УДК 517.977

РЕГУЛЯТОР ПОЛНОГО УСПОКОЕНИЯ ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ АВТОНОМНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

COMPLETE DAMPING CONTROLLER FOR LINEAR AUTONOMOUS DIFFERENTIAL SYSTEM WITH DELAY

Метельский А.В., Карпук В.В.

Белорусский национальный технический университет, г. Минск, Беларусь

ametelskii@gmail.com

DOI: 10.12737/4768

Аннотация. Для спектрально управляемой дифференциальной системы с запаздыванием системы строится обратная связь, обеспечивающая полное успокоение исходной системы

Abstract. For spectrally controllable differential system with delay the feedback providing complete damping original system is designed

Ключевые слова: дифференциальная система, запаздывание, полное успокоение, регулятор.

Keywords: differential system, delay, complete damping, controller

Рассмотрим линейную автономную дифференциально-разностную систему

$$\dot{x}(t) = \left(A_0 + A_1\lambda + \ldots A_m\lambda^m\right)x(t) + bu(t), \quad t > 0,$$
$$x(t) = \eta(t), \quad t \in H^- = [-mh, 0]. \qquad (1)$$

В уравнении (1) x – n-вектор-столбец решения уравнения (1) ($n \geq 2$); $\lambda^i x(t) = x(t - ih),\ i = 0,1,\ldots$; $A_k = \left\|a_{ij}^k\right\|$ – постоянные $n \times n$-матрицы; $b = e_n = [0;\ldots;0;1]'$ – постоянный n-вектор (штрих ' обозначает операцию транспонирования); $0 < h$ – постоянное запаздывание; начальная функция $\eta \in \overline{C} = \overline{C}\left(H^-, \mathbf{R}^n\right)$ из пространства кусочно-непрерывных n-вектор-функций; u – скалярное управление. Считаем, что у матрицы $A(\lambda) = A_0 + A_1\lambda + \ldots + A_m\lambda^m$ последняя строка нулевая.

Пусть E – единичная матрица подходящего порядка, $W(p,\lambda) = pE - A(\lambda)$ – характеристическая матрица, $w(p,\lambda) = |W(p,\lambda)|$ – характеристический квазиполином системы (1) ($|M|$ – определитель матрицы М). Множество корней $\sigma = \{p \in \mathbf{C} \mid w(p, e^{-ph}) = 0\}$ (C – множество комплексных чисел) характеристического уравнения называют спектром системы (1). Поскольку коэффициенты характеристического квазиполинома $w(p,\lambda)$ действительны, то комплексные числа входят в σ сопряженными парами.

Известно, что для разрешимости задачи назначения конечного спектра – FSA (finite spectrum assignment) – необходимо, чтобы выполнялось условие спектральной управляемости

$$\operatorname{rank}\left[pE - \left(A_0 + A_1e^{-ph} + \ldots + A_me^{-pmh}\right), b\right] = n \forall p \in \mathbf{C}. \quad (2)$$

Последнее условие достаточно для полного успокоения системы (1)

$$x(t) \equiv 0, t \geq t_1, \quad (3)$$

посредством подходящего управления, где $t_1 > 0$ – достаточно большой (фиксированный!) момент времени.

Для решения задачи FSA необходим регулятор с распределенными запаздываниями. Каковы возможности управления системой (1) в классе дифференциально-разностных регуляторов? Нельзя ли построить дифференциально-разностный регулятор полного успокоения системы (1)? В настоящем докладе дается утвердительный ответ на этот вопрос.

Если регулятор, обеспечивающий тождество (3), существует, то замкнутая система оказывается точечно вырожденной в направлениях, отвечающих первым n переменным. Поэтому возникает идея строить динамический регулятор полного успокоения системы (1) на базе спектрального критерия точечной вырожденности системы вида (1). Для системы (1) второго порядка эта идея реализована в [1].

Пусть выполнено условие (2), необходимое для полного успокоения системы (1). Рассмотрим матрицу $C(\lambda) = \left[b, A(\lambda)b, \ldots, A^{n-1}(\lambda)b\right]$. Для выполнения (2) необходимо чтобы

$$\operatorname{rank}\left[b, A(\lambda)b, \ldots, A^{n-1}(\lambda)b\right] = n \exists \lambda \in \mathbf{C}. \quad (4)$$

Таким образом, $\delta(\lambda)=|C(\lambda)|\neq 0 \exists\lambda\in\mathbf{C}$. Множество корней полинома $\delta(\lambda)$ обозначим $\Lambda_\delta=\{\lambda_i\in\mathbf{C}, i=\overline{1,\mu} \mid \delta(\lambda_i)=0\}$, v_i – их алгебраические кратности: $\delta(\lambda)=a_\delta\prod_{i=1}^{\mu}(\lambda-\lambda_i)^{v_i}, a_\delta\in\mathbf{R}$. Запишем $N\times N$-матрицу ($N=n+r, r\geq 0$)

$$\overline{A}(\lambda)=\begin{bmatrix} a_{11}(\lambda) & \dots & a_{1n}(\lambda) & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1,1}(\lambda) & \dots & a_{n-1,n}(\lambda) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Обозначим $e_N=[0;\dots;0;1]'$ – N-вектор, $\overline{C}(\lambda)=\left[e_N, \overline{A}(\lambda)e_N, \dots, \overline{A}^{N-1}(\lambda)e_N\right]$.

Ввиду (4) $\operatorname{rank}\left[e_N, \overline{A}(\lambda)e_N, \dots, \overline{A}^{N-1}(\lambda)e_N\right]=N \exists\lambda\in\mathbf{C}$.

Пусть $S(\lambda)=\overline{C}(\lambda)\breve{C}^{-1}(\lambda)$, где

$$\breve{C}(\lambda)=\left[e_N, \breve{A}(\lambda)e_N, \dots, \breve{A}^{N-1}(\lambda)e_N\right], \breve{A}(\lambda)=\begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\alpha_N(\lambda) & -\alpha_{N-1}(\lambda) & \dots & -\alpha_1(\lambda) \end{bmatrix},$$

$\alpha_i(\lambda), i=\overline{1,N}$, – коэффициенты характеристического квазиполинома $\left|pE-\overline{A}(\lambda)\right|=p^N+\alpha_1(\lambda)p^{N-1}+\dots+\alpha_N(\lambda)$. Заметим, что $\alpha_i(\lambda)=0$, $i\geq n$. Тогда $\breve{A}(\lambda)=S^{-1}(\lambda)\overline{A}(\lambda)S(\lambda), \quad S^{-1}(\lambda)e_N=e_N, \quad \lambda\notin\Lambda_\delta$.

Динамический регулятор полного успокоения системы (1) будем искать в классе дифференциально-разностных регуляторов ($r+1$ – число вспомогательных переменных ($r\geq 0$)) вида

$$\begin{cases} u(t)=y_1(t), \\ \dot{y}_1(t)=y_2(t), \\ \dots \\ \dot{y}_r(t)=[f_1(\lambda)+\alpha_N(\lambda), \dots, f_N(\lambda)+\alpha_1(\lambda)]S^{-1}(\lambda)\operatorname{col}[x(t), \overline{y}(t)]+a_1(\lambda)y(t), \\ \dot{y}(t)=[g_1(\lambda), \dots, g_N(\lambda)]S^{-1}(\lambda)\operatorname{col}[x(t), \overline{y}(t)]+a_2(\lambda)y(t), \end{cases} \tag{5}$$

Здесь $\bar{y}(t)=[y_1(t),\dots,y_r(t)]'$; $\operatorname{col}[x(t),\bar{y}(t)]$ – N-столбец ($x(t)\equiv 0,\ t<-mh$, $\bar{y}(t)\equiv 0,\ y(t)\equiv 0,\ t<0$); $f'(\lambda)=[f_1(\lambda),\dots,f_N(\lambda)]$, $g'(\lambda)=[g_1(\lambda),\dots,g_N(\lambda)]$, $a_1(\lambda),a_2(\lambda)$ – искомые полиномы.

Задача полного успокоения системы (1) посредством динамического регулятора (5) состоит в получении условий на коэффициенты регулятора: $f_i(\lambda), g_i(\lambda), i=\overline{1,N}$, $a_j(\lambda),\ j=1,2$, обеспечивающего тождество (3), и в обосновании алгоритма их нахождения.

Матрица замкнутой системы (1), (5) такова

$$\widetilde{A}(\lambda)=\begin{bmatrix}\overline{A}(\lambda)+e_N[f_1(\lambda)+\alpha_N(\lambda),\dots,f_N(\lambda)+\alpha_1(\lambda)]S^{-1}(\lambda) & e_N a_1(\lambda)\\ [g_1(\lambda),\dots,g_N(\lambda)]S^{-1}(\lambda) & a_2(\lambda)\end{bmatrix}.$$

Пусть $\widetilde{W}(p,\lambda)=pE-\widetilde{A}(\lambda)$ – характеристическая матрица, $\widetilde{w}(p,\lambda)=\left|\widetilde{W}(p,\lambda)\right|$ – характеристический квазиполином замкнутой системы (1), (5).

Теорема [2]. Для того чтобы регулятор (5) был регулятором полного успокоения с конечным самосопряженным спектром $\{p_i\in\mathbf{C},\ i=\overline{1,N+1}\}$ достаточно, чтобы

1) $[g_1(\lambda),\dots,g_N(\lambda)]S^{-1}(\lambda)$ – полиномы;

2) $[f_1(\lambda)+\alpha_N(\lambda),\dots,f_N(\lambda)+\alpha_1(\lambda)]S^{-1}(\lambda)$ – полиномы;

3) $\widetilde{w}(p,\lambda)=(p-p_1)(p-p_2)\dots(p-p_{N+1})=d(p)$ – полином;

4) $\dfrac{a_1\left(e^{-ph}\right)}{d(p)}$, $\dfrac{p-a_2\left(e^{-ph}\right)}{d(p)}$ – целые функции.

Предлагается алгоритм реализации условий теоремы 1.

Список литературы

1. Карпук, В. В. Полное успокоение и стабилизация линейных автономных систем с запаздыванием / В. В. Карпук, А. В. Метельский // Известия РАН. Теория и системы управления. 2009. № 6. С. 19–28.

2. Метельский, А. В. Полное успокоение линейной автономной дифференциально-разностной системы регулятором того же типа / А. В. Метельский // Дифференц. уравнения. 2012. Т. 48. № 9. С. 1240–1255.