-под щита в постановке, позволяющей учесть влияние направления потока при подходе к щиту, а также стенок, ограничивающих течение. Задача решается теоретически с использованием методов теории функций комплексного переменного. Полученное решение позволяет вычислить распределение скоростей и давлений в потоке, найти величину коэффициента сжатия. Выполнен анализ частных случаев, для отдельных решение доведено до численных результатов. — Ил. 3. Табл. 1. Библ. 3.

УДК 627.83

Исследование свободной поверхности потока в беспороговых водосливах на основании анализа глубинных обтеканий стенок сооружения. Богданов Г. Г. «Водное хозяйство Белоруссии», 1973, вып. 3, с. 76—87.

Приведены результаты гидравлических исследований, которые дают возможность достаточно полно построить пространственную картину течения на беспороговом водосливе, так как учитывают не только изменение стеснения потока, но и изменение длины сооружения.

Исследования такого рода актуальны в связи с большим объемом строительства гидромелиоративных сооружений, переустройством малых мостов и безнапорных труб при возведении вторых путей, многопутных вставок на железных дорогах. — Ил. 1. Табл. 1. Библ. 10.

УДК 522.543:627.833

Влияние входного порога на сжатие струи за щитом. Козлов Д. А., Молочко А. В. «Водное хозяйство Белоруссии», 1973, вып. 3, с. 88—91.

Рассматривается схема истечения жидкости из-под щита, позволяющая учесть влияние входного порога на сжатие струи за щитом. Задача решена теоретически с использованием методов теории струй идеальной жидкости. Полученное решение дает возможность определить влияние расстояния от входного ребра до нижней кромки щита, высоты порога, а также угла наклона входного порога на сжатие струи за щитом. — Ил. 3. Библ. 2.

УДК 532.5:627

К вопросу определения скоростей вдоль транзитной струи сбойного течения. Парахневич В. Т. «Водное хозяйство Белоруссии», 1973, вып. 3, с. 92—94.

Рассматривается вопрос изменения средней по глубине скорости вдоль транзитной струи сбойного течения. Выделяются два характерных участка формирования и плавного расширения транзитной струи. Для каждого из участков приводится зависимость по определению средней по глубине скорости вдоль транзитной струи. Зависимости получены на основании статистической обработки опытного материала. Приводится сравнение результатов, полученных по рекомендуемой формуле с опытными их значениями. — Ил. 2. Библ. 4.

УДК 628.112.2/3

Растекание бугров грунтовых вод при переменной инфильтрации из бассейнов прямоугольной формы. Усенко В. С. «Водное хозяйство Белоруссии», 1973, вып. 3, с. 95—105.

Рассмотрены расчеты формирования уровневого режима грунтового потока под влиянием переменной во времени интенсивности инфильтрационного питания из бас-

сейнов прямоугольной формы. При этом считалось, что поступающая в бассейны вода несет взвеси, коагулирующие дно бассейна.

Исследованы случаи неограниченного, полуограниченного, пласта-квадранта, полосового и прямоугольного в плане пластов. — Ил. 2. Библ. 6.

УДК 631.445.124:631.432.3.001

Исследование аномалии фильтрации в торфе. Гамаюнов Н. И., Пантелей К. С. «Водное хозяйство Белоруссии», 1973, вып. 3, с. 106—112.

На образцах низинного и верхового торфа разной плотности исследованы отклонения от закона Дарси, выражающиеся как в форме существования начального градиента напора, который необходимо превзойти, чтобы вызвать движение жидкости, так и в виде нарушения прямой пропорциональности между u и i . Применительно к торфу оба типа нарушений существуют благодаря процессам структурообразования коллоидной высокомолекулярной составляющей торфа, осмотическим и электрокинетическим явлениям в тонких порах и пленках. Даны количественные характеристики основных причин наблюдающихся аномалий на примере осокового торфа (степень разложения 30—35%). — Ил. 3. Табл. 3. Библ. 8.

УДК 624.15

Экспериментальное исследование характера деформаций анизотропных по водопроницаемости быстрозагружаемых моделей оснований. Соболевский Ю. А., Рыжков В. А. «Водное хозяйство Белоруссии», 1973, вып. 3, с. 113—118.

Фильтрационная анизотропия существенным образом влияет на напряженно-деформируемое состояние оснований. Исследовались водонасыщенные грунтовые модели с горизонтально и вертикально расположенными слоями при быстром загрузке штампа. Картины деформаций в обоих случаях имеют существенное различие. В первом случае характерным является расползание грунта в стороны, а во втором — внутренний выпор. — Ил. 4. Библ. 2.

УДК 624.15

Устойчивость водонасыщенных быстрозагружаемых оснований. Соболевский Ю. А., Рыжков В. А. «Водное хозяйство Белоруссии», 1973, вып. 3, с. 119—131.

Исходя из положений теории предельного равновесия рассматривается устойчивость водонасыщенных анизотропных по водопроницаемости оснований для двух случаев:

- а) при преобладании горизонтальной водопроницаемости над вертикальной;
- б) при преобладании вертикальной водопроницаемости над горизонтальной.

Анализ проведенных решений указывает на существенную разницу в характере деформаций оснований, обусловленных действием фильтрационных сил. — Ил. 3. Табл. 3. Библ. 4.

УДК 624.15

Уравнение компрессионной кривой для болотных грунтов. Заяц В. Н. «Водное хозяйство Белоруссии», 1973, вып. 3, с. 132—137.

Предложена аналитическая функция, которая описывает экспериментальные компрессионные зависимости для болотных грунтов. Найдены количественные значения параметров функции. При использовании ее облегчаются расчеты и отпадает не-

обходимость в выполнении трудоемких компрессионных испытаний. — Ил. 3. Табл. 1. Библ. 4.

УДК 626.86.003.1

Расчет экономической эффективности внедрения системы СПУ в гидромелиоративном строительстве. Шимко К. И., Алтунин А. И., Валицкий С. В. «Водное хозяйство Белоруссии», 1973, вып. 3, с. 138—142.

Рассматривается вопрос определения экономической эффективности от внедрения системы СПУ на объектах, осушаемых и переустриваемых материальным дренажом. Приводится пример расчета экономической эффективности. — Табл. 1. Библ. 5.

УДК 532.59+627.8

Некоторые особенности ветрового волнения на водоемах с малыми разгонами волн. Левкевич Е. М., Юхновец В. Н. «Водное хозяйство Белоруссии», 1973, вып. 3, с. 143—147.

Излагаются некоторые особенности волнения в искусственных водоемах с малой длиной разгона, ограничивающие возможность применения в таких условиях научно обоснованных методов расчета параметров ветровых волн. Отмечаются особенности безразмерного волнового спектра в этих условиях. Для иллюстрации приводится характеристика спектра высоты волны, полученного в результате наблюдений на одном из водоемов Белоруссии, и сравнение его с аналогичными спектрами, имеющимися в литературе. Подчеркивается актуальность изучения ветрового волнения на водоемах с малой длиной разгона волн. — Табл. 3. Библ. 11.

УДК 532.501.312

Свободное неустановившееся ладение шара в жидкости. Кравцов М. В., Суворов В. В. «Водное хозяйство Белоруссии», 1973, вып. 3, с. 148—152.

Приводится решение задачи о свободном неустановившемся движении шара в жидкости при числах $Re \leq 10^4$. Получены выражения для определения скорости и пройденного пути к заданному моменту времени. — Табл. 1. Библ. 3.

УДК 532.5:627.83

К вопросу о раздельных стенках на быстротоках. Лазаревич И. Г., Кузменков В. И., Вопнярский И. П. «Водное хозяйство Белоруссии», 1973, вып. 3, с. 153—157.

Рассматривается влияние раздельных стенок, установленных на быстротоке, на характер сопряжения потока в нижнем бьефе. Приводятся рекомендации по маневрированию затворами, исключающие образование сбойного течения как при наличии, так и при отсутствии раздельных стенок. — Ил. 5. Табл. 1.

УДК 628.367

Один способ подбора эмпирических формул к данным эксперимента. Минаев И. В. «Водное хозяйство Белоруссии», 1973, вып. 3, с. 158—165.

Предлагается способ последовательного вычисления коэффициентов для степенных многочленов, используемых в качестве эмпирических формул. Приводятся математические выражения для вычисления коэффициентов, многочленов второй, третьей и четвертой степеней. Приводится пример подбора эмпирической формулы. — Ил. 2. Табл. 2. Библ. 3.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	3
В. Ф. Шебеко. Использование ресурсов поверхностных вод при регулировании почвенной влаги осушаемых земель БССР	5
П. И. Закржевский. Оценка водного режима осушенных болот в весенний период	14
Н. П. Артемьева, И. М. Лившиц. Применение критериев различия для анализа однородности летних и зимних минимумов рек Полесской низменности	22
В. Б. Хейнман. Номографический метод построения кривой распределения С. Н. Крицкого и М. Ф. Менкеля по способу Г. А. Алексева	32
М. Г. Голченко. Гидролого-климатическое районирование территории Белорусской ССР	38
Ш. И. Брусилловский, Г. А. Писецкий. Определение динамики грунтовых вод на осушаемых землях при взаимно перпендикулярном расположении водопроводящей и регулирующей сети	43
И. В. Минаев. Метод аппроксимации и его применение в технико-экономическом расчете дренажей	55
Э. П. Коваленко. О турбулентных пульсациях скоростей на границе вязкого подслоя в плоском равномерном потоке	68
Д. А. Козлов. Влияние условий подхода потока к водоприемному отверстию на его работу	72
Г. Г. Богданов. Исследование свободной поверхности потока в беспороговых водосливах на основании анализа глубинных обтеканий стенок сооружения	76
Д. А. Козлов, А. В. Молочко. Влияние входного порога на сжатие струи за щитом	88
В. Т. Парахневич. К вопросу определения скоростей вдоль транзитной струи сбойного течения	92
В. С. Усенко. Растекание бугров грунтовых вод при переменной инфильтрации из бассейнов прямоугольной формы	95
Н. И. Гамаюнов, К. С. Пантелей. Исследование аномалии фильтрации в торфе	106
Ю. А. Соболевский, В. А. Рыжков. Экспериментальное исследование характера деформаций анизотропных по водопроницаемости быстрозагружаемых моделей оснований	113
Ю. А. Соболевский, В. А. Рыжков. Устойчивость водонасыщенных быстрозагружаемых оснований	119
В. Н. Заяц. Уравнение компрессионной кривой для болотных грунтов	132

К. И. Шимко, А. И. Алтунин, С. В. Валицкий. Расчет экономической эффективности внедрения системы СПУ в гидромелиоративном строительстве	138
Е. М. Левкевич, В. Н. Юхновец. Некоторые особенности ветрового волнения на водоемах с малыми разгонами волн	143
М. В. Кравцов, В. В. Суворов. Свободное неустановившееся падение шара в жидкости	148
И. Г. Лазаревич, В. И. Кузменков, И. П. Вопнярский. К вопросу о раздельных стенках на быстротоках	153
И. В. Минаев. Один способ подбора эмпирических формул к данным эксперимента	158
Рефераты	166

ВОДНОЕ ХОЗЯЙСТВО БЕЛОРУССИИ.

Выпуск 3. Минск, «Высшая школа», 1973. Респ. межвед. сб.

Редактор *Н. М. Латышева*
Худож. редактор *И. Е. Беленькая*
Техн. редактор *Г. М. Романчук*
Корректоры *Ж. И. Маркевич, Е. В. Сукач*

АТ 17094. Сдано в набор 3/IV 1973 г. Подписано к печати 20/XI 1973 г.
Бумага 70×108 1/16 типогр. № 1. Печ. л. 11. (15,4). Уч.-изд. л. 14,17
Изд. № 72—91. Тип. зак. 661. Тираж 500 экз. Цена 1 руб. 43 коп.

Издательство «Высшая школа» Государственного комитета Совета Министров БССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Редакция межведомственных сборников и заказной литературы. 220600, Минск, ул. Кирова, 24.

Полиграфкомбинат им. Я. Коласа Государственного комитета Совета Министров БССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли г. Минск, ул. Красная, 23.