



The mathematical model of calculation of the hardening ingot thermostressed state in elastoplastic raising is offered.

Ю. С. ПОСТОЛЬНИК, ДГТУ, В. И. ТИМОШПОЛЬСКИЙ, ПИИ «ЕВРОСТАЛЬ ЛТД» (УКРАИНА),
И. А. ТРУСОВА, П. Э. РАТНИКОВ, Г. А. РУМЯНЦЕВА, БНТУ

УДК 669.18–412:536.24

ТЕРМОНАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ПЛИТЫ, ОБРАЗУЮЩЕЙСЯ ПУТЕМ ОДНОСТОРОННЕГО «НАМЕРЗАНИЯ» РАСПЛАВА

Температурное поле стальных слитков и заготовок в процессе кристаллизации изменяется в довольно широком диапазоне: от температуры расплава (фазового перехода из жидкого в твердое состояние) T_{ϕ} до температуры охлаждающей (внешней) среды T_c , что приводит к возникновению в затвердевшем слое слитка температурных напряжений. При этом в связи с существенным зависящим от температуры пределом текучести σ_s по сечению твердой корочки образуются две зоны: пластических напряжений в приповерхностных слоях $0 \leq x \leq b_1(\tau)$, $b_2(\tau) \leq x \leq b_{\phi}(\tau)$ и разделяющая их зона упругих напряжений $b_1(\tau) \leq x \leq b_2(\tau)$ (см. рисунок).

При исследовании термонапряженного состояния (ТНС) делаются попытки исходить из релаксационных моделей формирования поля термона-

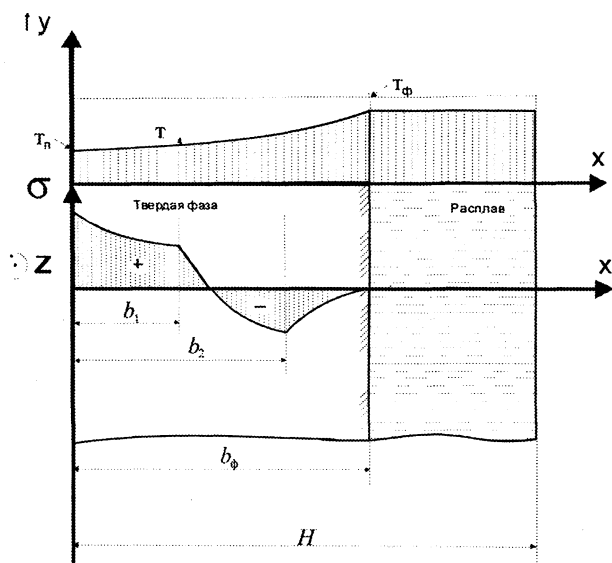


Схема теплового и термонапряженного состояния плоского слитка

пряжений. Однако в работе [1] приводятся экспериментальные данные, указывающие, что релаксация напряжений в кристаллических материалах фактически сводится к пластическому течению. Пластическая же зона со стороны охлаждаемой поверхности с большой вероятностью может образоваться из-за большого перепада температур, порождающего большие напряжения, и низкого предела текучести при высоком уровне температурного состояния (ТС).

При математическом моделировании термонапряженного состояния объекта обычно для зоны упругого деформирования используется квазистатистическая теория термоупругости Гука–Дюамеля–Неймана [2, 3], а для пластической зоны – гипотеза идеальной упругопластичности (модель Прандтля [4, 5]). При этом границы раздела зон детерминируются в соответствии с той или иной теорией предельного состояния.

Рассмотрим задачу определения упругопластических напряжений в плите с односторонне «намерзающим» расплавом. Затвердевший слой стали будем считать идеально-пластическим (модель Прандтля). Условия текучести чаще всего принимают [6] исходя из предельного состояния по IV (энергетической) теории Губера–Мизеса:

$$\sqrt{0,5[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} = \sigma_s \quad (1)$$

или по III (наибольших касательных напряжений) теории Кулона–Треска–Сен–Венана:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_s, \quad (2)$$

где $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ – главные напряжения, МПа.

Так как в неограниченной пластине (твердой корочке затвердевающего слитка) температура за-

висит от одной координаты x , т. е. изменяется лишь по толщине $b_\phi(\tau)$, то принимаем плоское напряженное состояние: $\sigma_y = \sigma_z = \sigma(x, \tau)$, $\sigma_x \equiv 0$. В таком случае любая из теорий предельного состояния (1) или (2) приводит к условию текучести в пластических зонах:

$$\sigma_{пл}(x, \tau) = \sigma_S(T) \text{sign } \sigma_{упр}^* \quad (3)$$

При этом полагаем, что

$$\sigma_S(T) = \sigma_S^0 [1 - \theta(x, \tau)], \quad (4)$$

где введена безразмерная температурная функция $\theta(x, \tau) = \frac{t(x, \tau) - t_c}{t_\phi - t_c}$, причем эту зависимость будем считать справедливой для всего температурного интервала затвердевающего слитка ($0 \leq \theta(x, \tau) \leq 1$).

Для определения напряжений в упругой зоне $b_1(\tau) \leq x \leq b_2(\tau)$ необходимо решить известное в квазистатистической теории термоупругости [3] уравнение равновесия свободной (длинной) пластины

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\sigma(x, \tau) + \frac{\alpha_T E}{1 - \nu} T(x, \tau) \right] = 0, \quad (5)$$

где $T(x, \tau) = t_c - t(x)$ – избыточная температура.

Граничные условия неразрывности поля напряжений при существовании пластических зон:

$$\sigma(x, \tau)|_{x=b_1(\tau)} = \sigma_{пл}(x, \tau)|_{x=b_1(\tau)} = \sigma_S(\theta), \quad (6)$$

$$\sigma(x, \tau)|_{x=b_2(\tau)} = \sigma_{пл}(x, \tau)|_{x=b_2(\tau)} = -\sigma_S(\theta). \quad (7)$$

Условия силового баланса на торцах плиты (твердой фазы)

$$\int_0^{b_\phi} \sigma(x, \tau) dx = 0, \quad \int_0^{b_\phi} \sigma(x, \tau) x dx = 0$$

с учетом наличия трех зон (см. рисунок) принимают вид

$$\int_0^{b_1(\tau)} \sigma_S(\theta) dx + \int_{b_1(\tau)}^{b_2(\tau)} \sigma(x, \tau) dx - \int_{b_2(\tau)}^{b_\phi(\tau)} \sigma_S(\theta) dx = 0, \quad (8)$$

$$\int_0^{b_1(\tau)} \sigma_S(\theta) x dx + \int_{b_1(\tau)}^{b_2(\tau)} \sigma(x, \tau) x dx - \int_{b_2(\tau)}^{b_\phi(\tau)} \sigma_S(\theta) x dx = 0. \quad (9)$$

Для упрощения дальнейших выкладок введем безразмерные величины

$$\theta(\eta) \text{ (5)}, \quad \eta = \frac{x}{b_\phi(\tau)}, \quad \eta_1 = \frac{b_1(\tau)}{b_\phi(\tau)}, \quad \eta_2 = \frac{b_2(\tau)}{b_\phi(\tau)},$$

$$\bar{\sigma}(\eta, \tau) = \frac{\sigma(\eta, \tau)}{K_\sigma}, \quad K_\sigma = \frac{\alpha_T E}{1 - \nu} (t_c - t_\phi). \quad (10)$$

Тогда принятая выше математическая модель термонапряженного состояния односторонне затвердевшего плоского слитка преобразуется к виду

$$\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} [\bar{\sigma}(\eta) + \theta(\eta)] = 0, \quad \eta_1(\tau) \leq \eta \leq \eta_2(\tau), \quad (11)$$

$$\bar{\sigma}(\eta_1) = \bar{\sigma}_{пл}(\eta_1) = \bar{\sigma}_S(\theta_1), \quad (12)$$

$$\bar{\sigma}(\eta_2) = \bar{\sigma}_{пл}(\eta_2) = -\bar{\sigma}_S(\theta_2), \quad (13)$$

где температурная функция $\theta(\eta)$ и движущийся фронт $b_\phi(\tau)$ затвердевания определяются решением соответствующей задачи Стефана, например [7, 8].

Интегрируя уравнение (11) дважды по η , имеем в упругой зоне

$$\bar{\sigma}(\eta) = C(\tau) \eta + D(\tau) - \theta(\eta). \quad (14)$$

Подставляя решение (14) в условие силового баланса (8), (9), получаем систему уравнений для определения функций интегрирования $C(\tau)$ и $D(\tau)$:

$$\left. \begin{aligned} C(\tau) \frac{\eta_2^2 - \eta_1^2}{2} + D(\tau)(\eta_2 - \eta_1) &= \Phi(\tau), \\ C(\tau) \frac{\eta_2^3 - \eta_1^3}{3} + D(\tau) \left(\frac{\eta_2^2 - \eta_1^2}{2} \right) &= \Psi(\tau), \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \Phi(\tau) &= \int_{\eta_1}^{\eta_2} \theta(\eta) d\eta - \int_0^{\eta_1} \bar{\sigma}_S(\theta) d\eta + \int_{\eta_2}^1 \bar{\sigma}_S(\theta) d\eta; \\ \Psi(\tau) &= \int_{\eta_1}^{\eta_2} \theta(\eta) \eta d\eta - \int_0^{\eta_1} \bar{\sigma}_S(\theta) \eta d\eta + \int_{\eta_2}^1 \bar{\sigma}_S(\theta) \eta d\eta. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Решая систему уравнений (15), находим

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} \frac{\eta_2^2 - \eta_1^2}{2} & (\eta_2 - \eta_1) \\ \frac{\eta_2^3 - \eta_1^3}{3} & \frac{\eta_2^2 - \eta_1^2}{2} \end{vmatrix} = -\frac{(\eta_2 - \eta_1)^4}{12},$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \Phi(\tau) & (\eta_2 - \eta_1) \\ \Psi(\tau) & \frac{\eta_2^2 - \eta_1^2}{2} \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{2(\eta_2 - \eta_1)\Psi(\tau) - (\eta_2^2 - \eta_1^2)\Phi(\tau)}{2},$$

$$\Delta_2 = \frac{\left| \begin{array}{c} \frac{\eta_2^2 - \eta_1^2}{2} \Phi(\tau) \\ \frac{\eta_2^3 - \eta_1^3}{3} \Psi(\tau) \end{array} \right|}{6} = - \frac{2(\eta_2^3 - \eta_1^3)\Phi(\tau) - 3(\eta_2^2 - \eta_1^2)\Psi(\tau)}{6}$$

Тогда

$$\left. \begin{aligned} C(\tau) &= \frac{\Delta_1}{\Delta_0} = 6 \frac{(\eta_2 - \eta_1)\Psi(\tau) - (\eta_2^2 - \eta_1^2)\Phi(\tau)}{(\eta_2 - \eta_1)^4}, \\ D(\tau) &= \frac{\Delta_2}{\Delta_0} = 2 \frac{2(\eta_2^3 - \eta_1^3)\Phi(\tau) - 3(\eta_2^2 - \eta_1^2)\Psi(\tau)}{(\eta_2 - \eta_1)^4}. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Таким образом, температурные напряжения, действующие в упругой зоне $\eta_1 \leq \eta \leq \eta_2$, определяются функцией (14), которую с учетом (17) можно представить так:

$$\bar{\sigma}(\eta) = a_3(\tau)\Phi(\tau) + 12 \left[a_1(\tau)\eta - \frac{a_2(\tau)}{2} \right] \Psi(\tau) - 6 \left[a_2(\tau)\eta - \frac{a_3(\tau)}{2} \right] \Phi(\tau) - \theta(\tau), \quad (18)$$

где

$$\left. \begin{aligned} a_1(\tau) &= \frac{\eta_2 - \eta_1}{(\eta_2 - \eta_1)^4}; & a_2(\tau) &= \frac{\eta_2^2 - \eta_1^2}{(\eta_2 - \eta_1)^4}; \\ a_3(\tau) &= \frac{\eta_2^3 - \eta_1^3}{(\eta_2 - \eta_1)^4}. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Дальнейшие исследования термонапряженного состояния затвердевающего слитка требуют полной определенности «функции нагружения» (температурной функции $\theta(\eta)$) на базе решения соответствующей задачи теплопроводности.

При моделировании процесса кристаллизации с учетом переходного слоя, температура которого плавно изменяется в интервале $T_{\text{сол}} \leq T \leq T_{\text{лик}}$, задача содержит две сопряженные задачи теплопроводности для твердой и твердо-жидкой фаз. На границе раздела ($T = T_{\text{сол}}$) эти температурные поля сопряжены и по температуре, и по тепловому потоку, так как скрытая теплота фазовых превращений постепенно выделяется по мере перехода от $T = T_{\text{лик}}$ до $T = T_{\text{сол}}$.

Вместе с тем в ряде случаев для решения некоторых практических вопросов требуется знание продолжительности процесса кристаллизации и ориентировочное температурное состояние твер-

дой фазы. В этом случае предполагается, что переходный слой отсутствует, затвердевание металла сопровождается мгновенным выделением скрытой теплоты кристаллизации, что приводит к разрыву тепловых потоков на границе раздела фаз.

Математическая модель в этом случае содержит одно уравнение теплопроводности, но с разрывными краевыми условиями. Устранение этой особенности граничных условий приводит к появлению в уравнении теплопроводности аддитивного члена типа источника, зависящего от температуры. Это делает краевую задачу теплопроводности нелинейной (нелинейность III рода).

Задачи в такой постановке общепринято относить к так называемой «проблеме Стефана» [9]. За редким исключением (например, [10]) задачи типа Стефана точных решений не имеют. Поэтому используются различные приближенные (численные, аналоговые, аналитические) методы.

Однако для изучения термонапряженного состояния слитков и заготовок предпочтение, на наш взгляд, следует отдавать аналитическим методам, так как использование численного решения краевой задачи теплопроводности для определения температурных напряжений крайне затруднено.

Область применения аналитических методов исследования теплового процесса затвердевания достаточно подробно изложена в [11].

При постоянных теплофизических характеристиках (ТФХ) металла и пренебрегая перегревом расплава ($T_0 = T_{\text{ф}}$), процесс симметричного затвердевания плоской отливки толщиной $2H$ при конвективном охлаждении запишем в следующем виде [12]:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \rho^2} &= \frac{\partial \theta}{\partial \tau}, & 0 \leq \rho \leq \ell_{\text{ф}}(\tau), & \theta(\rho, 0) = \theta_0 = 1, \\ \frac{\partial \theta}{\partial \rho} \Big|_{\rho=0} &= \text{Bi} \theta_{\text{п}}(\tau), & \theta(\rho, \tau) \Big|_{\rho=\ell_{\text{ф}}(\tau)} &= 1, \\ \text{Ko} \dot{\ell}_{\text{ф}}(\tau) &= \frac{\partial \theta}{\partial \rho} \Big|_{\rho=\ell_{\text{ф}}(\tau)}, & \ell_{\text{ф}}(0) &= 0, \quad 0 \leq \tau \leq \tau_{\text{ф}}, \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

где введены известные критерии Био (Bi), Коссовича (Ko), число Фурье ($\text{Fo} = \tau$) [13]:

$$\text{Bi} = \frac{\alpha_{\text{к}} H}{\lambda}; \quad \text{Ko} = \frac{q_{\text{ф}}}{c(T_{\text{ф}} - T_{\text{с}})}; \quad \tau = \text{Fo} = \frac{at}{H^2},$$

а также безразмерные температуры и отсчитываемая от внешней поверхности координата:

$$\theta(\rho, \tau) = \frac{T(\rho, \tau) - T_c}{T_\phi - T_c}; \quad \rho = \frac{r}{H}; \quad \ell_\phi(\tau) = \frac{L_\phi(\tau)}{H}.$$

В работе [13] приводится точное решение Стефана для частного случая ($Bi \rightarrow \infty$) задачи (20)

$$\theta(\rho, \tau) = \frac{\text{erf } \tilde{v}}{\text{erf } v}, \quad v(\rho, \tau) = \frac{\rho}{2\sqrt{\tau}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^v e^{-\eta^2} d\eta.$$

При этом продвижение фронта кристаллизации $\ell_\phi(\tau)$ происходит по хорошо известному в теории литья «закону квадратного корня»

$$\ell(\tau) = k\sqrt{\tau}, \quad (21)$$

где параметр k определяется решением трансцендентного уравнения

$$\exp\left(-\frac{k^2}{4}\right) = Ko \frac{\sqrt{\pi}}{2} k \text{erf}\left(\frac{k}{2}\right). \quad (22)$$

Если ограничиться главными членами разложений в степенные ряды функций $\exp(-k/4)$ и $\text{erf}(k/2)$, то в первом приближении находим [14]

$$k_1 = \sqrt{2/Ko}. \quad (23)$$

Применяя МЭИ, получаем приближенное решение задачи (20) ($Bi \rightarrow \infty$) в виде

$$\theta(\eta) = 2(1 - u_0)\eta - (1 - 2u_0)\eta^2, \quad (24)$$

где

$$u_0 = \frac{Kok^2}{4}; \quad \eta = \frac{\rho}{\ell_\phi(\tau)}. \quad (25)$$

Следует заметить, что упрощенная формула (23) существенно искажает действительную скорость продвижения фронта кристаллизации $\ell_\phi(\tau)$ (21). Для практических целей в формулу (24) вводятся различные поправки, о чем подробно говорится в работе [14].

По решению МЭИ

$$u^2 = \frac{Kok^2}{4} = \frac{6Ko}{(1 + 6Ko) \left[1 + \sqrt{1 + \frac{12Ko}{(1 + 6Ko)^2}} \right]}. \quad (26)$$

Для исследования термонапряженного состояния затвердевающей отливки используем решение МЭИ (24), (26).

Вначале рассмотрим простейший случай, когда критерий Коссовича (Ko) достаточно большой и параметр можно принять $u_0 = 0,5$, что соответствует упрощенной формуле (23).

Для этого случая функция (24) примет вид

$$\theta(\eta) = \eta. \quad (27)$$

Подставляя (27) в (16), с учетом (4), (19) имеем

$$\Phi(\tau) = \frac{\eta_2^2 - \eta_1^2}{2} + \frac{\bar{\sigma}_S^0}{2} \left[1 - 2(\eta_1 + \eta_2) + (\eta_1^2 + \eta_2^2) \right], \quad (28)$$

$$\Psi(\tau) = \frac{\eta_2^3 - \eta_1^3}{3} + \frac{\bar{\sigma}_S^0}{6} \left[1 - 3(\eta_1^2 + \eta_2^2) + 2(\eta_1^3 + \eta_2^3) \right], \quad (29)$$

$$\bar{\sigma}(\tau) = \bar{\sigma}_S^0 [A_0(\tau) + A_1(\tau)\eta], \quad (30)$$

$$A_0(\tau) = \left\{ \begin{aligned} &2(\eta_2^3 - \eta_1^3)[1 - 2(\eta_1 + \eta_2)] - \\ &-(\eta_2^2 - \eta_1^2)[1 - 3(\eta_2^2 + \eta_1^2)] + \\ &+ 4\eta_1^2\eta_2^2(\eta_1 - \eta_1) \} (\eta_2 - \eta_1)^{-4}, \end{aligned} \right.$$

$$A_1(\tau) = \left\{ \begin{aligned} &2(\eta_2 - \eta_1)[1 - 3(\eta_1^2 + \eta_2^2) + 2(\eta_1^3 + \eta_2^3)] - \\ &- 3(\eta_2^2 - \eta_1^2)[1 - 2(\eta_1 + \eta_1) + (\eta_1^2 + \eta_2^2)] \} (\eta_2 - \eta_1)^{-4}. \end{aligned} \right. \quad (31)$$

Положение подвижных границ η_1 и η_2 раздела упругой и пластической зон определяется из условий сопряжения (12), (13):

$$A_0(\tau) + A_1(\tau)\eta_1 = (1 - \eta_1),$$

$$A_0(\tau) + A_1(\tau)\eta_2 = -(1 - \eta_2).$$

Выводы. В работе предложена математическая модель расчета термонапряженного состояния затвердевающего слитка в упругопластической постановке. При использовании метода «эквивалентных источников» получены приближенные аналитические решения поставленной задачи термоупругопластичности.

Литература

1. Абрамов В. В. Остаточные напряжения и деформации. М.: Машгиз, 1963.
2. Паркус Г. Неустановившиеся температурные напряжения. М.: Физматгиз, 1961.
3. Коваленко А. Д. Основы термоупругости. Киев: Наукова думка, 1970.
4. Надан А. Пластичность и разрушение твердых тел. Т. 2. М.: Мир, 1969.

5. Качанов Л. М. Основы теории пластичности. М.: Наука, 1969.
6. Янковский М. И., Иванченко И. Ф., Кондратьева Г. С. Температурные напряжения при неравномерном нагреве слитка с учетом пластических деформаций // Прикладная механика. 1967. Т. 3. Вып. 4. С. 126–128.
7. Постольник Ю. С., Телкин С. И. Приближенный расчет температурного поля в затвердевающей отливке // Изв. вузов. Черная металлургия. 1976. № 10. С. 20–24.
8. Постольник Ю. С., Телкин С. И., Барабан Н. М. Исследование процесса затвердевания плоской отливки // Изв. вузов. Машиностроение. 1976. № 5. С. 140–143.
9. Рубинштейн Л. И. Проблема Стефана. Рига: Звайгене, 1967.
10. Stefan G. T. Uber einige Problem der Theorie der Warme Leitung Sitzungsberichte der Wissenschaften. 1889. Vol. 98. N 3.
11. Тимошпольский В. И., Постольник Ю. С., Андрианов Д. Н. Теоретические основы теплофизики и термомеханики в металлургии. Мн.: Беларуская навука, 2005.
12. Вейник А. И. Теория затвердевания отливки. М.: Машгиз, 1960.
13. Лыков А. В. Теория теплопроводности. М.: Высш. шк., 1967.
14. Самойлович Ю. А., Тимошпольский В. И., Трусова И. А. и др. Стальной слиток. В 3-х т. Т. 2. Мн.: Белорусская наука, 2000.