

От редакции

В этом номере ученые БНТУ продолжают тему расчета сопротивления теплопередаче строительных конструкций, затронутую в августовском номере «Энергоэффективности» в статье А.М. Протасевича и А.Б. Крутилина «Приведенное сопротивление теплопередаче современных наружных ограждающих конструкций зданий и сооружений».

**А.М. Протасевич,**  
к.т.н., профессор



**В.В. Лешкевич,**  
научный сотрудник



Белорусский национальный технический университет

# РАСЧЕТ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ МНОГОСЛОЙНЫХ ОГРАЖДАЮЩИХ КОНСТРУКЦИЙ С ТЕПЛОПРОВОДНЫМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

**Аннотация**

Представлено описание метода и основанной на нем компьютерной программы расчета температурных полей и приведенного сопротивления теплопередаче фрагментов ограждающих конструкций, разработанной авторами. Показаны преимущества используемого метода конечных элементов перед распространенным в строительной теплотехнике методом конечных разностей. Описаны основные логические модули программы и последовательность расчета. Приведен пример расчета температурного поля фрагмента легкой стеновой панели с металлическим каркасом.

**Summary**

The method of calculation the temperature field and the reduced thermal resistance of fragments of building envelope as well as appropriate computer calculating program developed by the authors are described in the article "Calculation of the temperature field of multilayer building envelope with thermally conductive inclusions using the finite element method". The advantages of finite element method over finite differences method, which is often used in construction engineering, are shown. The main logical modules of the program and sequence of the calculation are described. An example of calculation of temperature field of easy wall panel fragment with a metal frame is given.

На современном этапе развития строительной отрасли принцип экономии расходования энергетических ресурсов реализуется при проектировании энергоактивных, энергоэффективных, пассивных и других зданий. Основную роль в сокращении потребления энергии указанными зданиями играют ограждающие конструкции. Они представляют собой многослойные сложные системы, выполненные из различных, в том числе энергоэффективных материалов, включающие в себя геометрически сложные элементы крепления из металла. Необходимость обеспечения повышенных теплозащитных качеств ограждений привела к разработке новых ограждающих конструкций зданий. К ним относятся строительные панели легкие с поэтажным опиранием либо для использования в качестве навесных элементов, наружные стеновые конструкции из ячеистых бетонов, защищаемые наружными укрывными слоями. Для повышения теплозащитных качеств стен применяются легкие и тяжелые штукатурные системы, вентилируемые фасады и другие системы утепления.

Отличительной особенностью ограждающих конструкций с повышенными теплозащитными качествами является наличие большого количества элементов крепления, каркасов, узлов сопряжений панелей из металла. Использование металлических элементов предопределяет возможность формирования в ограждающих конструкциях мостиков холода, существенно снижающих их сопротивление теплопередаче. Чтобы избежать указанного недостатка, необходимо на стадии проектирования выполнять достоверные расчеты температурного поля ограждения и на их основе прогнозировать температурные и влажностные режимы конструкции в процессе эксплуатации здания.

**Расчет температурного и влажностного режимов ограждающих конструкций зданий**

В строительной теплофизике прогнозирование температурного и влажностного режимов ограждающих конструкций выполняется на основании решения дифференциальных уравнений тепло- и массопереноса. Теоретические основы методов расчета температурного и влажностного режимов заложены трудами Богословского В.Н., Власова О.Е., Гагарина В.Г., Лыкова А.В., Мачинского В.Д., Одельского Э.Х., Перехоженцева А.Г., Ушкова Ф.В., Фокина К.Ф., Франчука А.У., Шкловера А.М. и других ученых. Основной методикой, используемой для решения задач строительной теплофизики, служит их численное решение в конечных разностях. Обусловлено это прежде всего простой аппроксимации производных в дифференциальных уравнениях. Однако методу конечных разностей присущи и определенные недостатки, к которым прежде всего относится сложность аппроксимации граничных условий при наличии угловых точек на контуре исследуемой области, сложность учета неоднородности материалов (в частности, мелких деталей) и сложных геометрических форм, которые присущи современным конструкциям.

Указанных недостатков лишен более общий метод численного решения – метод конечных элементов [1, 2, 3]. Суть метода заключается в разбиении рассматриваемой области на конечное количество подобластей, называемых элементами. В каждом из элементов произвольно выбирается вид аппроксимирующей функции (как правило, полином). Коэффициенты аппроксимирующих функций ищутся из условия равенства значений соседних функций на границах меж-

ду элементами (в узлах). На основе выраженных через значения функций коэффициентов составляется система алгебраических уравнений. В связи с тем, что каждый из элементов связан с ограниченным числом соседних, система линейных алгебраических уравнений имеет разреженный вид (т.е. большое число нулевых коэффициентов), что упрощает ее решение.

На текущем этапе развития науки, когда вычислительная техника стала неотъемлемой частью инструментария инженера любой отрасли, указанный вопрос не может решаться без использования возможностей ЭВМ.

В практической работе наиболее часто решаются задачи стационарных температурного и влажностного режимов ограждающих конструкций. Расчеты стационарных температурных полей применяются для анализа конструктивных решений узлов, для расчетов приведенного сопротивления теплопередаче сложных ограждающих конструкций, для расчетов нестационарного влажностного поля ограждений при использовании упрощения о постоянстве распределения температуры в ограждении во времени [4]. Сам расчет сводится непосредственно к решению стационарного дифференциального уравнения теплопроводности с граничными условиями третьего рода. Для расчета стационарного температурного поля наиболее популярными в строительной практике являются программы Therm [5, 6] и Temper-3D [7, 8].

Программа Therm разработана в Национальной лаборатории имени Беркли (США) и служит одной из составных частей программного комплекса по расчету характеристик заполнений световых проемов. Программа позволяет рассчитывать плоское (двумерное) температурное поле ограждающей конструкции. Решение задачи осуществляется методом конечных элементов. Недостатком программы является представление результатов в собственном формате, что позволяет выполнять анализ результатов только во встроенном постпроцессоре программы. Программа Temper-3d, разработанная в Лаборатории аэродинамических и прочностных исследований СибАДИ, позволяет выполнять расчеты 2- и 3-мерного температурных полей ограждающих конструкций. Для работы Temper-3d требует определенную конфигурацию оборудования компьютера, что ограничивает запуск программы на ряде вычислительных систем. Кроме того, программа является платной, что не всегда приемлемо для научных исследований. Однако основным недостатком обеих программ является закрытость исходного кода, что не позволяет модифицировать их и тем самым подстраивать под конкретные специфические задачи.

### Методика расчета трехмерного температурного поля ограждающих конструкций зданий методом конечных элементов

Стационарное трехмерное температурное поля фрагмента ограждающей конструкции описывается уравнением

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda_T \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda_T \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda_T \frac{\partial T}{\partial z} \right) = 0 \quad (1)$$

с граничными условиями III рода

$$\alpha_T (T_{пов} - T_{ср}) = -\lambda_T \frac{\partial T}{\partial n} \quad (2)$$

где

$T_{пов}$  – температура соответствующей поверхности ограждения, °С;  
 $T_{ср}$  – температура среды, омывающей соответствующую поверхность, °С;

$T$  – искомая функция температуры, °С;

$\lambda_T$  – теплопроводность материала, Вт/(м·°С);

$\alpha_T$  – коэффициент теплоотдачи соответствующей поверхности, Вт/(м²·°С).

В работах [1, 2, 3] показано, что удовлетворению дифференциального уравнения (1) с граничными условиями (2) соответствует минимизация следующего функционала

$$X_T = \int \frac{1}{2} \left[ \lambda_T \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + \lambda_T \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 + \lambda_T \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right)^2 \right] dV + \int \frac{\alpha_T}{2} [T - T_{ср}]^2 dS \quad (3)$$

Если ввести следующие обозначения

$$[G]^T = \left[ \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right) \quad \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right) \quad \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right) \right] \quad (4)$$

$$[D] = \begin{bmatrix} \lambda_T & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_T & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_T \end{bmatrix} \quad (5)$$

тогда выражение (3) будет иметь вид

$$X_T = \int \frac{1}{2} [G]^T [D] [G] dV + \int \frac{\alpha_T}{2} [T - T_{ср}]^2 dS \quad (6)$$

Искомая функция температуры  $T$  не является непрерывной во всей рассматриваемой области, а непрерывна только в каждом отдельном конечном элементе

$$X_T = \sum_2^E X_T^{(e)} = \sum_2^E \left( \int \frac{1}{2} [G^{(e)}]^T [D^{(e)}] [G^{(e)}] dV + \int \frac{\alpha_T^{(e)}}{2} [T^{(e)} - T_{ср}^{(e)} - 2T_{ср}^{(e)} T_{ср}^{(e)} + T_{ср}^{(e)2}] dS \right) \quad (7)$$

где

$E$  – общее число элементов;

$(e)$  – индекс, показывающий, что величина относится к каждому конечному элементу, а не ко всей рассматриваемой области.

Согласно теории метода конечных элементов функция температуры в пределах элемента  $T^{(e)} = [N^{(e)}] [T]$ . Тогда матрица  $[G]$  для одного конечного элемента примет вид

$$[G^{(e)}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial x} & \frac{\partial N_2^{(e)}}{\partial x} & \frac{\partial N_3^{(e)}}{\partial x} & \dots \\ \frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial y} & \frac{\partial N_2^{(e)}}{\partial y} & \frac{\partial N_3^{(e)}}{\partial y} & \dots \\ \frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial z} & \frac{\partial N_2^{(e)}}{\partial z} & \frac{\partial N_3^{(e)}}{\partial z} & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (8)$$

или

$$[G^{(e)}] = [B^{(e)}] [T] \quad (9)$$

где

$$[B^{(e)}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial x} & \frac{\partial N_2^{(e)}}{\partial x} & \frac{\partial N_3^{(e)}}{\partial x} & \dots \\ \frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial y} & \frac{\partial N_2^{(e)}}{\partial y} & \frac{\partial N_3^{(e)}}{\partial y} & \dots \\ \frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial z} & \frac{\partial N_2^{(e)}}{\partial z} & \frac{\partial N_3^{(e)}}{\partial z} & \dots \end{bmatrix} \quad (10) \quad [T] = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (11)$$

Для каждого конечного элемента минимизируемый функционал может быть записан в виде

$$X_T^{(e)} = \int \frac{1}{2} [T]^T [B^{(e)}]^T [D^{(e)}] [B^{(e)}] [T] dV + \int \frac{\alpha_T^{(e)}}{2} [T]^T [N^{(e)}]^T [N^{(e)}] [T] dS - \int \alpha_T^{(e)} T_{ср} [N^{(e)}] [T] dS + \int \frac{\alpha_T^{(e)}}{2} T_{ср}^2 dS \quad (12)$$

Минимуму функционала  $X_T^{(e)}$  соответствует равенство его производной нулю, т.е.

$$\frac{\partial X_T^{(e)}}{\partial [T]} = 0 \quad (13)$$

Сама производная от  $X_T^{(e)}$  записывается как

$$\frac{\partial X_T^{(e)}}{\partial [T]} = \frac{\partial}{\partial [T]} \int_{V^{(e)}} \frac{1}{2} [T]^T [B^{(e)}]^T [D^{(e)}] [B^{(e)}] [T] dV +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial T} \int_{S^{(e)}} \frac{\alpha_T^{(e)}}{2} [T]^T [N^{(e)}]^T [N^{(e)}] [T] dS -$$

$$- \frac{\partial}{\partial [T]} \int_{S^{(e)}} \alpha_T^{(e)} T_{cp} [N^{(e)}] [T] dS + \frac{\partial}{\partial [T]} \int_{S^{(e)}} \frac{\alpha_T^{(e)}}{2} T_{cp}^2 dS = 0. \quad (14)$$

После выполнения дифференцирования выражения (14) получим

$$\frac{\partial X_T^{(e)}}{\partial [T]} = \int_{V^{(e)}} [B^{(e)}]^T [D^{(e)}] [B^{(e)}] [T] dV +$$

$$+ \int_{S^{(e)}} \alpha_T^{(e)} [N^{(e)}]^T [N^{(e)}] [T] dS - \int_{S^{(e)}} \alpha_T^{(e)} T_{cp} [N^{(e)}]^T dS + 0 = 0. \quad (15)$$

Преобразуем выражение (15) к виду

$$[K][T] + [F] = 0, \quad (16)$$

где  $[K]$  и  $[F]$  для каждого элемента

$$[K^{(e)}] = \int_{V^{(e)}} [B^{(e)}]^T [D^{(e)}] [B^{(e)}] dV + \int_{S^{(e)}} \alpha_T^{(e)} [N^{(e)}]^T [N^{(e)}] dS, \quad (17)$$

$$[F^{(e)}] = - \int_{S^{(e)}} \alpha_T^{(e)} T_{cp} [N^{(e)}]^T dS. \quad (18)$$

В [8] показано, что использование квадратичных и кубических базисных функций не приводит к существенному увеличению точности расчетов температурного поля. Поэтому для дальнейших преобразований используются линейные базисные функции, которым соответствуют трехмерные симплекс-элементы – тетраэдры. Базисные функции имеют следующий вид

$$N_\beta = a_\beta + b_\beta x + c_\beta y + d_\beta z, \quad (19)$$

где  $\beta$  принимает значения  $i, j, k, l$ , соответствующие вершинам конечного элемента (тетраэдра), т. е. для одного элемента

$$[N^{(e)}] = [N_i^{(e)} \ N_j^{(e)} \ N_k^{(e)} \ N_l^{(e)}]. \quad (20)$$

Принимая во внимание вышеизложенное, выражение (11) можно записать в виде

$$[B^{(e)}] = \frac{1}{6V} \begin{bmatrix} b_i & b_j & b_k & b_l \\ c_i & c_j & c_k & c_l \\ d_i & d_j & d_k & d_l \end{bmatrix}, \quad (21)$$

где

$b_i, b_j, b_k, b_l, c_i, c_j, c_k, c_l, d_i, d_j, d_k, d_l$  вычисляются по значениям координат узлов тетраэдров [1];

$V$  – объем тетраэдра.

Для удобства вычисления интегралов в выражениях (17), (18) используем L-координаты [3]:

$$\int_{V^{(e)}} [B^{(e)}]^T [D^{(e)}] [B^{(e)}] dV = \frac{\lambda_T}{36V} \begin{bmatrix} b_i b_i & b_i b_j & b_i b_k & b_i b_l \\ b_j b_i & b_j b_j & b_j b_k & b_j b_l \\ b_k b_i & b_k b_j & b_k b_k & b_k b_l \\ b_l b_i & b_l b_j & b_l b_k & b_l b_l \end{bmatrix} +$$

$$+ \frac{\lambda_T}{36V} \begin{bmatrix} c_i c_i & c_i c_j & c_i c_k & c_i c_l \\ c_j c_i & c_j c_j & c_j c_k & c_j c_l \\ c_k c_i & c_k c_j & c_k c_k & c_k c_l \\ c_l c_i & c_l c_j & c_l c_k & c_l c_l \end{bmatrix} + \frac{\lambda_T}{36V} \begin{bmatrix} d_i d_i & d_i d_j & d_i d_k & d_i d_l \\ d_j d_i & d_j d_j & d_j d_k & d_j d_l \\ d_k d_i & d_k d_j & d_k d_k & d_k d_l \\ d_l d_i & d_l d_j & d_l d_k & d_l d_l \end{bmatrix}, \quad (26)$$

$$\int_{S^{(e)}} \alpha_T^{(e)} [N^{(e)}]^T [N^{(e)}] dS = \frac{\alpha_T S_{jkl}}{12} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad (27)$$

$$\int_{S^{(e)}} \alpha_T^{(e)} T_{cp} [N^{(e)}]^T dS = \frac{\alpha_T T_{cp} S_{jkl}}{3} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (28)$$

где  $S_{jkl}$  – площадь грани тетраэдра, граничащей со средой с температурой  $T_{cp}$ .

Здесь следует отметить, что матрицы в правой части выражений (27) и (28) имеют несколько иной вид для других граней тетраэдра [3].

Таким образом, решение задачи, поставленной в (1), (2), свелось к системе алгебраических уравнений вида (16) для каждого конечного элемента, где

$$[K^{(e)}] = \frac{\lambda_T}{36V} \begin{bmatrix} b_i b_i & b_i b_j & b_i b_k & b_i b_l \\ b_j b_i & b_j b_j & b_j b_k & b_j b_l \\ b_k b_i & b_k b_j & b_k b_k & b_k b_l \\ b_l b_i & b_l b_j & b_l b_k & b_l b_l \end{bmatrix} + \frac{\lambda_T}{36V} \begin{bmatrix} c_i c_i & c_i c_j & c_i c_k & c_i c_l \\ c_j c_i & c_j c_j & c_j c_k & c_j c_l \\ c_k c_i & c_k c_j & c_k c_k & c_k c_l \\ c_l c_i & c_l c_j & c_l c_k & c_l c_l \end{bmatrix} +$$

$$+ \frac{\lambda_T}{36V} \begin{bmatrix} d_i d_i & d_i d_j & d_i d_k & d_i d_l \\ d_j d_i & d_j d_j & d_j d_k & d_j d_l \\ d_k d_i & d_k d_j & d_k d_k & d_k d_l \\ d_l d_i & d_l d_j & d_l d_k & d_l d_l \end{bmatrix} + \frac{\alpha_T S_{jkl}}{12} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad (29)$$

$$[F^{(e)}] = \frac{\alpha_T T_{cp} S_{jkl}}{3} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (30)$$

Вычислив матрицы  $[K^{(e)}]$ ,  $[F^{(e)}]$  для каждого конечного элемента, применяем процедуру ансамблирования. Ансамблирование представляет собой объединение матриц  $[K^{(e)}]$ ,  $[F^{(e)}]$  отдельных элементов в глобальные матрицы  $[K]$ ,  $[F]$  всей конструкции. При этом используются две системы нумерации узлов элементов: локальная и глобальная. Локальная нумерация представляет собой фиксированную нумерацию узлов для каждого элемента в соответствии с введенной локальной системой  $(i, j, k, l)$ . Глобальная нумерация узлов всей конструкции может быть произвольной. Составление глобальных матриц выполняется на основе однозначного соответствия между локальной и глобальной системами нумерации узлов. Значения температуры  $[T]$  узлах находятся из выражения (16) при известных  $[K]$ ,  $[F]$ .

**Таблица 1. Результаты расчета легкой стеновой панели с металлическим каркасом**

Величина	Количество
Расчетная наружная температура	-26°C
Расчетная внутренняя температура	+18°C
Количество узлов	88320
Количество конечных элементов	540877
Средняя температура внутренней поверхности	16,533°C
Средняя температура наружной поверхности	-25,445°C
Сопrotивление теплопередаче с учетом неоднородности	3,447 м²°C/Вт

Представленный программный комплекс вследствие отсутствия закрытых и собственнических элементов и модулей позволяет использовать его также для расчета температурно-влажностного режима ограждающих конструкций зданий в нестационарных условиях эксплуатации.

### Практическая реализация методики расчета

Алгоритм расчета температурного поля фрагмента ограждения включает в себя следующие операции:

- задание геометрической модели;
- ввод исходных данных (граничные и начальные условия);
- построение расчетной сетки;
- построение матриц элементов;
- ансамблирование (построение глобальных матриц);
- решение полученной системы уравнений;
- обработка полученных данных.

Программный комплекс, выполняющий расчет, разбивается на следующие логические модули: препроцессор; генератор расчетной сетки; вычислительное ядро; постпроцессор.

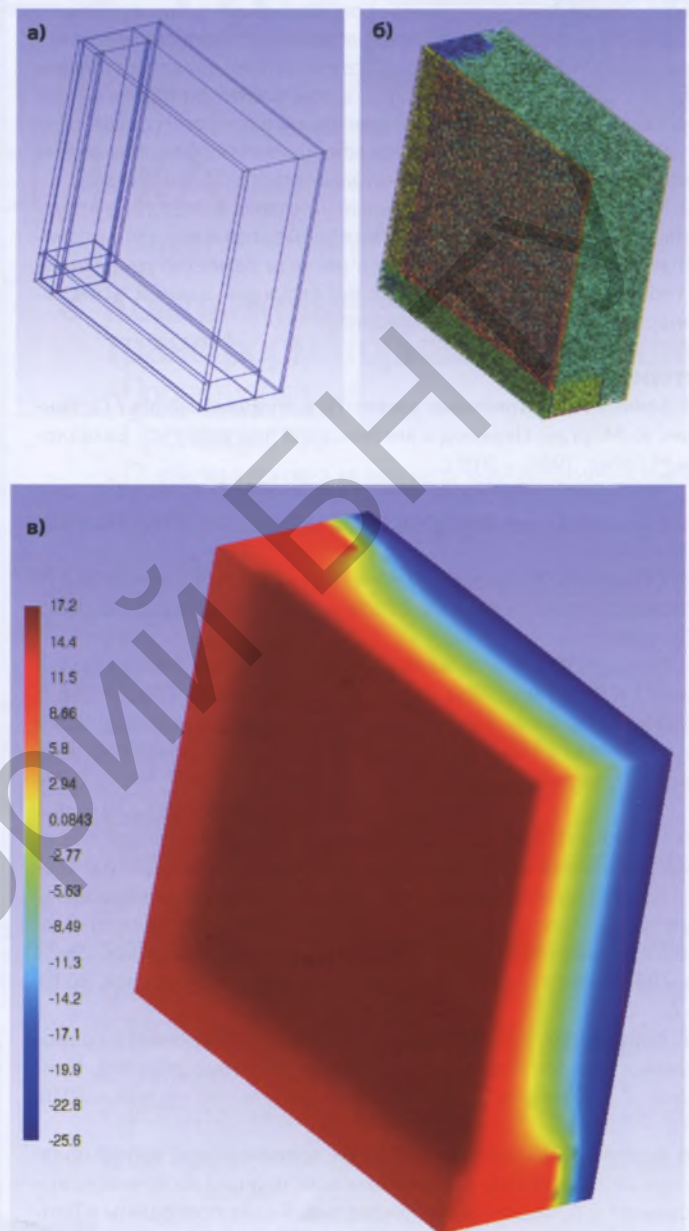
Функция препроцессора – предварительная подготовка и приведение исходных данных к виду, воспринимаемому логическими модулями последующих уровней. В него могут входить подпрограммы для создания геометрической модели и для интерпретации имеющихся моделей, подпрограммы для обработки начальных и граничных условий и др. В практической работе выбор препроцессора напрямую обусловлен выбором генератора расчетной сетки, так как последний должен воспринимать и «понимать» передаваемые ему данные.

Повторное использование программного кода является одним из основных преимуществ современного программирования. Это, совместно с наличием открытых (open source) и бесплатных программ, позволяет наиболее полно использовать упомянутые преимущества, благодаря чему разработка программного продукта ускоряется в разы и позволяет избежать множества ошибок и затрат времени на их поиск. В настоящее время присутствует широкий выбор генераторов расчетной сетки для различных предметных областей. В данной работе за основу взят генератор сеток Gmsh [10], включающий в себя также препроцессор для создания геометрической модели и постпроцессор для отображения результатов.

Вычислительное ядро программы разработано на языке программирования Python [11] и выполняет следующие функции: загрузка конечно-элементной сетки, построение матриц элементов, ансамблирование, решение полученной системы уравнений, первичная обработка и сохранение полученных данных. С целью ускорения разработки и уменьшения времени выполнения расчетов использовалось расширение Scipy [12], созданное с использованием компилируемых языков программирования, что существенно повышает скорость вычислений. Для просмотра и анализа полученных результатов использован постпроцессор Gmsh, позволяющий выполнять просмотр температурного поля и другие действия.

Результаты расчета, полученные по описанной выше методике, представлены на рисунке 1. Показаны: геометрическая модель, расчетная сетка и рассчитанное температурное поле фрагмента легкой стеновой панели, предназначенной для энергоэффективного дома. Стеновая панель состоит из металлического каркаса, замоноличенного в пенополиуретан.

Рисунок 1. Температурное поле фрагмента легкой стеновой панели с металлическим каркасом  
а) трехмерная модель; б) расчетная сетка; в) температурное поле



Наружная поверхность панели оштукатурена по стеклосетке, с внутренней стороны закрепляется стекломгневый лист. Расчетные температуры наружного и внутреннего воздуха приняты  $t_H = -26^\circ\text{C}$  и  $t_B = +18^\circ\text{C}$ . Теплофизические характеристики материалов приняты по [13]. По представленным на рисунке 1 данным возможна визуальная оценка результатов расчета. Полученные значения и характеристики расчета сведены в таблицу 1.

### Выводы

1. Разработана усовершенствованная методика компьютерного расчета трехмерных стационарных температурных полей ограждающих конструкций зданий, имеющих теплопроводные включения различной сложности.

С использованием данной методики и компьютерной программы в качестве примера выполнен расчет трехмерного температурного поля фрагмента легкой стеновой панели с металлическим каркасом, а также определено приведенное сопротивление теплопередаче.

2. Одной из особенностей предлагаемой методики является использование мощных генераторов сеток, что позволяет выполнять расчеты с достаточной точностью, в том числе при наличии конструктивных элементов с малыми линейными размерами (тонкие слои металла в кронштейнах крепления вентилируемых фасадов, легкие стеновые панели с каркасом из металлического профиля и др.).

3. Представленный программный комплекс вследствие отсутствия закрытых и собственнических элементов и модулей позволяет использовать его также для расчета температурно-влажностного режима ограждающих конструкций зданий в нестационарных условиях эксплуатации.

## Литература

1. Зенкевич, О. Конечные элементы и аппроксимация / О. Зенкевич, К. Морган; Перевод с английского под ред. Н.С. Бахвалова. – М.: Мир, 1986. – 318 с.

2. Зенкевич, О. Метод конечных элементов в технике / О. Зенкевич; Перевод с английского, под ред. Б.Е. Победри. – М.: Мир, 1975. – 541 с.

3. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов / Л. Сегерлинд; Перевод с английского, под ред. Б.Е. Победри. – М.: Мир, 1979. – 392 с.

4. Фокин, К.Ф. Строительная теплотехника ограждающих частей зданий / К.Ф. Фокин. – 5-е изд. – М.: АВОК-ПРЕСС, 2006. – 256 с.

5. Эффективность фрагментарной скрепленной теплоизоляции наружных стен / Н.В. Тимофеев [и др.] // Современное промышленное и гражданское строительство. – 2011. – Том 7, №2. – С.91–97.

6. Воробьева, Т.М. Исследование температурных полей в конструкции основания фундаментной железобетонной плиты здания / Т.М. Воробьева, А.В. Головки // Научно-технические проблемы транспорта, промышленности и образования: материалы Всероссийской научно-практической конференции, Хабаровск, 21–23 апр. 2010 г.: в 6 т. / ДВГУПС; ред. О.Л. Рудых. – Хабаровск, 2010. – Т. 2. – С. 226–230.

7. Кривошеин, А.Д. К вопросу о расчете приведенного сопротивления теплопередаче ограждающих конструкций / А.Д. Кривошеин, С.В. Федоров // Инженерно-строительный журнал. – 2010. – №8. – С.21–27.

8. Федоров, С.В. Оценка степени дискретизации расчетной области при расчете МКЭ ограждающих конструкций на точность вычисления / С.В. Федоров // Официальный сайт программы «Temper-3D» [Электронный ресурс]. – 2010. – Режим доступа: <http://www.temper3d.ru/publish/raschet-mke/>. – Дата доступа: 24.04.2013.

10. Geuzaine, C. Gmsh: a three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities / \*C. Geuzaine, J.-F. Remacle // International Journal for Numerical Methods in Engineering. – 2009. – №79 (11). – P. 1309–1331.

11. Лутц, М. Программирование на Python / М. Лутц; Перевод с английского, под ред. М. Деркачева. – Санкт-Петербург: Символ-Плюс, 2002. – 1136 с.

12. Bressert, E. SciPy and NumPy / E. Bressert. – Sebastopol: O'Reilly Media, 2012. – 68 с.

13. Строительная теплотехника. Строительные нормы проектирования: ТКП 45-2.04-43-2006. – Введ. 01.07.07. – Минск: Министерство архитектуры и строительства Республики Беларусь, 2007. – 32 с.

Статья поступила в редакцию 10.06.2013