

## ТЕПЛООБМЕН ПРИ ТЕЧЕНИИ КУЭТТА С УЧЕТОМ ТЕПЛОТЫ ТРЕНИЯ

Докт. физ.-мат. наук, проф. КУДИНОВ В. А., асп. КУДИНОВ И. В.

*Самарский государственный технический университет*

Рассмотрим теплообмен в жидкости, находящейся между двумя плоскими стенками, одна из которых движется относительно другой с некоторой постоянной скоростью  $\omega_0$  (теплообмен при течении Куэтта [1, 2], рис. 1). Исследование таких задач необходимо при изучении гидродинамики и теплообмена в пограничном слое обтекаемых тел.

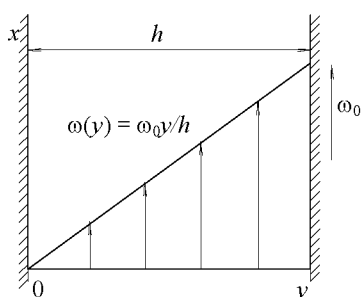


Рис. 1. Схема течения жидкости в плоскопараллельном канале

Выполним исследование распределения температуры в жидкости с учетом теплоты трения. Задача в данном случае является нелинейной – ее точное аналитическое решение не получено. Приближенное аналитическое решение данной задачи путем совместного использования интегральных преобразований Лапласа и ортогонального метода Бубнова – Галеркина приводится в [1]. Однако данное решение получено лишь в третьем приближении, что не позво-

ляет проводить исследование теплообмена для малых значений продольной координаты. Увеличение числа приближений по методу [1] связано с необходимостью решения в общем виде (в изображениях по Лапласу) больших систем алгебраических уравнений, содержащих параметр интегрального преобразования. В данном случае относительно изображения искомой функции получаются столь сложные выражения, что обратный переход от изображения к оригиналам оказывается практически неосуществимым ввиду отсутствия соответствующих стандартных формул для выполнения такого перехода. В то же время получение решения для начального участка продольной координаты связано с существенным увеличением числа приближений. К тому же исследование теплообмена именно на этом участке представляет наибольший интерес, и особенно в случаях, когда мощность теплового потока от диссипации энергии становится соизмеримой или превышает все другие виды переноса теплоты в пограничном слое (движение тел при больших скоростях).

В настоящей работе для решения указанной задачи применен ортогональный метод Л. В. Канторовича, с помощью которого получено решение в пятом приближении. При этом каких-либо принципиальных трудностей, связанных с дальнейшим увеличением числа приближений, не возникает. В то же время уже в пятом приближении найдено решение для значений безразмерной продольной координаты  $\eta = 1 \cdot 10^{-4}$ , что позволило получить результаты, отсутствующие в известной литературе.

Математическая постановка задачи в данном случае имеет вид

$$\omega(y) \frac{\partial T(x, y)}{\partial x} = a \frac{\partial^2 T(x, y)}{\partial y^2} + \frac{\mu}{c\rho} \left( \frac{d\omega}{dy} \right)^2, \quad (1)$$

$$0 \leq y \leq h; \quad 0 \leq x < \infty;$$

$$T(0, y) = T_0; \quad T(x, 0) = T_1; \quad T(x, h) = T_2, \quad (2)$$

где  $\omega(y) = \omega_0 y / h$  – профиль скорости плоскопараллельного течения (течение Куэтта);  $h$  – ширина канала;  $y, x$  – поперечная и продольная координаты;  $\mu$  – динамическая вязкость;  $c$  – удельная теплоемкость;  $\rho$  – плотность;  $a$  – коэффициент температуропроводности;  $T$  – температура;  $T_0$  – то же жидкости на входе в канал ( $x = 0$ );  $T_1, T_2$  – температуры стенок.

Введем следующие безразмерные переменные и параметры:

$$\xi = y/h; \quad \eta = x/(Pe h); \quad Pe = \omega_0 h / a, \quad (3)$$

где  $Pe$  – число Пекле.

С учетом принятых обозначений задача (1), (2) приводится к виду:

$$\xi \frac{\partial T(\eta, \xi)}{\partial \eta} = \frac{\partial T^2(\eta, \xi)}{\partial \xi^2} + R_1, \quad (4)$$

$$0 \leq \eta < \infty; \quad 0 \leq \xi \leq 1;$$

$$T(0, \xi) = T_0; \quad (5)$$

$$T(\eta, 0) = T_1; \quad (6)$$

$$T(\eta, 1) = T_2, \quad (7)$$

где  $R_1 = \mu \omega_0^2 / \lambda$ ;  $\lambda = a c \rho$  – коэффициент теплопроводности.

Приближенное решение задачи, следуя ортогональному методу Л. В. Канторовича, рассчитывается следующим образом [2, 4]:

$$T(\eta, \xi) = (T_2 - T_1)\xi + T_1 + \sum_{k=1}^n f_k(\eta) \varphi_k(\xi), \quad (8)$$

где  $f_k(\eta)$  – неизвестные функции;  $\varphi_k(\xi) = (1 - \xi)\xi^k$  – координатные функции.

Благодаря принятой системе координатных функций соотношение (8) точно удовлетворяет граничным условиям (6), (7). Неизвестные функции  $f_k(\eta)$  ( $k = \overline{1, n}$ ) находятся из выполнения дифференциального уравнения (4) и граничного условия (5).

Для получения решения в первом приближении составим невязку дифференциального уравнения (4) и потребуем ортогональности невязки к координатной функции  $\varphi_1(\xi) = (1 - \xi)\xi$

$$\int_0^1 \xi \frac{\partial T}{\partial \eta} \varphi_1(\xi) d\xi = \int_0^1 \frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2} \varphi_1(\xi) d\xi + \int_0^1 R_1 \varphi_1(\xi) d\xi. \quad (9)$$

Найдем решение для случая, когда изменение температуры в потоке происходит только за счет теплоты трения, т. е.  $T_1 = T_2 = T_0$ . Тогда соотношение (8) примет вид

$$T(\eta, \xi) = T_0 + \sum_{k=1}^n f_k(\eta)(1-\xi)\xi^k. \quad (10)$$

Подставляя (10) в (9), ограничиваясь одним членом ряда (10), находим

$$\frac{1}{20} \frac{df_1}{d\eta} + f_1 - \frac{1}{2} R_1 = 0. \quad (11)$$

Интегрируя уравнение (11), получаем

$$f_1(\eta) = C \exp(-20\eta) + 0,5R_1,$$

где  $C$  – постоянная интегрирования.

Подставляя соотношение для  $f_1(\eta)$  в (10), имеем

$$T(\eta, \xi) = T_0 + [C \exp(-20\eta) + 0,5R_1](1-\xi)\xi. \quad (12)$$

Для определения постоянной интегрирования составим невязку граничного условия (5) и потребуем ортогональности невязки к координатной функции  $\varphi_1(\xi)$

$$C \int_0^1 (1-\xi)^2 \xi^2 d\xi + 0,5R_1 \int_0^1 (1-\xi)^2 \xi^2 d\xi = 0.$$

Определяя интегралы, находим  $C = -0,5R_1$ .

С учетом найденного значения постоянной интегрирования соотношение (12) принимает вид

$$T(\eta, \xi) = T_0 + 0,5R_1 [1 - \exp(-20\eta)](1-\xi)\xi. \quad (13)$$

Вводя безразмерную температуру по формуле  $\Theta(\eta, \xi) = (T - T_0) / R_1$ , получаем

$$\Theta(\eta, \xi) = 0,5[1 - \exp(-20\eta)](1-\xi)\xi. \quad (14)$$

Для нахождения решения задачи (4)–(7) во втором приближении, ограничиваясь двумя членами ряда (9), составляется невязка уравнения (8) и требуется ортогональность невязки к координатным функциям  $\varphi_1(\xi)$  и  $\varphi_2(\xi)$

$$\int_0^1 \left[ \xi \left( \frac{\partial f_1}{\partial \eta} \varphi_1 + \frac{\partial f_2}{\partial \eta} \varphi_2 \right) - f_1 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \xi^2} - f_2 \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial \xi^2} - R_1 \right] \varphi_j(\xi) d\xi = 0 \quad (j=1, 2). \quad (15)$$

Определяя интегралы в (15), относительно неизвестных функций  $f_1(\eta)$  и  $f_2(\eta)$  приходим к следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} A_{11}f_1' + A_{12}f_2' + B_{11}f_1 + B_{12}f_2 + N_1 &= 0; \\ A_{21}f_1' + A_{22}f_2' + B_{21}f_1 + B_{22}f_2 + N_2 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

где  $A_{11} = \int_0^1 \xi \varphi_1 \varphi_1 d\xi = 1/60$ ;  $A_{12} = \int_0^1 \xi \varphi_1 \varphi_2 d\xi = 1/105$ ;  $B_{11} = -\int_0^1 \xi \varphi_1'' \varphi_1 d\xi = -1/3$ ;

$B_{12} = -\int_0^1 \xi \varphi_2'' \varphi_2 d\xi = -1/6$ ;  $A_{21} = \int_0^1 \xi \varphi_1 \varphi_2 d\xi = 1/105$ ;  $A_{22} = \int_0^1 \xi \varphi_2 \varphi_2 d\xi = 1/168$ ;

$B_{21} = -\int_0^1 \xi \varphi_1'' \varphi_2 d\xi = -1/6$ ;  $B_{22} = -\int_0^1 \xi \varphi_2'' \varphi_2 d\xi = -2/15$ ;  $N_1 = -R_1 \int_0^1 \varphi_1 d\xi = -R_1/6$ ;

$$N_2 = -R_1 \int_0^1 \varphi_2 d\xi = -R_1/12. \quad (17)$$

Решение системы уравнений (16) определяется в виде:

$$f_1(\eta) = \bar{f}_1(\eta) + f_1^*(\eta); \quad (18)$$

$$f_2(\eta) = \bar{f}_2(\eta) + f_2^*(\eta), \quad (19)$$

где  $\bar{f}_1(\eta)$ ,  $\bar{f}_2(\eta)$  – частные решения неоднородной системы уравнений (16);  $f_1^*(\eta)$ ,  $f_2^*(\eta)$  – общие решения соответствующей однородной системы, т. е. при  $N_1 = N_2 = 0$ .

Общие решения однородной системы:

$$f_1^*(\eta) = D_1 \exp(\mu\eta); \quad f_2^*(\eta) = D_2 \exp(\mu\eta), \quad (20)$$

где  $D_1$ ,  $D_2$ ,  $\mu$  – некоторые пока неизвестные постоянные.

Подставляя (20) в (16), положив  $N_1 = N_2 = 0$ , получаем следующую систему двух однородных алгебраических уравнений:

$$\left. \begin{aligned} D_1(A_{11}\mu + B_{11}) + D_2(A_{12}\mu + B_{12}) &= 0; \\ D_1(A_{21}\mu + B_{21}) + D_2(A_{22}\mu + B_{22}) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Однородная система уравнений имеет нетривиальное решение в случае, если определитель ее равен нулю:

$$\begin{vmatrix} A_{11}\mu + B_{11} & A_{12}\mu + B_{12} \\ A_{21}\mu + B_{21} & A_{22}\mu + B_{22} \end{vmatrix} = 0. \quad (22)$$

Раскрывая определитель, относительно  $\mu$  с учетом соотношений (17) получаем алгебраическое уравнение вида

$$\mu^2 / 5880 + 13\mu / 630 + 1/3 = 0. \quad (23)$$

Из решения уравнения (23) получаем:

$$\mu_1 = -19,19; \quad \mu_2 = -102,15.$$

Ввиду того что элементы матрицы (22) положительны и симметричны относительно главной диагонали, корни  $\mu_k$  ( $k=1, 2$ ) получаются действительными отрицательными числами. Эти корни являются приближенными значениями собственных чисел краевой задачи (4)–(7).

Подставляя  $\mu_k$  ( $k=1, 2$ ) в (21), для каждого собственного числа находятся неизвестные коэффициенты  $D_{kj}$  ( $k=j=1, 2$ ). При этом в однородной системе уравнений следует положить  $D_{11} = D_{21} = 1$ . Тогда:  $D_{12} = 0,8418$ ;  $D_{22} = -1,6983$ .

С учетом найденных значений коэффициентов  $D_{kj}$  ( $k=j=1, 2$ ) соотношения (20) примут вид:

$$f_1^*(\eta) = D_{11} \exp(\mu_1 \eta) + D_{21} \exp(\mu_2 \eta); \quad (24)$$

$$f_2^*(\eta) = D_{12} \exp(\mu_1 \eta) + D_{22} \exp(\mu_2 \eta). \quad (25)$$

Умножая в (24), (25) слагаемые, соответствующие корню  $\mu_1$ , на произвольную постоянную  $C_1$ , и слагаемые, соответствующие корню  $\mu_2$ , – на  $C_2$ , а также учитывая, что  $D_{11} = D_{21} = 1$ , получаем:

$$f_1^*(\eta) = C_1 \exp(\mu_1 \eta) + C_2 \exp(\mu_2 \eta); \quad (26)$$

$$f_2^*(\eta) = C_1 D_{12} \exp(\mu_1 \eta) + C_2 D_{22} \exp(\mu_2 \eta). \quad (27)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  в дальнейшем будут находиться из начального условия (5).

Соотношения (26), (27) представляют общие решения однородной системы уравнений (16), т. е. при  $N_1 = N_2 = 0$ .

Частные решения  $\bar{f}_1$  и  $\bar{f}_2$  неоднородной системы уравнений (16) будем находить в виде общих решений (26), (27), считая при этом  $C_1$  и  $C_2$  не постоянными величинами, а функциями переменной  $\eta$ :

$$\bar{f}_1(\eta) = C_1(\eta) \exp(\mu_1 \eta) + C_2(\eta) \exp(\mu_2 \eta); \quad (28)$$

$$\bar{f}_2(\eta) = C_1(\eta) D_{12} \exp(\mu_1 \eta) + C_2(\eta) D_{22} \exp(\mu_2 \eta). \quad (29)$$

Подставляя (28), (29) в (16), находим:

$$\left. \begin{aligned} C_1'(\eta) v_1(A_{11} + A_{12} D_{12}) + C_2'(\eta) v_2(A_{11} + A_{12} D_{12}) + N_1 &= 0; \\ C_1'(\eta) v_1(A_{21} + A_{22} D_{12}) + C_2'(\eta) v_2(A_{21} + A_{22} D_{12}) + N_2 &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

где  $v_1 = \exp(\mu_1 \eta)$ ;  $v_2 = \exp(\mu_2 \eta)$ .

Соотношения (30) относительно неизвестных  $C_1'(\eta)$  и  $C_2'(\eta)$  представляют систему двух алгебраических линейных уравнений. Ее решение:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dC_1}{d\eta} &= \frac{N_1(A_{21} + A_{22}D_{22}) - N_2(A_{11} + A_{12}D_{22})}{v_1(D_{12} - D_{22})(A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21})}, \\ \frac{dC_2}{d\eta} &= \frac{N_1(A_{11} + A_{12}D_{12}) - N_2(A_{21} + A_{22}D_{12})}{v_2(D_{12} - D_{22})(A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21})}. \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Соотношения (31) относительно  $C_1(\eta)$  и  $C_2(\eta)$  представляют обыкновенные дифференциальные уравнения. Разделяя переменные и интегрируя, получаем:

$$C_1(\eta) = -\frac{1}{\mu_1 e^{\mu_1 \eta}} \frac{N_1(A_{21} + A_{22}D_{22}) - N_2(A_{11} + A_{12}D_{22})}{v_1(D_{12} - D_{22})(A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21})} + z_1; \quad (32)$$

$$C_2(\eta) = \frac{1}{\mu_2 e^{\mu_2 \eta}} \frac{N_2(A_{11} + A_{12}D_{12}) - N_1(A_{21} + A_{22}D_{12})}{v_2(D_{12} - D_{22})(A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21})} + z_2, \quad (33)$$

где  $z_1$  и  $z_2$  – постоянные интегрирования (так как находятся частные решения, то можно принять  $z_1 = 0$ ,  $z_2 = 0$ ).

Подставляя (32), (33) в (28), (29), находим частные решения системы уравнений (16):

$$\bar{f}_1(\eta) = [\mu_2(N_2b_1 - N_1b_2) + \mu_1(N_1b_3 - N_2b_4)] / (\mu_1\mu_2b_5); \quad (34)$$

$$\bar{f}_2(\eta) = [\mu_2(N_2\delta_1 - N_1\delta_2) + \mu_1(N_1\delta_3 - N_2\delta_4)] / (\mu_1\mu_2b_5), \quad (35)$$

где  $\delta_1 = D_{12}(A_{11} + A_{12}D_{22})$ ;  $\delta_2 = D_{12}(A_{21} + A_{22}D_{22})$ ;  $\delta_3 = D_{22}(A_{21} + A_{22}D_{12})$ ;

$$\delta_4 = D_{22}(A_{11} + A_{12}D_{12}); \quad b_1 = A_{11} + A_{12}D_{22}; \quad b_2 = A_{21} + A_{22}D_{22};$$

$$b_3 = A_{21} + A_{22}D_{12}; \quad b_4 = A_{11} + A_{12}D_{12};$$

$$b_5 = A_{11}A_{22}(D_{12} - D_{22}) + A_{12}A_{21}(D_{22} - D_{12}).$$

Подставляя (26), (27), (34), (35) в (18), (19), получаем:

$$f_1(\eta) = C_1 e^{\mu_1 \eta} + C_2 e^{\mu_2 \eta} + [\mu_2(N_2b_1 - N_1b_2) + \mu_1(N_1b_3 - N_2b_4)] / r; \quad (36)$$

$$f_2(\eta) = C_1 D_{12} e^{\mu_1 \eta} + C_2 D_{22} e^{\mu_2 \eta} + [\mu_2 r_1 + \mu_1 r_2] / r, \quad (37)$$

где  $r = \mu_1\mu_2b_5$ ;  $r_1 = N_2\delta_1 - N_1\delta_2$ ;  $r_2 = N_1\delta_3 - N_2\delta_4$ .

Подставляя (36), (37) в (10) (ограничиваясь двумя членами ряда), имеем

$$T(\eta, \xi) = T_0 + f_1(\eta)(1 - \xi)\xi + f_2(\eta)(1 - \xi)\xi^2. \quad (38)$$

Для определения постоянных  $C_1$  и  $C_2$  составим невязку граничного условия (5) и потребуем ортогональности невязки к координатным функциям  $\varphi_1(\xi)$  и  $\varphi_2(\xi)$

$$\int_0^1 [T(0, \xi) - T_0] \varphi_j(\xi) d\xi = 0 \quad (j = 1, 2). \quad (39)$$

Подставляя (38) в (39), после определения интегралов получаем систему двух алгебраических линейных уравнений, из решения которой находим  $C_1 = -0,334267R_1$ ;  $C_2 = -0,165627R_1$ . Окончательные выражения для решения задачи (4)–(7) во втором приближении находятся в виде (36)–(38).

Результаты расчетов по формуле (38) в сравнении с [1] представлены на рис. 2. Их анализ позволяет заключить, что для  $\eta \geq 0,1$  результаты расчетов практически совпадают. Для  $\eta = 0,01$  расхождение не превышает 1 %, а для всех  $\eta < 0,01$  оно возрастает.

В случае  $n$  приближений необходимо составить невязку уравнения (4) и потребовать ортогональности невязки к  $n$  координатным функциям

$$\int_0^1 \left[ \sum_{k=1}^n (\xi f_k' \varphi_k - f_k \varphi_k'') - R_1 \right] \varphi_j(\xi) d\xi = 0, \quad k = j = \overline{1, n}. \quad (40)$$

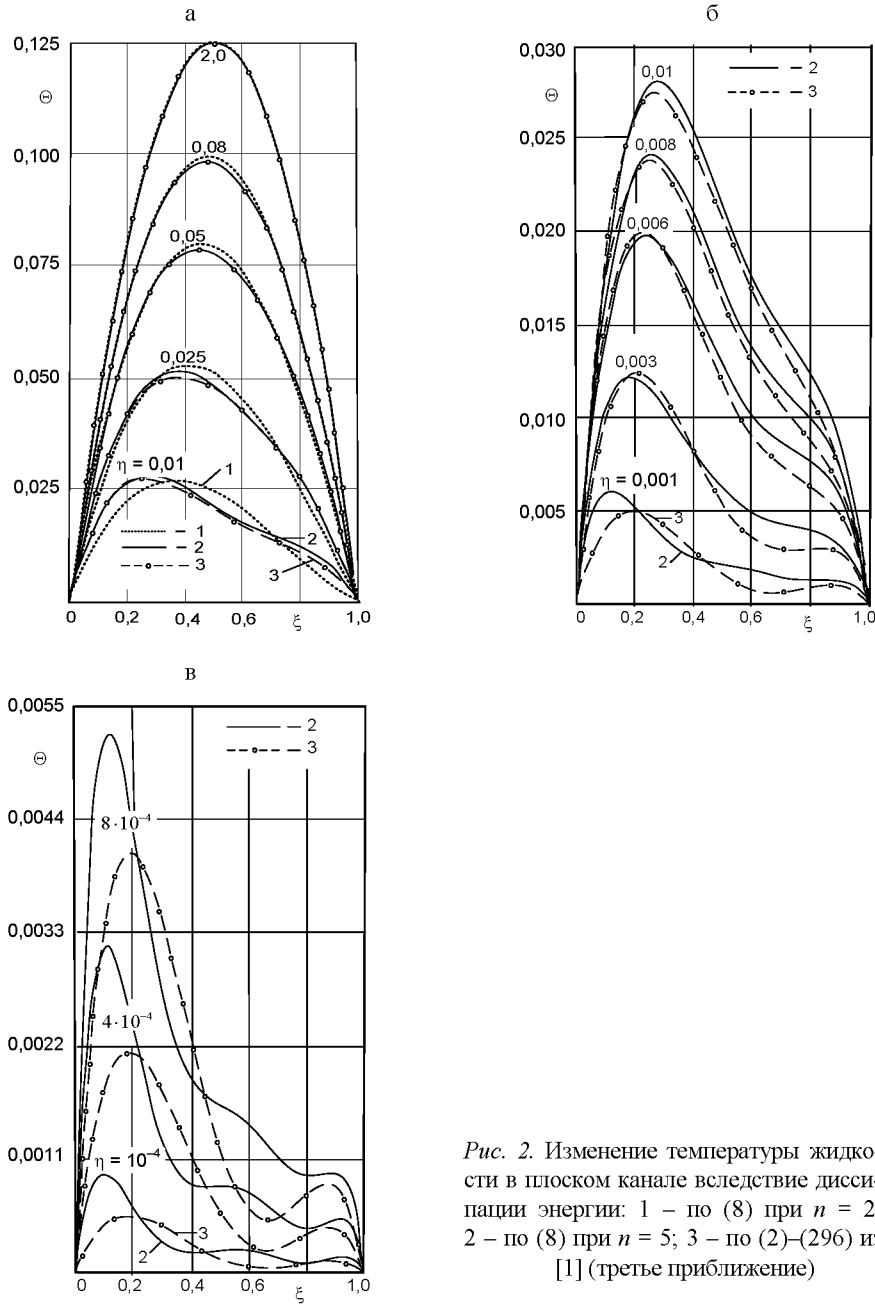


Рис. 2. Изменение температуры жидкости в плоском канале вследствие диссипации энергии: 1 – по (8) при  $n = 2$ ; 2 – по (8) при  $n = 5$ ; 3 – по (2)–(296) из [1] (третье приближение)

Определяя интегралы в (40), относительно  $f_k(\eta)$  ( $k = \overline{1, n}$ ) приходим к системе из  $n$  обыкновенных дифференциальных уравнений. Последовательность дальнейшего получения решения аналогична рассмотренному выше процессу нахождения решения во втором приближении.

Результаты расчетов температуры по формуле (10) для первого, второго и пятого приближений представлены на рис. 2, 3. Здесь же даны значения температур, полученных по методу [1] в третьем приближении. Из анализа результатов следует, что стабилизация температуры по длине канала происходит при  $\eta \approx 0,25$ . С уменьшением величины  $\eta$  профиль температуры смещается в сторону невозмущенного потока (вблизи неподвижной пластины), что объясняется различными (по абсолютной величине) скоростями движения среды вблизи подвижной и неподвижной стенок. Ввиду того что конвективный теплоперенос в зоне больших скоростей течения среды оказывается большим, при малых значениях  $\eta$  температура вблизи подвижной стенки оказывается меньшей. С увеличением  $\eta$  происходит стабилизация теплообмена, и при  $\eta > 0,25$  профиль температуры становится практически симметричным относительно центра канала ( $\xi = 0,5$ ) (рис. 2а).

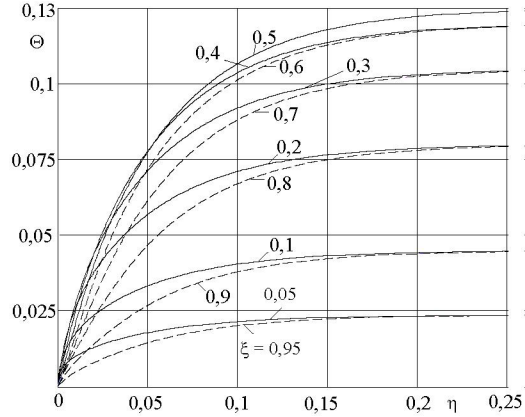


Рис. 3. Изменение температуры жидкости в плоском канале вследствие диссипации энергии. Расчет по (10) при  $n = 5$

На рис. 4, 5 дано изменение невязки  $\varepsilon$  уравнения (1) для второго и пятого приближений полученного решения. Анализ результатов позволяет заключить, что при  $\eta > 0,01$  невязка уравнения (1) в пятом приближении практически равна нулю.

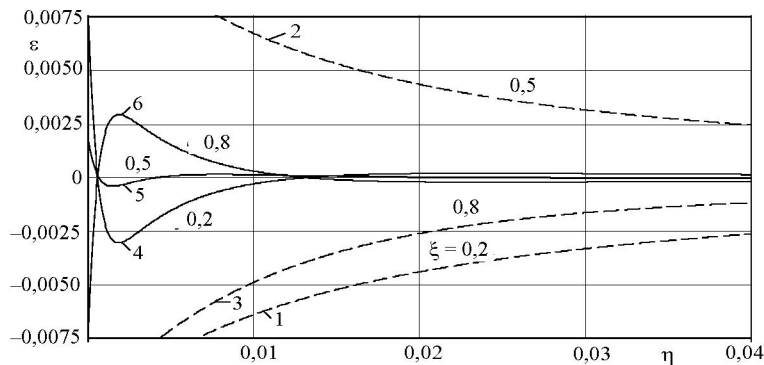


Рис. 4. Изменение невязки уравнения (1): 1, 2, 3 – второе приближение; 4, 5, 6 – пятое приближение



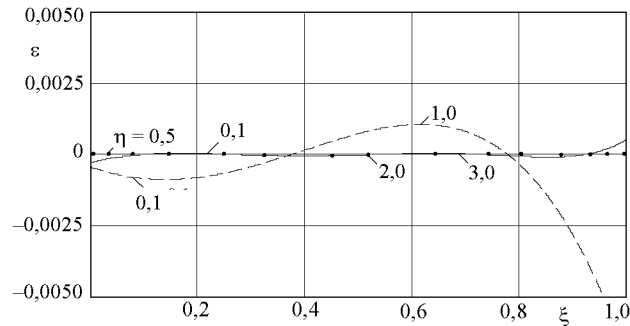


Рис. 5. Изменение невязки уравнения (1): 1 – второе приближение; 2, 3 – пятое приближение

## ВЫВОДЫ

1. На основе ортогонального метода Л. В. Канторовича получено приближенное аналитическое решение нелинейной задачи теплообмена в жидкости при течении Куэтта с учетом теплоты трения, позволяющее проводить исследования температуры для малых значений продольной координаты. Ввиду аппроксимационного представления приближенного решения имеется возможность определения такого числа его членов, которого достаточно для достижения заданной точности.

2. Полученное в пятом приближении решение позволило впервые выполнить оценку температуры жидкости в диапазоне продольной пространственной координаты  $1 \cdot 10^{-4} \leq \eta < \infty$ . Анализ полученных результатов показал, что при малых значениях продольной координаты  $\eta < 0,01$  наблюдается смещение максимума температуры в сторону неподвижного потока. Следовательно, при малых (и сверхмалых) значениях  $\eta$  температура на движущейся стенке значительно ниже, чем температура на границе возмущенного и невозмущенного потока – на границе образующегося при движении тела пограничного слоя. Отсюда можно сделать вывод о том, что для защиты устройств, движущихся с высокой скоростью в разных средах, следует так организовать срыв пограничного слоя, чтобы не происходила стабилизация температурного поля в потоке, способствующая перегреву стенки от диссипации энергии. Полученное решение позволяет выполнить необходимые для этого расчеты при конкретных исходных данных задачи.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Цой, П. В. Методы расчета отдельных задач теплопереноса / П. В. Цой. – М.: Энергия, 1971. – 383 с.
2. Кудинов, В. А. Аналитические решения задач теплопереноса и термоупругости для многослойных конструкций / В. А. Кудинов, Э. М. Карташов, В. В. Калашников. – М.: Высш. шк., 2005. – 430 с.
3. Канторович, Л. В. Приближенные методы высшего анализа / Л. В. Канторович, В. И. Крылов // М.: Физматгиз, 1962. – 708 с.
4. Кудинов, В. А. Теплопроводность и термоупругость в многослойных конструкциях / В. А. Кудинов, Б. В. Аверин, Е. В. Стефанюк. – М.: Высш. шк., 2005. – 305 с.

Представлена кафедрой теоретических основ  
теплотехники и гидромеханики

Поступила 02.11.2010