

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ВОДОСЛИВА КРИВОЛИНЕЙНОГО ОЧЕРТАНИЯ АНАЛИТИЧЕСКИМ СПОСОБОМ

Двухъярусные плотины обладают рядом существенных достоинств. Их применение создают предпосылки для уменьшения объемов строительных работ за счет сокращения длины водосбросного фронта гидроузла, кроме того, они улучшают условия пропуска паводка, сброса льда, пропуска строительных расходов, позволяют уменьшить размеры и вес затворов. Донные отверстия могут быть использованы для промыва наносов, для полезных попусков, опорожнения водохранилища.

В настоящей статье рассматривается двухъярусная водосбросная плотина, ярусность которой образована плотиной практического профиля, с водосливной гранью очерченной по координатам Офицера-Кригера, донное отверстие прямоугольной формы, ее входная часть имеет прямоугольные кромки.

В практике гидротехнических расчетов, при проектировании подобного рода сооружений приходится сталкиваться:

- с подсчетами площадей поперечного сечения водосливов криволинейного очертания. Эти расчеты необходимы для определения собственного веса плотины, при статическом расчете, или для определения объемов бетонных работ.

- с определением координат точки центра тяжести водослива при статическом расчете сооружения;

- с определением угла наклона сливной кромки уступа криволинейного водослива к горизонту, в частности, это необходимо для определения действующего напора донного отверстия двухъярусной плотины, или для выяснения степени подтопляющего или эжектирующего воздействия поверхностного расхода на турбинный расход в совмещенных ГЭС.

Для определения этих характеристик геометрическим способом, необходимо в масштабе для профилирующего напора по координатам Офицера-Кригера вычерчивать поверхностный водослив

практического профиля. Очевидно, что этот способ достаточно трудоемкий и сопряжен с большими трудностями.

Определить эти характеристики аналитическим способом, до настоящего времени, не представляется возможным, так как указаний к их расчетам нет ни в нормативной, ни в справочной литературе. По этой же причине нельзя использовать и вычислительную технику.

Для того чтобы решить эти задачи необходимо:

1. Найти аналитическую зависимость для описания криволинейной поверхности водослива;
2. Найдя уравнение криволинейной поверхности водослива определить координаты кромки уступа водослива, решив найденное уравнение относительно высоты водослива P ;
3. Используя геометрический смысл двойного интеграла, определить площадь и координаты точки центра тяжести поперечного сечения водослива;
4. Используя геометрический смысл производной, продифференцировать функцию поверхности водослива в точке с координатами уступа и определить тангенс угла наклона $\operatorname{tg}\alpha$ уступа водослива.

Прежде всего криволинейную поверхность нужно представить в виде кривой описываемой математической функцией. Для нахождения такой кривой, описывающей водосливную поверхность с профилирующим напором $H_{\text{пр}}$, воспользуемся методами математической статистики (рисунок 1).

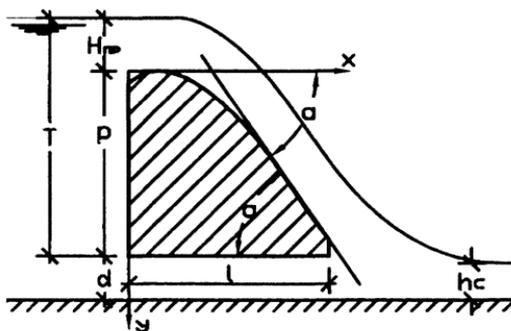


Рисунок 1 – Поперечное сечение двухъярусной плотины

В результате получается зависимость:

$$y = \left(1/H_{\text{пр}}\right) \cdot 0,3095x^2 + 0.0106x - H_{\text{пр}} 0,0256.$$

Как видно функция достаточно хорошо описывает криволинейную поверхность, коэффициент аппроксимации $R^2 = 0,9995$ весьма близок к единице.

На следующем этапе необходимо найти координаты выходной кромки уступа (x_0 ; y_0). Координата y_0 известна и равна высоте водосливной плотины $P=T - H_{\text{пр}}$. Чтобы найти координату $x_0 = 1$ необходимо решить квадратное уравнение относительно P .

$$T - H_{\text{пр}} = \left(1/H_{\text{пр}}\right) \cdot 0,3095x^2 + 0.0106x - H_{\text{пр}} 0,0256.$$

Значение $T - H_{\text{пр}}$ переносится в левую часть уравнения

$$\left(1/H_{\text{пр}}\right) \cdot 0,3095x^2 + 0.0106x - H_{\text{пр}} 0,0256 - T = 0.$$

Определяется дискриминант

$$\begin{aligned} D &= 0,0106^2 - 4 \cdot \frac{1}{H_{\text{пр}}} \cdot 0,3095 \cdot (0,974 - T) = \\ &0,0001 - 1,24 \cdot \frac{T}{H_{\text{пр}}} + 1,21 \approx 1,24 \cdot \frac{T}{H_{\text{пр}}} - 1,21. \end{aligned}$$

Тогда корни уравнения можно определить из выражения

$$x = \frac{-0,0106 \pm \sqrt{1,24 \cdot \frac{T}{H_{\text{пр}}} - 1,21}}{2 \cdot \frac{1}{H_{\text{пр}}} \cdot 0,3095} = \frac{-0,0106 \pm \sqrt{D}}{2 \cdot \frac{1}{H_{\text{пр}}} \cdot 0,3095}.$$

Уравнение имеет два корня положительный и отрицательный. Значение x для решения поставленной задачи может быть только положительным, тогда получится

$$x = H_{\text{пр}} \cdot (-0,017 + 1,61\sqrt{D}).$$

Геометрический смысл двойного интеграла $\iint_D f(x,y) dx dy$ (при условии изотропности тела водослива $f(x,y) = 1$) равен площади области D , т.е. $S_D = \iint_D dS = \iint_D dx dy$.

Чтобы найти площадь поперечного сечения плотины нужно задаться граничными условиями (рисунки 2, 3).

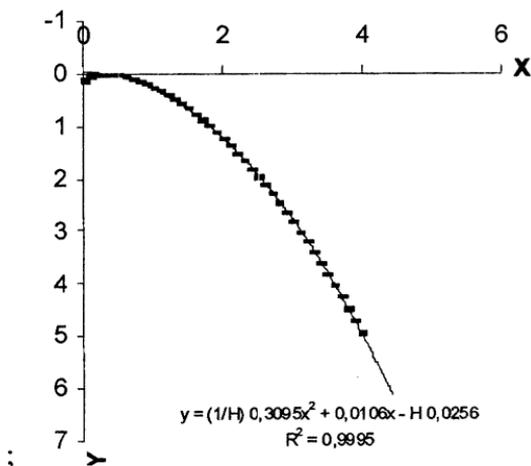


Рисунок 2 – Криволинейная поверхность безвакуумного профиля

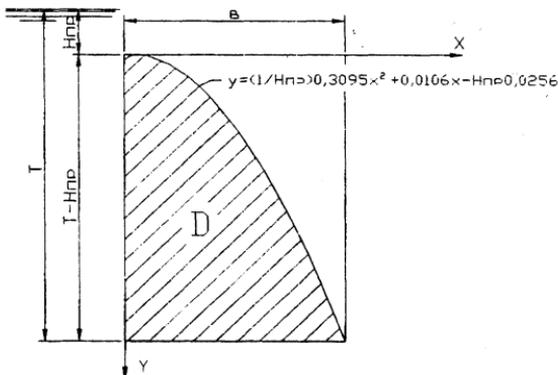


Рисунок 3 – Определение площади области D

Снизу область D ограничена прямой

$$y = T - H_{\text{пр}},$$

где T – удельная энергия верхнего бьефа относительно кромки уступа водослива;

$H_{\text{пр}}$ – профилирующий напор.

Со стороны напорной грани водослива (слева) область D ограничена линией $x = 0$, справа – область D , ограничена линией $x = H_{\text{пр}}(-0,017 + 1,61\sqrt{D})$.

Площадь D

$$S = \iint_D dx dy = \int_0^{H_{\text{пр}}(-0,017 + 1,61\sqrt{D})} dx \int_{(1/H_{\text{пр}})0,3095x^2 + 0,0106x - H_{\text{пр}}0,0256}^{T - H_{\text{пр}}} dy$$

Можно ввести обозначение

$$e = H_{\text{пр}}(-0,017 + 1,61\sqrt{D}),$$

$$\text{тогда } S = \int_0^a \left(T - H_{\text{пр}} - \left((1/H_{\text{пр}}) \cdot 0,3095x^2 + 0,0106x - H_{\text{пр}} \cdot 0,0256 \right) \right) dx.$$

Взяв интеграл, можно определить площадь поперечного сечения водосливной плотины криволинейного очертания.

$$S = -\frac{1}{H_{\text{пр}}} 0,3095 \frac{a^3}{3} - 0,0106 \frac{a^2}{2} + a(T - 0,974H_{\text{пр}}).$$

Таким образом, подставив в полученную формулу значения профилирующего напора и удельной энергии верхнего бьефа относительно кромки уступа можно найти значения площади поперечного сечения поверхностного водослива криволинейного очертания.

При выполнении статических расчетов необходимо знать координаты точки центра тяжести криволинейного водослива (x_c ; y_c). Если быть более точным, практический интерес представляет только одна координата центра тяжести водослива x_c . Определить эту координату можно по формуле

$$x_c = S_y / S,$$

где S_y – статический момент площади поперечного сечения поверхностного криволинейного водослива;

S – площадь поперечного сечения поверхностного криволинейного водослива, которая была определена выше.

Статический момент S_y площади поперечного сечения поверхностного криволинейного водослива областью D , относительно осей Ox и Oy определяется следующим образом:

$$S_y = \iint_D x\gamma(x; y) dx dy,$$

где $\gamma(x; y)$ – плотность поверхности ограниченной областью D .

$$S = \iint_D x dx dy = \int_0^{H_{\text{пр}}(-0,017+1,61\sqrt{D})} \int_{(1/H_{\text{пр}})0,3095x^2+0,0106x-H_{\text{пр}}0,0256}^{T-H_{\text{пр}}} x dx$$

$$\text{или } S_y = \int_0^6 (T - H_{\text{пр}} - ((1/H_{\text{пр}})0,3095x^2 + 0,0106x - H_{\text{пр}}0,0256)) x dx,$$

$$S_y = -\frac{1}{H_{\text{пр}}} 0,3095 \frac{6^4}{4} - 0,0106 \frac{6^3}{3} + \frac{6^2}{2} (T - 0,974H_{\text{пр}}).$$

Таким образом, найдя статический момент S_y и разделив его на площадь поперечного сечения плотины S можно найти координату центра тяжести водослива x_c .

Как известно касательная к любому графику дифференцируемой в точке x_0 функции $f(x)$ — это прямая, проходящая через точку $(x_0; f(x_0))$ и имеющая угловой коэффициент $f'(x_0) = \text{tg}\alpha$. Следовательно, чтобы найти угол наклона уступа сливной грани криволинейного водослива нужно продифференцировать функцию, описывающую поверхность водослива.

$$f(x_0) = (1/H_{\text{пр}}) \cdot 0,3095x^2 + 0,0106x - H_{\text{пр}}0,0256,$$

$$f(x_0) = \text{tg}\alpha,$$

$$f'(x_0) = 2/H \cdot 0,3095x + 0,0106 = \text{tg}\alpha,$$

преобразив это выражение, окончательно получаем

$$f'(x_0) = 0,619x/H + 0,0106 = \text{tg}\alpha.$$

Подставив в это выражение значение ранее найденное значение x получим формулу для определения тангенса угла наклона уступа криволинейного водослива

$$\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{1,24 \frac{P}{H_{np}} - 0,32} - 0,106.$$

Воспользовавшись тригонометрическими таблицами или вычислительными средствами можно определить угол наклона кромки уступа к горизонту.

ВЫВОДЫ

1. В настоящее время методик расчета геометрических характеристик (площади и координат центра тяжести поперечного сечения поверхностных водосливов криволинейного очертания двухъярусных плотин, а так же угла наклона сливной кромки уступа криволинейного водослива к горизонту) нет ни в нормативной, ни в справочной литературе.

2. В статье приведена методика расчета геометрических характеристик поперечного сечения двухъярусной водосливной плотины. Данная методика позволяет широко применять вычислительные средства для расчета параметров плотины, что особенно актуально при технико-экономическом сопоставлении большого числа вариантов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Слисский, С.М. Расчет форм сопряжения бьефов двухъярусных плотин при донном режиме. Плотины, Сборник трудов № 46, МИСИ им. Куйбышева, М. – 1964.

2. Сухая, Т.А., Бубнов, В.Ф. Задачи по высшей математике. В двух частях. Минск, 1993. – 301 с.