УДК 530.12

РЕЛЯТИВИСТСКОЕ ДВИЖЕНИЕ ЧАСТИЦЫ В ФОТОГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ ЗВЕЗДЫ

RELATIVISTIC MOTION OF PARTICLE IN PHOTOGRAVITATIONAL FIELD OF STAR

Зубко О.Л.

Белорусский национальный технический университет,

г.Минск, Беларусь

olgazubko@tut.by

DOI: 10.12737/4706

Аннотация. Рассмотрено релятивистское движение частицы в фотогравитационном поле звезды на разных уровнях. Показано, что при учете прямого светового давления эллиптическая орбита частицы увеличивается в размерах. Учет продольного эффекта Доплера и аберрации света приводит к движению частицы по уменьшающемся в размерах эллипсу, у которого также уменьшается и эксцентриситет. Учет же сил пропорциональных v_1^2/c^2 приводит к более быстрому уменьшению эллипса и его эксцентриситета.

Abstract. Relativistic motion of particle in photogravitational field of star has been considered at different levels. It is shown that taking into account direct light pressure, elliptical orbit of the particle increases in sizes. Taking into account longitudinal Doppler effect and aberration of light leads to the motion of the particle by decreasing in size ellipse, which also has decreasing and eccentricity. Taking into account forces proportional to v_1^2/c^2 leads to a faster reduction of the ellipse and its eccentricity.

Ключевые слова: релятивистское движение, фотогравитационное поле, деформирующийся эллипс, спираль.

Key words: relativistic motion, photogravitational field, deforming ellipse, spiral.

В соответствии с аппроксимационным методом Эйнштейна-Инфельда, используемым в релятивистской проблеме движения тел (см. [1]), впервые получена и проинтегрирована система дифференциальных уравнений, описывающая движение частицы массой покоя m_0 в гравитационном поле звезды массой M при учете прямого светового давления и сопутствующих эффектов специальной теории относительности при движении частицы (лоренцево сокращение миделевого сечения частицы, увеличение массы частицы, поперечный и продольный эффекты Доплера, аберрация света – эффект Пойтинга-Робертсона), а также при учете гравитационных сил согласно общей теории относительности. Точность, с которой составлена система уравнений, относится ко второму порядку по малому параметру v_1/c (v_1 – скорость частицы на траектории, c – скорость света в вакууме, $v_1 \ll c$) и называется постньютоновским приближением. Эти уравнения движения (УД) частицы имеют вид (см. [2], (21)):

$$
\begin{aligned}
&\frac{d^2\tilde{\tilde{x}}_1^1}{dt^2}+\frac{\gamma M}{\tilde{r}_1^3}\tilde{\tilde{x}}_1^1=\frac{\gamma m^{(1)}}{\tilde{r}_1^3}(\tilde{\tilde{x}}_1^1\cos\delta+\tilde{\tilde{x}}_1^2\sin\delta)+\frac{\gamma(M-A)}{c^2}\left[\left(4\frac{\gamma(M-A)}{r_1}-v_1^2\right)\frac{x_1^1}{r_1^3}+\frac{4}{r_1^2}\frac{dr}{dt}\frac{dx_1^1}{dt}\right],\\
&\frac{d^2\tilde{\tilde{x}}_1^2}{dt^2}+\frac{\gamma M}{\tilde{r}_1^3}\tilde{\tilde{x}}_1^2=\frac{\gamma m^{(1)}}{\tilde{r}_1^3}(\tilde{\tilde{x}}_1^2\cos\delta-\tilde{\tilde{x}}_1^1\sin\delta)+\frac{\gamma(M-A)}{c^2}\left[\left(4\frac{\gamma(M-A)}{r_1}-v_1^2\right)\frac{x_1^2}{r_1^3}+\frac{4}{r_1^2}\frac{dr}{dt}\frac{dx_1^2}{dt}\right],
\end{aligned}
\tag{1}
$$

где A - редуцирующая масса покоя звезды, определяемая известной формулой (см. напр. [3]),

γ – ньютоновская постоянная тяготения;

x_1^1, x_1^2 - декартовы координаты частицы (движение происходит в плоскости $x_1^3 = 0$); $r_1 = \sqrt{(x_1^1)^2+(x_1^2)^2}$;

t – время; δ – угол аберрации.

Прежде всего преобразуем УД (1), подставив вместо $m^{(1)}, \sin\delta, \cos\delta$ их выражения (см. [2], (10), (17))

$$m^{(1)} = A\left[1 - 2\frac{v_1}{c}\cos\alpha + \frac{3}{2}\frac{v_1^2}{c^2}\cos^2\alpha\right],\ \sin\delta = \frac{v_1}{c}\sin\alpha + \frac{1}{2}\frac{v_1^2}{c^2}\sin\alpha\cos\alpha,\ \cos\delta = 1 - \frac{v_1^2}{c^2}\sin^2\alpha, \quad (2)$$

где α - угол между радиус-вектором $\vec{r}_1$ и вектором скорости $\vec{v}_1$ частицы на траектории, $|\vec{r}_1| = r_1,\ |\vec{v}_1| = v_1$. В результате получаем систему дифференциальных уравнений:

$$d^2\tilde{\tilde{x}}_1^1 / dt^2 + \gamma M\tilde{\tilde{x}}_1^1 / \tilde{\tilde{r}}_1^3 = F_0^1 + F_1^1 + F_2^1,\ d^2\tilde{\tilde{x}}_1^2 / dt^2 + \gamma M\tilde{\tilde{x}}_1^2 / \tilde{\tilde{r}}_1^3 = F_0^1 + F_1^1 + F_2^1 \quad (3)$$

где $$F_0^1 = \gamma A\tilde{\tilde{x}}_1^1 / \tilde{\tilde{r}}_1^3, \quad F_0^2 = \gamma A\tilde{\tilde{x}}_1^2 / \tilde{\tilde{r}}_1^3; \quad (4)$$

$$F_1^1 = \gamma A\tilde{v}_1\left(-2\tilde{x}_1^1\cos\alpha + \tilde{x}_1^2\sin\alpha\right)/c\tilde{r}_1^3,\ F_1^2 = \gamma A\tilde{v}_1\left(-2\tilde{x}_1^2\cos\alpha - \tilde{x}_1^1\sin\alpha\right)/c\tilde{r}_1^3; \quad (5)$$

$$\begin{aligned} F_2^1 &= \frac{\gamma A v_1^2}{2c^2 r_1^3}\left[\left(3 - 5\sin^2\alpha\right)x_1^1 - 3x_1^2\sin\alpha\cos\alpha\right] + \frac{\gamma(M-A)}{c^2}\left\{\left[4\frac{\gamma(M-A)}{r_1} - v_1^2\right]\frac{x_1^1}{r_1^3} + \frac{4}{r_1^2}\frac{dr_1}{dt}\frac{dx_1^1}{dt}\right\}, \\ F_2^2 &= \frac{\gamma A v_1^2}{2c^2 r_1^3}\left[\left(3 - 5\sin^2\alpha\right)x_1^2 + 3x_1^1\sin\alpha\cos\alpha\right] + \frac{\gamma(M-A)}{c^2}\left\{\left[4\frac{\gamma(M-A)}{r_1} - v_1^2\right]\frac{x_1^2}{r_1^3} + \frac{4}{r_1^2}\frac{dr_1}{dt}\frac{dx_1^2}{dt}\right\}. \end{aligned} \quad (6)$$

Если правые части уравнений (3) заменить нулями, то получаем классические ньютоновские УД частицы, решение которых в полярных координатах r, φ $(x^1 = r\cos\varphi,\ x^2 = r\sin\varphi)$ записывается в виде:

$$1/r = (1 + e\cos\varphi)/p, \quad (7)$$

т.е. орбитой движения частицы является коническое сечение с параметром p и эксцентриситетом e. В дальнейшем будем рассматривать в поле притяжения финитные движения, т.е. $0 \le e < 1$ - окружность ($e = 0$), эллипс ($0 < e < 1$). Учет в правой части уравнений (3) только членов (4) (учет прямого светового давления) приводит к возмущению конического сечения (7). При выполнении одинаковых начальных условий (см. [4]), интегрируя систему (3), опять получаем эллипс, но с эксцентриситетом $e_1 > e$ и параметром $p_1 > p$, т.е. «раздувшийся эллипс»

$$1/r_1 = (1 + e_1 \cos\varphi)/p_1. \qquad (8)$$

Если учесть в уравнениях (3) дополнительно члены (5), т.е. учесть продольный эффект Доплера и аберрацию света, то траектория движения частицы существенно изменится. Эта траектория с точностью до вековых членов имеет вид:

$$1/\tilde{r}_1 = (1 + e_1 \cos\varphi)/p_1 + 2\gamma A\varphi\left(1 - 0,25 e_1 \cos\varphi\right)/cp_1\sqrt{\gamma Mp}. \qquad (9)$$

Над r_1 поставим значок «~», подчеркивая учет членов v_1/c. Имея в виду, что траектория (8) является эллипсом ($0 < e_1 < 1$), а также используя интеграл площадей

$$\tilde{r}_1^2 d\varphi/dt = \sqrt{\gamma Mp} - \gamma A\varphi/c \qquad (10)$$

и интеграл энергии

$$\tilde{v}_1^2 = \gamma Mp\left(1 + 2e_1 \cos\varphi + e_1^2\right)/p_1^2 + \gamma A\sqrt{\gamma Mp}\left(2 - e_1 \cos\varphi - 3e_1^2\right)\varphi/cp_1^2, \qquad (11)$$

приходим к выводу, что траекторией движения частицы (9) до момента $\varphi = \varphi_0 = c\sqrt{\gamma Mp}/\gamma A$ (при φ_0 имеем точку сепарации) является волнистая (из-за члена $e_1 \cos\varphi/4$) спираль, закручивающаяся около звезды и приближающаяся к ней. В момент $\varphi = \varphi_0$, когда согласно (10) ($d\varphi/dt = 0$) частица начинает стремительно падать на звезду по прямой $\varphi = \varphi_0$ с нарастающей скоростью. Уравнение (9) можно переписать в виде:

$$1/\tilde{r}_1 = (1 + \tilde{e}_1 \cos\varphi)/\tilde{p}_1, \qquad (12)$$

где $$\tilde{p}_1 = p_1\left(1 + \frac{2\gamma A\varphi}{c\sqrt{\gamma Mp}}\right)^{-1}, \quad \tilde{e}_1 = e_1\left(1 - \frac{\gamma A\varphi}{2c\sqrt{\gamma Mp}}\right)\left(1 + \frac{2\gamma A\varphi}{c\sqrt{\gamma Mp}}\right)^{-1},$$

$\tilde{p}_1$ и $\tilde{e}_1$ убывает при φ до $p_1/3$ и $e_1/6$, т.е. спираль можно считать уменьшающимся в размерах эллипсом.

Наконец, решим систему (3) учитывая все члены (4)-(6), т.е. члены порядков $(v_1/c)^0, v_1/c, v_1^2/c^2$, что вынуждает над буквами ставить два значка «≈». Умножим первое УД из (3) на $2d\tilde{\tilde{x}}_1^1/dt$, а второе – на $2d\tilde{\tilde{x}}_1^2/dt$. Полученные уравнения складываем почленно и интегрируем. В результате имеем с точностью до вековых членов интеграл сохранения энергии движущегося тела (в ПНП СТО-ОТО):

$$\tilde{\tilde{v}}_1^2 = \frac{2\gamma Mp}{p_1\tilde{\tilde{r}}_1} - \frac{\gamma Mp}{p_1^2}(1-e_1^2) - \frac{\gamma A_1}{cp_1^2}\sqrt{\gamma Mp}\left(2+3e_1^2\right)\varphi - \frac{\gamma^2 A_1^2}{c^2 p_1^2}\left[3(1-e_1^2)\varphi^2 + 2e_1(1+e_1\cos\varphi)\varphi\sin\varphi\right]. \quad (13)$$

Для вывода интеграла сохранения орбитального момента импульса частицы (интеграла площадей) умножим первое УД из (3) на $-\tilde{\tilde{x}}_1^2$, а второе на $\tilde{\tilde{x}}_1^1$. Полученные уравнения складываем почленно и интегрируем. В результате вычислений получаем интеграл площадей с точностью до вековых членов:

$$\tilde{\tilde{L}}_1 \equiv \tilde{r}_1^2 d\varphi/dt = \sqrt{\gamma Mp} - \gamma A\varphi/c. \quad (14)$$

Найденные интеграл энергии (13) и интеграл площадей (14) дают возможность получить уравнение орбиты частицы:

$$1/\tilde{\tilde{r}}_1 = (1+e_1\cos\varphi)/p_1 + 2\gamma A\varphi\left(1-0{,}25e_1\cos\varphi\right)/cp_1\sqrt{\gamma Mp} + \gamma A^2\left(3-0{,}125e_1\cos\varphi\right)\varphi^2/c^2 Mpp_1 \quad (15)$$

Исследование траектории (15) с помощью интегралов (13) и (15) приводит к выводу, что траектория с ростом φ от 0 до φ_0 представляет собой также волнистую спираль, которая из-за присутствия в (15) дополнительных членов с

φ^2, еще быстрее приближается к звезде. Уравнение спирали (15) можно записать в виде:

$$1/\tilde{\tilde{r}}_1 = (1+\tilde{\tilde{e}}_1 \cos\varphi)/\tilde{\tilde{p}}_1, \tag{16}$$

где

$$\tilde{\tilde{p}}_1 = p_1\left(1+\frac{2\gamma A\varphi}{c\sqrt{\gamma Mp}}+\frac{3\gamma A^2\varphi^2}{c^2Mp}\right)^{-1},\ \tilde{\tilde{e}}_1 = e_1\left(1-\frac{\gamma A\varphi}{2c\sqrt{\gamma Mp}}-\frac{\gamma A^2\varphi^2}{8c^2Mp}\right)\left(1+\frac{2\gamma A\varphi}{c\sqrt{\gamma Mp}}+\frac{3\gamma A^2\varphi^2}{c^2Mp}\right)^{-1}. \tag{17}$$

Как и в случае траектории (9), (12), траектория (15), представленная в виде (16)-(17), может трактоваться при $\varphi \to \varphi_0$ как деформирующийся уменьшающийся в размерах эллипс. Имеем

$$\lim_{\varphi\to\varphi_0} \tilde{\tilde{p}}_1 = p_1/6,\ \lim_{\varphi\to\varphi_0} \tilde{\tilde{e}}_1 = e_1/16.$$

Как видим, учет релятивистских членов v_1/c приводит к уменьшению размеров эллипса в 3 раза, а эксцентриситета – в 6 раз. Дополнительный же учет членов порядка v_1^2/c^2 дает уменьшение размеров эллипса в 6 раз, а эксцентриситета – в 16 раз.

Список литературы

1. Рябушко А.П. Движение тел в общей теории относительности. Минск, 1979.

2. Рябушко А.П., Жур Т.А., Боярина И.П. Уравнения движения тела при учете светового давления в специальной и общей теории относительности// Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2012, №3. С. 77-83

3. Мартынов Д.Я. Курс общей физики. М.: Наука, 1971. §26, 39.

4. Рябушко А.П., Жур Т.А., Боярина И.П. Релятивистские первые интегралы и траектория движения тела при учете светового давления// Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2012, №4. С. 89-95.