УДК 624.04

Использование метода проекции градиента в задаче оптимизации балки

Сабук А.А.
(научный руководитель – Борисевич А.А.)
Белорусский национальный технический университет
Минск, Беларусь

Введение

В настоящее время ведутся активные исследования по разработке численных методов оптимального проектирования конструкций. Цель этой работы – показать особенности поиска оптимального проекта с помощью метода проекций градиента.

Исследуется расчетная схема балки с различными, но постоянными сечениями на участке AC и CB (рис. 1)

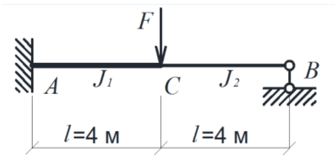

Рисунок 1- Расчетная схема балки

Изгибающие моменты M_A и M_C в сечениях A и C определяются по формулам:

$$M_A = Fl\,\frac{J_1 + 2J_2}{J_1 + 7J_2}, \quad M_C = 2{,}5Fl\,\frac{J_2}{J_1 + 7J_2}$$

где F = 15 кН; l = 4 м;

J_1 и J_2 – моменты инерции сечений на отрезках AC и CB.

Оптимизация размеров сечений на границах AC и CB выполнялась в соответствии с сортаментом на гнутые сварные замкнутые прямоугольные профили ТУ 36-2287-80 (с изменениями №2). Для организации непрерывного движения поисковой точки к оптимальному решению в расчете использовались аппроксимирующие функции для геометрических характеристик сечений, которые соответствуют возможному ряду используемых в проекте профилей балки. Аппроксимирующие полиномы приняты в виде:

$$J_1 = -3{,}22189 + 0{,}300054\,x_1 + 0{,}239149\,x_1^2 + 0{,}0418113\,x_1^3;$$

$$J_2 = -3{,}22189 + 0{,}300054\,x_2 + 0{,}239149\,x_2^2 + 0{,}0418113\,x_2^3;$$

$$W_1 = -2{,}60887 + 0{,}405004\,x_1 + 0{,}156864\,x_1^2 + 0{,}000130208\,x_1^3;$$

$$W_2 = -2{,}60887 + 0{,}405004\,x_2 + 0{,}156864\,x_2^2 + 0{,}000130208\,x_2^3;$$

где x_1 и x_2 – площади сечений на участке АС и СВ балки, см^2;

W_1, W_2 – моменты сопротивления сечений балки.

Напряжения σ_A, $\sigma_{C\ лев}$ и $\sigma_{C\ прав}$ выражаются через функции, у которых существуют производные по x_1 и x_2 во всех точках кривых. Напряжения во всех сечениях не должны превышать расчетного сопротивления материала на растяжение-сжатие, принятого равным 300 МПа.

Целевая функция выражает объем балки: $V = 4x_1 + 4x_2$.

Требуется найти оптимальные параметры сечений и минимальный объем материала на ее изготовление.

Методика решения

Решение задачи выполняется с помощью метода проекций градиента. Рассматриваются 3 варианта постановки и решения задачи:

- в задаче оптимизации учитываются только ограничения на напряжения в сечениях балки;
- в задаче оптимизации учитывается только ограничение на перемещение сечения С;
- в задаче оптимизации учитываются ограничения на напряжения и на перемещения сечения С.

А. Нахождение оптимального решения с учетом только функций напряжений.

Примем площадь сечения на участке АС равной 50 см^2, а на участке СВ – 25 см^2. Для этих данных объем материала балки и напряжения в сечениях приведены в таблице 1.

Таблица 1- Напряжения в сечениях балки

Площадь сечения на участке АС x_1, см^2	Площадь сечения на участке СВ x_2, см^2	Объем балки V, см^3	Напряжения в сечении А σ_A, МПа	Напряжения в сечении С слева $\sigma_{C\ лев}$, МПа	Напряжения в сечении С справа $\sigma_{C\ прав}$, МПа
50	25	30000	91,34	24,74	97,96

Наибольшее нормальное напряжение, как видно из таблицы 1, возникает в сечении С справа и равно 97,96 МПа. Определив значения первых производных по x_1 и x_2 от функции напряжения в сечении С справа, получим уравнение прямой, являющейся нормалью к функции $\sigma_{C\ прав}$ в исходной точке: $x_1 - 1{,}346x_2 = 16{,}357$.

Проекция s'' антиградиента целевой функции $s = -\nabla f = [-4 \quad -4]^T$ на эту прямую показывает направление спуска (рис. 2).

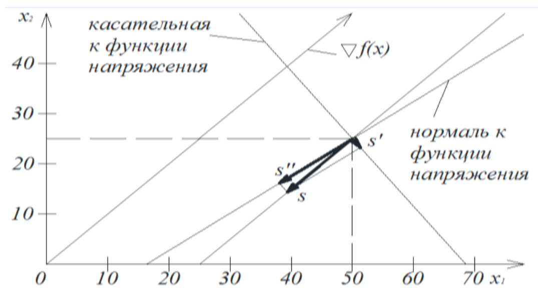

Рисунок 2 - Проекции вектора антиградиента целевой функции на касательную и нормаль к функции напряжения

Проекционная матрица Р вычисляется по выражению:

$$P = (I - a(a^T a)^{-1} a^T).$$

Вектор а имеет компоненты $a = [1 \quad -1{,}346]^T$, $P =$

$$= \begin{pmatrix} 0{,}644254 & 0{,}478739 \\ 0{,}478739 & 0{,}355746 \end{pmatrix}.$$

Проекция $s'' = P(-\nabla f) = \begin{pmatrix} -4{,}49197 \\ -3{,}33794 \end{pmatrix}$.

Координата точки, в которой целевая функция имеет меньшее значение, находится по выражению:

$$x^{t+1} = x^t + \alpha s''$$

где x^{t+1} - новая точка; x^t - начальная точка; α – длина шага.

Принимая α = 0,25, получим $x^{t+1} = [48{,}877; \quad 24{,}166]^T$.

При новых значениях площадей сечений объем балки равен 29 217 см^3.Напряжение в сечении А равно 96,37 МПа, а в сечении С оно составляет 25,50 МПа (слева) и 103,18 МПа (справа). Наибольшее напряжение наблюдается снова в сечении С справа.

Принимаем точку (48,877; 24,1655) за начальную и повторяем все вышеуказанные действия до тех пор пока напряжение в одном из сечений не станет равным 300 МПа.

В результате при движении из точки (50; 25) были получены значения площадей x_1 = 29,842 см^2 и x_2 = 12,781 см^2. Объем балки оказался равным 17 049 см^3. Напряжение в сечении А равно 280,62 МПа, а в сечении С оно составляет 56,24 МПа (слева) и 301,59 МПа (справа). Граница области допустимых значений достигнута, и дальнейшее движение вдоль вектора s’’ не представляется возможным.

Дальнейшее движение поисковой точки вдоль вектора s’ (вдоль границы области допустимых решений) позволяет найти оптимальное решение:x_1 = 34,354 см^2 и x_2 = 0 см^2. Объем балки равен 13742 см^3. Напряжение в сечении А равно 299,9 МПа.

Б. Нахождение оптимального решения с учетом только функции перемещения сечения С.

Ограничение на вертикальное перемещение сечения С вычисляется по выражению:

$$\Delta_C = \frac{Fl^3}{6EJ_1} \cdot \frac{2J_1 + 1{,}5J_2}{J_1 + 7J_2}.$$

При начальных исходных данных вертикальное перемещение сечения С составляет 1,49 см.

Определив значения первых производных по x_1 и x_2 от функции перемещения в сечении С в исходной точке ($\frac{\partial \Delta_C}{\partial x_1} = -0{,}052$; $\frac{\partial \Delta_C}{\partial x_2} = -0{,}067$) и проведя вычисления, аналогичные изложенным ранее, получили, что при $\Delta_c = 7$ см оптимальными являются значения площадей $x_1 = 36{,}023$ см^2 и $x_2 = 0$ см^2. Объем балки равен 14409 см^3. Вертикальное перемещение сечения С составляет 6,9 см. Напряжение в сечении А равно 272,67 МПа.

В. Нахождение оптимального решения с учетом функций напряжений и функции перемещения сечения С.

Задача решается практически аналогично п. А и Б.

В этом случае в расчет вводится вместо вектора а матрица

$a = \begin{pmatrix} 1{,}282 & 0{,}743 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. Проекционная матрица Р получается в виде:

$$P = \begin{pmatrix} -6{,}55083 & 6{,}96177 \\ 6{,}96177 & -5{,}87383 \end{pmatrix}.$$

Проекция $s'' = P(-\nabla f) = (-1{,}644 \quad -4{,}352)^T$.

Дальнейшие шаги в задаче оптимизации соответствуют методу, изложенному в п. А.

В результате при движении из точки (50; 25) были получены значения площадей $x_1 = 29{,}801$ см^2 и $x_2 = 13{,}587$ см^2. Объем балки равен 17 355 см^3, вертикальное перемещение сечения С составляет 7,099 см. Напряжение в сечении А равно 269,75 МПа, а в сечении С оно составляет 62,22 МПа (слева) и 294,32 МПа (справа). Наибольшее напряжение наблюдается также в сечении С справа и почти достигает расчетное сопротивление материала R = 300 МПа.

Заключение

1. Предлагаемая к использованию методика применения метода проекций градиента позволяет найти оптимальные параметры балки. Неотрицательность переменных отслеживается на каждом шаге движения поисковой точки.
2. Изложенная методика может быть распространена, как показано в п. В, на случай задачи оптимизации со множеством ограничений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Борисевич А.А., Воробей А.А. Формирование области допустимых решений для балки и применение полученных результатов в задачах оптимизации // Вопросы внедрения норм проектирования и стандартов Европейского союза в области строительства. Сборник научно-технических статей: материалы научно-методического семинара, Минск, 29 мая 2012 г. / В 2-х частях. Часть 1. – Минск: БНТУ, 2012. – с. 175-183.
2. Борисевич, А.А. Строительная механика: учебное пособие для вузов / А.А. Борисевич, Е.М. Сидорович, В.И. Игнатюк. – 2-е изд., перераб. – Минск: БНТУ, 2009. – 756 с.
3. Реклейтис Г., Рейвиндран А., Рэгсдел К. Оптимизация в технике: В 2-х кн. Кн.2. Пер. с англ. – М.: Мир, 1986. – 320 с.

УДК 69:658.53

Система индексов в строительной отрасли

Жлобо Е.Е.
(научный руководитель –Голубова О.С.)
Белорусский национальный технический университет
Минск, Беларусь

Системой ценообразования в Республике Беларусь предусмотрены следующие методы определения стоимости строительства: ресурсный, ресурсно-индексный, базисно-индексный. Массовое распространение получил базисно-