



**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ
РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ**

**Белорусский национальный
технический университет**

Кафедра «Металлургические технологии»

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ**

Лабораторный практикум

**Минск
БНТУ
2014**

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
Белорусский национальный технический университет

Кафедра «Металлургические технологии»

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Лабораторный практикум
для студентов специальности
1-42 01 01 «Металлургическое производство
и материалобработка»

Минск
БНТУ
2014

УДК 669.04–027.1
ББК 31.391
М34

Составители:

*Д. В. Менделев, И. А. Трусова, С. М. Кабишов,
П. Э. Ратников, Г. А. Румянцева*

Рецензенты:

Б. М. Неменёнок, А. В. Толстой

Математическое моделирование технологических процессов :
М34 лабораторный практикум для студентов специальности 1-42 01 01
«Металлургическое производство и материалобработка» / сост.:
Д. В. Менделев [и др.]. – Минск : БНТУ, 2014. – 40 с.
ISBN 978-985-550-359-1.

Лабораторный практикум предназначен для закрепления теоретических знаний, полученных при изучении одноименной дисциплины, а также для приобретения практических навыков по численному моделированию технологических процессов тепловой обработки тел простой формы применительно к металлургическому производству.

**УДК 669.04–027.1
ББК 31.391**

ISBN 978-985-550-359-1

© Белорусский национальный
технический университет, 2014

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	4
Лабораторная работа № 1. Расчет температурного поля неограниченной пластины с граничными условиями I-го рода.....	5
Лабораторная работа № 2. Расчет температурного поля шара (симметричная задача) с граничными условиями I-го рода.....	10
Лабораторная работа № 3. Расчет температурного поля неограниченного цилиндра с граничными условиями I-го рода.....	12
Лабораторная работа № 4. Расчет температурного поля неограниченной пластины с граничными условиями II-го рода.....	14
Лабораторная работа № 5. Расчет температурного поля шара (симметричная задача) с граничными условиями II-го рода.....	19
Лабораторная работа № 6. Расчет температурного поля неограниченного цилиндра с граничными условиями II-го рода.....	21
Лабораторная работа № 7. Расчет температурного поля неограниченной пластины с граничными условиями III-го рода.....	23
Лабораторная работа № 8. Расчет температурного поля шара (симметричная задача) с граничными условиями III-го рода.....	28
Лабораторная работа № 9. Расчет температурного поля неограниченного цилиндра с граничными условиями III-го рода.....	30
Список литературы.....	32
ПРИЛОЖЕНИЯ.....	33
Приложение А.....	33
Приложение Б.....	34
Приложение В.....	35
Приложение Г.....	36
Приложение Д.....	37
Приложение Е.....	38
Приложение Ж.....	39

ВВЕДЕНИЕ

Лабораторный практикум включает в себя девять лабораторных работ по основам дисциплины «Математическое моделирование технологических процессов» для специальности 1-42 01 01 «Металлургическое производство и материалобработка дневной и заочной форм обучения.

Основными обобщенными задачами дисциплины является изучение приближенных и численных методов расчета технологических процессов металлургического производства, в частности внутреннего теплообмена в телах простой формы.

Оформление отчетов о выполненной работе осуществляется на листах формата А4, только в печатном виде. Каждая выполненная работа требует защиты путем ответов на контрольные вопросы.

Перед началом работы студенты проходят инструктаж по охране труда и расписываются в соответствующем журнале.

Лабораторная работа № 1

РАСЧЕТ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ НЕОГРАНИЧЕННОЙ ПЛАСТИНЫ С ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ I-ГО РОДА

Цель работы: построить зависимость температурного поля пластины от времени и от координаты.

Теоретическая часть

Под неограниченной пластиной обычно понимают такую пластину, ширина и длина которой бесконечно велики по сравнению с толщиной. Таким образом, неограниченная пластина представляет собой тело, ограниченное двумя параллельными плоскостями. Изменение температуры происходит только в одном направлении x , в двух других направлениях y , z температура неизменна. Следовательно, задача является одномерной.

Постановка задачи. Дано распределение температуры по толщине пластины в виде некоторой функции $T_0(x)$. В начальный момент времени ограничивающие поверхности мгновенно доводятся до некоторой температуры T_c , которая поддерживается постоянной на протяжении всего технологического процесса. Найти распределение температуры по толщине пластины в любой момент времени.

Условие задачи математически может быть сформулировано следующим образом:

$$\frac{\partial T(x, \tau)}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 T(x, \tau)}{\partial x^2};$$

$$-R < x < R;$$

$$T(x, 0) = T_0(x);$$

$$T(+R, \tau) = T_c;$$

$$T(-R, \tau) = T_c.$$

Решение поставленной задачи методом разделения переменных приводит к следующему решению [1]:

$$\theta = \frac{T_c - T(x, \tau)}{T_c - T_0} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\mu_n} (-1)^{n+1} \cos \mu_n \frac{x}{R} \exp(-\mu_n^2 Fo);$$

$$\mu_n = (2n - 1) \frac{\pi}{2}.$$

Пример

1. Определить общее время нагрева $\tau_{\text{кон}}$ пластины толщиной $2R = 0,3$ м из чистого железа до заданного температурного перепада $\Delta T = 55$ °С по сечению заготовки. Начальная температура пластины $T_0 = 50$ °С. Температура $T_c = 700$ °С.

2. Определить время $\tau_{\text{пр}}$, через которое середина пластины начнет прогреваться.

3. Построить зависимость температуры от времени в центре пластины $T(0, \tau)$.

4. Построить температурное поле пластины $T(x, \tau_{\text{кон}})$ в конечный момент времени нагрева.

Решение.

1. Решение уравнения теплопроводности для рассматриваемого случая с достаточной степенью точности можно представить в виде [1]

$$\frac{T_c - T(x, \tau)}{T_c - T_0} \approx \frac{4}{\pi} e^{-\frac{\pi^2}{4} Fo} \cos \frac{\pi x}{2R} - \frac{4}{3\pi} e^{-9\frac{\pi^2}{4} Fo} \cos \frac{3\pi x}{2R} + \frac{4}{5\pi} e^{-25\frac{\pi^2}{4} Fo} \cos \frac{5\pi x}{2R}.$$

Ось координат размещается в центре пластины $\left(-1 \leq \frac{x}{R} \leq 1\right)$.

Для центра пластины в конечный момент времени нагрева будет иметь место следующее уравнение

$$\frac{T_c - T(0, \tau_{\text{кон}})}{T_c - T_0} = \frac{\Delta T}{T_c - T_0} = \frac{55}{700 - 50} \approx$$

$$\approx \frac{4}{\pi} e^{-\frac{\pi^2}{4} \text{Fo}} - \frac{4}{3\pi} e^{-\frac{9\pi^2}{4} \text{Fo}} + \frac{4}{5\pi} e^{-\frac{25\pi^2}{4} \text{Fo}}.$$

Выполнив перебор значений для Fo от нуля с шагом 0,1, можно удовлетворить последнее тождество при значении $\text{Fo}_{\text{кон}} \approx 1,1$. С учетом толщины пластины $2R = 0,3$ м, а также значения среднего коэффициента теплопроводности для чистого железа $\bar{\alpha} = 1,25 \cdot 10^{-5}$ м²/с в температурном интервале 50–700 °С конечное время нагрева составит $\tau_{\text{кон}} = 1980$ с.

2. Для определения времени $\tau_{\text{пр}}$, через которое начнет прогреваться середина пластины, необходимо проверить условие

$$\frac{T_c - T(0, \tau_{\text{пр}})}{T_c - T_0} \approx \frac{4}{\pi} e^{-\frac{\pi^2}{4} \text{Fo}} - \frac{4}{3\pi} e^{-\frac{9\pi^2}{4} \text{Fo}} + \frac{4}{5\pi} e^{-\frac{25\pi^2}{4} \text{Fo}} = 1.$$

Для периода времени $0 \leq \tau < \tau_{\text{пр}}$ при использовании решения уравния теплопроводности для рассматриваемого случая имеет место неравенство

$$\frac{T_c - T(0, \tau)}{T_c - T_0} > 1.$$

Для периода времени $\tau > \tau_{\text{пр}}$ при использовании решения уравния теплопроводности для рассматриваемого случая имеет место неравенство

$$\frac{T_c - T(0, \tau)}{T_c - T_0} < 1.$$

Время, через которое начнет прогреваться середина пластины, $\tau_{\text{пр}} = 75$ с.

3. Для того чтобы построить зависимость температуры от времени в центре пластины $T(0, \tau)$, необходимо преобразовать решение уравнения теплопроводности для рассматриваемого случая к следующему виду:

$$T(0, \tau) \approx T_c - (T_c - T_0) \left[\frac{4}{\pi} e^{-\frac{\pi^2 a \tau}{4R^2}} - \frac{4}{3\pi} e^{-\frac{9\pi^2 a \tau}{4R^2}} + \frac{4}{5\pi} e^{-\frac{25\pi^2 a \tau}{4R^2}} \right].$$

$$T(0, \tau) \approx 700 - (700 - 50) \frac{4}{\pi} \times$$

$$\times \left[\frac{e^{-\frac{\pi^2 1,25 \cdot 10^{-5} \tau}{4 \cdot 0,15^2}}}{1} - \frac{e^{-\frac{9\pi^2 1,25 \cdot 10^{-5} \tau}{4 \cdot 0,15^2}}}{3} + \frac{e^{-\frac{25\pi^2 1,25 \cdot 10^{-5} \tau}{4 \cdot 0,15^2}}}{5} \right].$$

Помимо этого, для промежутка времени $0 \leq \tau < \tau_{пр}$ будет иметь место следующее условие:

$$T(0, \tau) = T_0.$$

Результаты расчетов приведены на рисунке 1.

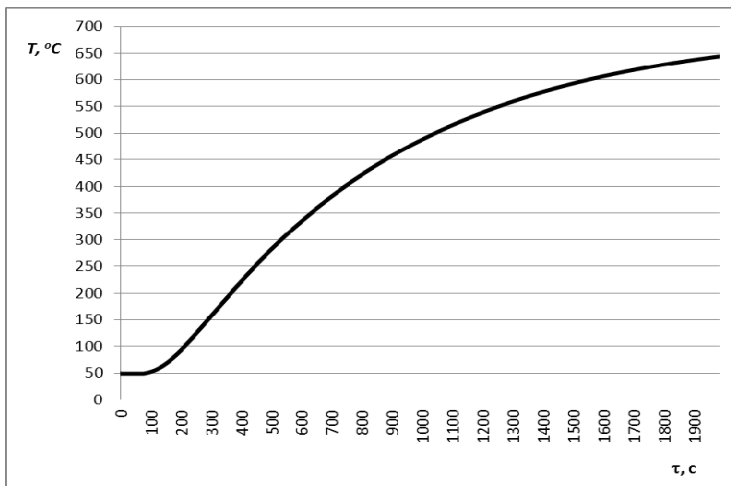


Рисунок 1 – Зависимость температуры (°C) в центре пластины от времени (с)

Для того, чтобы построить температурное поле пластины $T(x, \tau_{\text{кон}})$ в конечный момент времени нагрева, необходимо преобразовать решение уравнения теплопроводности для рассматриваемого случая к следующему виду (рисунок 2):

$$T(x, \tau_{\text{кон}}) \approx T_c - (T_c - T_0) \times$$

$$\times \left[\frac{4}{\pi} e^{-\frac{\pi^2}{4} \text{Fo}_{\text{кон}}} \cos \frac{\pi x}{2R} - \frac{4}{3\pi} e^{-9\frac{\pi^2}{4} \text{Fo}_{\text{кон}}} \cos \frac{3\pi x}{2R} + \frac{4}{5\pi} e^{-25\frac{\pi^2}{4} \text{Fo}_{\text{кон}}} \cos \frac{5\pi x}{2R} \right];$$

$$T(0, \tau_{\text{кон}}) \approx 700 - (700 - 50) \frac{4}{\pi} \times$$

$$\times \left[\frac{e^{-\frac{\pi^2}{4} 1,1}}{1} \cos \frac{\pi x}{2R} - \frac{e^{-9\frac{\pi^2}{4} 1,1}}{3} \cos \frac{3\pi x}{2R} + \frac{e^{-25\frac{\pi^2}{4} 1,1}}{5} \cos \frac{5\pi x}{2R} \right].$$

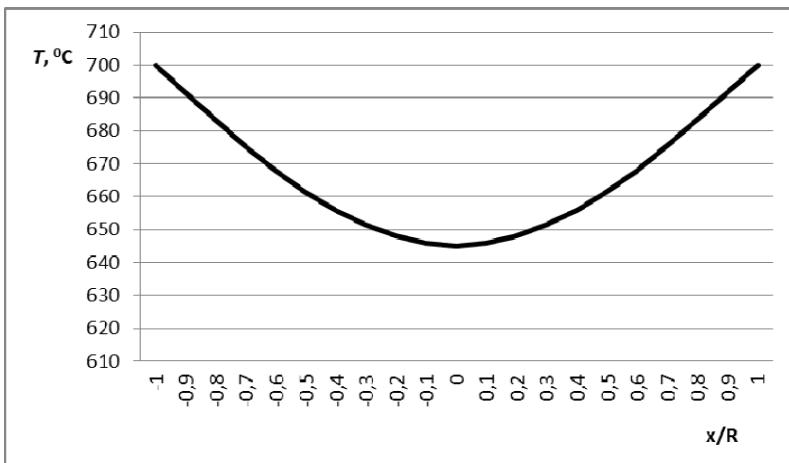


Рисунок 2 – Зависимость температуры (°C) от безразмерной координаты $\left(\frac{x}{R}\right)$ в конечный момент времени нагрева

Практическая часть

Данные для практической части приведены в приложениях А–В.

Задание 1. Определить общее время нагрева $\tau_{\text{кон}}$ пластины до заданного температурного перепада ΔT по сечению заготовки.

Задание 2. Определить время $\tau_{\text{пр}}$, через которое середина пластины начнет прогреваться.

Задание 3. Построить зависимость температуры от времени в центре пластины (см. рисунок 1).

Задание 4. Построить температурное поле пластины в момент времени $\tau_{\text{кон}}$.

Контрольные вопросы

1. В чем заключается метод разделения переменных при решении уравнения теплопроводности?

2. Что означает граничное условие первого рода для уравнения теплопроводности?

3. Имеет ли физический смысл неравенство $\frac{T_c - T(0, \tau)}{T_c - T_0} > 1$?

4. Почему достаточно использовать первые три члена решения уравнения теплопроводности для рассматриваемого случая?

Лабораторная работа № 2

РАСЧЕТ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ ШАРА (СИММЕТРИЧНАЯ ЗАДАЧА) С ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ I-ГО РОДА

Цель работы: построить зависимость температурного поля шара от времени и от координаты.

Теоретическая часть

Постановка задачи. Дано сферическое тело (шар) радиусом R с известным начальным распределением температуры $T_0(r)$. В началь-

ный момент времени поверхность шара мгновенно доводится до некоторой температуры, равной T_c , которая поддерживается постоянной на протяжении всего процесса охлаждения. Требуется найти распределение температуры внутри шара в любой момент времени. Охлаждение происходит равномерно, так что изотермы внутри шара представляют собой концентрические сферы, т. е. температура зависит только от радиус-вектора r и времени τ .

Условие задачи математически может быть сформулировано следующим образом

$$\frac{\partial T(r, \tau)}{\partial r} = a \left(\frac{\partial^2 T(r, \tau)}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial T(r, \tau)}{\partial r} \right);$$

$$0 < r < R;$$

$$T(r, 0) = T_0(r); \quad T(r, \tau) = T_c;$$

$$\frac{\partial T(0, \tau)}{\partial r} = 0.$$

Решение поставленной задачи для $r > 0$ методом разделения переменных приводит к следующему решению [1]:

$$\theta = \frac{T_c - T(r, \tau)}{T_c - T_0} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{R \sin \mu_n \frac{r}{R}}{r \mu_n} \exp(-\mu_n^2 \text{Fo});$$

$$\mu_n = \pi n;$$

$$A_n = (-1)^{n+1} \cdot 2.$$

Решение поставленной задачи для $r = 0$ операционным методом приводит к следующему решению [1]:

$$\theta_{\text{ц}} = \frac{T_{\text{с}} - T(0, \tau)}{T_{\text{с}} - T_0} = 1 - 2\sqrt{\frac{1}{\pi\text{Fo}}} \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{(2n-1)^2}{4\text{Fo}}\right).$$

Практическая часть

Данные для практической части приведены в приложениях А–В.

Задание 1. Определить общее время нагрева $\tau_{\text{кон}}$ шара до заданного температурного перепада ΔT по сечению заготовки.

Задание 2. Определить время $\tau_{\text{пр}}$, через которое середина шара начнет прогреваться.

Задание 3. Построить зависимость температуры от времени на расстоянии $r = 0,5R$ от центра шара.

Задание 4. Построить температурное поле шара в момент времени $\tau_{\text{кон}}$.

Контрольные вопросы

1. В чем заключается операционный метод при решении уравнения теплопроводности?
2. Какое граничное условие определяет симметричность задачи?
3. Какую геометрическую форму описывают изотермические поверхности?

Лабораторная работа № 3

РАСЧЕТ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ НЕОГРАНИЧЕННОГО ЦИЛИНДРА С ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ I-ГО РОДА

Цель работы: построить зависимость температурного поля неограниченного цилиндра от времени и от координаты.

Теоретическая часть

Если длина l цилиндра значительно больше его диаметра $2R$ ($\frac{l}{2R} > 10$), то его можно уподобить неограниченному цилиндру, у

которого длина бесконечно велика по сравнению с диаметром. Если теплообмен между поверхностью цилиндра и окружающими телами происходит одинаково по всей поверхности, то температура его будет зависеть только от времени и радиуса (симметричная задача)

Постановка задачи. Дан неограниченный цилиндр при некотором заданном радиальном распределении температуры, т. е. в виде функции $T_0(r)$. В начальный момент времени поверхность цилиндра мгновенно доводится до некоторой температуры T_c , которая поддерживается постоянной на протяжении всего процесса. Необходимо найти распределение температуры внутри цилиндра в любой момент времени.

Условие задачи математически может быть сформулировано следующим образом:

$$\frac{\partial T(r, \tau)}{\partial r} = a \left(\frac{\partial^2 T(r, \tau)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T(r, \tau)}{\partial r} \right);$$

$$0 < r < R;$$

$$T(r, 0) = T_0(r); \quad T(r, \tau) = T_c;$$

$$\frac{\partial T(0, \tau)}{\partial r} = 0.$$

Решение поставленной задачи методом разделения переменных приводит к следующему решению [1]:

$$\theta = \frac{T_c - T(r, \tau)}{T_c - T_0} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0 \left(\mu_n \frac{r}{R} \right) \exp(-\mu_n^2 Fo);$$

$$A_n = \frac{2}{\mu_n J_1(\mu_n)};$$

$$J_0(\mu_n) = 0,$$

где J_0, J_1 – бесселевы (цилиндрические) функции (приложение Г).

Практическая часть

Данные для практической части приведены в приложениях А–В.

Задание 1. Определить общее время нагрева $\tau_{\text{кон}}$ цилиндра до заданного температурного перепада ΔT по сечению заготовки.

Задание 2. Определить время $\tau_{\text{пр}}$, через которое середина цилиндра начнет прогреваться.

Задание 3. Построить зависимость температуры от времени на расстоянии $r = 0,5R$ от оси цилиндра.

Задание 4. Построить температурное поле цилиндра в момент времени $\tau_{\text{кон}}$.

Контрольные вопросы

1. Как будут отличаться решения уравнения теплопроводности при операционном методе и при методе разделения переменных?
2. Какой общий вид имеют бесселевы функции?
3. Какую геометрическую форму описывают изотермические поверхности?
4. Что такое характеристическое уравнение?
5. Чему равна разность $\mu_{n+1} - \mu_n$ при $n \rightarrow \infty$?

Лабораторная работа № 4

РАСЧЕТ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ НЕОГРАНИЧЕННОЙ ПЛАСТИНЫ С ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ II-ГО РОДА

Цель работы: построить зависимость температурного поля неограниченной пластины от времени и от координаты.

Теоретическая часть

Постановка задачи. Дана неограниченная пластина толщиной $2R$ при температуре T_0 и коэффициентом теплопроводности λ . Пластина нагревается с обеих сторон одинаково от источника с постоянным тепловым потоком q_c .

Найти распределение температуры по толщине пластины в любой момент времени.

Условие задачи математически может быть сформулировано следующим образом:

$$\frac{\partial T(x, \tau)}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 T(x, \tau)}{\partial x^2};$$

$$T(x, 0) = T_0;$$

$$-\frac{\partial T(R, \tau)}{\partial x} + \frac{q_c}{\lambda} = 0;$$

$$\frac{\partial T(0, \tau)}{\partial x} = 0;$$

$$q(x, 0) = 0;$$

$$q(R, \tau) = q_c;$$

$$q(0, \tau) = 0.$$

Решение поставленной задачи методом разделения переменных приводит к следующему решению [1]:

$$\theta = \frac{T(x, \tau) - T_0}{T_c - T_0} = \frac{q_c R}{\lambda(T_c - T_0)} \left(\text{Fo} - \frac{1}{6} \left(1 - 3 \frac{x^2}{R^2} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\mu_n^2} (-1)^{n+1} \cos \mu_n \frac{x}{R} \exp(-\mu_n^2 \text{Fo}) \right).$$

$$\mu_n = \pi \cdot n.$$

Пример

1. Определить плотность теплового потока q_c на поверхность пластины толщиной $2R = 0,3$ м, начальной температурой $T_0 = 50$ °С, коэффициентом теплопроводности $\lambda = 45$ Вт/(м·К), коэффициентом температуропроводности $\bar{a} = 1,25 \cdot 10^{-5}$ м²/с в случае, если температура поверхности тела значительно меньше температуры печи $T_c = 1000$ °С. Степень черноты рабочего пространства печи $\varepsilon = 0,617$.

2. Построить зависимость температуры от времени на поверхности и в центре пластины ($Fo \leq 1$).

3. Построить температурное поле пластины в момент времени $Fo = 1$.

4. Определить температурный перепад ΔT по сечению заготовки в момент времени $Fo = 1$.

Решение.

1. Для рассматриваемого случая имеет место выражение

$$q_c \approx \varepsilon \sigma_0 (T_c + 273)^4 = 0,617 \cdot 5,67 \cdot 10^{-8} (1000 + 273)^4 \approx 91\,914 \text{ Вт/м}^2.$$

2. Для центра пластины

$$\theta = \frac{T(0, \tau) - T_0}{T_c - T_0} = \frac{q_c R}{\lambda(T_c - T_0)} \left(Fo - \frac{1}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\mu_n^2} (-1)^{n+1} \exp(-\mu_n^2 Fo) \right);$$

$$T(0, \tau) = 50 + \frac{91\,914 \cdot 0,15}{45} \times \\ \times \left(Fo - \frac{1}{6} + \frac{2}{\pi^2} e^{-\pi^2 Fo} - \frac{2}{4\pi^2} e^{-4\pi^2 Fo} + \frac{2}{9\pi^2} e^{-9\pi^2 Fo} \right).$$

Для поверхности пластины

$$\theta = \frac{T(R, \tau) - T_0}{T_c - T_0} = \frac{q_c R}{\lambda(T_c - T_0)} \left(Fo + \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\mu_n^2} (-1)^{n+1} \cos \mu_n \exp(-\mu_n^2 Fo) \right);$$

$$T(R, \tau) = 50 + \frac{91914 \cdot 0,15}{45} \times \left(Fo + \frac{1}{3} - \frac{2}{\pi^2} e^{-\pi^2 Fo} - \frac{2}{4\pi^2} e^{-4\pi^2 Fo} - \frac{2}{9\pi^2} e^{-9\pi^2 Fo} \right).$$

Данные зависимости отражены на рисунке 3.



Рисунок 3 – Зависимость температуры (°C) от времени (с) в выбранных точках заготовки при $Fo \leq 1$ ($\tau \leq 1800$ с)

3. Для момента времени $Fo = 1$:

$$\theta = \frac{T(x, 1800) - T_0}{T_c - T_0} = \frac{q_c R}{\lambda(T_c - T_0)} \left(1 - \frac{1}{6} \left(1 - 3 \frac{x^2}{R^2} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\mu_n^2} (-1)^{n+1} \cos \mu_n \frac{x}{R} \exp(-\mu_n^2) \right);$$

$$T(x, 1800) = 50 + \frac{91\,914 \cdot 0,15}{45} \left(1 - \frac{1}{6} \left(1 - 3 \frac{x^2}{R^2} \right) + \frac{2}{\pi^2} \cos \pi \frac{x}{R} e^{-\pi^2} - \right. \\ \left. - \frac{2}{4\pi^2} \cos 2\pi \frac{x}{R} e^{-4\pi^2} + \frac{2}{9\pi^2} \cos 3\pi \frac{x}{R} e^{-9\pi^2} \right).$$

4. Температурный перепад по сечению заготовки в момент времени $Fo = 1$ согласно рисунку 4 составляет $\Delta T \approx 153 \text{ }^\circ\text{C}$.

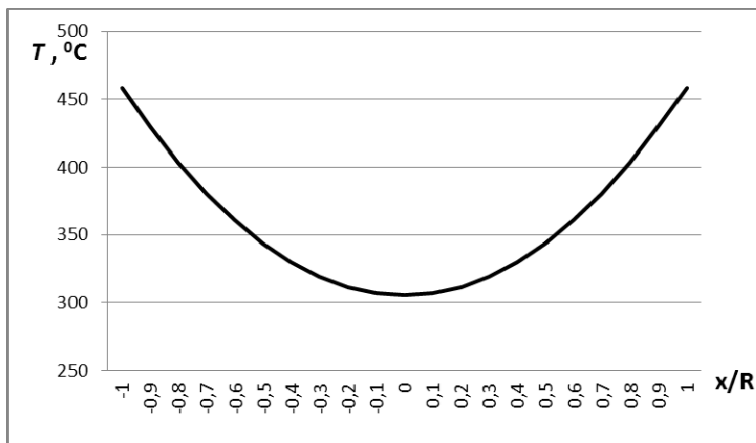


Рисунок 4 – Температурное поле пластины ($^\circ\text{C}$) в момент времени $Fo = 1$

Практическая часть

Данные для практической части приведены в приложениях А–В.

Задание 1. Определить плотность теплового потока q_c на поверхность пластины в случае, если температура поверхности тела значительно меньше температуры печи T_c . Степень черноты рабочего пространства печи ϵ .

Задание 2. Построить зависимость температуры от времени на поверхности и в центре пластины ($Fo \leq 1$).

Задание 3. Построить температурное поле пластины в момент времени $Fo = 1$.

Задание 4. Определить температурный перепад ΔT по сечению заготовки в момент времени $Fo = 1$.

Контрольные вопросы

1. В чем особенность для плотности теплового потока, падающего на заготовку, если температура поверхности тела значительно меньше температуры печи?

2. Как определить плотность теплового потока, который усваивается заготовкой, в случае если температуры поверхности тела и печи сопоставимы?

Лабораторная работа № 5

РАСЧЕТ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ ШАРА (СИММЕТРИЧНАЯ ЗАДАЧА) С ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ II-ГО РОДА

Цель работы: построить зависимость температурного поля шара от времени и от координаты.

Теоретическая часть

Постановка задачи. Нагрев шара производится равномерно по всей поверхности (симметричная задача) при постоянной плотности теплового потока q_c . Требуется найти радиальное распределение температуры в любой момент времени.

Условие задачи математически может быть сформулировано следующим образом:

$$\frac{\partial T(r, \tau)}{\partial r} = a \left(\frac{\partial^2 T(r, \tau)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T(r, \tau)}{\partial r} \right);$$

$$T(r, 0) = T_0;$$

$$-\frac{\partial T(R, \tau)}{\partial r} + \frac{q_c}{\lambda} = 0;$$

$$\frac{\partial T(0, \tau)}{\partial r} = 0;$$

$$q(r, 0) = 0;$$

$$q(R, \tau) = q_c;$$

$$q(0, \tau) = 0.$$

Решение поставленной задачи операционным методом приводит к следующему решению уравнения теплопроводности [1]:

$$\theta = \frac{T(r, \tau) - T_0}{T_c - T_0} = \frac{q_c R}{\lambda(T_c - T_0)} \times$$

$$\times \left(3\text{Fo} - \frac{1}{10} \left(3 - 5 \frac{r^2}{R^2} \right) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\mu_n^2 \cos \mu_n} \frac{R \sin \mu_n \frac{r}{R}}{r \mu_n} \exp(-\mu_n^2 \text{Fo}) \right).$$

Корни характеристического уравнения μ_n находятся по приложению Е.

Для центра шара

$$\theta_{\text{ц}} \approx \frac{2q_c R}{\lambda(T_c - T_0)} \left(\exp(\text{Fo}) - 1 \right) \left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{1}{2\sqrt{\text{Fo}}} - \sqrt{\text{Fo}} \right)^{2n+1}}{n!(2n+1)} \right).$$

Практическая часть

Данные для практической части приведены в приложениях А–В.

Задание 1. Определить плотность теплового потока q_c на поверхность шара в случае, если температура поверхности тела значительно меньше температуры печи T_c . Степень черноты рабочего пространства печи ϵ .

Задание 2. Построить зависимость температуры от времени на поверхности и в центре шара ($Fo \leq 1$).

Задание 3. Построить температурное поле шара в момент времени $Fo = 1$.

Задание 4. Определить температурный перепад ΔT по сечению заготовки в момент времени $Fo = 1$.

Контрольные вопросы

1. Какой вид имеет характеристическое уравнение для нахождения μ_n ?

2. Начиная с какого значения, температура в любой точке шара будет линейной функцией времени, а распределение температуры – параболическим?

Лабораторная работа № 6

РАСЧЕТ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ НЕОГРАНИЧЕННОГО ЦИЛИНДРА С ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ II-ГО РОДА

Цель работы: построить зависимость температурного поля неограниченного цилиндра от времени и от координаты.

Теоретическая часть

Постановка задачи. Нагрев неограниченного цилиндра производится равномерно по всей поверхности (симметричная задача) при постоянной плотности теплового потока q_c . Требуется найти радиальное распределение температуры в любой момент времени.

Условие задачи математически может быть сформулировано следующим образом:

$$\frac{\partial T(r, \tau)}{\partial \tau} = a \left(\frac{\partial^2 T(r, \tau)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial T(r, \tau)}{\partial r} \right);$$

$$T(r, 0) = T_0;$$

$$-\frac{\partial T(R, \tau)}{\partial r} + \frac{q_c}{\lambda} = 0;$$

$$\frac{\partial T(0, \tau)}{\partial r} = 0;$$

$$q(r, 0) = 0;$$

$$q(R, \tau) = q_c;$$

$$q(0, \tau) = 0.$$

Решение поставленной задачи операционным методом приводит к следующему решению уравнения теплопроводности [1]:

$$\theta = \frac{T(r, \tau) - T_0}{T_c - T_0} = \frac{q_c R}{\lambda(T_c - T_0)} \left(2\text{Fo} - \frac{1}{4} \left(1 - 2 \frac{r^2}{R^2} \right) - \right. \\ \left. - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\mu_n^2 J_0(\mu_n)} J_0 \left(\mu_n \frac{r}{R} \right) \exp(-\mu_n^2 \text{Fo}) \right).$$

Корни характеристического уравнения μ_n находятся по приложению Г.

Практическая часть

Данные для практической части приведены в приложениях А–В.

Задание 1. Определить плотность теплового потока q_c на поверхность цилиндра в случае, если температура поверхности тела значительно меньше температуры печи T_c . Степень черноты рабочего пространства печи ε .

Задание 2. Построить зависимость температуры от времени на поверхности и на оси цилиндра ($\text{Fo} \leq 1$).

Задание 3. Построить температурное поле цилиндра в момент времени $Fo = 1$.

Задание 4. Определить температурный перепад ΔT по сечению заготовки в момент времени $Fo = 1$.

Контрольные вопросы

1. Какой вид имеет характеристическое уравнение для нахождения μ_n ?
2. Начиная с какого значения, температура в любой точке цилиндра будет линейной функцией времени, а распределение температуры – параболическим?

Лабораторная работа № 7

РАСЧЕТ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ НЕОГРАНИЧЕННОЙ ПЛАСТИНЫ С ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ III-ГО РОДА

Цель работы: Построить зависимость температурного поля неограниченной пластины от времени и от координаты.

Теоретическая часть

Постановка задачи. Дана неограниченная пластина, толщина которой равна $2R$. Начальное распределение температуры задается некоторой функцией $T(x, 0) = T_0(x)$. В начальный момент времени пластина помещается в среду с постоянной температурой T_c . Между ограничивающими поверхностями пластины и окружающей средой происходит теплообмен по закону Ньютона. Требуется найти распределение температуры по толщине пластины.

Условие задачи математически может быть сформулировано следующим образом:

$$\frac{\partial T(x, \tau)}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 T(x, \tau)}{\partial x^2};$$

$$T(x, 0) = T_0;$$

$$-\lambda \frac{\partial T(R, \tau)}{\partial x} + \alpha(T_c - T(R, \tau)) = 0;$$

$$\lambda \frac{\partial T(-R, \tau)}{\partial x} + \alpha(T_c - T(-R, \tau)) = 0.$$

Решение поставленной задачи методом разделения переменных приводит к следующему решению [1]:

$$\theta = \frac{T(x, \tau) - T_0}{T_c - T_0} = \left(1 - \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \mu_n \frac{x}{R} \exp(-\mu_n^2 \text{Fo}) \right);$$

$$A_n = \frac{2 \sin \mu_n}{\mu_n + \sin \mu_n \cos \mu_n}.$$

Корни характеристического уравнения μ_n находятся по приложению Д.

Для малых чисел Fo необходимо применять следующее выражение:

$$\begin{aligned} \theta = \frac{T(x, \tau) - T_0}{T_c - T_0} \approx & \operatorname{erfc} \frac{1 - \frac{x}{R}}{2\sqrt{\text{Fo}}} - \exp\left(\text{Bi} \left(1 - \frac{x}{R}\right) + \text{Bi}^2 \text{Fo}\right) \times \\ & \times \operatorname{erfc} \left(\frac{1 - \frac{x}{R}}{2\sqrt{\text{Fo}}} + \text{Bi} \sqrt{\text{Fo}} \right) + \operatorname{erfc} \frac{1 + \frac{x}{R}}{2\sqrt{\text{Fo}}} - \\ & - \exp\left(\text{Bi} \left(1 + \frac{x}{R}\right) + \text{Bi}^2 \text{Fo}\right) \cdot \operatorname{erfc} \left(\frac{1 + \frac{x}{R}}{2\sqrt{\text{Fo}}} + \text{Bi} \sqrt{\text{Fo}} \right). \end{aligned}$$

Пример

1. Определить критерий Био для пластины толщиной $2R = 0,3$ м, начальной температурой $T_0 = 50$ °С, коэффициентом теплопроводности $\lambda = 45$ Вт/(м·К), коэффициентом температуропроводности $\bar{a} = 1,25 \cdot 10^{-5}$ м²/с. Температура печи $T_c = 1000$ °С. Коэффициент теплообмена $\alpha = 150$ Вт/(м²·К).

2. Построить зависимость температуры от времени на поверхности и в центре пластины ($Fo \leq 3$).

3. Построить температурное поле пластины в момент времени $Fo = 3$.

4. Определить температурный перепад ΔT по сечению заготовки в момент времени $Fo = 3$.

Решение.

1. Критерий Био

$$Bi = \frac{\alpha R}{\lambda} = \frac{150 \cdot 0,15}{45} = 0,5.$$

2. Критерию Био $Bi = 0,5$ соответствуют числа

$$\mu_1 = 0,6533; \quad \mu_2 = 3,2923; \quad \mu_3 = 6,3616.$$

Для центра пластины

$$T(0, \tau) = T_0 + (T_c - T_0) \left(1 - \left(A_1 \exp(-0,6533^2 \cdot Fo) + \right. \right. \\ \left. \left. + A_2 \exp(-3,2923^2 \cdot Fo) + A_3 \exp(-6,3616^2 \cdot Fo) \right) \right).$$

Для поверхности пластины

$$T(R, \tau) = T_0 + (T_c - T_0) \left(1 - \left(A_1 \cos(0,6533) \exp(-0,6533^2 \cdot Fo) + \right. \right.$$

$$+ A_2 \cos(3,2923) \exp(-3,2923^2 \cdot Fo) +$$

$$+ A_3 \cos(6,3616) \exp(-6,3616^2 \cdot Fo)).$$

$$A_1 = \frac{2 \sin 0,6533}{0,6533 + \sin 0,6533 \cdot \cos 0,6533};$$

$$A_2 = \frac{2 \sin 3,2923}{3,2923 + \sin 3,2923 \cdot \cos 3,2923};$$

$$A_3 = \frac{2 \sin 6,3616}{6,3616 + \sin 6,3616 \cdot \cos 6,3616}.$$

Зависимость температур в характерных точках заготовки (центр и поверхность) приведены на рисунке 5.

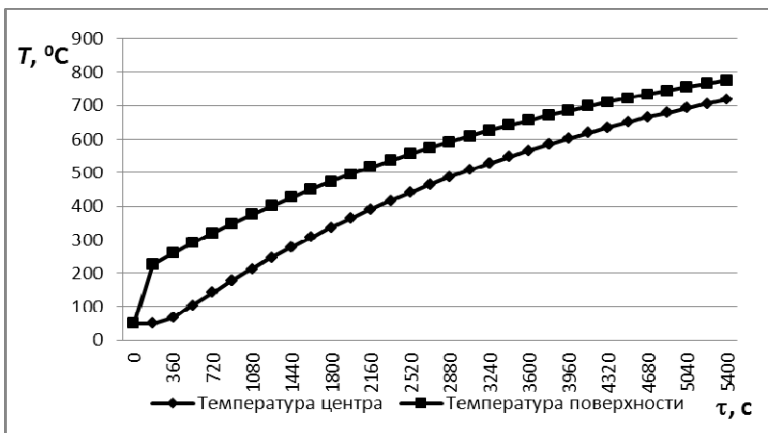


Рисунок 5 – Зависимость температуры (°C) от времени (с) в выбранных точках заготовки при $Fo \leq 3$ ($\tau \leq 5400$ с)

3. Распределение температуры по сечению для $Fo = 3$

$$T(x, \tau) = T_0 + (T_c - T_0) \left(1 - \left(A_1 \cos\left(0,6533 \frac{x}{R}\right) \exp(-0,6533^2 \cdot 3) + \right. \right. \\ \left. \left. + A_2 \cos\left(3,2923 \frac{x}{R}\right) \exp(-3,2923^2 \cdot 3) + \right. \right. \\ \left. \left. + A_3 \cos\left(6,3616 \frac{x}{R}\right) \exp(-6,3616^2 \cdot 3) \right) \right).$$

На рисунке 6 приведены результаты расчетов распределения температуры по сечению плоской заготовки при нагреве с граничными условиями III-го рода в момент времени $Fo = 3$.

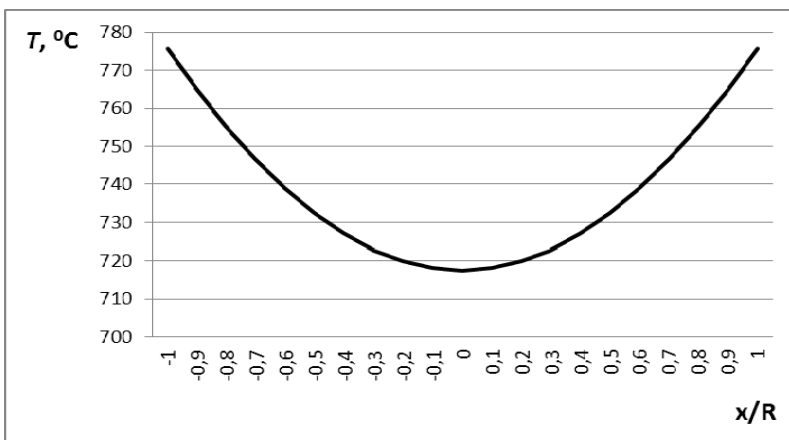


Рисунок 6 – Температурное поле пластины (°C) в момент времени $Fo = 3$

4. На рисунке 6 видно, что температурный перепад по сечению заготовки в момент времени $Fo = 3$ составляет $\Delta T \approx 58$ °C.

Практическая часть

Данные для практической части приведены в приложениях А–В.

Задание 1. Определить критерий Био для пластины.

Задание 2. Построить зависимость температуры от времени на поверхности и в центре пластины ($Fo \leq 3$).

Задание 3. Построить температурное поле пластины в момент времени $Fo = 3$.

Задание 4. Определить температурный перепад ΔT по сечению заготовки в момент времени $Fo = 3$.

Контрольные вопросы

1. Какой вид имеет характеристическое уравнение для нахождения μ_n ?

2. Какое влияние оказывают коэффициенты μ_n на изменение температуры при малых числах Fo ?

Лабораторная работа № 8

РАСЧЕТ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ ШАРА (СИММЕТРИЧНАЯ ЗАДАЧА) С ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ III-ГО РОДА

Цель работы: построить зависимость температурного поля шара от времени и от координаты.

Теоретическая часть

Постановка задачи. Дано сферическое тело (шар) радиусом R с некоторым заданным начальным распределением температуры в виде функции $T_0(r)$. В начальный момент времени шар помещается в среду с постоянной температурой T_c . Требуется найти распределение температуры внутри шара в любой момент времени.

Условие задачи математически может быть сформулировано следующим образом:

$$\frac{\partial(rT(r, \tau))}{\partial \tau} = a \left(\frac{\partial^2(rT(r, \tau))}{\partial r^2} \right);$$

$$T(r, 0) = T_0;$$

$$-\frac{\partial T(R, \tau)}{\partial r} + \alpha(T_c - T(R, \tau)) = 0;$$

$$\frac{\partial T(0, \tau)}{\partial r} = 0.$$

Решение поставленной задачи методом разделения переменных приводит к следующему решению [1]:

$$\theta = \frac{T(r, \tau) - T_0}{T_c - T_0} = \left(1 - \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{R \sin \mu_n \frac{r}{R}}{r \mu_n} \exp(-\mu_n^2 Fo) \right);$$

$$A_n = \frac{2(\sin \mu_n - \mu_n \cos \mu_n)}{\mu_n - \sin \mu_n \cos \mu_n}.$$

Корни характеристического уравнения μ_n находятся по приложению Е.

Практическая часть

Данные для практической части приведены в приложениях А–В.

Задание 1. Определить критерий Био для шара.

Задание 2. Построить зависимость температуры от времени на поверхности и в центре шара ($Fo \leq 3$).

Задание 3. Построить температурное поле шара в момент времени $Fo = 3$.

Задание 4. Определить температурный перепад ΔT по сечению заготовки в момент времени $Fo = 3$.

Контрольные вопросы

1. Какой вид имеет характеристическое уравнение для нахождения μ_n ?

2. Какое влияние оказывает коэффициент μ_n на изменение температуры при малых числах Fo?

3. Имеется ли особенность при $r = 0$?

Лабораторная работа № 9

РАСЧЕТ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ НЕОГРАНИЧЕННОГО ЦИЛИНДРА С ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ III-ГО РОДА

Цель работы: построить зависимость температурного поля неограниченного цилиндра от времени и от координаты.

Теоретическая часть

Постановка задачи. Дан неограниченный цилиндр радиусом R и задано радиальное распределение температуры в виде некоторой функции $T_0(r)$. Предполагается, что изотермы представляют собой коаксиальные цилиндрические поверхности, т. е. температура цилиндра зависит только от радиуса и времени. В начальный момент времени цилиндр помещается в среду с постоянной температурой T_c . Требуется найти распределение температуры в цилиндре в любой момент времени.

Условие задачи математически может быть сформулировано следующим образом:

$$\frac{\partial T(r, \tau)}{\partial \tau} = a \left(\frac{\partial^2 T(r, \tau)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T(r, \tau)}{\partial r} \right);$$

$$T(r, 0) = T_0;$$

$$-\frac{\partial T(R, \tau)}{\partial r} + \alpha(T_c - T(R, \tau)) = 0;$$

$$\frac{\partial T(0, \tau)}{\partial r} = 0.$$

Решение поставленной задачи методом разделения переменных приводит к следующему решению [1]:

$$\theta = \frac{T(r, \tau) - T_0}{T_c - T_0} = \left(1 - \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0 \left(\mu_n \frac{r}{R} \right) \exp(\mu_n^2 Fo) \right);$$

$$A_n = \frac{2J_1(\mu_n)}{\mu_n (J_0^2(\mu_n) + J_1^2(\mu_n))}.$$

Корни характеристического уравнения μ_n находятся по приложению Ж.

Практическая часть

Данные для практической части приведены в приложениях А–В.

Задание 1. Определить критерий Био для неограниченного цилиндра.

Задание 2. Построить зависимость температуры от времени на поверхности и на оси цилиндра ($Fo \leq 3$).

Задание 3. Построить температурное поле цилиндра в момент времени $Fo = 3$.

Задание 4. Определить температурный перепад ΔT по сечению заготовки в момент времени $Fo = 3$.

Контрольные вопросы

1. Какой вид имеет характеристическое уравнение для нахождения μ_n ?

2. Какое влияние оказывают коэффициенты μ_n на изменение температуры при малых и больших числах Fo ?

3. Имеется ли особенность при $r = 0$?

4. Каков физический смысл коэффициентов A_n ?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лыков, А. В. Теория теплопроводности / А. В. Лыков. – М. : Высшая школа, 1967. – 600 с.
2. Неймарк, Б. Е. Физические свойства сталей и сплавов, применяемых в энергетике : справочник / Б. Е. Неймарк. – М. ; Л. : Энергия, 1967. – 240 с.
3. Бронштейн, И. Н. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов / И. Н. Бронштейн, К. А. Семендяев. – М. : Наука, 1981. – 720 с.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение А

Коэффициент теплопроводности сталей, Вт/(м·К) [2]

T, °C	0	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000	1100
Г13	14,2	15,15	16,4	18,2	18,8	21,9	23,2	21,6	21,9	–	–	–
30X	21,0	25,9	33,0	41,7	51,7	63,6	77,8	93,4	110,6	114,5	117,7	120,5
45	45,9	47,8	47,1	44,8	41,9	38,6	35,7	32,7	25,0	24,5	–	–
3X13	–	26,4	27,2	27,7	27,7	27,2	26,7	25,6	25,1	26,7	27,7	28,8
Н28	–	14,6	16,4	17,6	18,8	20,5	22,2	23,5	25,1	26,4	27,6	28,4
30XНЗ	–	34,8	35,9	36,1	36,0	34,1	31,6	28,4	26,7	27,5	28,1	29,0
08	65,1	60,2	55,6	50,9	46,5	41,0	37,4	34,0	30,1	27,2	27,7	28,5
50С2Г	–	28,5	30,2	31,0	31,0	31,0	30,2	28,0	25,1	25,6	26,4	27,7
У8	44,2	46,3	46,3	43,4	40,7	37,6	34,9	32,2	27,4	26,8	–	–
12МХ	25,8	28,6	33,9	41,1	50,0	59,6	71,4	84,0	95,2	105,2	–	–
20	51,9	51,0	48,5	44,4	42,7	39,3	35,6	31,9	25,9	26,4	27,7	28,5
40	51,9	50,6	48,1	45,6	41,9	38,1	33,5	30,0	24,8	25,7	26,9	28,0
35	47,9	49,4	49,1	46,5	43,7	40,6	37,9	34,8	28,6	28,0	–	–
30Г2	–	28,5	30,2	31,0	31,0	31,0	30,2	28,0	25,1	25,6	26,4	27,7
X18H9B	–	16,3	17,2	18,4	20,1	21,7	23,8	25,6	26,7	26,7	28,0	28,8
12XМФ	44,3	44,5	43,4	42,1	40,0	37,6	35,4	32,7	28,1	27,6	–	–

Приложение Б

Коэффициент температуропроводности, $10^5 \text{ м}^2/\text{с}$ [2]

T, °C	0	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000	1100
Г13	–	0,353	0,371	0,386	0,411	0,411	0,427	0,465	0,488	0,494	0,514	0,518
30X	–	1,110	1,018	0,932	0,831	0,693	0,586	0,444	0,504	0,584	0,601	0,632
45	1,33	1,25	1,14	1,03	0,889	0,778	0,639	0,500	0,500	–	–	–
3X13	–	0,716	0,688	0,641	0,595	0,514	0,437	0,358	0,387	0,548	0,580	0,602
H28	–	0,354	0,384	0,396	0,432	0,454	0,480	0,509	0,549	0,577	0,593	0,612
30XH3	–	0,884	0,872	0,827	0,762	0,644	0,528	0,304	0,502	0,602	0,583	0,602
08	–	1,56	1,35	1,16	0,987	0,791	0,639	0,569	0,459	0,472	0,542	–
50C2Г	–	0,736	0,738	0,714	0,657	0,596	0,523	0,431	0,340	0,547	0,557	0,572
У8	1,28	1,19	1,08	0,972	0,833	0,750	0,583	0,472	0,528	–	–	–
12MX	–	1,200	1,068	0,931	0,843	0,735	0,617	–	–	–	–	–
20	–	1,32	1,18	1,03	0,889	0,750	0,614	0,430	0,431	0,528	0,570	–
40	–	1,30	1,18	1,05	0,902	0,736	0,611	0,389	0,528	0,528	0,556	–
35	1,39	1,30	1,19	1,06	0,917	0,805	0,667	0,500	0,444	0,639	–	–
30Г2	–	0,749	0,748	0,721	0,665	0,602	0,518	0,321	0,478	0,600	0,582	0,597
X18H9B	–	0,399	0,409	0,427	0,448	0,460	0,485	0,535	0,548	0,551	0,578	0,587
12XMΦ	1,215	1,138	0,998	0,899	0,802	0,708	0,598	0,464	–	–	–	–

Приложение В

Данные для заданий

Таблица В1 – Марка стали заготовки

Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3	Вариант 4	Вариант 5	Вариант 6	Вариант 7	Вариант 8
Г13	30Х	45	3Х13	Н28	30ХН3	08	50С2Г
Вариант 9	Вариант 10	Вариант 11	Вариант 12	Вариант 13	Вариант 14	Вариант 15	Вариант 16
У8	12МХ	20	40	35	30Г2	Х18Н9В	12ХМФ

Таблица В2 – Температура среды T_c , °С

Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3	Вариант 4	Вариант 5	Вариант 6	Вариант 7	Вариант 8
800	860	1000	750	20	860	1010	860
Вариант 9	Вариант 10	Вариант 11	Вариант 12	Вариант 13	Вариант 14	Вариант 15	Вариант 16
1020	900	1030	1040	990	860	1100	750

Таблица В3 – Начальная температура заготовки T_0 , °С

Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3	Вариант 4	Вариант 5	Вариант 6	Вариант 7	Вариант 8
100	640	0	960	900	640	30	200
Вариант 9	Вариант 10	Вариант 11	Вариант 12	Вариант 13	Вариант 14	Вариант 15	Вариант 16
40	20	0	10	30	100	100	90

Таблица В4 – Характерный размер (толщина, диаметр), мм

Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3	Вариант 4	Вариант 5	Вариант 6	Вариант 7	Вариант 8
0,10	0,11	0,12	0,13	0,14	0,15	0,16	0,17
Вариант 9	Вариант 10	Вариант 11	Вариант 12	Вариант 13	Вариант 14	Вариант 15	Вариант 16
0,18	0,19	0,20	0,21	0,22	0,23	0,24	0,25

Таблица В5 – Конечный температурный перепад ΔT , °С

Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3	Вариант 4	Вариант 5	Вариант 6	Вариант 7	Вариант 8
15	20	25	30	35	40	41	42
Вариант 9	Вариант 10	Вариант 11	Вариант 12	Вариант 13	Вариант 14	Вариант 15	Вариант 16
43	44	45	46	47	48	49	50

Таблица В6 – Степень черноты рабочего пространства печи ϵ

Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3	Вариант 4	Вариант 5	Вариант 6	Вариант 7	Вариант 8
0,5	0,51	0,52	0,53	0,54	0,55	0,56	0,57
Вариант 9	Вариант 10	Вариант 11	Вариант 12	Вариант 13	Вариант 14	Вариант 15	Вариант 16
0,58	0,59	0,6	0,61	0,62	0,63	0,64	0,65

Таблица В7 – Коэффициент теплообмена α , Вт/(м²·К)

Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3	Вариант 4	Вариант 5	Вариант 6	Вариант 7	Вариант 8
90	95	100	105	110	115	120	125
Вариант 9	Вариант 10	Вариант 11	Вариант 12	Вариант 13	Вариант 14	Вариант 15	Вариант 16
130	135	140	145	150	155	160	165

Приложение Г

Функции Бесселя [3]

x	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$J_0(x)$	1	0,9975	0,9900	0,9776	0,9604	0,9385	0,9120	0,8812	0,8463
$J_1(x)$	0	0,0499	0,0995	0,1483	0,1960	0,2423	0,2867	0,3290	0,3688
x	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7
$J_0(x)$	0,8075	0,7652	0,7196	0,6711	0,6201	0,5669	0,5118	0,4554	0,3980
$J_1(x)$	0,4059	0,4401	0,4709	0,4983	0,5220	0,5419	0,5579	0,5699	0,5778
x	1,8	1,9	2,0	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
$J_0(x)$	0,3400	0,2818	0,2239	0,1666	0,1104	0,0555	0,0025	-0,0484	0,0968
$J_1(x)$	0,5815	0,5812	0,5767	0,5683	0,5560	0,5399	0,5202	0,4971	0,4708
x	2,7	2,8	2,9	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5
$J_0(x)$	0,1424	0,1850	0,2243	-0,2601	0,2921	0,3202	0,3443	0,3643	-0,3801
$J_1(x)$	0,4416	0,4097	0,3754	0,3391	0,3009	0,2613	0,2207	0,1792	0,1374
x	3,6	3,7	3,8	3,9	4,0	4,1	4,2	4,3	4,4
$J_0(x)$	0,3918	0,3992	0,4026	0,4018	-0,3971	0,3887	0,3766	0,3610	0,3423
$J_1(x)$	0,0955	0,0538	0,0128	-0,0272	-0,0660	0,1033	0,1386	0,1719	0,2028
x	4,5	4,6	4,7	4,8	4,9	5,0	5,1	5,2	5,3
$J_0(x)$	-0,3205	0,2961	0,2693	0,2404	0,2097	-0,1776	0,1443	0,1103	0,0758
$J_1(x)$	-0,2311	0,2566	0,2791	0,2985	0,3147	-0,3276	0,3371	0,3432	0,3460
x	5,4	5,5	5,6	5,7	5,8	5,9	6,0	6,1	6,2
$J_0(x)$	0,0412	-0,0068	0,0270	0,0599	0,0917	0,1220	0,1506	0,1773	0,2017
$J_1(x)$	0,3453	-0,3414	0,3343	0,3241	0,3110	0,2951	-0,2767	0,2559	0,2329
x	6,3	6,4	6,5	6,6	6,7	6,8	6,9	7,0	7,1
$J_0(x)$	0,2238	0,2433	0,2601	0,2740	0,2851	0,2931	0,2981	0,3001	0,2991
$J_1(x)$	0,2081	0,1816	-0,1538	0,1250	0,0953	0,0652	0,0349	-0,0047	0,0252
x	7,2	7,3	7,4	7,5	7,6	7,7	7,8	7,9	8,0
$J_0(x)$	0,2951	0,2882	0,2786	0,2663	0,2516	0,2346	0,2154	0,1944	0,1717
$J_1(x)$	0,0543	0,0826	0,1096	0,1352	0,1592	0,1813	0,2014	0,2192	0,2346
x	8,1	8,2	8,3	8,4	8,5	8,6	8,7	8,8	8,9
$J_0(x)$	0,1475	0,1222	0,0960	0,0692	0,0419	0,0146	-0,0125	0,0392	0,0653
$J_1(x)$	0,2476	0,2580	0,2657	0,2708	0,2731	0,2728	0,2697	0,2641	0,2559
x	9,0	9,1	9,2	9,3	9,4	9,5	9,6	9,7	9,8
$J_0(x)$	-0,0903	0,1142	0,1367	0,1577	0,1768	-0,1939	0,2090	0,2218	0,2323
$J_1(x)$	0,2453	0,2324	0,2174	0,2004	0,1816	0,1613	0,1395	0,1166	0,0928
x	9,9	10,0							
$J_0(x)$	0,2403	-0,2459							
$J_1(x)$	0,0684	0,0435							

Приложение Д

Корни характеристического уравнения $\sigma \mu = \frac{1}{B_i} \mu$ [1]

B_i	μ₁	μ₂	μ₃	B_i	μ₁	μ₂	μ₃
0	0	3,1416	6,2832	1,0	0,8603	3,4256	6,4373
0,001	0,0316	3,1419	6,2833	1,5	0,9882	3,5422	6,5097
0,002	0,0447	3,1422	6,2835	2,0	1,0769	3,6436	6,5783
0,004	0,0632	3,1429	6,2838	3,0	1,1925	3,8088	6,7040
0,006	0,0774	3,1435	6,2841	4,0	1,2646	3,9352	6,8140
0,008	0,0893	3,1441	6,2845	5,0	1,3138	4,0336	6,9096
0,01	0,0998	3,1448	6,2848	6,0	1,3496	4,1116	6,9924
0,02	0,1410	3,1479	6,2864	7,0	1,3766	4,1746	7,0640
0,04	0,1987	3,1543	6,2895	8,0	1,3978	4,2264	7,1263
0,06	0,2425	3,1606	6,2927	9,0	1,4149	4,2694	7,1806
0,08	0,2791	3,1668	6,2959	10,0	1,4289	4,3058	7,2281
0,1	0,3111	3,1731	6,2991	15,0	1,4729	4,4255	7,3959
0,2	0,4328	3,2039	6,3148	20,0	1,4961	4,4915	7,4954
0,3	0,5218	3,2341	6,3305	30,0	1,5202	4,5615	7,6057
0,4	0,5932	3,2636	6,3461	40,0	1,5325	4,5979	7,6647
0,5	0,6533	3,2923	6,3616	50,0	1,5400	4,6202	7,7012
0,6	0,7051	3,3204	6,3770	60,0	1,5451	4,6353	7,7259
0,7	0,7506	3,3477	6,3923	80,0	1,5514	4,6543	7,7573
0,8	0,7910	3,3744	6,4074	100,0	1,5552	4,6658	7,7764
0,9	0,8274	3,4003	6,4224	∞	1,5708	4,7124	7,8540

Приложение Е

Корни характеристического уравнения $\operatorname{tg} \mu = \frac{1}{B_i - 1} \mu$ [1]

B_i	μ_1	μ_2	μ_3	B_i	μ_1	μ_2	μ_3
0	0	4,4934	7,7253	1,4	1,7906	4,7956	7,9046
0,005	0,1224	4,4945	7,7259	1,5	1,8366	4,8158	7,9171
0,01	0,1730	4,4956	7,7265	1,6	1,8798	4,8358	7,9295
0,02	0,2445	4,4979	7,7278	1,7	1,9203	4,8556	7,9449
0,03	0,2991	4,5001	7,7291	1,8	1,9586	4,8751	7,9542
0,04	0,3450	4,5023	7,7304	1,9	1,9947	4,8943	7,9665
0,05	0,3854	4,5045	7,7317	2,0	2,0288	4,9132	7,9787
0,06	0,4217	4,5068	7,7330	2,5	2,1746	5,0037	8,0385
0,07	0,4551	4,5090	7,7343	3,0	2,2889	5,0870	8,0962
0,08	0,4860	4,5112	7,7356	4,0	2,4557	5,2329	8,2045
0,09	0,5150	4,5134	7,7369	5,0	2,5704	5,3540	8,3029
0,1	0,5423	4,5157	7,7382	6,0	2,6537	5,4544	8,3914
0,15	0,6609	4,5268	7,7447	7,0	2,7165	5,5378	8,4703
0,2	0,7593	4,5379	7,7511	8,0	2,7654	5,6078	8,5406
0,3	0,9208	4,5601	7,7641	9,0	2,8044	5,6669	8,6031
0,4	1,0528	4,5822	7,7770	10,0	2,8363	5,7172	8,6587
0,5	1,1656	4,6042	7,7899	11,0	2,8628	5,7606	8,7083
0,6	1,2644	4,6261	7,8028	16,0	2,9476	5,9080	8,8898
0,7	1,3525	4,6479	7,8156	21,0	2,9930	5,9921	9,0019
0,8	1,4320	4,6696	7,8284	31,0	3,0406	6,0831	9,1294
0,9	1,5044	4,6911	7,8412	41,0	3,0651	6,1311	9,1987
1,0	1,5708	4,7124	7,8540	51,0	3,0801	6,1606	9,2420
1,1	1,6320	4,7335	7,8667	81,0	3,1028	6,2058	9,3089
1,2	1,6887	4,7544	7,8794	101,0	3,1105	6,2211	9,3317
1,3	1,7414	4,7751	7,8920	∞	3,1416	6,2832	9,4248

Приложение Ж

Корни характеристического уравнения $\frac{J_0(\mu)}{J_1(\mu)} = \frac{1}{Bi} \mu$ [1]

Bi	μ_1	μ_2	μ_3	Bi	μ_1	μ_2	μ_3
0	0	3,8317	7,0156	2,0	1,5994	4,2910	7,2884
0,01	0,1412	3,8343	7,0170	3,0	1,7887	4,4634	7,4103
0,02	0,1995	3,8369	7,0184	4,0	1,9081	4,6018	7,5201
0,04	0,2814	3,8421	7,0213	5,0	1,9898	4,7131	7,6177
0,06	0,3438	3,8473	7,0241	6,0	2,0490	4,8033	7,7039
0,08	0,3960	3,8525	7,0270	7,0	2,0937	4,8772	7,7797
0,1	0,4417	3,8577	7,0298	8,0	2,1286	4,9384	7,8464
0,15	0,5376	3,8706	7,0369	9,0	2,1566	4,9897	7,9051
0,2	0,6170	3,8835	7,0440	10,0	2,1795	5,0332	7,9569
0,3	0,7465	3,9091	7,0582	15,0	2,2509	5,1773	8,1422
0,4	0,8516	3,9344	7,0723	20,0	2,2880	5,2568	8,2534
0,5	0,9408	3,9594	7,0864	30,0	2,3261	5,3410	8,3771
0,6	1,0184	3,9841	7,1004	40,0	2,3455	5,3846	8,4432
0,7	1,0873	4,0085	7,1143	50,0	2,3572	5,4112	8,4840
0,8	1,1490	4,0325	7,1282	60,0	2,3651	5,4291	8,5116
0,9	1,2048	4,0562	7,1421	80,0	2,3750	5,4516	8,5466
1,0	1,2558	4,0795	7,1558	100,0	2,3809	5,4652	8,5678
1,5	1,4569	4,1902	7,2233	∞	2,4048	5,5201	8,6537

Учебное издание

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ**

Лабораторный практикум
для студентов специальности
1-42 01 01 «Металлургическое производство
и материаловобработка»

Составители:

МЕНДЕЛЕВ Дмитрий Владимирович
ТРУСОВА Ирина Александровна
КАБИШОВ Сергей Михайлович и др.

Редактор *Т. А. Зезюльчик*
Компьютерная верстка *А. Г. Занкевич*

Подписано в печать 03.12.2014. Формат 60×84 ¹/₁₆. Бумага офсетная. Ризография.
Усл. печ. л. 2,33. Уч.-изд. л. 1,82. Тираж 100. Заказ 1023.

Издатель и полиграфическое исполнение: Белорусский национальный технический университет.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя
печатных изданий № 1/173 от 12.02.2014. Пр. Независимости, 65. 220013, г. Минск.