



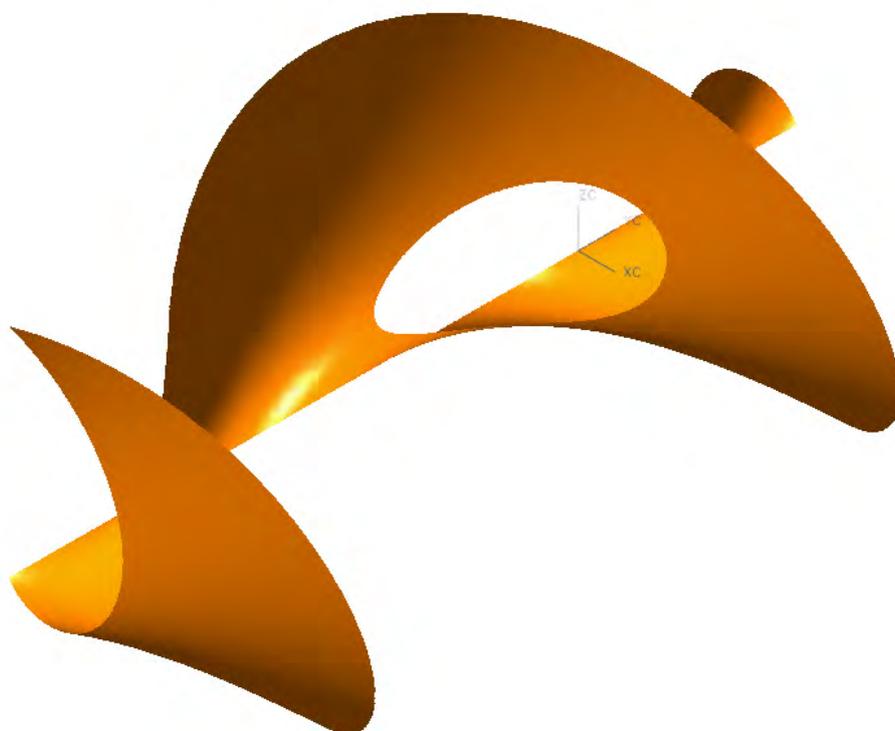
МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ
РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Белорусский национальный
технический университет

Кафедра «Инженерная графика машиностроительного профиля»

П. В. ЗЕЛЁНЫЙ
Е. И. БЕЛЯКОВА

НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ



Минск
БНТУ
2015

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
Белорусский национальный технический университет

Кафедра «Инженерная графика машиностроительного профиля»

П. В. ЗЕЛЁНЫЙ
Е. И. БЕЛЯКОВА

НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Под редакцией П. В. Зелёного

*Допущено Министерством образования Республики Беларусь
в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений
по техническим специальностям*

Минск
БНТУ
2014

УДК 514.18(075.8)
ББК 22.151.3я73
3-48

Рецензенты:

кафедра «Начертательная геометрия и инженерная графика»
УО «Брестский государственный технический университет»
(зав. кафедрой – *Н. С. Винник*);
В. А. Столер, доцент кафедры «Инженерная графика»
УО «Белорусский государственный
университет информатики и радиоэлектроники»

Зелёный, П.В.

3-48 Начертательная геометрия : учеб. пособие / П. В. Зелёный, Е. И. Белякова;
под ред. П. В. Зелёного. – Минск : БНТУ, 2014. – 224 с. : ил.

ISBN 978-985-550-349-2.

Учебное пособие содержит теоретический материал по основным темам начертательной геометрии, входящим в графическую подготовку студентов учреждений высшего образования по техническим специальностям, преимущественно, машиностроительного профиля, и соответствующим типовой учебной программе по инженерной графике, утвержденной Министерством образования Республики Беларусь, в качестве основополагающей составной части этой дисциплины.

Отличительной особенностью издания является структуризация и типовая алгоритмизация изучаемого материала начертательной геометрии как средство оптимизации его усвоения.

Разработанные авторами графические алгоритмы будут способствовать достижению главной цели начертательной геометрии как учебной дисциплины – развитию у студентов пространственного воображения и логического мышления геометрическими образами, столь необходимых в инженерной деятельности, инженерном творчестве и техническом прогрессе, при проектировании новых изделий, в том числе, на основе современного 3D компьютерного моделирования, а также элементарном владении навыками чтения и выполнения чертежей.

В заключительной лекции изучаемый материал подытожен в виде перечня метрических задач с необходимыми иллюстрациями, перечня вопросов для итоговой аттестации и образца оформления ответов на экзаменационный билет.

Для студентов технических специальностей высших учебных заведений.

УДК 514.18(075.8)
ББК 22.151.3я73

ISBN 978-985-550-349-2

© Зелёный П. В., Белякова Е. И., 2014
© Белорусский национальный
технический университет, 2014

ВВЕДЕНИЕ

Начертательная геометрия – раздел учебной дисциплины «Инженерная графика». К концу XVIII в. начертательная геометрия сформировалась как наука, когда французский общественный деятель, ученый и гениальный геометр Гаспар Монж (*Gaspard Monge*, 1746–1818) впервые опубликовал курс лекций по начертательной геометрии (*Géométrie descriptive*, 1799) для студентов Парижской политехнической школы. С тех пор начертательная геометрия входит в учебные программы технических вузов как дисциплина, без которой немислимо обучение специалистов инженерного профиля. В России начертательную геометрию стали преподавать с 1810 г., когда курс начертательной геометрии впервые ввели в учебную программу Петербургского института корпуса инженеров путей сообщения.

Предметом начертательной геометрии являются научная разработка и обоснование, теоретическое и практическое изучение способов графического построения изображений пространственных форм на плоскости и графических способов решения различных позиционных и метрических задач.

Способы построения изображений трехмерных объектов на плоскости – ортогональных проекций, получивших название эпюр Монжа (*Épure* – от фр. чертеж, проект) и изучаемых в начертательной геометрии – основаны на методе проецирования (образование чертежа по методу Г. Монжа). Метод позволяет по чертежу воссоздавать пространственные образы предметов, определять их взаимное расположение и размеры, моделировать и исследовать различные технические формы и конструкции. Начертательная геометрия развивает пространственное воображение и мышление геометрическими образами, необходимое для профессиональной деятельности инженера при решении различных технических задач, выполнении и чтении чертежей.

Начертательная геометрия – первая инженерная дисциплина, с которой начинается техническое образование будущего инженера. Трудности в ее изучении связаны с особым соединением логического мышления и пространственного воображения, которое, по словам выдающегося русского геометра Н. А. Рынина, «является ... таинственной и мало поддающейся изучению точными науками способностью человеческого духа...». Соединение этих двух возможностей человеческого ума создает новый уровень мышления – пространственное мышление, которое дает возможность оперировать образами в пространстве и без которого невозможны любая инженерная деятельность, инженерное творчество и технический прогресс.

При изучении начертательной геометрии решается несколько основных учебно-инженерных задач:

- усвоение понятий начертательной геометрии и создание графической базы данных изображений геометрических элементов;
- усвоение способов и правил построения изображений пространственных форм на плоскости;

- развитие навыков создания пространственных образов предметов на основе логического анализа их изображений, т. е. развитие пространственного мышления;
- усвоение способов и алгоритмов графических действий для решения различных практических метрических и позиционных задач на плоскости;
- получение навыков применения методов и понятий начертательной геометрии в решении задач геометрического конструирования в практике автоматизированного выполнения чертежей и инженерного компьютерного трехмерного моделирования.

Умение выполнять чертежи и решать различные практические технические задачи в компьютерных графических системах возможно только на базе начертательной геометрии, поскольку программное обеспечение основано на теоретических положениях, понятиях и способах решения геометрических задач, изучаемых исключительно в начертательной геометрии.

Решение первых трех задач требует знания теоретических положений начертательной геометрии и умения выполнять умственные операции абстрагирования и анализа элементов изображаемого предмета, а также умения по заданному чертежу создавать пространственный образ изображенного предмета, что требует навыка выполнять операции графического анализа изображений и графического их синтеза для создания цельного представления о предмете. Графический анализ геометрических элементов предмета или его заданных изображений возможен в том случае, если сформирована база графических данных об изображениях отдельных геометрических образов и их взаимных положениях, используемых при выполнении чертежа – точке, прямых, плоскостях, поверхностях и т. д. Графическая база данных в памяти дает возможность изображать любые геометрические элементы и их всевозможные комбинации, а ее создание возможно только на основе графических характеристик проекций этих элементов, которые мы назвали графическими опорами.

Графический синтез изображений предмета на чертеже на основе графической базы данных позволяет считывать с помощью графического анализа заданную информацию и включает работу пространственного воображения, объединяя плоские проекции предмета в его объемный цельный образ. Эта сложнейшая умственная работа и есть пространственное мышление, развитие которого и происходит в процессе изучения начертательной геометрии. Сформированная база графических опор и развитое пространственное мышление позволяют сократить процесс графического анализа и синтеза изображений и создают возможность быстрого и грамотного выполнения и чтения чертежей.

Решение четвертой учебной задачи требует теоретических знаний, наличия графической базы данных и достаточного уровня пространственного мышления, поскольку для решения любой задачи начертательной геометрии необходимо предварительно выполнить анализ текстового условия и графический анализ заданных изображений, построить мыслен-

ную образную модель задачи, определив тему задачи и графический алгоритм ее решения, и выполнить графические построения на чертеже.

Усвоение начертательной геометрии наряду с неумением большинства студентов выполнять графические логические действия в умственном пространстве затрудняется также обширностью и новизной теоретического и графического иллюстративного материала. Проверка студенческих конспектов показывает, что графические иллюстрации выполняются плохо и с ошибками, а текстовый материал записывается сокращенно и часто вообще отсутствует. Это говорит о том, что конспект графической дисциплины вести трудно. По учебникам усвоить предмет также непросто, так как материал перегружен поясняющими графическими иллюстрациями и описаниями.

Решение всех пяти учебно-инженерных задач в процессе обучения начертательной геометрии требует изменения традиционной методики изложения курса, позволяя активизировать и развить логическо-графические свойства ума и его возможности пространственного воображения.

Основой вводимых в данном учебном пособии изменений является тематическая модульная структуризация материала начертательной геометрии с четкими графическими характеристиками геометрических элементов и алгоритмизацией графических действий по задачам каждой темы: определение модульной структуры каждой темы начертательной геометрии; определение графических характеристик каждого модуля; построение графических алгоритмов для выполнения чертежей и решения типовых задач по каждой теме; разработка модульных графических структурных схем по каждой теме.

Структурные тематические схемы, доведенные до каждого студента, позволят сократить время на конспектирование излагаемого материала и увеличить время на выполнение чертежей и пояснений к ним. Структурные схемы также можно выдавать студентам для ознакомления с темой каждой последующей лекции, чтобы они были подготовлены к восприятию нового материала, что, безусловно, повысит результативность обучения.

Практика применения данной методики, включающей первых четыре из перечисленных пунктов, повышает усвоение начертательной геометрии студентами, о чем свидетельствуют владение ими материалом и подход к решению экзаменационных и зачетных задач и оценки студентов с относительно небольшим количеством неудовлетворительных баллов. Составление модульных структурных тематических схем является следующим шагом в разработанной методике изложения начертательной геометрии, и мы надеемся, что их внедрение в практику обучения, наряду с уже разработанными методами, позволит повысить качественный уровень усвоения начертательной геометрии и развития пространственного мышления, необходимых для изучения дальнейших разделов инженерной графики, специальных технических дисциплин и профессиональной деятельности.

Начертательная геометрия как основополагающий раздел учебной дисциплины «Инженерная графика» изучается вначале. Последующие раз-

делу дисциплины – «Проекционное черчение», «Машиностроительное черчение», «Инженерная компьютерная графика и моделирование» – изучаются позже в названном порядке, но могут изучаться и параллельно с начертательной геометрией. Таким образом, инженерная графика, является объединительным курсом, неся основную нагрузку в графической подготовке инженера как важного компонента его общепрофессиональной подготовки. Она входит в цикл общенаучных и общепрофессиональных дисциплин подготовки специалистов с высшим образованием по профилю образования «Техника и технологии», по направлению образования «Экономика и организация производства», по группам специальностей «Преподавание технологии» и «Профессиональное образование».

Глубина изучения отдельных тем начертательной геометрии может быть различной, что устанавливается учебными программами по инженерной графике в зависимости от направления и профиля специальности, количества часов, выделяемых на изучение дисциплины, ее расположения в учебном плане.

Традиционное изучение разделов инженерной графики и особенно раздела компьютерной графики и моделирования должно быть согласовано с изучением предшествующего им или изучаемого параллельно раздела начертательной геометрии. На протяжении всего периода изучения дисциплины должна постоянно подчеркиваться взаимосвязь обоих разделов черчения и компьютерной графики с начертательной геометрией, а изучение тех или иных тем должно вестись после окончательного изучения соответствующей темы начертательной геометрии.

Инженерная графика – это первая ступень обучения студентов основным правилам выполнения, оформления и чтения конструкторской документации и решения на чертежах геометрических и инженерно-технических задач, получения для этого необходимых знаний, умений и навыков, что является конечной целью ее изучения как объединительной дисциплины в соответствии с образовательными стандартами. Полное овладение чертежом как средством выражения технической мысли и производственными документами различного назначения достигается в результате усвоения всего комплекса технических дисциплин соответствующего профиля, подкрепленного практикой курсового и дипломного проектирования по специальности.

Порядок изложения тем начертательной геометрии в данном учебном пособии соответствует принятому в базовом учебнике по начертательной геометрии под редакцией В. О. Гордона и практически во всех других изданных учебниках.

Авторы выражают благодарность за оказанную помощь при оформлении графической части учебного пособия средствами компьютерной графики инженеру О.П. Курилёнок, а также студентам автотракторного факультета Белорусского национального технического университета А. Л. Гордецкому и С. А. Мухе.

ПЕРЕЧЕНЬ ИЗУЧАЕМЫХ ТЕМ

В пособии изложены темы начертательной геометрии – основополагающему, в соответствии с типовой учебной программой, разделу дисциплины «Инженерная графика» в объеме и последовательности, типичной для изучения в высших учебных заведениях по техническим специальностям.

• Метод проекций. Образование чертежа по Г. Монжу. Проекция точки:

- предмет начертательной геометрии;
- образование проекций; проекции центральные и параллельные;
- ортогональные (прямоугольные) проекции точки и прямой в системе двух (H и V) и трех (H , V и W) плоскостей проекций.

• Проекция прямой. Положение прямой относительно плоскостей проекций. Следы прямой. Взаимное положение прямых. Способ прямоугольного треугольника. Теорема о проекции прямого угла:

- возможные положения прямой относительно плоскостей проекций (прямые общего и частного положений), их характерные признаки на чертеже;
- точка на прямой;
- следы прямой;
- построение на чертеже натуральной величины отрезка прямой общего положения и углов ее наклона к плоскостям проекций H и V ;
- взаимное положение двух прямых и их характерные признаки на чертеже;
- конкурирующие точки на проекциях скрещивающихся прямых;
- о проекциях плоских углов; теорема о проекции прямого угла.

• Проекция плоскости. Задание плоскости на чертеже. Следы плоскости. Положение плоскости относительно плоскостей проекций:

- различные способы задания плоскости на чертеже;
- понятие о следах плоскости;
- точка и прямая в плоскости – теоремы о принадлежности;
- прямые особого положения в плоскости – горизонталь, фронталь, линия наибольшего ската плоскости;
- возможные положения плоскости относительно плоскостей проекций – плоскости общего и частного положений (проецирующие и плоскости уровня).

• Взаимное положение двух плоскостей, прямой линии и плоскости:

- признак параллельности двух плоскостей и построение взаимно параллельных плоскостей на чертеже;
- построение точки пересечения прямой общего положения с плоскостью общего положения;
- построение линии пересечения двух плоскостей общего положения способом вспомогательных секущих плоскостей частного положения в случае, когда проекции заданных плоскостей общего положения не накладываются, и по точкам пересечения прямой общего положения с плоскостью

общего положения в случае, когда проекции заданных плоскостей общего положения накладываются.

- **Перпендикулярность:**

- перпендикулярность прямой и плоскости, двух плоскостей (частные случаи взаимного расположения): построение перпендикуляра к плоскости или плоскости, перпендикулярной к прямой;

- определение величин углов между прямой и плоскостью, двумя плоскостями.

- **Преобразования чертежа:**

- сущность способов преобразования чертежа;

- способ замены плоскостей проекций;

- способ вращения вокруг проецирующей оси;

- способ плоскопараллельного перемещения;

- способ вращения вокруг линий уровня.

- **Поверхности.** Частные случаи гранных и кривых поверхностей.

Многогранники:

- образование;

- общие понятия и определения.

Геометрические тела – призма и пирамида:

- понятие о многогранниках;

- построение проекций призмы и пирамиды;

- сечение поверхностей призмы и пирамиды плоскостями частного положения.

Поверхности вращения:

- образование;

- общие понятия и определения.

Геометрические тела – цилиндр и конус:

- проекции прямого кругового цилиндра и прямого кругового конуса;

- сечение поверхностей цилиндра и конуса плоскостями частного положения, конические сечения.

Геометрические тела – шар и тор:

- проекции шара и открытого тора;

- сечение поверхностей шара и тора плоскостями частного положения.

- **Пересечение поверхностей:**

- сущность линии пересечения двух поверхностей.

Частные случаи пересечения поверхностей:

- пересечение геометрических образов, каждый из которых имеет относительно плоскостей проекций проецирующие боковые поверхности (прямые призмы и цилиндры);

- пересечение геометрических образов, из которых один имеет боковую проецирующую поверхность;

- соосные поверхности;

- пересечение поверхностей вращения второго порядка, описанных или вписанных в сферу (теорема Г. Монжа).

Общие случаи пересечения двух поверхностей и способы построения линии пересечения:

- способ вспомогательных секущих плоскостей;
- способ концентрических сфер;
- способ эксцентрических сфер.
- Развертки поверхностей:
 - развертки многогранников: развертка призмы способами нормального сечения и раскатки; развертка пирамиды по натуральным величинам боковых граней или ребер;
 - развертки цилиндрической и конической поверхностей;
 - условные и приближенные развертки.
- Аксонометрические проекции:
 - общие сведения;
 - стандартные аксонометрические проекции ГОСТ 2.317–2011;
 - прямоугольная изометрия;
 - прямоугольная диметрия;
 - косоугольная диметрия.
- Кривые линии и поверхности.
Кривые линии. Винтовые поверхности:
 - общие сведения о кривых линиях: определения, классификация, термины;
 - составные кривые линии – классификация точек стыка;
 - плоские и пространственные кривые линии;
 - цилиндрические и конические винтовые линии;
 - винтовые поверхности – прямой и косой геликоиды.Кривые поверхности:
 - общие сведения: определения, классификация, термины;
 - обзор некоторых кривых поверхностей, их изображение на чертеже.
- Пересечение линии с поверхностью:
 - построение точек пересечения кривой линии с поверхностью;
 - построение точек пересечения прямой линии с поверхностью.
- Касательные плоскости и нормаль к поверхности:
 - построение плоскостей, касательных к поверхностям геометрических тел;
 - построение нормали к поверхности.
- Введение в компьютерное графическое моделирование*:
 - понятие о компьютерной графике;
 - типы систем графики (растровая, векторная);
 - анимационные системы;
 - типы компьютерных моделей;
 - решение геометрических, инженерных и исследовательских задач методами компьютерного моделирования.

* *Примечание:* изучается в дисциплине «Информатика».

Лекция 1

МЕТОД ПРОЕКЦИЙ. ОБРАЗОВАНИЕ ЧЕРТЕЖА ПО Г. МОНЖУ. ПРОЕКЦИИ ТОЧКИ

Метод проекций. Проекции центральные и параллельные. Параллельное прямоугольное (ортогональное) проецирование. Свойства параллельного проецирования. Метод Г. Монжа.

Метод проекций предполагает наличие плоскости проекций, объекта проецирования и проецирующих лучей. Проекции могут быть центральными и параллельными. Если все проецирующие лучи проходят через одну точку, называемую центром проекций S , то проекции называются *центральными*. Если проецирующие лучи параллельны между собой, то проекции называются *параллельными*.

На рис. 1.1, а показано построение центральных проекций точек A и B (объекты проецирования) на некоторую плоскость проекций H . Проецирующие лучи, проведенные через центр проекций точку S и заданные точки A и B , пересекаются с плоскостью проекций H и определяют центральные проекции A' и B' точек A и B .

На рис. 1.1, б показано построение параллельных проекций точек A и B (объекты проецирования) по заданному направлению проецирующих лучей S на некоторую плоскость проекций H . В результате проецирования на плоскости проекций α построены параллельные проекции A' и B' взятых в пространстве точек A и B .

Запомните! Проекцией точки называется точка пересечения проецирующего луча с плоскостью проекций.

Соединив прямой линией взятые точки A и B мы получим *отрезок AB* , а соединив прямой линией построенные проекции точек мы получим центральную (рис. 1.1, а) и параллельную (рис. 1.1, б) проекции отрезка AB на плоскости проекций H .

Параллельные проекции могут быть *прямоугольными* (ортогональными) или *косоугольными*:

– если проецирующие лучи перпендикулярны плоскости проекций, то проекции (или проецирование) называются *прямоугольными* (ортогональными);

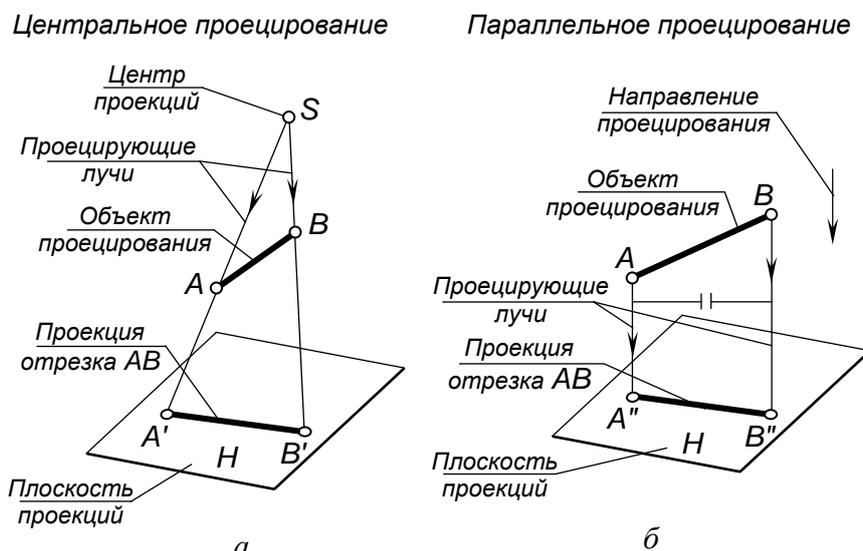


Рис. 1.1

– если проецирующие лучи *не* перпендикулярны плоскости проекций (угол проецирования не равен 90°), то проекции называются косоугольными.

Отметим некоторые свойства параллельного проецирования:

- проекцией точки является точка;
- проекцией прямой линии в общем случае является прямая;
- если отрезок прямой делится точкой в определенном отношении, то проекции прямой делятся проекцией точки в том же отношении;
- если прямые в пространстве параллельны, то их одноименные проекции на чертеже также параллельны.

Точка в системе плоскостей проекций H , V и W .
 Проекция точки в системе прямоугольных координат x , y , z .

Для получения изображений предметов на чертежах французский геометр Гаспар Монж предложил следующий метод – *метод параллельного прямоугольного проецирования на взаимно перпендикулярные плоскости проекций*.

На рис. 1.2, *а* показано наглядное изображение трех взаимно перпендикулярных плоскостей проекций:

- фронтальная плоскость проекций V ;
- горизонтальная плоскость проекций H ;
- профильная плоскость проекций W .

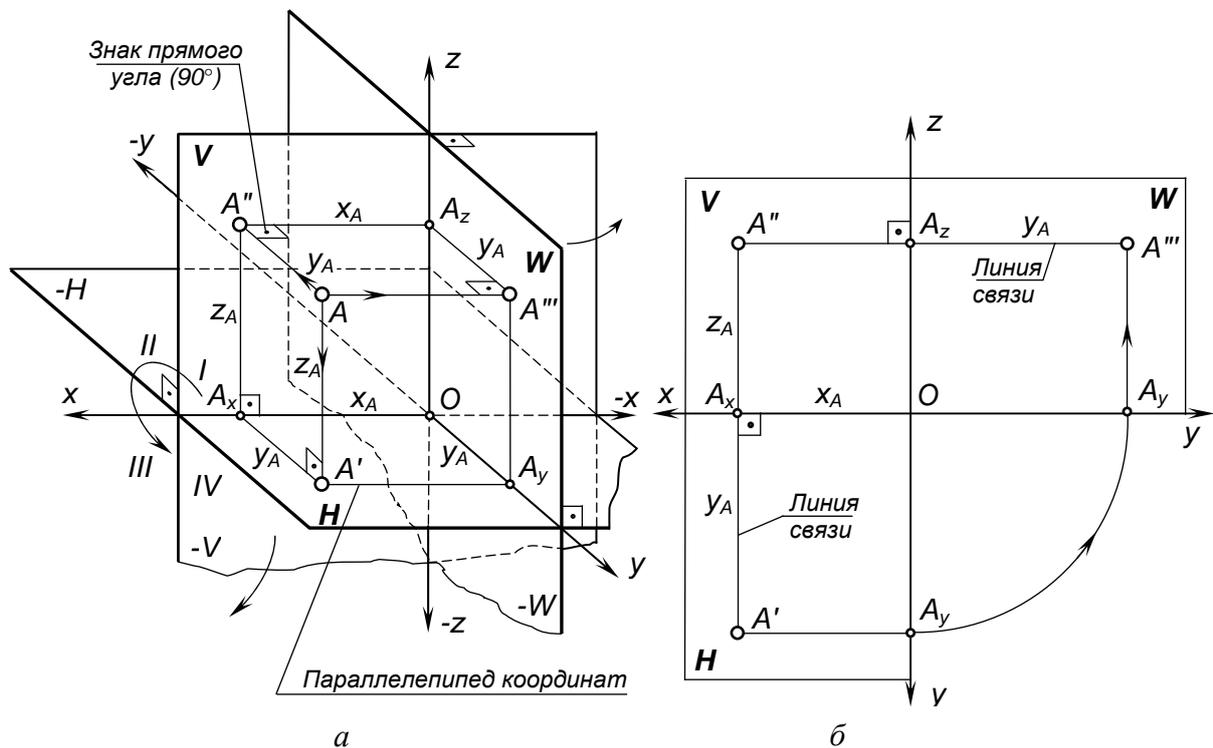


Рис. 1.2

Плоскости проекций, пересекаясь в пространстве, делят пространство на восемь частей, которые называют октантами. Слева от плоскости проекций W располагаются 1, 2, 3 и 4 октанты, пронумерованные против часовой стрелки. Для получения изображений предмет располагают в 1-м ок-

танте (европейская система) между наблюдателем и плоскостью проекций и проецируют его на каждую из взаимно перпендикулярных плоскостей проекций H , V и W , построив соответственно горизонтальную, фронтальную и профильную проекции предмета.

В качестве *объекта* проецирования на рис. 1.2, *а* взята точка A и построены ее прямоугольные проекции на каждую плоскость проекций:

- A' – горизонтальная проекция точки;
- A'' – фронтальная проекция точки;
- A''' – профильная проекция точки.

Плоскости проекций пересекаются между собой по линиям, которые называют осями проекций: ось X , ось Y и ось Z .

Оси проекций принимают за оси координат, определяющих положение точки в пространстве, и называют системой прямоугольных координат X , Y и Z . Оси проекций пересекаются в точке O – это точка начала координат.

Расстояния точки A от каждой плоскости проекций определяют ее положение в пространстве и называются ее прямоугольными координатами:

- координата $x_A(OAx)$ – расстояние от плоскости проекций W (абсцисса);
- координата $y_A(A_x A')$ – расстояние от плоскости проекций V (ордината);
- координата $z_A(A_x A'')$ – расстояние от плоскости проекций H (аппликата).

Чтобы перейти от наглядного изображения системы трех плоскостей проекций H , V и W и получить чертеж (эпюр), плоскости проекций первого октанта поворачивают относительно координатных осей и совмещают с фронтальной плоскостью проекций V следующим образом:

- фронтальная плоскость проекций V сохраняет свое положение;
- горизонтальную плоскость проекций H поворачивают относительно оси проекций X вниз;
- профильную плоскость проекций W поворачивают относительно оси проекций Z вправо.

На чертеже (см. рис. 1.2, *б*) координатные оси проекций располагают следующим образом:

- ось X – горизонтально;
- ось Z – вертикально;
- ось Y – раздваивается и проводится как продолжение осей Z и Y от точки O – начала координат.

Чертеж предмета содержит изображения проекций этого предмета.

Проекции предмета строятся как проекции совокупного множества точек, определяющих и задающих поверхность этого предмета. Точки объединяются в более общие известные из геометрии элементы: прямые, плоскости и различные поверхности (гранные, цилиндрические, конические и т. д.).

Чертеж точки содержит ее проекции, которые строятся по координатам этой точки.

На рис. 1.2, б показано построение чертежа произвольной точки A , заданной на рис. 1.2, а, положение которой в пространстве определяют координаты x_A , y_A и z_A . Для построения чертежа этой точки выполнены следующие графические действия:

- влево от точки O по оси x отложен отрезок OA_x – координата x_A ;
- вниз от точки A_x отложен отрезок A_xA' – координата y_A (отрезок A_xA' на чертеже в 2 раза больше, чем на наглядной картине) и построена горизонтальная проекция A' точки A .
- вверх от точки A_x отложен отрезок A_xA'' – координата z_A и построена фронтальная проекция A'' точки A .

!!! Запомните! Горизонтальная A' и фронтальная A'' проекции точки лежат на одной вертикальной линии, перпендикулярной оси x , которая называется *линией связи*.

Чтобы построить профильную A''' проекцию точки, следует провести *горизонтальную линию связи*, перпендикулярную оси проекций z , и отложить от полученной точки A_z отрезок A_zA''' , равный координате y_A (или отложить от точки O вправо по оси y отрезок $OA_y = y_A$ и провести вертикальную линию до пересечения с линией связи от фронтальной проекции точки $A(A'')$).

!!! Запомните! Фронтальная A'' и профильная A''' проекции точки лежат на одной горизонтальной линии связи, перпендикулярной оси проекций z .

На рис. 1.3 показано построение чертежа точки $B(20, 10, 25)$ по заданным (в скобках) координатам x , y и z в миллиметрах. Выполнены следующие графические построения:

- проведены оси координат x , y и z на поле чертежа;
- от точки O влево отложен отрезок OB_x – координата $x = 20$ мм и через точку B_x проведена вертикальная линия связи;
- вниз от точки B_x по линии связи отложен отрезок B_xB' – координата $y = 10$ мм и построена горизонтальная проекция B' точки B ;
- вверх от точки B_x по линии связи отложен отрезок B_xB'' – координата $z = 25$ мм и построена фронтальная проекция B'' точки B ;
- проведена горизонтальная линия связи от фронтальной проекции B'' ;
- от точки B_z отложен вправо отрезок $B_zB''' = 10$ мм, равный координате y_B , и построена профильная проекция B''' точки B .

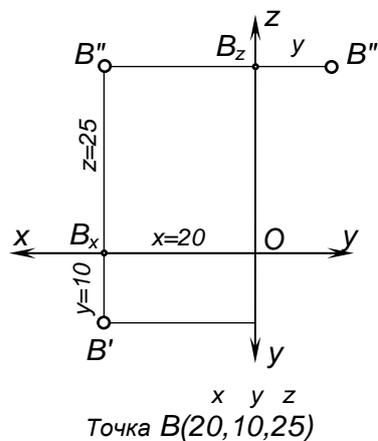
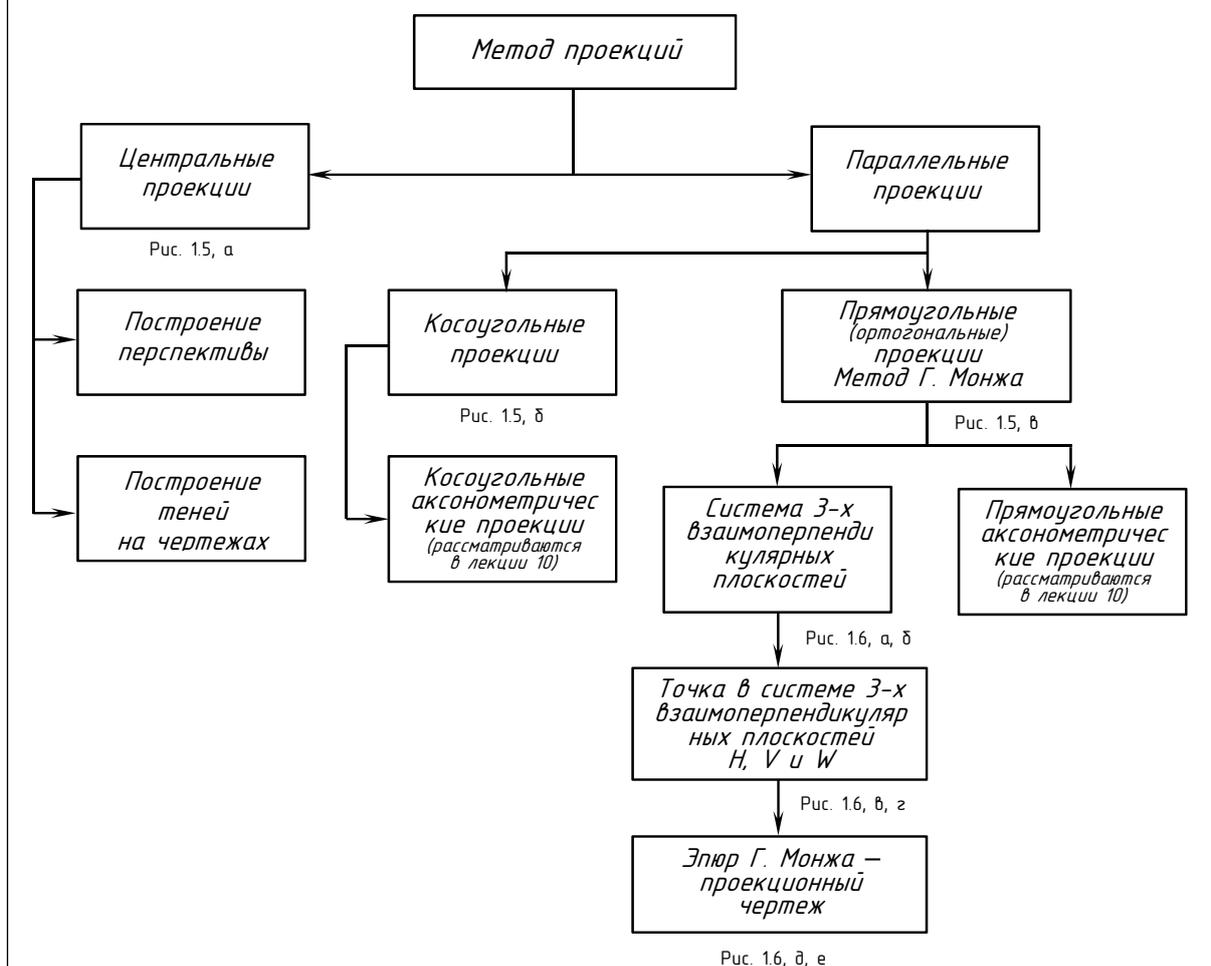


Рис. 1.3

Структуризация материала первой лекции в рассмотренном объеме схематически представлена на рис. 1.4 (лист 1). На последующих листах 2 и 3 повторно приведены иллюстрации к этой схеме, способствующие закреплению изученного материала и его быстрому визуальному повторению (рис. 1.5 и 1.6).

Метод проекций. Образование чертежа по Г. Монжу. Проекция точки



Аппарат проецирования: объект проецирования; плоскость проекций; направление проецирующих лучей.

Проекция называется центральной, если проецирующие лучи исходят из одной точки, называемой центром проекций S .

Проекция называется параллельной, если проецирующие лучи параллельны (центр проекций удален в бесконечность).

Параллельные проекции могут быть:

- Косоугольными, если проецирующие лучи не перпендикулярны плоскости проекций.
- Прямоугольными, если проецирующие лучи перпендикулярны плоскости проекций.

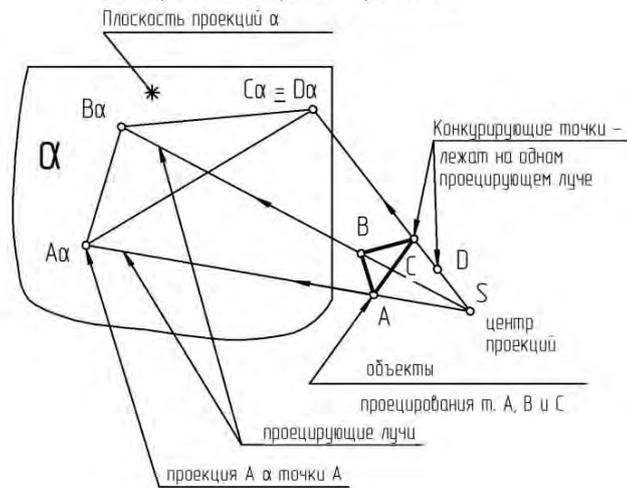
На чертеже:

Точки обозначаются прописными буквами латинского алфавита A, B, C, \dots и т.д., или арабскими цифрами $1, 2, 3, \dots$ и т.д. Проекция точек обозначаются теми же буквами, или цифрами, но со штрихами: $A(A', A'', A''')$ и т.д.; $1(1', 1'', 1''')$, $2(2', 2'', 2''')$ и т.д.

Линии обозначаются строчными латинскими буквами: l, k, m, n и т.д. Их проекции обозначаются теми же буквами, но со штрихами: $l(l', l'', l''')$, $k(k', k'', k''')$ и т.д.

Плоскости обозначаются греческими буквами: $\alpha, \beta, \varphi, \delta$ и т.д. Их проекции обозначаются теми же буквами, но со штрихами: $\alpha(\alpha', \alpha'', \alpha''')$, $\beta(\beta', \beta'', \beta''')$ и т.д.

Центральное проецирование

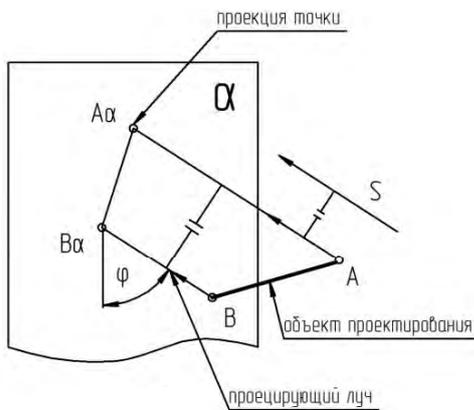


а

Проекция точки - точка пересечения проецирующего луча с плоскостью проекций

Параллельное проецирование

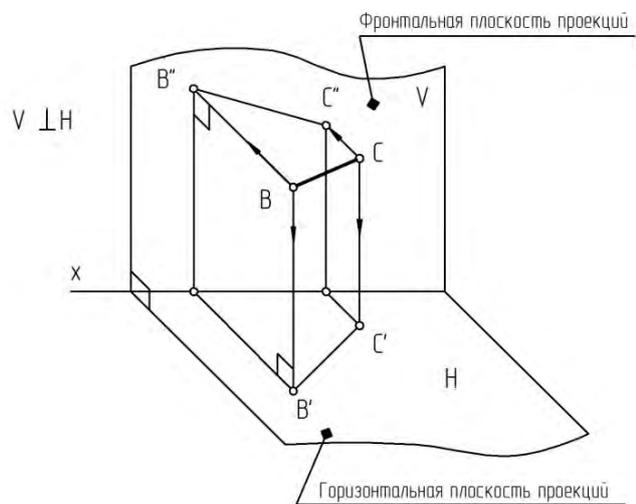
Косоугольное параллельное проецирование имеет место при $\varphi \neq 90^\circ$



Прямоугольное (ортогональное) параллельное проецирование имеет место при $\varphi = 90^\circ$

б

Метод Г. Монжа:
прямоугольное (ортогональное) параллельное проецирование на взаимоперпендикулярные плоскости проекций



V - фронтальная плоскость проекций
 $BB'' \perp V$; $CC'' \perp V$; B'' и C'' - фронтальные проекции точек B и C
 $B'C''$ - фронтальная проекция отрезка BC

H - горизонтальная плоскость проекций
 $BB' \perp H$; $CC' \perp H$; B' и C' - горизонтальные проекции точек B и C
 $B'C'$ - горизонтальная проекция отрезка BC

в

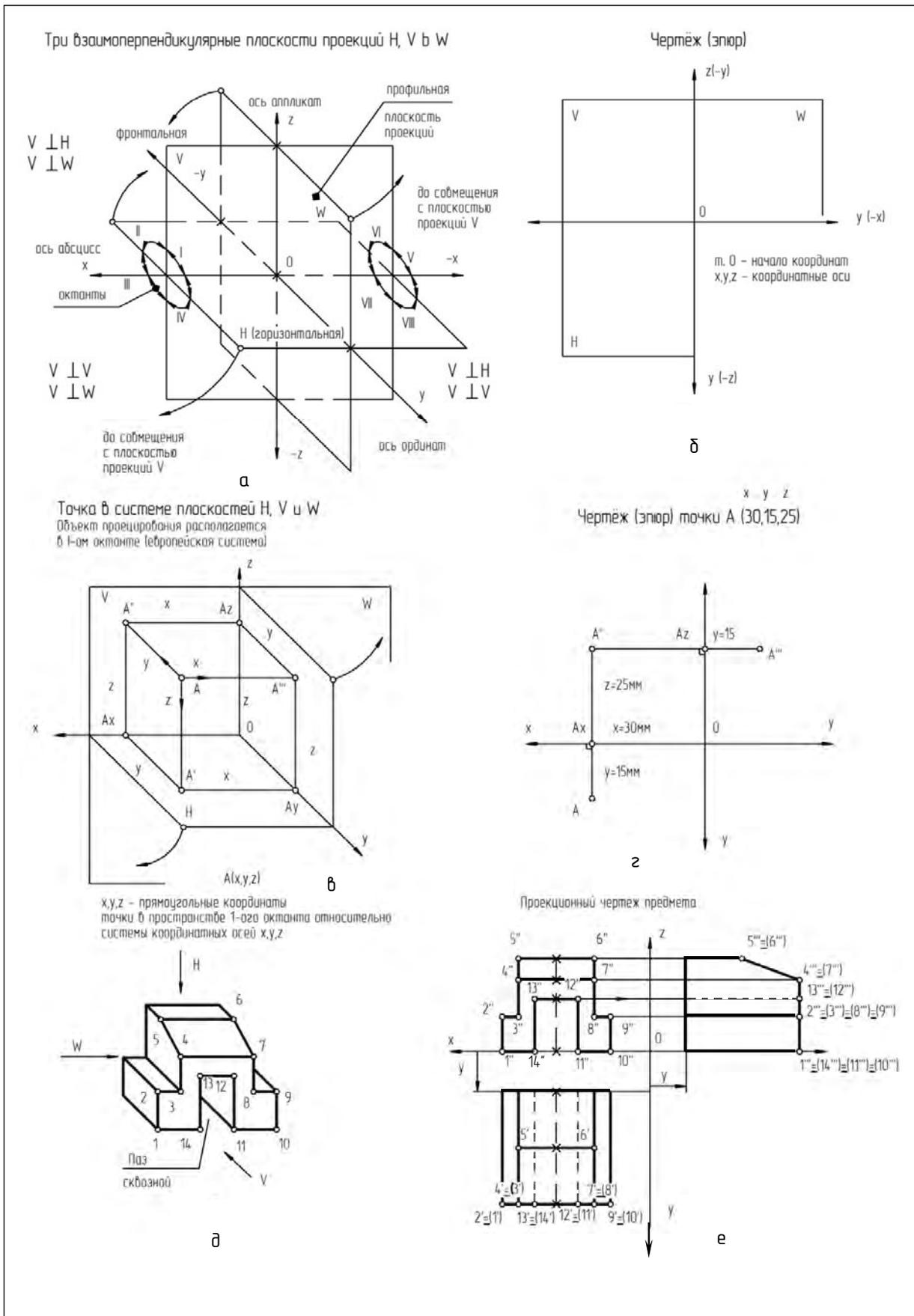


Рис. 1.6

Лекция 2

ПРОЕКЦИИ ПРЯМОЙ. ПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМОЙ ОТНОСИТЕЛЬНО ПЛОСКОСТЕЙ ПРОЕКЦИЙ. ВЗАИМНОЕ ПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМЫХ. СПОСОБ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ТРЕУГОЛЬНИКА. ТЕОРЕМА О ПРОЕКЦИИ ПРЯМОГО УГЛА

Прямая. Прямые общего и частных положений относительно плоскостей проекций. Определение натуральной величины отрезка общего положения. Понятие о следах прямой.

Относительно плоскостей проекций H , V и W прямые линии могут занимать различные положения и имеют соответствующие наименования, а на чертежах проекции этих прямых занимают относительно осей проекций x , y и z характерные положения. Следовательно, по чертежу прямой линии можно мысленно представить ее пространственное положение относительно плоскостей проекций, т. е. научиться «читать» чертеж прямой.

Прямые общего положения – не параллельны (и соответственно не перпендикулярны) плоскостям проекций H , V и W . Следовательно, на чертеже проекции прямых общего положения не параллельны (и не перпендикулярны) осям проекций x , y и z . Отсюда проекции прямых общего положения искажают их натуральную величину.

На рис. 2.1 изображены проекции прямой общего положения AB , фронтальная $A''B''$ и горизонтальная $A'B'$ проекции которой расположены произвольно относительно оси проекций x , но не параллельны и не перпендикулярны оси x – это характерный признак прямой общего положения на чертеже! Профильная проекция $A'''B'''$ прямой общего положения также должна быть не параллельна и не перпендикулярна осям проекций z и y , что и показывает построение.

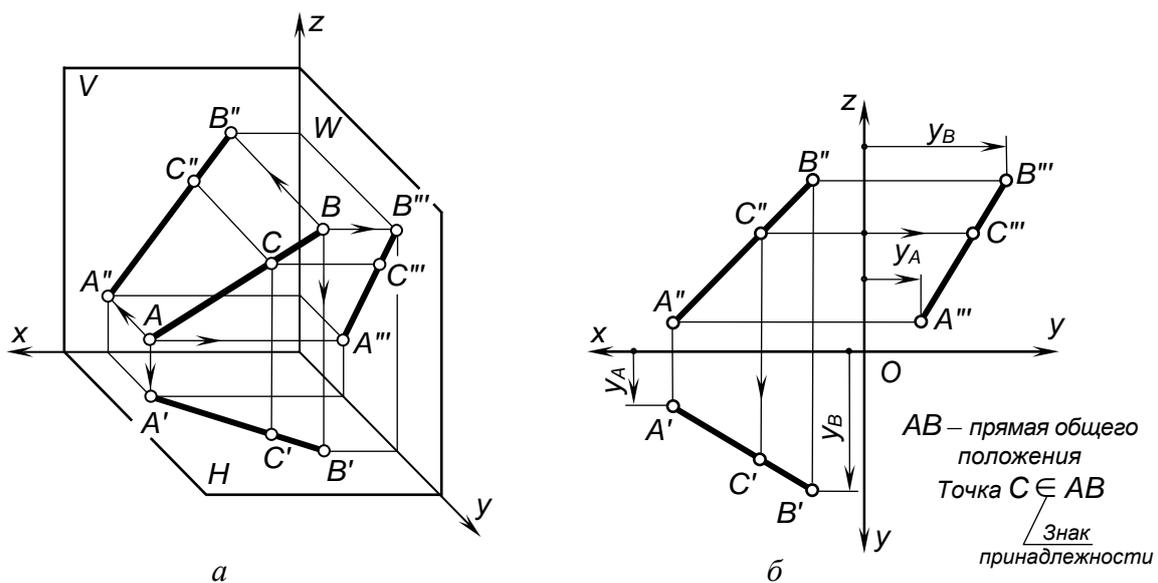


Рис. 2.1

Точка на прямой. Теорема о принадлежности точки прямой: если точка принадлежит прямой, то на чертеже одноименные проекции точки лежат на одноименных проекциях прямой. На рис. 1.4 показано построение проекций точки C , принадлежащей прямой AB .

Прямые особого (частного) положения

Прямые уровня – прямые, параллельные одной плоскости проекций:

- фронтальные прямые – параллельные плоскости проекций V ;
- горизонтальные прямые – параллельные плоскости проекций H ;
- профильные прямые – параллельные плоскости проекций W .

На рис. 2.2 изображены проекции фронтальной прямой AB и принадлежащей ей точки C . Запомните характерные признаки расположения проекций фронтальной прямой на чертеже:

- горизонтальная проекция $A'B'$ параллельна оси проекций x ;
- фронтальная проекция $A''B''$ расположена к оси проекций x под углом φ_H , который определяет ее наклон к плоскости проекций H ; фронтальная проекция $A''B''$ определяет также натуральную величину этой прямой;
- профильная проекция $A'''B'''$ по построению располагается параллельно оси проекций z .

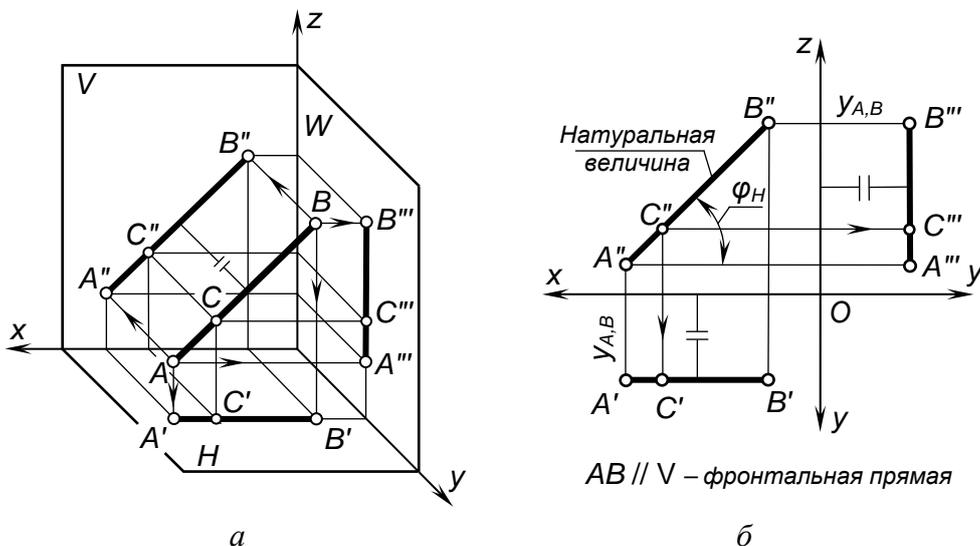


Рис. 2.2

На рис. 2.3 изображены проекции горизонтальной прямой CD и принадлежащей ей точки E . Запомните характерные признаки расположения проекций горизонтальной прямой на чертеже:

- фронтальная проекция $C''D''$ параллельна оси проекций x ;
- горизонтальная проекция $C'D'$ расположена к оси проекций x под углом φ_V , который определяет ее наклон к плоскости проекций V ; горизонтальная проекция $C'D'$ определяет также натуральную величину этой прямой;
- профильная проекция $C'''D'''$ по построению располагается горизонтально ($//y$).

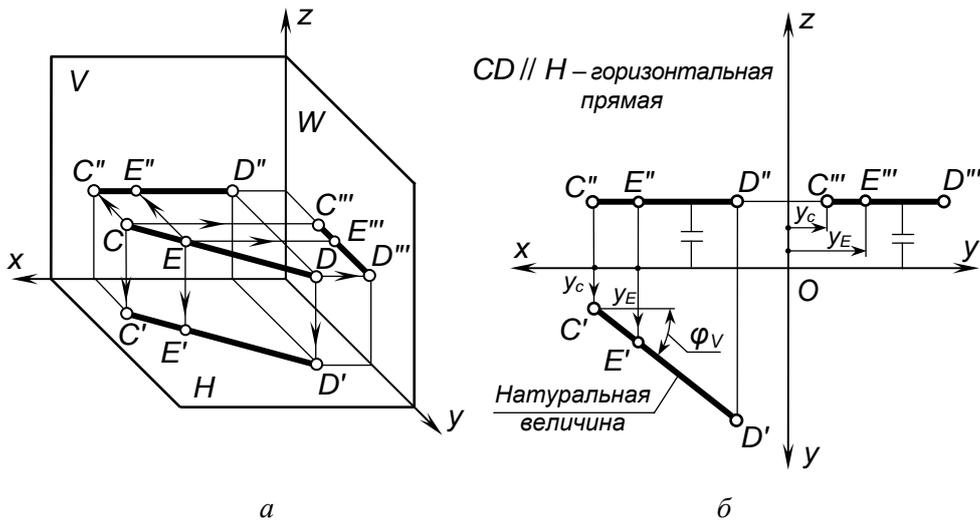


Рис. 2.3

На рис. 2.4 изображены проекции *профильной прямой EF* и принадлежащей ей точки *N*. Запомните характерные признаки расположения проекций профильной прямой на чертеже:

- фронтальная проекция $E''F''$ перпендикулярна оси проекций x (параллельна оси проекций z);
- горизонтальная проекция $E'F'$ перпендикулярна оси проекций x ;
- профильная проекция $E'''F'''$ по построению расположена под углом φ_V к плоскости проекций V и под углом φ_H к плоскости проекций H ; профильная проекция $E'''F'''$ определяет также натуральную величину этой прямой.

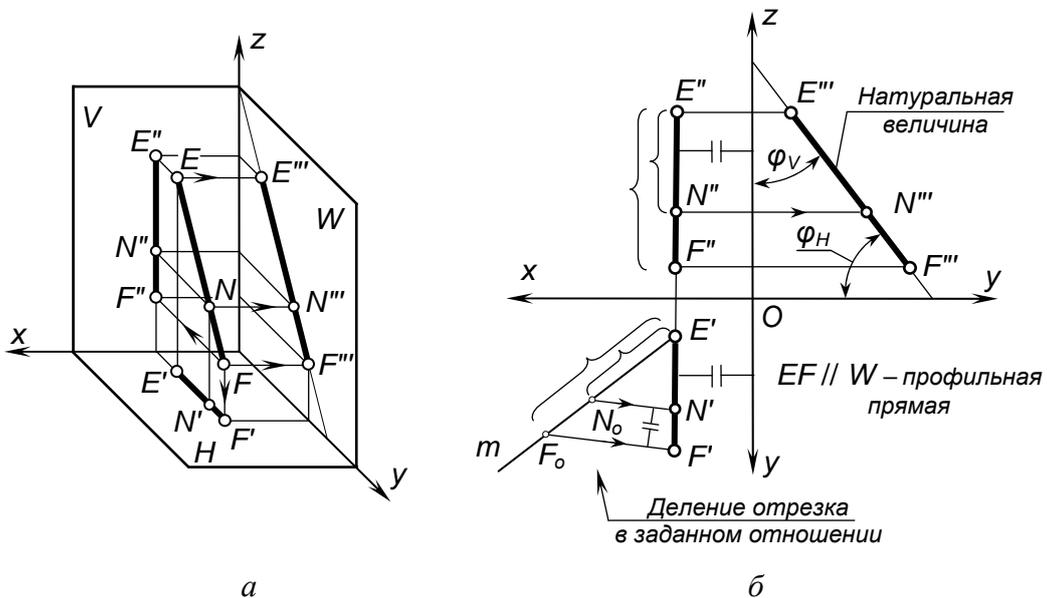


Рис. 2.4

Деление отрезка в заданном отношении

На рис. 2.4 показано построение горизонтальной проекции N' точки N , принадлежащей профильной прямой EF . Построение основано на одном

из свойств параллельного проецирования: отношение отрезков прямой линии равно отношению их проекций.

Пусть точка N делит отрезок EF в каком-то отношении. Следовательно, проекции отрезка делятся в том же отношении. Если, например, дана фронтальная проекция N'' точки N , принадлежащей отрезку EF , то для построения горизонтальной проекции N' на горизонтальной проекции $E'F'$ отрезка нужно выполнить следующие графические действия:

- провести произвольную прямую m из любой вершины горизонтальной проекции $E'F'$;
- отложить на этой прямой два отрезка: отрезок $E'F'_o$, равный по величине фронтальной проекции $E''F''$, и отрезок $E'N'_o$, равный по величине $E''N''$;
- соединить прямой точки F'_o и F' на горизонтальной проекции;
- из построенной точки N'_o провести прямую, параллельную прямой F'_oF' , – точка N' и будет искомой.

Прямые проецирующие – перпендикулярные одной плоскости проекций (параллельные двум плоскостям проекций):

- *фронтально-проецирующие прямые* – перпендикулярные плоскости проекций V (параллельные плоскостям проекций H и W);
- *горизонтально-проецирующие* – перпендикулярные плоскости проекций H (параллельные плоскостям проекций V и W);
- *профильно-проецирующие прямые* – перпендикулярные плоскости проекций W (параллельные плоскостям проекций H и V).

!!! Поскольку положение проецирующих прямых совпадает по направлению с проецирующим лучом к одной из плоскостей проекций, то одна из проекций прямых проецируется (вырождается) в точку. Говорят, что проецирующие прямые обладают «собирательным» свойством, так как их вырожденные проекции-точки «собирают», то есть представляют собой проекции всех точек, лежащих на этих прямых.

На рис. 2.5 изображены проекции фронтально-проецирующей прямой CD и принадлежащей ей точки N . Запомните характерные признаки расположения проекций фронтально-проецирующей прямой на чертеже:

- фронтальная проекция $CD(C''D'')$ представляет собой точку, т. е. фронтальные проекции точек C , D и N совпадают как лежащие на одном проецирующем луче к плоскости проекций V ;
- горизонтальная проекция $C'D'$ расположена перпендикулярно оси проекций X и определяет натуральную величину прямой;
- профильная проекция $C'''D'''$ по построению располагается перпендикулярно оси проекций Z и также определяет натуральную величину прямой.

!!! **Конкурирующие точки** – точки, лежащие на одном проецирующем луче, называются конкурирующими.

На рис. 2.5 точки C , D и N на прямой CD являются конкурирующими и по их расположению на прямой относительно плоскости V (по координатам y) можно определить на горизонтальной проекции порядок их «види-

мости»: ближе к наблюдателю и дальше от плоскости V (с наибольшей координатой y) находится точка D , затем точка N и точка C .

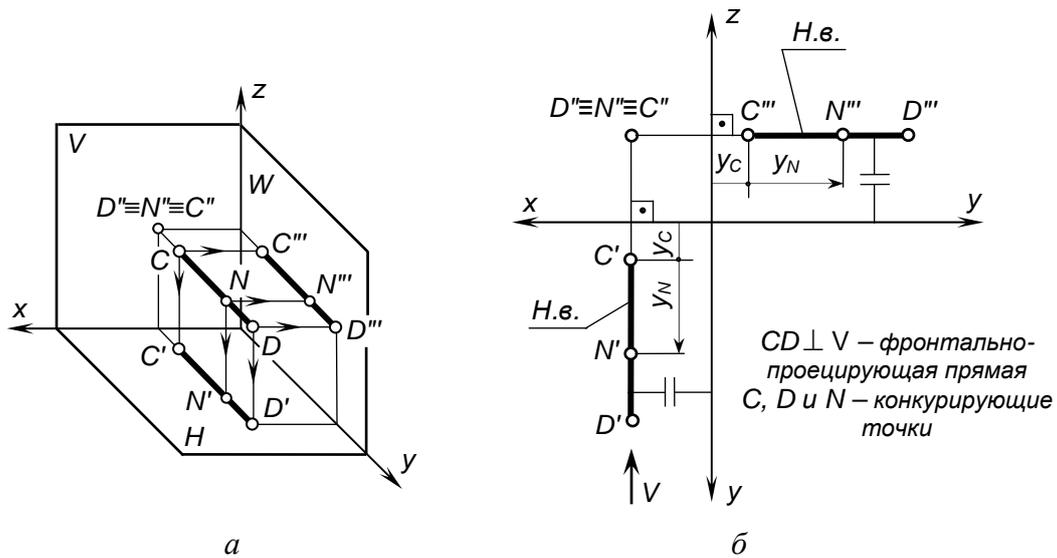


Рис. 2.5

На рис. 2.6 изображены проекции *горизонтально-проецирующей прямой* AB и принадлежащей ей точки C . Запомните характерные признаки расположения проекций горизонтально-проецирующей прямой на чертеже:

- горизонтальная проекция $AB(A'B')$ представляет собой точку, т. е. горизонтальные проекции точек A, B и C совпадают как лежащие на одном проецирующем луче к плоскости проекций H ;
- фронтальная проекция $A''B''$ расположена перпендикулярно оси x и определяет натуральную величину прямой;
- профильная проекция $A'''B'''$ по построению располагается параллельно оси Z и также определяет натуральную величину прямой.

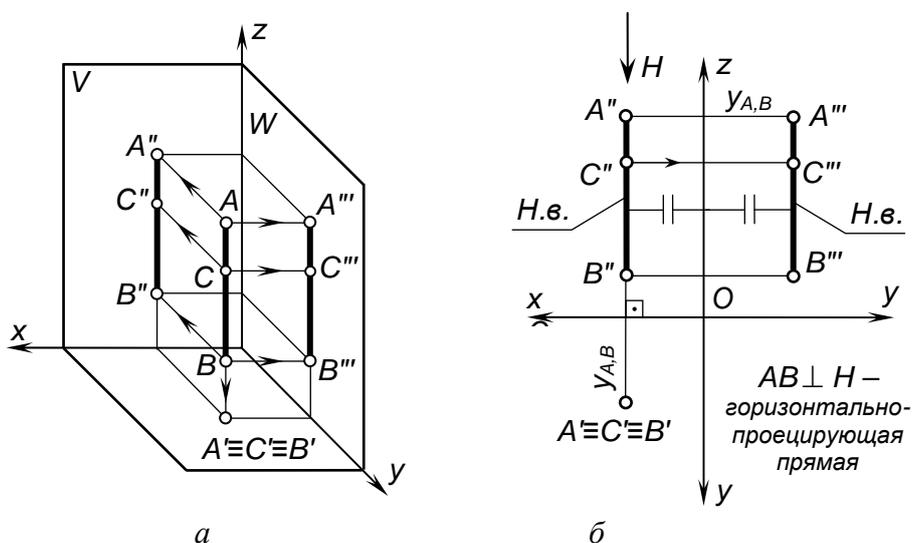


Рис. 2.6

На рис. 2.7 изображены проекции *профильно-проецирующей прямой EF* и принадлежащей ей точки *M*. Запомните характерные признаки расположения проекций профильно-проецирующей прямой на чертеже:

- профильная проекция $EF(E''F'')$ представляет собой точку, т. е. профильные проекции точек *E*, *F* и *M* совпадают как лежащие на одном проецирующем луче к плоскости проекций *W*;
- фронтальная проекция $E''F''$ расположена параллельно оси *X* и определяет натуральную величину прямой;
- горизонтальная проекция $E'F'$ по построению также располагается параллельно оси *X* и также определяет натуральную величину прямой.

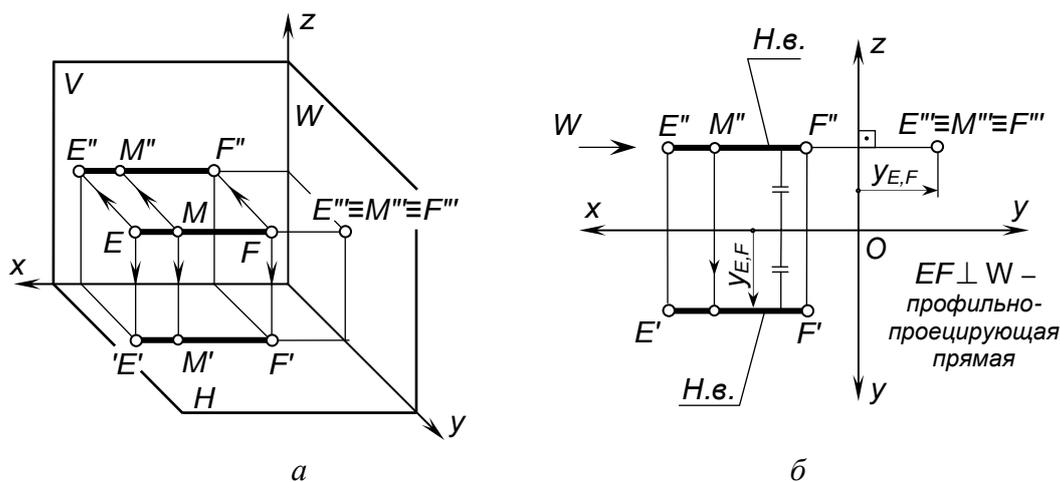


Рис. 2.7

Определение по чертежу натуральной величины отрезка прямой общего положения *способом прямоугольного треугольника* и углов ее наклона к плоскостям проекций *H* и *V*.

Натуральной величиной заданного на чертеже отрезка прямой общего положения является гипотенуза построенного прямоугольного треугольника, одним катетом которого может быть горизонтальная (или фронтальная) проекция отрезка, а вторым катетом этого треугольника будет разница координат Δz (или Δy) конечных точек этого отрезка относительно оси проекций *x*.

На рис. 2.8 показано построение натуральной величины заданного отрезка *AB* способом прямоугольного треугольника относительно фронтальной и горизонтальной его проекций, для чего выполнен следующий графический алгоритм (графические действия):

1-е действие. Провести перпендикулярную линию *m* к фронтальной проекции $AB(A''B'')$ отрезка.

2-е действие. На этой прямой линии отложить отрезок $A''A_0$, равный разнице координат Δy конечных точек *A*(*A'*) и *B*(*B'*) отрезка относительно оси проекций *x*.

3-е действие. Достроить гипотенузу A_0B'' треугольника, которая определяет искомую натуральную величину отрезка AB .

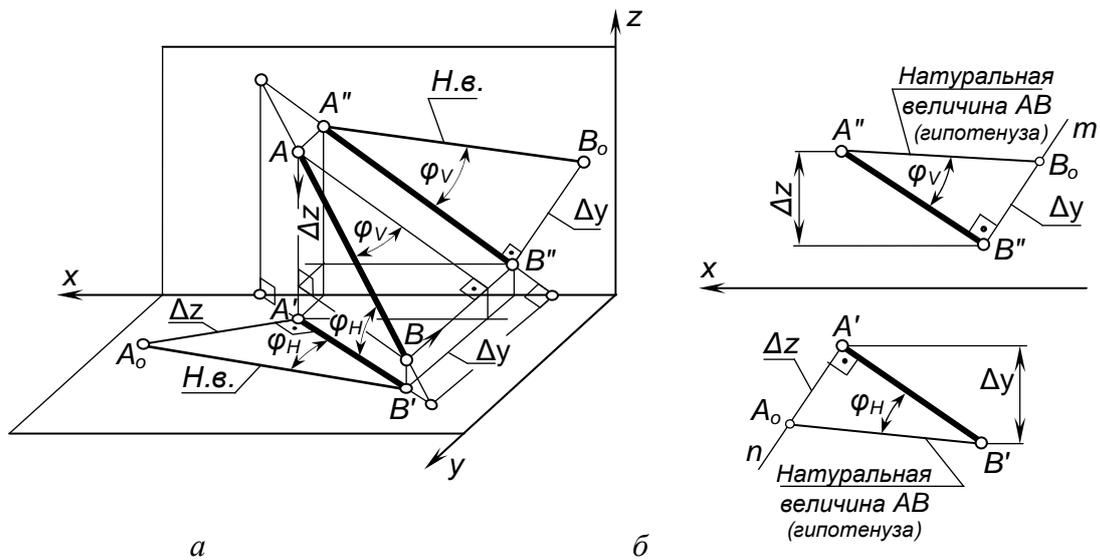


Рис. 2.8

Аналогичные построения выполнены относительно горизонтальной проекции отрезка $A'B'$ – гипотенуза $A'B_0$ также определяет натуральную величину заданного отрезка.

В построенных прямоугольных треугольниках углы между проекциями отрезка и гипотенузой определяют углы наклона прямой к плоскостям проекций H и V :

– угол φ_V между фронтальной проекцией $A''B''$ отрезка и гипотенузой A_0B'' определяет наклон отрезка к плоскости проекций V ;

– угол φ_H между горизонтальной проекцией $A'B'$ отрезка и гипотенузой $A'B_0$ определяет наклон отрезка к плоскости проекций H .

!!! В задачах по начертательной геометрии часто требуется построить на прямой общего положения, не имеющей второй конечной точки, проекции отрезка какой-либо заданной величины.

На рис. 2.9 показано построение на прямой n с одной конечной точкой A проекций отрезка AB заданной величины 25 мм, для чего выполнен следующий графический алгоритм (графические действия):

1-е действие. Ограничить прямую n произвольным отрезком $AK(A'K', A''K'')$.

2-е действие. Построить натуральную величину произвольного отрезка AK спосо-

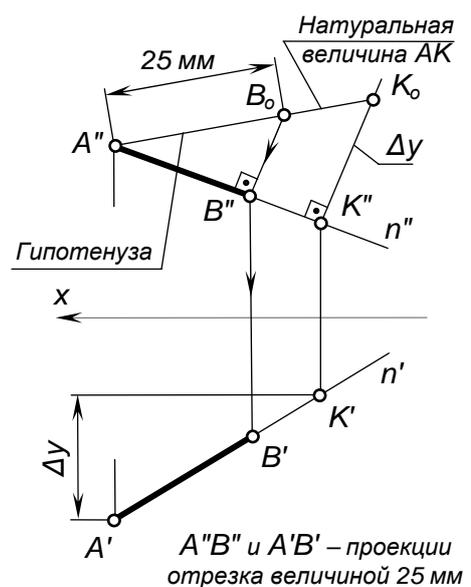


Рис. 2.9

бом прямоугольного треугольника относительно, например, фронтальной проекции $A''K''$ – это гипотенуза – $A''K_0$ (см. рис. 2.9).

3-е действие. На построенной натуральной величине $A''K_0$ (гипотенузе) от точки A'' отложить отрезок равный 25 мм и построить точку B_0 .

4-е действие. Из построенной точки B_0 провести перпендикуляр на проекцию n'' заданной прямой n и получить точку B'' , т. е. построить фронтальную проекцию $A''B''$ отрезка AB заданной величины 25 мм; по линии связи определить горизонтальную проекцию B' точки B , т. е. построить горизонтальную проекцию $A'B'$ отрезка AB заданной величины 25 мм.

Понятие о следах прямой

Следами прямой называются точки ее пересечения с плоскостями проекций. На рис. 2.10 показано построение на чертеже фронтального и горизонтального следов прямой AB и определено прохождение прямой по октантам пространства: из IV через I во II.

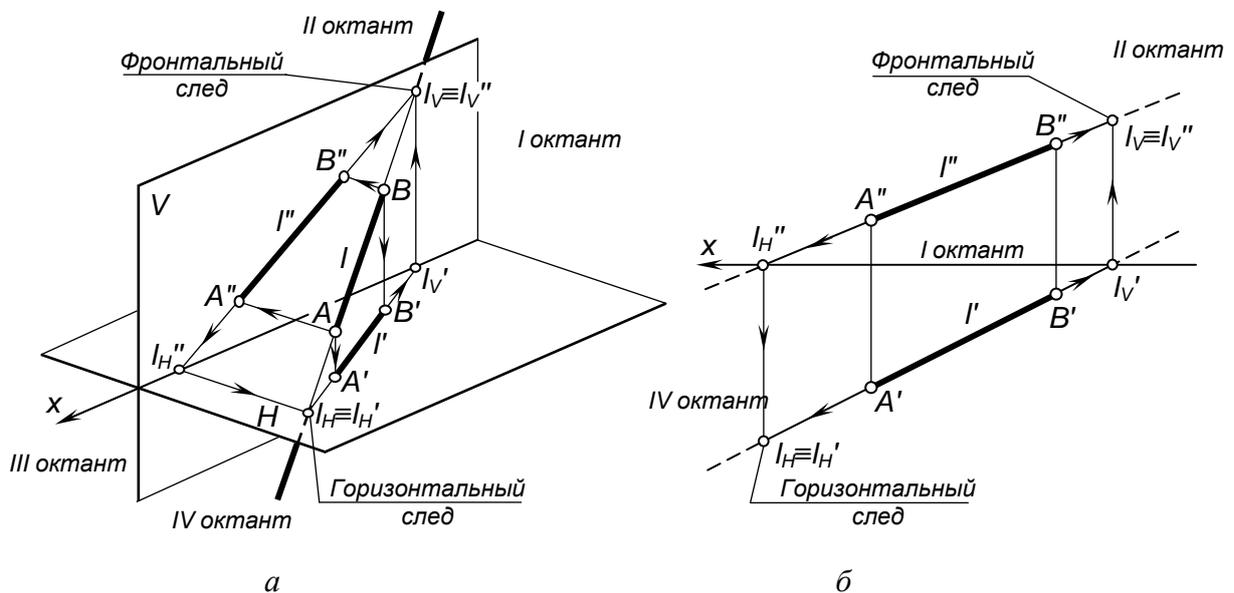


Рис. 2.10

Взаимное положение двух прямых

Две прямые в пространстве могут быть параллельными, пересекаться или скрещиваться. Запомните характерные признаки расположения на чертеже проекций двух различно расположенных прямых.

Параллельные прямые. Если прямые в пространстве параллельны, то их одноименные проекции на чертеже также параллельны. На рис. 2.11 изображены параллельные прямые AB и CD . На чертеже фронтальные и горизонтальные проекции прямых параллельны: $A''B''//C''D''$ и $A'B'//C'D'$.

Пересекающиеся прямые. Если прямые в пространстве пересекаются, то на чертеже проекции точки пересечения прямых лежат на одной линии связи. На рис. 2.12 изображены проекции пересекающихся прямых EF и KN .

Проекции точки их пересечения $M(M'',M')$ лежат на пересечении одноименных проекций прямых и на одной линии связи.

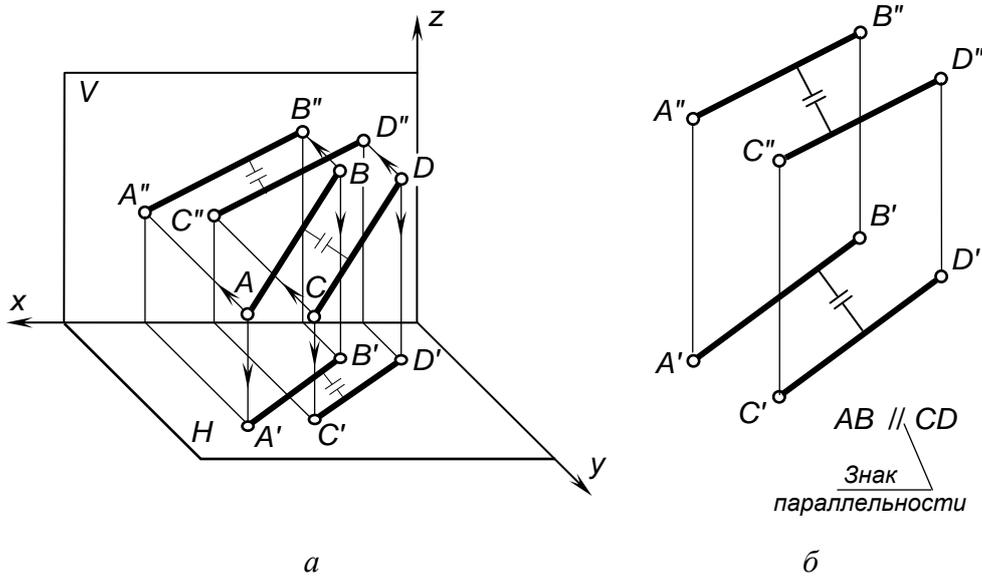


Рис. 2.11

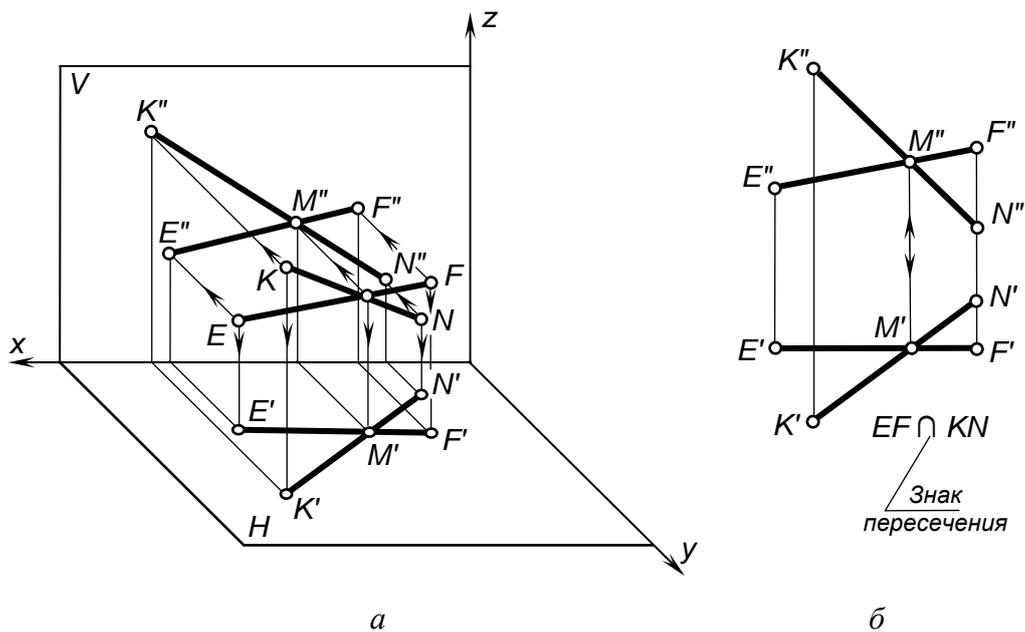


Рис. 2.12

Скрещивающиеся прямые. Если две прямые не параллельны и не пересекаются, то они в пространстве скрещиваются. На чертеже их проекции могут накладываться, образуя конкурирующие точки, лежащие на одном проецирующем луче. На рис. 2.13 изображены проекции двух скрещивающихся прямых AB и CD . Их одноименные проекции накладываются и образуют четыре конкурирующие точки (2 пары):

– конкурирующие точки 1 и 2 лежат на одном проецирующем луче, перпендикулярном плоскости проекций H , но принадлежат разным прямым: точка 1 принадлежит прямой AB , а точка 2 – прямой CD ; горизонтальные проекции точек 1 и 2 совпадают;

– конкурирующие точки 3 и 4 лежат на проецирующем луче, перпендикулярном плоскости проекций V , но принадлежат разным прямым: точка 3 принадлежит прямой CD , а точка 4 – прямой AB ; фронтальные проекции точек 3 и 4 совпадают.

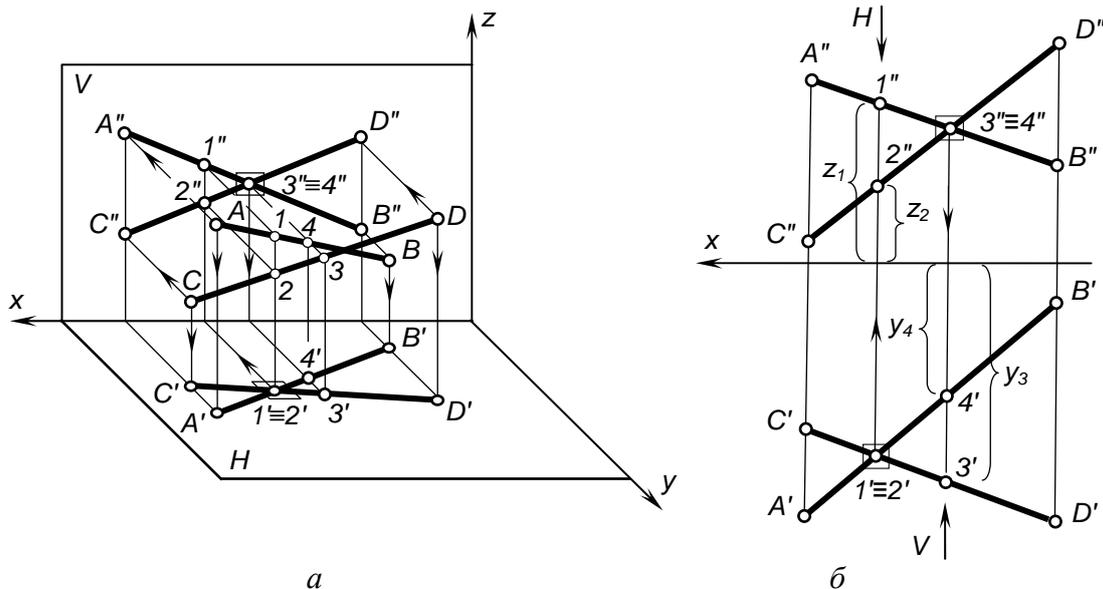


Рис. 2.13

!!! Конкурирующие точки, как было сказано выше, позволяют наблюдателю определить по чертежу относительное расположение прямых по их удаленности от плоскостей проекций H и V :

– по конкурирующим точкам 1 и 2 при взгляде на них сверху вниз на плоскость H (по стрелке) видно, что точка 1 расположена выше точки 2 (координата z_1 больше координаты z_2), т. е. на горизонтальной проекции прямая AB расположена над прямой CD ;

– по конкурирующим точкам 3 и 4 при взгляде на них снизу вверх на плоскость V (по стрелке) видно, что точка 3 расположена ближе к наблюдателю (координата y_3 больше координаты y_4), т. е. на фронтальной проекции прямая CD расположена перед прямой AB .

Теорема о проекции прямого угла. Частное положение прямых – перпендикулярные прямые

Пересекающиеся прямые в пространстве могут быть расположены под прямым углом, т. е. взаимно перпендикулярно. Прямым углом между перпендикулярными прямыми может проецироваться на чертеж в натуральную величину при определенном условии.

Теорема о проекции прямого угла:

– если одна сторона прямого угла параллельна какой-либо плоскости проекций, а вторая сторона ей не перпендикулярна, то на эту плоскость проекций угол проецируется в натуральную величину, т. е. прямым (90°).

На рис. 2.14 дано изображение, поясняющее теорему о проекции прямого угла. Две перпендикулярные прямые AB и AC , образующие плоскость β , проецируются на некоторую плоскость проекций H . Прямая AC по условию параллельна этой плоскости проекций. Доказательство теоремы основано на известной из геометрии теореме о трех перпендикулярах (обратная теорема): прямая n , проведенная в плоскости H перпендикулярно наклонной прямой AB ($n \perp AB$; $n \parallel A'C$), перпендикулярна и ее проекции; следовательно, угол $B'A'C'$ – прямой.

Если $\angle BAC = 90^\circ$, а $BC \parallel H$, то $\angle B'A'C' = 90^\circ$

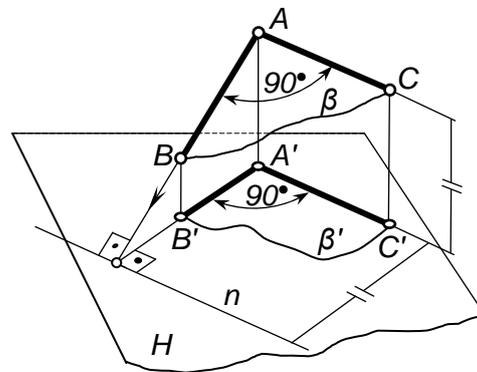


Рис. 2.14

!!! Для решения многих задач начертательной геометрии требуется по условию строить проекции прямого угла.

На рис. 2.15, а, б показано построение на чертеже недостающей фронтальной проекции прямого угла KMN .

На рис. 2.15, а изображено графическое условие задачи: дана горизонтальная проекция $K'M'N'$ прямого угла и фронтальная проекция $M''N''$ одной стороны этого угла.

На рис. 2.15, б показано решение задачи: так как одна сторона MN прямого угла по условию является фронтальной прямой, т. е. параллельна фронтальной плоскости проекций V , то по теореме о проекции прямого угла на плоскость V заданный прямой угол KMN должен проецироваться прямым; следовательно, фронтальную проекцию $K''M''$ стороны KM прямого угла проводим перпендикулярно заданной фронтальной проекции стороны $MN(M''N'')$.

На рис. 2.16, а, б показано построение на чертеже недостающей горизонтальной проекции прямого угла ECD .

По условию:
 $KM \perp MN$
 $MN \parallel V$

На чертеже:
 $K''M'' \perp M''N''$

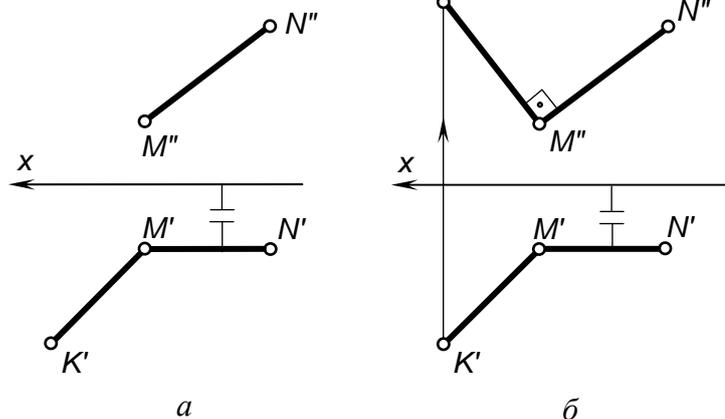


Рис. 2.15

На рис. 2.16, *а* изображено графическое условие задачи: дана фронтальная проекция $E''C''D''$ прямого угла и горизонтальная проекция $C'D'$ одной стороны этого угла.

На рис. 2.16, *б* показано решение задачи: так как одна сторона CD прямого угла по условию является горизонтальной прямой, т. е. параллельна горизонтальной плоскости проекций H , то по теореме

о проекции прямого угла на плоскость H заданный прямой угол ECD должен проецироваться прямым; следовательно, горизонтальную проекцию $E'C'$ стороны угла EC проводим перпендикулярно заданной горизонтальной проекции стороны $CD(C'D')$.

Структуризация материала второй лекции в рассмотренном объеме схематически представлена на рис. 2.17 (лист 1). На последующих листах 2–4 компактно приведены иллюстрации к этой схеме, способствующие закреплению изученного материала и его быстрому визуальному повторению (рис. 2.18–2.20).

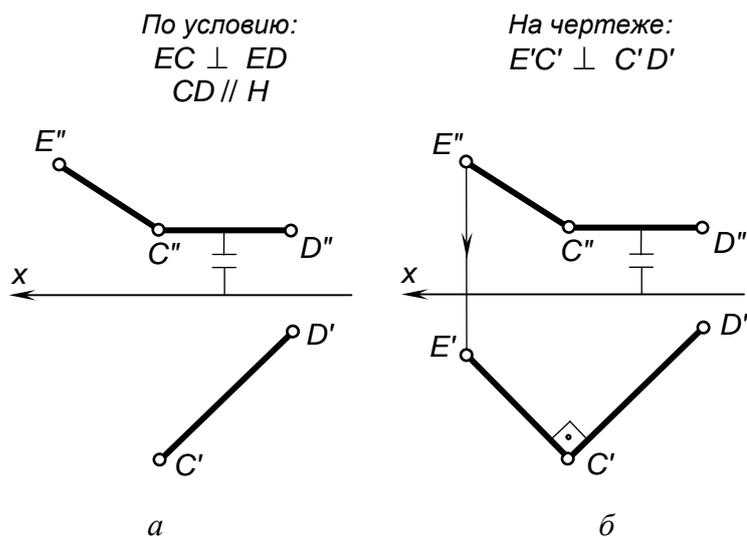
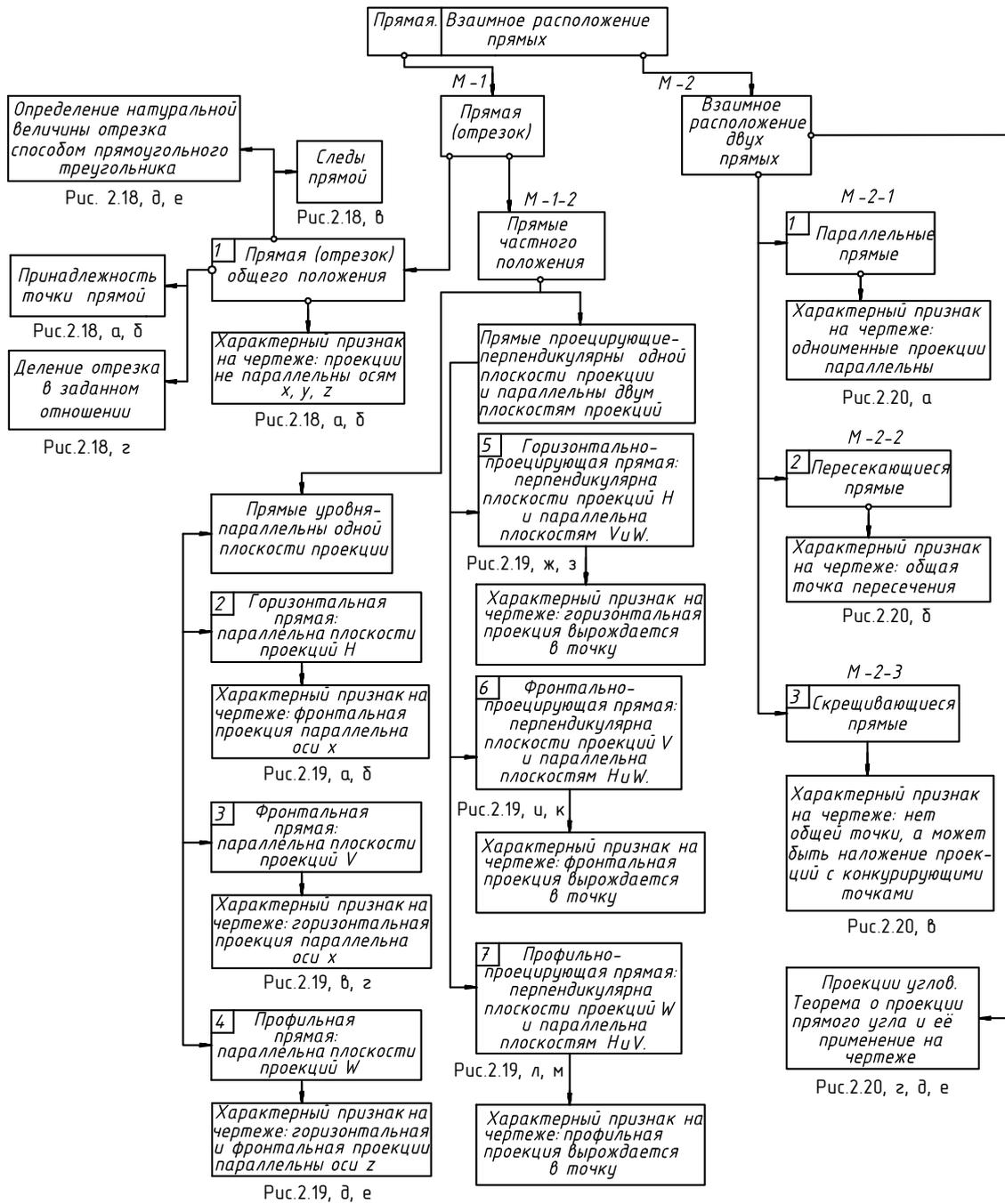


Рис. 2.16

Проекция прямой. Положение прямой относительно плоскостей проекций. Взаимное положение прямых. Способ прямоугольного треугольника. Теорема о проекции прямого угла



Прямые обозначают на чертеже строчными буквами латинского алфавита: а, в, т, п и т.д. Отрезки прямых обозначаются прописными буквами: АВ, MN и т.д.

Знак параллельности прямых: АВ // MN.

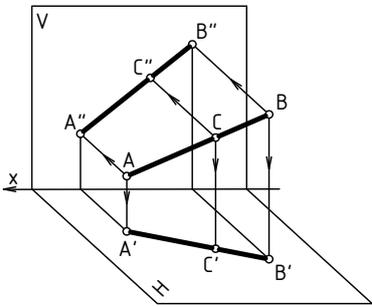
Знак пересечения прямых: АВ ∩ MN.

Знак скрещивающихся прямых: АВ ∓ MN.

Рис. 2.17

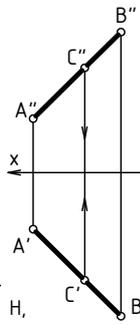
Прямая общего положения

Прямая общего положения и её проекции



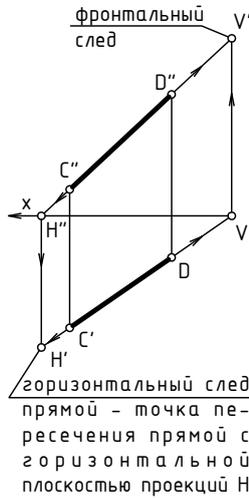
Не параллельна плоскостям проекций H, V и W. Точка C лежит на прямой AB.

а



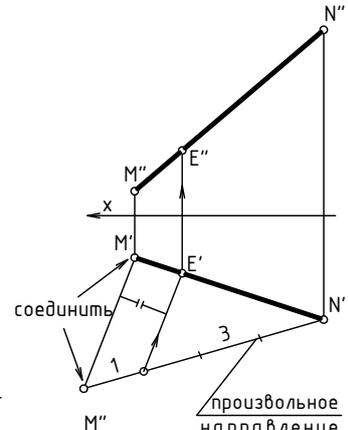
б

Следы прямой



в

Деление отрезка в заданном отношении (например, 1:3)

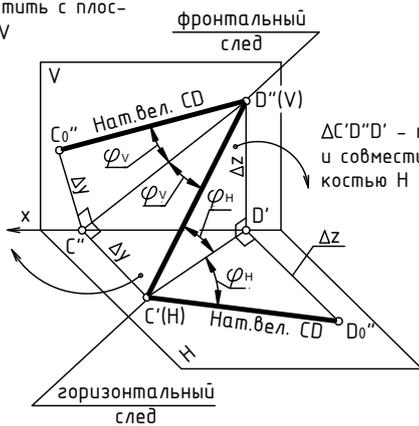


з

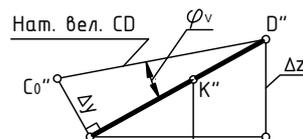
Теорема о принадлежности точки прямой: если точка принадлежит прямой, то на чертеже одноимённые проекции точки лежат на одноимённых проекциях прямой (см. рис. а, б и в).

Определение натуральной величины отрезка способом прямоугольного треугольника на чертеже

$\Delta C''D''$ - повернуть и совместить с плоскостью V



д



$C'K'$ и $C''K''$ - проекции отрезка длиной 20 мм

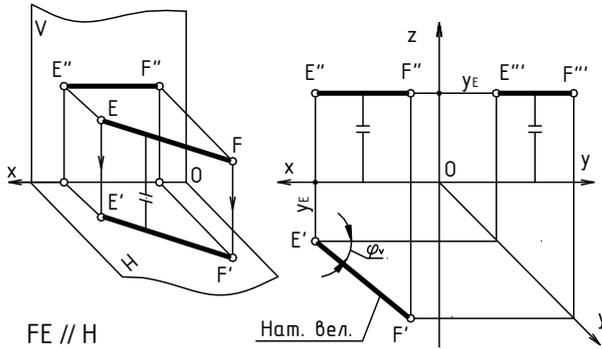
φ_V - угол наклона отрезка к плоскости проекций V
 φ_H - угол наклона отрезка к плоскости проекций H

е

Рис. 2.18

Прямые частного положения

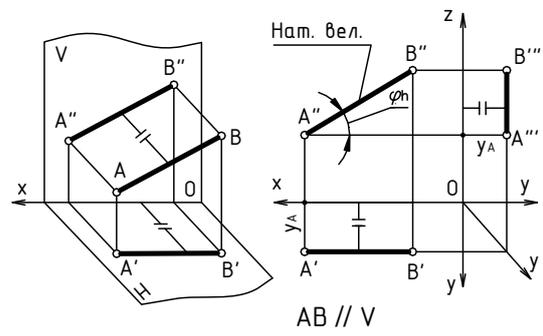
Горизонтальная прямая уровня: // H



а

б

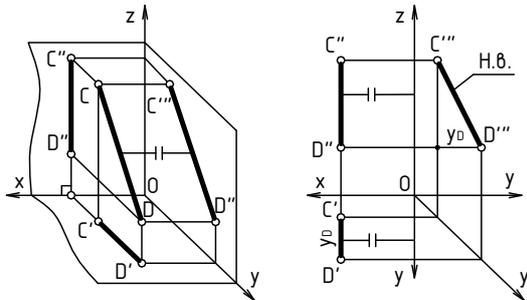
Фронтальная прямая уровня // V



в

з

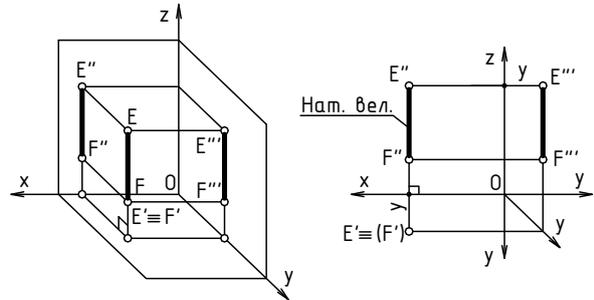
Профильная прямая уровня: // W



д

е

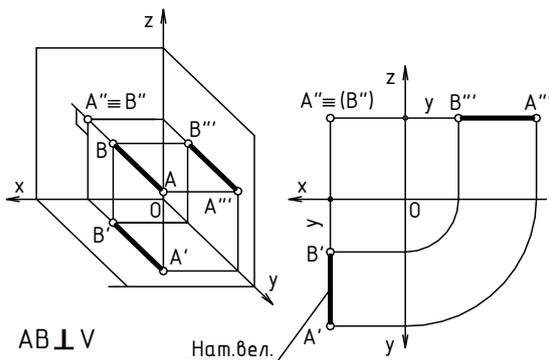
Горизонтально-проецирующая прямая \perp H



ж

з

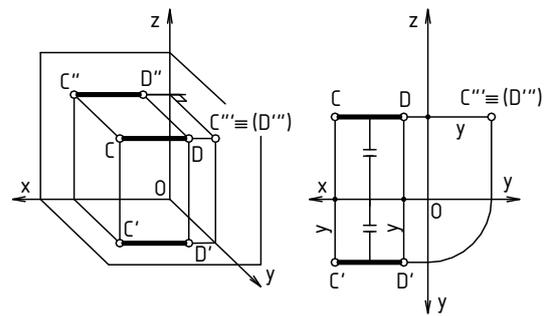
Фронтально-проецирующая прямая: \perp V



и

к

Профильно-проецирующая прямая: \perp W



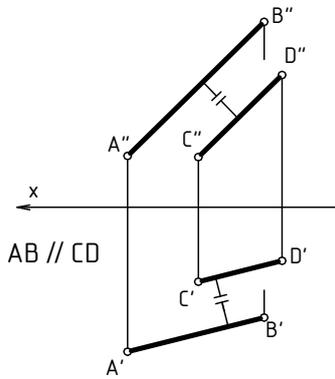
л

м

Рис. 2.19

Взаимное положение прямых

Параллельные прямые

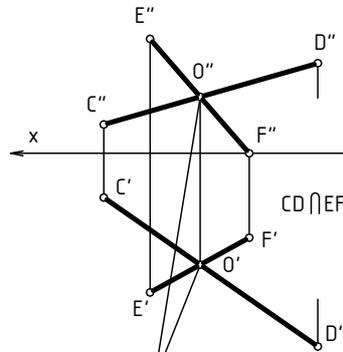


$AB \parallel CD$

Проекции прямых параллельны

а

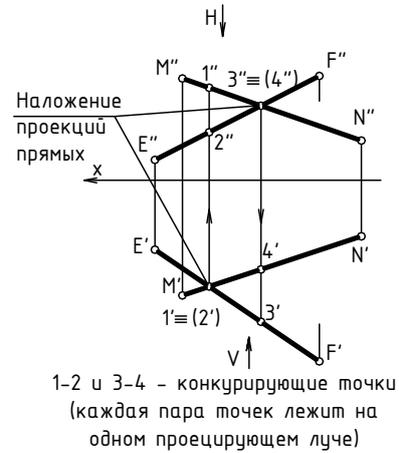
Пересекающиеся прямые



Общая точка пересечения

б

Скрещивающиеся прямые

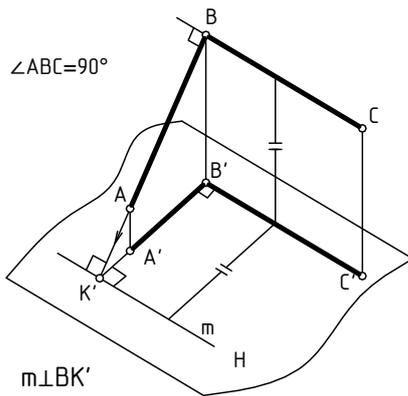


Наложение проекций прямых

1-2 и 3-4 – конкурирующие точки (каждая пара точек лежит на одном проецирующем луче)

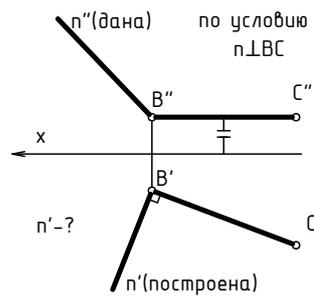
в

Теорема о проекции прямого угла



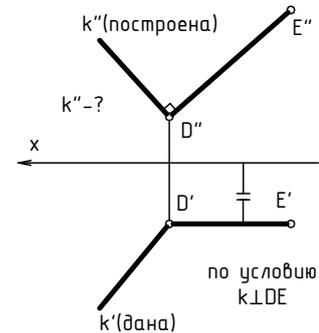
Если $m \perp BK'$, то $m \perp B'K'$, а $B'K' \perp B'C'$, то есть $\angle K'B'C' = 90^\circ$. Если $BC \parallel H$, а $AB \not\parallel H$, то $\angle A'B'C' = 90^\circ$.

з



Так как $BC \parallel H$, то $n' \perp B'C'$

д



Так как $DE \parallel V$, то $k'' \perp D''E''$

е

Теорема о проекции прямого угла: если одна сторона прямого угла параллельна плоскости проекций (а вторая не параллельна и не перпендикулярна этой плоскости), то на эту плоскость проекций прямой угол проецируется в виде прямого угла.

Знак перпендикулярности элементов: \perp

Рис. 2.20

Лекция 3

ПРОЕКЦИИ ПЛОСКОСТИ. ЗАДАНИЕ ПЛОСКОСТИ НА ЧЕРТЕЖЕ. СЛЕДЫ ПЛОСКОСТИ. ПОЛОЖЕНИЕ ПЛОСКОСТИ ОТНОСИТЕЛЬНО ПЛОСКОСТЕЙ ПРОЕКЦИЙ

Плоскость. Способы задания плоскости на чертеже

Из геометрии известно, что плоскость в пространстве определяется тремя точками, не лежащими на одной прямой. В соответствии с этим на чертеже плоскость может быть задана:

- проекциями трех точек, не лежащих на одной прямой (рис. 3.1, а);
- проекциями прямой и точки, взятой вне прямой (рис. 3.1, б);
- проекциями двух параллельных прямых (рис. 3.1, в);
- проекциями двух пересекающихся прямых (рис. 3.1, г);
- проекциями замкнутого отска любой формы – треугольника, четырехугольника и т. д. (рис. 3.2).

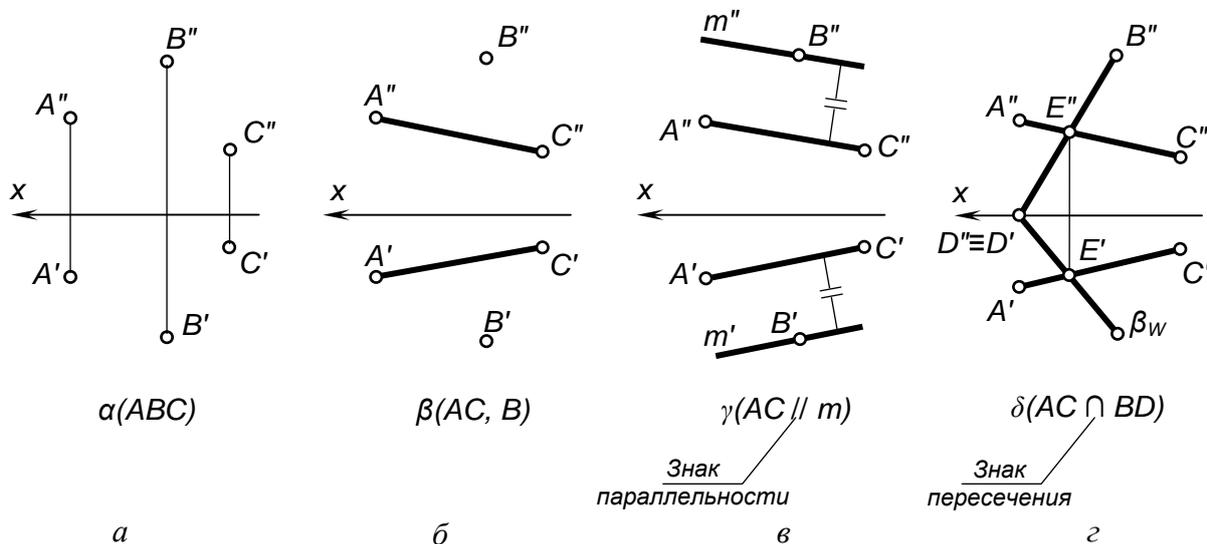


Рис. 3.1

Точка и прямая в плоскости

Из геометрии известны теоремы о принадлежности точки и прямой линии плоскости:

1-я теорема: точка принадлежит плоскости, если она принадлежит прямой линии, лежащей в этой плоскости.

2-я теорема: прямая линия принадлежит плоскости, если она проходит через две точки, лежащие в этой плоскости.

На рис. 3.2 показано применение этих теорем для построения горизонтальной проекции точки $K(K'', K'-?)$, лежащей в плоскости, заданной треугольником ABC . Для решения этой

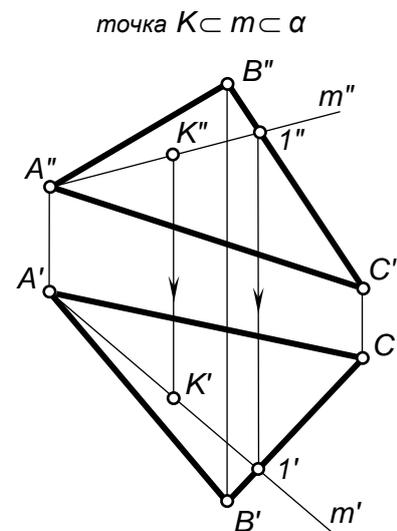


Рис. 3.2

задачи требуется выполнить следующий графический алгоритм (графические действия):

1-е действие. Провести в заданной плоскости фронтальную проекцию вспомогательной прямой $m(m'')$ через две точки этой плоскости – например, через точку $A(A'')$ и заданную фронтальную проекцию точки $K(K'')$; эта прямая пересекает сторону BC треугольника в точке $1(1'', 1')$.

2-е действие. Провести горизонтальную проекцию вспомогательной прямой $m(m')$ через горизонтальные проекции точек $A(A')$ и $1(1')$.

3-е действие. Построить по линии связи искомую горизонтальную проекцию точки $K(K')$ на горизонтальной проекции вспомогательной прямой $m(m')$.

На рис. 3.3, *а, б* показано решение задачи, где требуется достроить горизонтальную проекцию четырехугольника $ABCD(A'', B'', C'', D''; A', B', C', D' - ?, C' - ?)$. Для решения задачи выполнены следующие графические построения:

- проведены проекции диагонали $AC(A''C'', A'C')$;
- проведена фронтальная проекция диагонали $BD(B''D'')$;
- определены проекции вспомогательной точки $1(1''1')$, принадлежащей диагоналям AC и BD ;

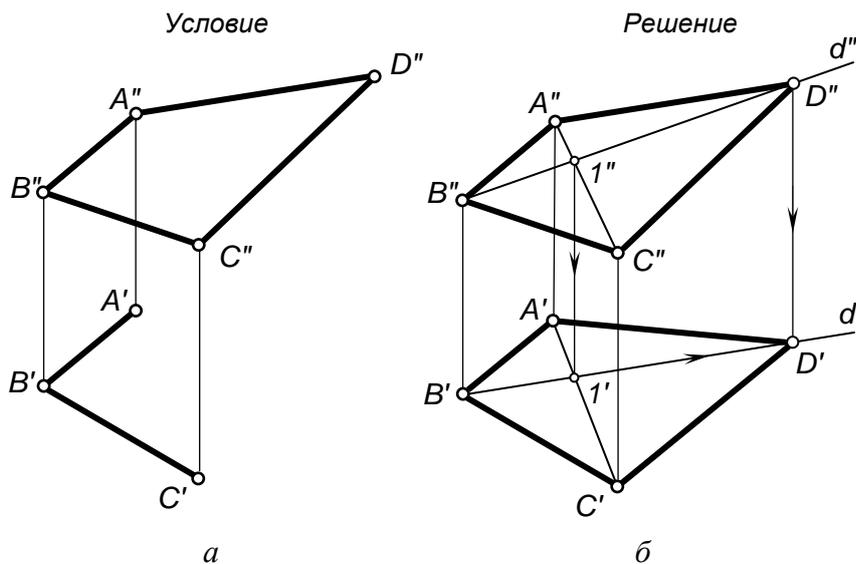


Рис. 3.3

- проведена через точки B' и $1'$ горизонтальная проекция диагонали $d(d')$, на которой должна лежать проекция вершины $D(D')$;

- построена по линии связи горизонтальная проекция D' вершины D по ее принадлежности прямой $d(d')$;

- достроена горизонтальная проекция $A'B'C'D'$ четырехугольника $ABCD$.

Прямые особого положения в плоскости. Горизонталь h и фронталь f плоскости

Прямые линии, лежащие в плоскости и параллельные фронтальной плоскости проекций V , называются *фронталями* – $f(f'', f')$.

Прямые линии, лежащие в плоскости и параллельные горизонтальной плоскости проекций H , называются *горизонталями* – $h(h'', h')$.

На рис. 3.4 показано построение в плоскости треугольника DEF проекций фронтали и горизонтали.

Поскольку фронталь плоскости f параллельна фронтальной плоскости проекций V , построение ее проекций следует начинать с горизонтальной проекции фронтали f' , которая должна быть на чертеже параллельна оси x . Фронтальная проекция фронтали f'' строится по ее принадлежности заданной плоскости с помощью вспомогательной точки $1(1', 1'')$.

Поскольку горизонталь плоскости h параллельна горизонтальной плоскости проекций H , построение ее проекций следует начинать с фронтальной проекции горизонтали h'' , которая должна быть на чертеже параллельна оси x . Горизонтальная проекция горизонтали h' строится по ее принадлежности заданной плоскости с помощью вспомогательной точки $2(2', 2'')$.

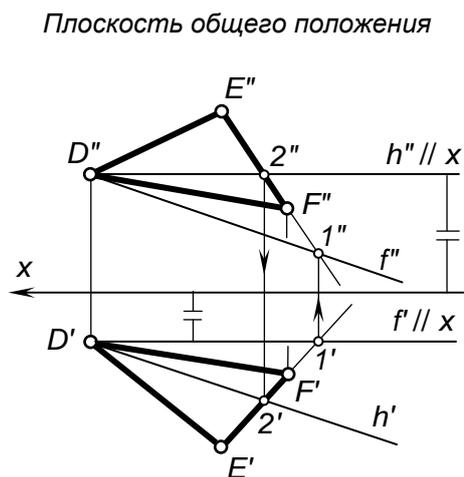


Рис. 3.4

Прямые линии, лежащие в плоскости и перпендикулярные горизонтали этой плоскости, называются *линиями наибольшего наклона* (ската) плоскости. Они определяют угол наклона плоскости к плоскости проекций H .

На рис. 3.5, *а* изображена линия наибольшего ската m в плоскости α , а на рис. 3.5, *б* – построение ее проекций на чертеже этой плоскости, заданной следами.

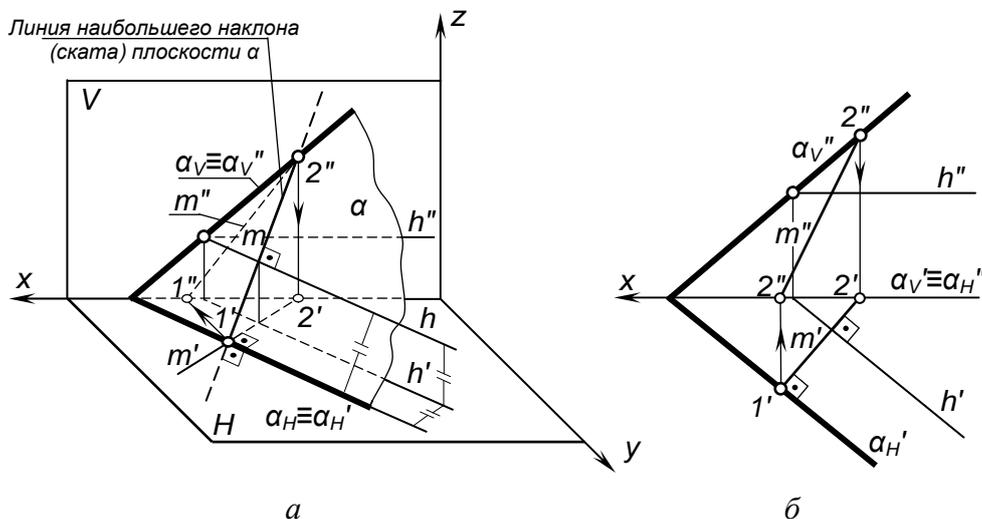


Рис. 3.5

Понятие о следах плоскости

Следами плоскости называются линии, по которым плоскость пересекается с плоскостями проекций:

- горизонтальный след – линия пересечения плоскости с плоскостью проекций H ;
- фронтальный след – линия пересечения плоскости с плоскостью проекций V ;

– профильный след – линия пересечения плоскости с плоскостью проекций W .

!!! На чертежах вырожденные в прямые линии проекции плоскостей частного положения совпадают с соответствующими следами этих плоскостей и их можно обозначать как следы (см. рис. 3.6, 3.7, 3.8, 3.9, 3.10 и 3.11) этих плоскостей.

Положение плоскости относительно плоскостей проекций. Плоскости общего положения и плоскости частного положения

Относительно плоскостей проекций V , H и W плоскости в пространстве могут занимать семь различных положений – общее и шесть частных – и имеют соответствующие названия и характерные признаки проекций на чертежах. Следовательно, по заданным проекциям плоскости можно представить ее положение в пространстве, то есть «прочитать» чертеж плоскости.

Плоскость, не перпендикулярная ни одной из плоскостей проекций (см. рис. 3.1, 3.2, 3.3, 3.4, 3.5), называется *плоскостью общего положения*.

!!! **Запомните** характерные признаки плоскости общего положения на чертеже – ни одна ее проекция не вырождается в линию, и каждая проекция искажает величину той формы, которой плоскость задана на чертеже.

• Плоскости частного положения, перпендикулярные одной плоскости проекций, называются *проецирующими плоскостями*.

Фронтально-проецирующая плоскость перпендикулярна фронтальной плоскости проекций V . На рис. 3.6 плоскость задана двумя пересекающимися прямыми DE и EF ; горизонталь плоскости h преобразуется здесь во фронтально-проецирующую прямую ($h \perp V$).

Фронтально-проецирующая плоскость

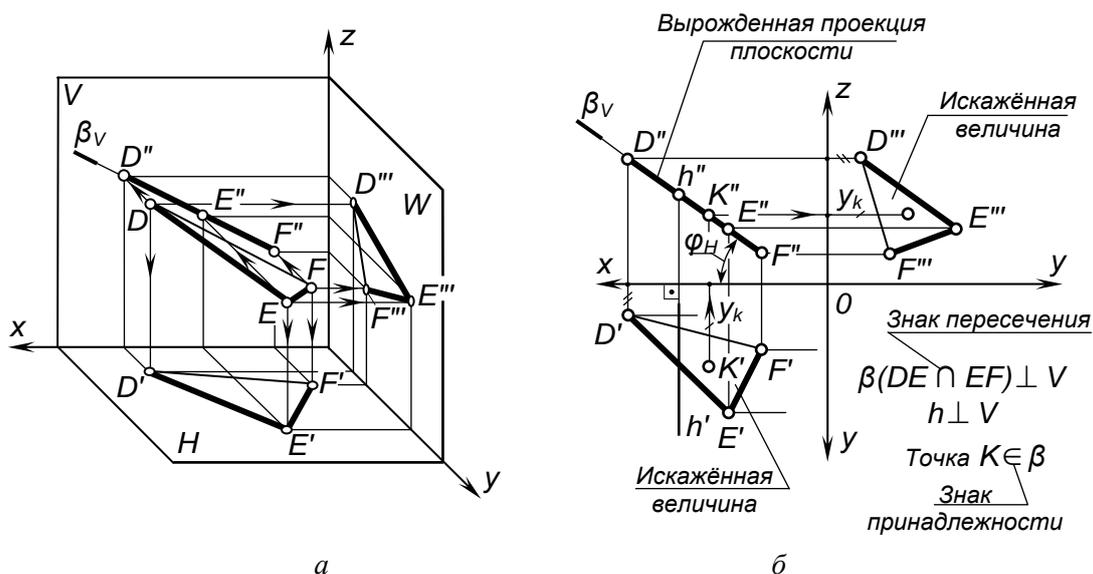


Рис. 3.6

!!! **Запомните** характерные признаки фронтально-проецирующей плоскости на чертеже – ее фронтальная проекция представляет собой прямую (вырожденная проекция β_V), наклоненную к оси проекций X , и определяет угол наклона плоскости к плоскости проекций H . Горизонтальная и профильная проекции плоскости представляют собой искаженную по величине форму, которой эта плоскость задана на чертеже.

Горизонтально-проецирующая плоскость перпендикулярна горизонтальной плоскости проекций H . На рис. 3.7 плоскость задана треугольником ABC ; фронталь плоскости f преобразуется в горизонтально-проецирующую прямую ($f \perp H$).

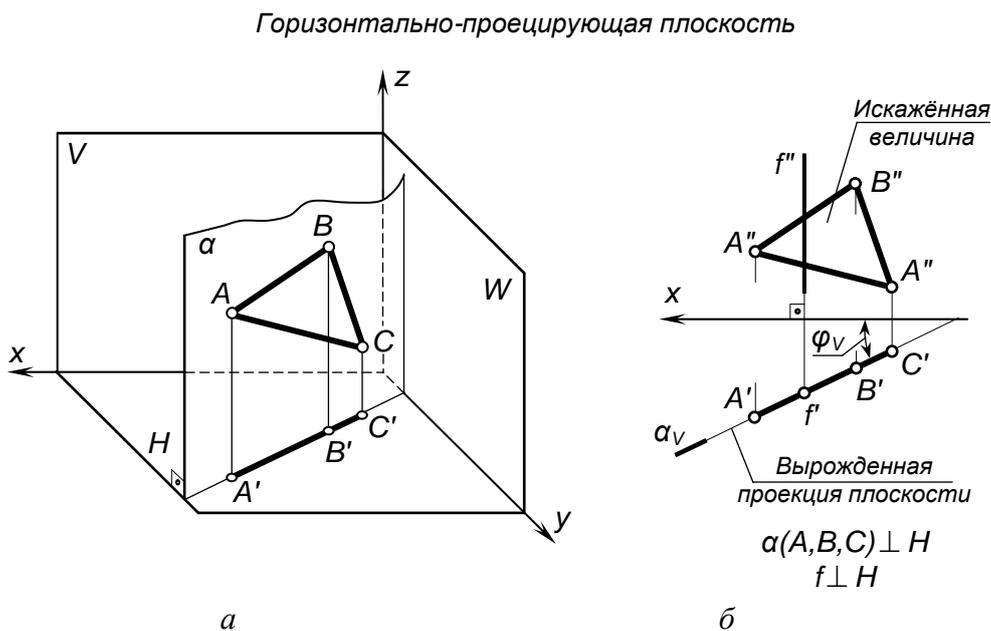


Рис. 3.7

!!! **Запомните** характерные признаки горизонтально-проецирующей плоскости на чертеже – ее горизонтальная проекция представляет собой прямую (вырожденная проекция α_H), наклоненную к оси проекций X , и определяет угол наклона плоскости к плоскости проекций V . Фронтальная и профильная (не показана) проекции плоскости представляют собой искаженную по величине форму, которой эта плоскость задана на чертеже.

Профильно-проецирующая плоскость перпендикулярна профильной плоскости проекций W . На рис. 3.8 плоскость задана двумя параллельными прямыми KL и MN ; фронталь и горизонталь плоскости преобразуются в профильно-проецирующие прямые.

!!! **Запомните** характерные признаки профильно-проецирующей плоскости на чертеже – ее профильная проекция представляет собой прямую (вырожденная проекция δ_W), наклоненную к осям проекций X и Y , и определяет углы наклона плоскости к плоскостям проекций V и H . Фронтальная и горизонтальная проекции этой плоскости представляют собой искаженную по величине форму, которой эта плоскость задана на чертеже.

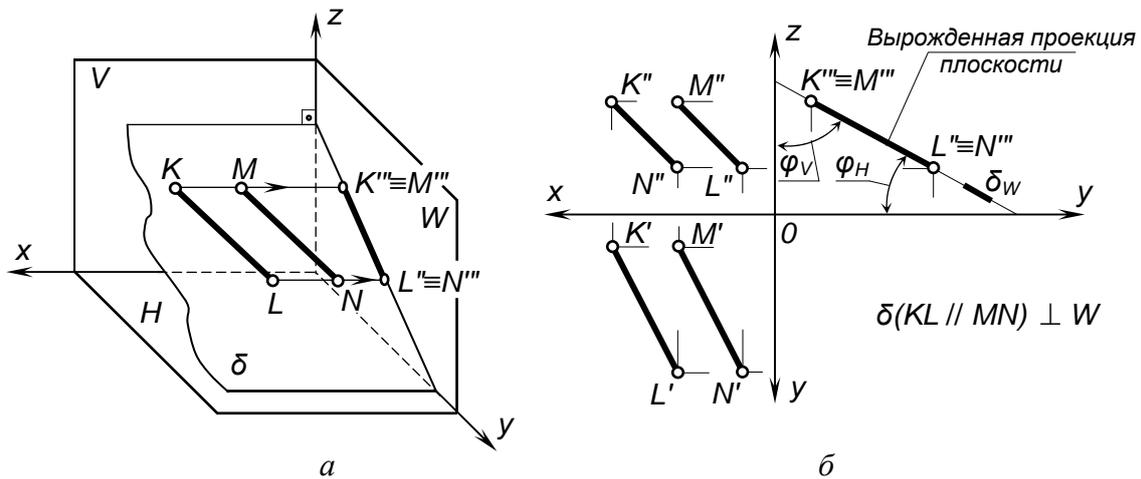


Рис. 3.8

• Плоскости частного положения, перпендикулярные двум плоскостям проекций и параллельные третьей плоскости проекций называются *плоскостями уровня*.

Фронтальная плоскость уровня параллельна фронтальной плоскости проекций V и перпендикулярна плоскостям проекций H и W . На рис. 3.9 фронтальная плоскость уровня задана параллелограммом $DEFG$; фронтальная проекция этой плоскости является ее натуральной величиной.

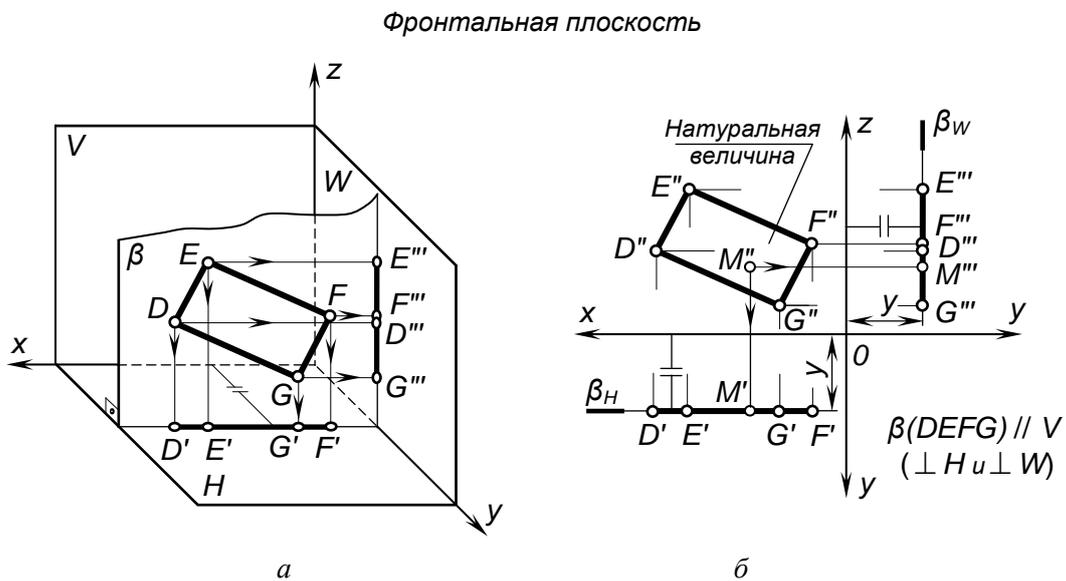


Рис. 3.9

!!! **Запомните** характерные признаки фронтальной плоскости на чертеже – ее горизонтальная и профильная проекции проецируются в прямые (вырожденные проекции β_H и β_W), параллельные соответственно осям проекций x и z .

Горизонтальная плоскость уровня параллельна горизонтальной плоскости проекций H и перпендикулярна плоскостям проекций V и W .

На рис. 3.10 горизонтальная плоскость уровня задана треугольником ABC ; горизонтальная проекция этой плоскости является ее натуральной величиной.

!!! **Запомните** характерные признаки горизонтальной плоскости на чертеже – ее фронтальная и профильная проекции проецируются в прямые (вырожденные проекции α_V и α_W), параллельные соответственно осям проекций X и Y .

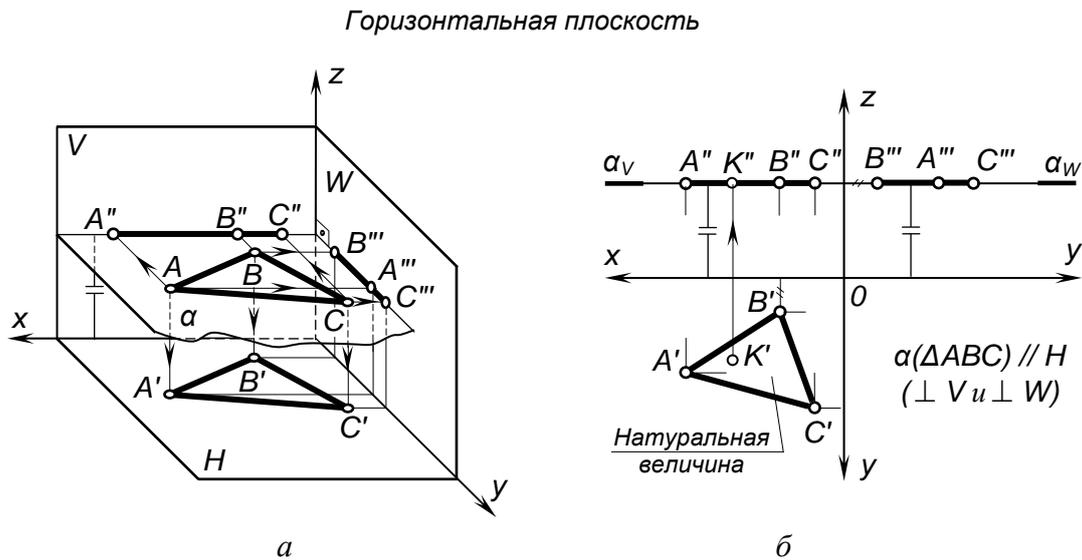


Рис. 3.10

Профильная плоскость уровня параллельна плоскости проекций W и перпендикулярна плоскостям проекций V и H . На рис. 3.11 плоскость задана кругом с центром в точке O и ее профильная проекция имеет натуральную величину этого круга.

!!! **Запомните** характерные признаки профильной плоскости на чертеже – ее фронтальная и горизонтальная проекции представляют собой прямые (вырожденные проекции δ_V и δ_H), перпендикулярные оси проекций Z и Y .

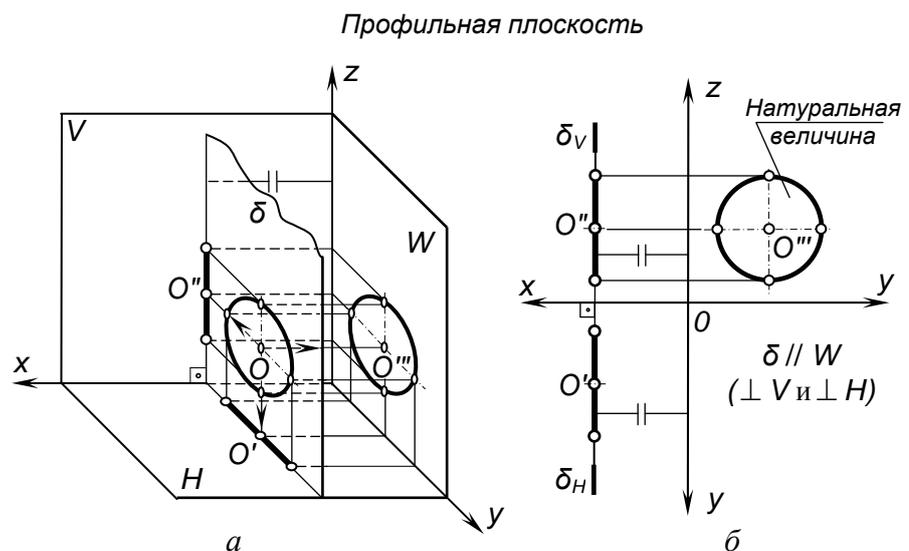


Рис. 3.11

Проведение плоскости частного положения через прямую общего положения (заключение прямой линии в плоскость частного положения)

Очень часто для решения различных задач требуется провести через прямую общего положения плоскость частного положения. Это графическое действие называется «заключить» прямую в плоскость частного положения (проецирующую или уровня). На рис. 3.12, *а, б* показано графическое оформление этого действия.

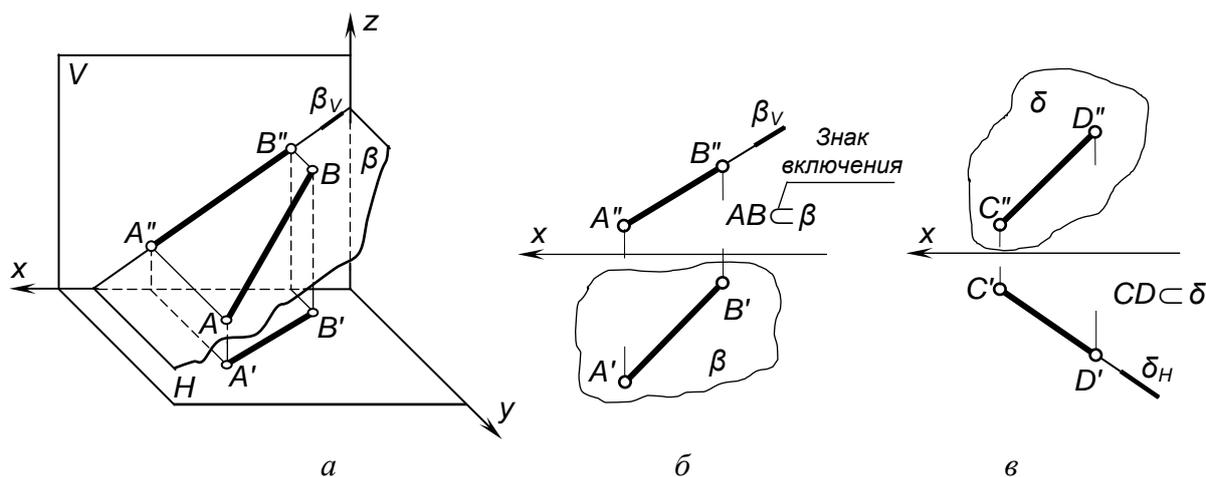


Рис. 3.12

На рис. 3.12, *а* прямая общего положения $AB(A''B'', A'B')$ заключена во фронтально-проецирующую плоскость β . Это означает, что прямая теперь лежит в этой плоскости и, следовательно, фронтальный след плоскости $\beta(\beta_V)$ совпадает с фронтальной проекцией $AB(A''B'')$ прямой; графически это действие оформляется продолжением фронтальной проекции прямой с обозначением следа надписью β_V (рис. 3.12, *б*).

!!! Горизонтальная проекция плоскости β не оформляется на чертеже, но подразумевается (показана ограниченным тонкой волнистой линией отсеком произвольной формы, так как плоскость в пространстве не имеет границ).

На рис. 3.12, *в* прямая общего положения $CD(C''D'', C'D')$ заключена в горизонтально-проецирующую плоскость δ и это действие оформлено обозначением следа надписью δ_H на продолжении горизонтальной проекции заданной прямой (рассуждения аналогичны).

Структуризация материала третьей лекции в рассмотренном объеме схематически представлена на рис. 3.13 (лист 1). На последующих листах 2 и 3 компактно приведены иллюстрации к этой схеме для визуального закрепления основной части изученного материала при повторении (рис. 3.14 и 3.15).

Проекции плоскости. Задание плоскости на чертеже. Следы плоскости.
Положение плоскости относительно плоскостей проекций

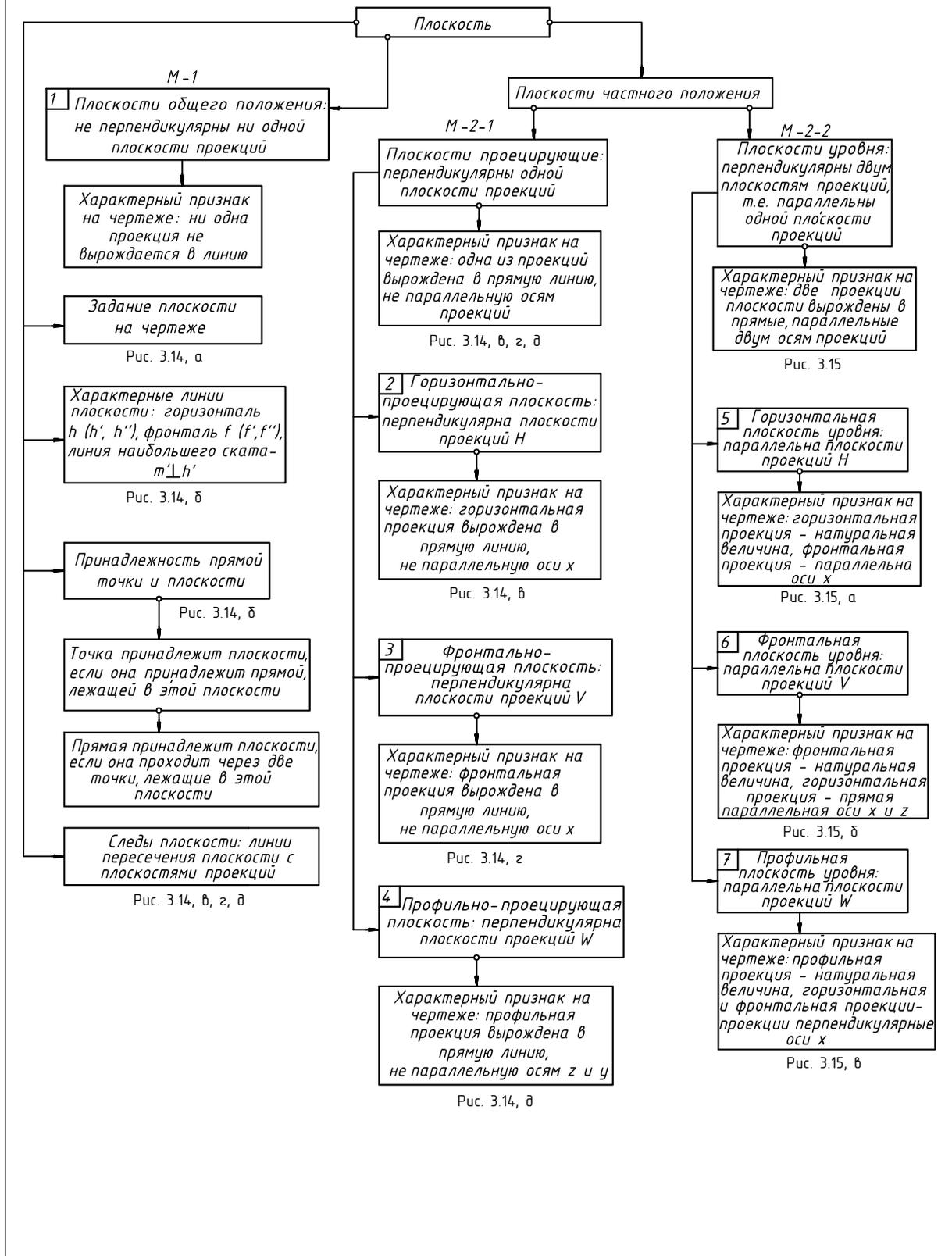
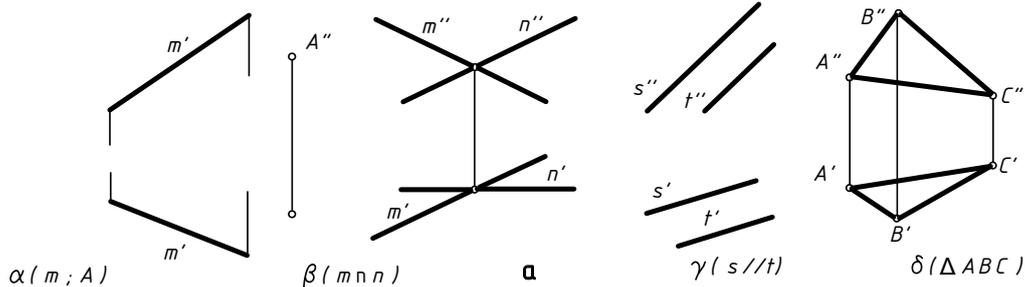


Рис. 3.13

Плоскость общего положения. Задание плоскости на чертеже.

Прямой и точкой Пересекающимися прямыми Параллельными прямыми Закрытым отрезком



Плоскости частного положения - проецирующие

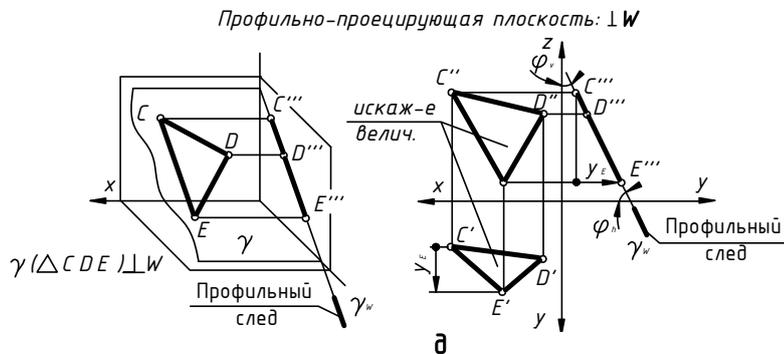
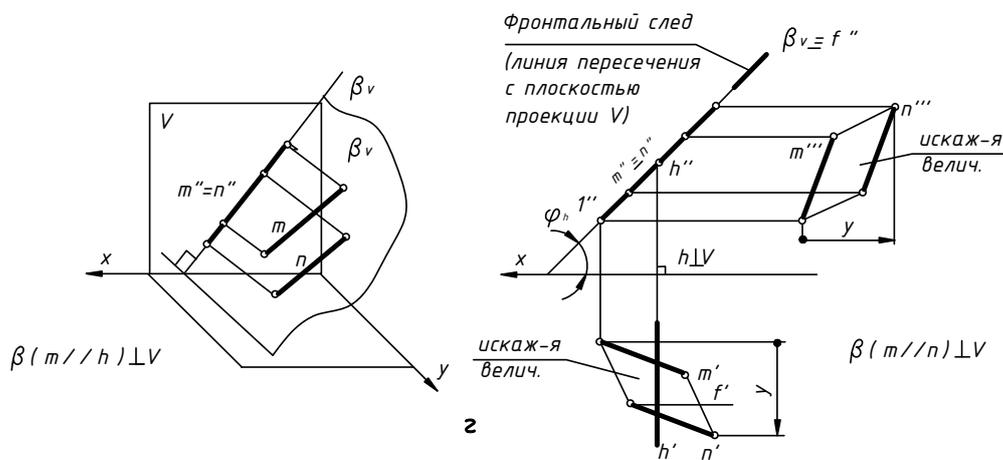
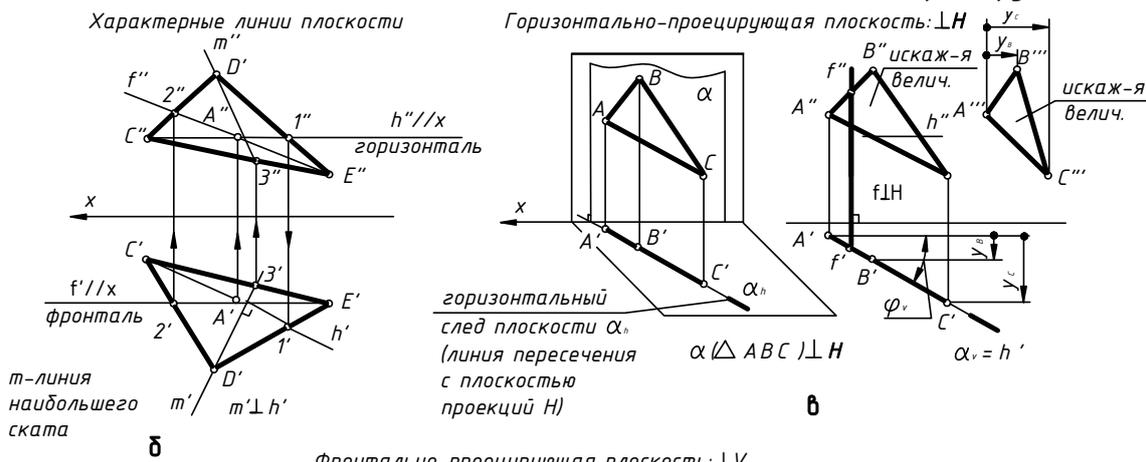
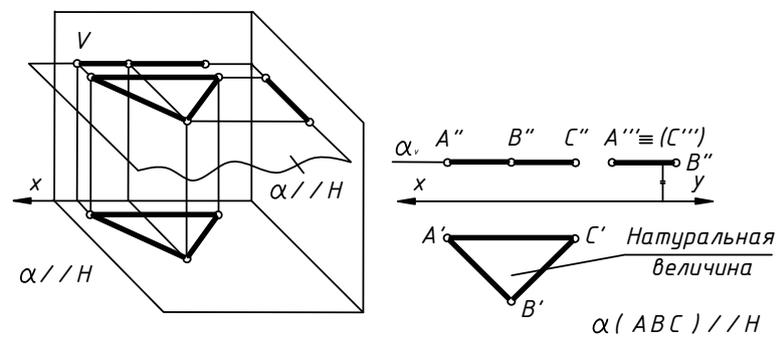


Рис. 3.14

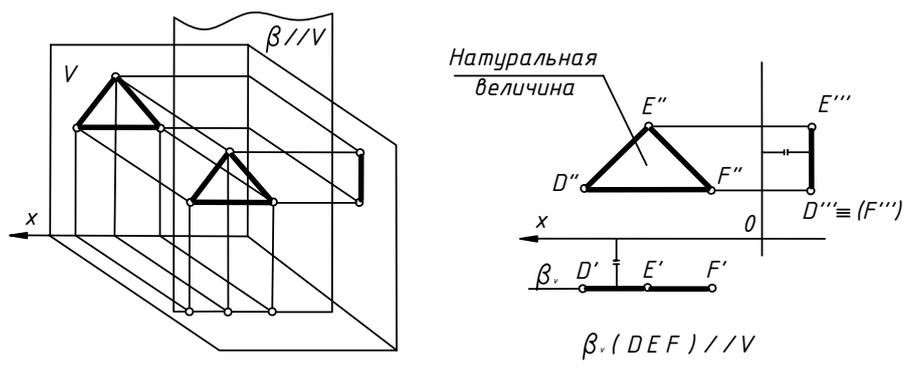
Плоскости частного положения - уровня

Горизонтальная плоскость уровня: $//H(\perp V \text{ и } \perp W)$



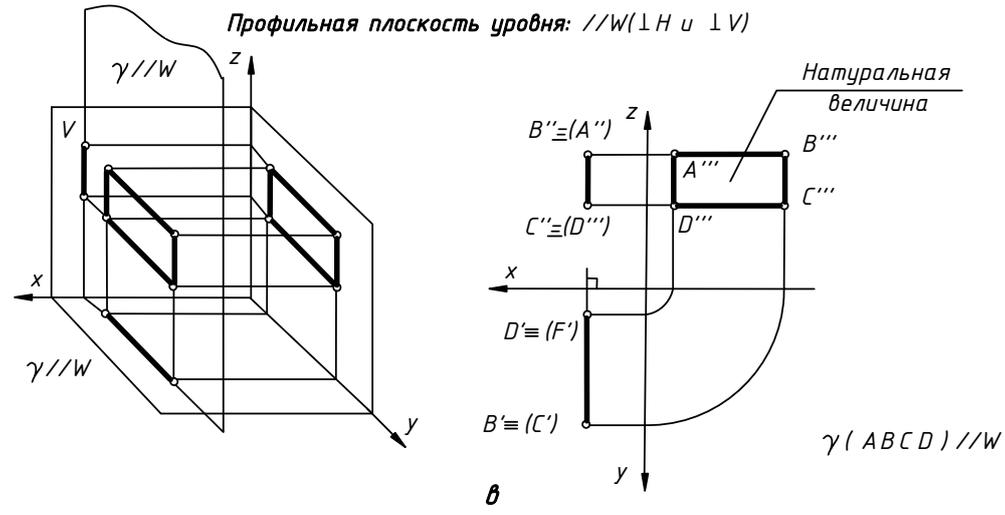
а

Фронтальная плоскость уровня: $//V(\perp H \text{ и } \perp W)$



б

Профильная плоскость уровня: $//W(\perp H \text{ и } \perp V)$



в

Рис. 3.15

Лекция 4

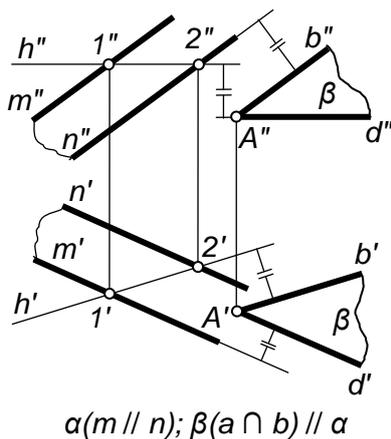
ВЗАИМНОЕ ПОЛОЖЕНИЕ ДВУХ ПЛОСКОСТЕЙ, ПРЯМОЙ ЛИНИИ И ПЛОСКОСТИ

Плоскости в пространстве могут быть параллельными или пересекающимися.

Плоскости параллельные

Из геометрии известно: если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости, то эти плоскости *параллельны*. Следовательно, на чертеже у параллельных плоскостей должны быть соответственно параллельны одноименные проекции двух пересекающихся прямых, лежащих в каждой из плоскостей. Этот признак параллельных плоскостей используется для определения на чертеже параллельности двух заданных плоскостей и построения параллельных плоскостей.

На рис. 4.1 показано построение плоскости β , проведенной через заданную точку $A(A''A')$, параллельно заданной плоскости $\alpha(m//n)$.



$\alpha(m // n); \beta(a \cap b) // \alpha$

Рис. 4.1

Для решения задачи следует выполнить следующие графические действия:

1-е действие. В заданной плоскости α , построить вспомогательную прямую, например, горизонталь $h(h''h')$, то есть создать в плоскости пересекающиеся прямые.

2-е действие. Через заданную точку $A(A''A')$ провести две пересекающиеся прямые b и d , параллельные двум пересекающимся прямым m и h заданной плоскости α :

– прямую $b(b'',b')$ параллельно прямой $m(m'',m')$ (или $n(n'',n')$);

– прямую $d(d'',d')$ параллельно вспомогательной прямой $h(h''h')$.

Построенная плоскость $\beta(b \cap d)$ будет параллельна заданной плоскости $\alpha(m//n)$, так как две пересекающиеся прямые m и h плоскости α соответственно параллельны двум пересекающимся прямым b и d построенной плоскости β .

Параллельность прямой и плоскости

Из геометрии известно: прямая параллельна плоскости, если она параллельна любой прямой, лежащей в этой плоскости. Следовательно, на чертеже (рис. 4.1) прямая, например, b параллельна плоскости $\alpha(m//n)$, так как проекции прямой b проведены параллельно одноименным проекциям прямой $m(m'',m')$, лежащей в этой плоскости.

Плоскости пересекающиеся

Общим элементом пересечения двух плоскостей является прямая линия, принадлежащая обеим плоскостям.

Плоскости, как известно, могут занимать частные и общее положения относительно плоскостей проекций, и поэтому при пересечении двух плоскостей возможны три случая:

1-й случай – обе плоскости занимают частное положение относительно плоскостей проекций. В этом случае искомой линией пересечения является проецирующая прямая, проекция которой, вырожденная в точку, лежит на пересечении вырожденных в прямые проекциях плоскостей.

На рис. 4.2 изображены две пересекающиеся фронтально-проецирующие плоскости α и β , элементом пересечения которых является фронтально-проецирующая прямая m (соответственно, горизонтально-проецирующие плоскости пересекаются по горизонтально-проецирующей прямой). Фронтальная $m(m'')$ и вырожденная в точку

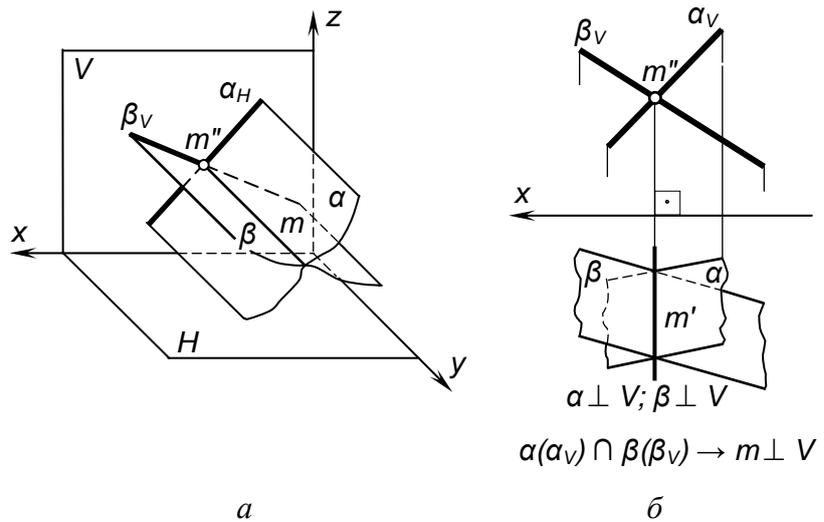


Рис. 4.2

проекция линии пересечения лежит на пересечении фронтальных, вырожденных в прямые, проекциях (следах) плоскостей, а горизонтальная $m(m')$ проекция линии пересечения – прямая, перпендикулярная оси X .

2-й случай – только одна из плоскостей занимает частное положение относительно плоскостей проекций. В этом случае одна из проекций искомой линии пересечения совпадает с вырожденной проекцией плоскости частного положения, а другую проекцию линии пересечения требуется построить.

На рис. 4.3 изображены две пересекающиеся плоскости, из которых плоскость α , заданная своим горизонтальным следом α_h , является горизонтально-проецирующей, а другая плоскость, заданная треугольником ABC , – плоскость общего положения. Горизонтальная проекция $MN(M'N')$ искомой линии пересечения

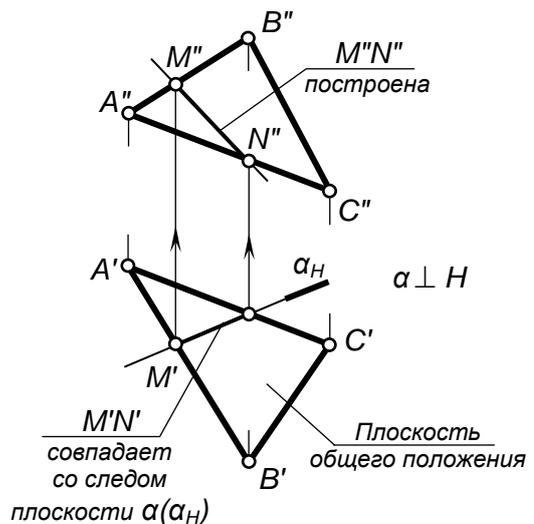


Рис. 4.3

чения плоскостей в этом случае совпадает со следом α_h плоскости α , а фронтальная проекция $M''N''$ линии пересечения построена по принадлежности точек M и N сторонам треугольника ABC .

3-й случай – пересечение двух плоскостей общего положения, проекции которых в пределах чертежа накладываются, рассмотрим ниже.

!!! Если пересекаются *три* плоскости, то элементом их пересечения является *точка!*

Пересечение прямой с плоскостью

Общим элементом пересечения прямой с плоскостью является точка, принадлежащая и прямой и плоскости. Поскольку и прямая и плоскость могут занимать различные положения относительно плоскостей проекций, то при их пересечении также возможны три случая:

1-й случай – и прямая и плоскость занимают частное положение относительно плоскостей проекций. В этом случае проекции искомой точки пересечения определяются на характерных (вырожденных) проекциях прямой и плоскости.

На рис. 4.4, а изображена горизонтальная плоскость уровня $\alpha(m//n)$, пересекающаяся с горизонтально-проецирующей прямой $k(k''k')$. Фронтальная проекция $O(O'')$ точки их пересечения совпадает с фронтальным следом плоскости α_v , а горизонтальная проекция $O(O')$ точки их пересечения совпадает с вырожденной в точку горизонтальной $k(k')$ проекцией прямой.

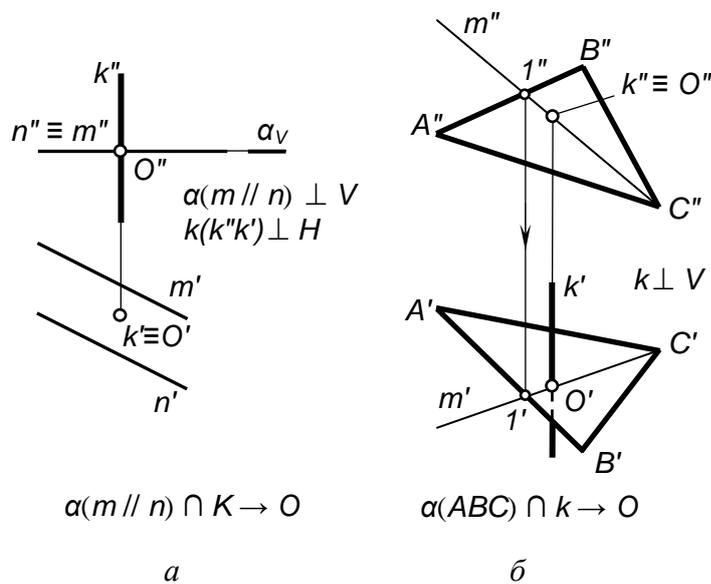


Рис. 4.4

На рис. 4.4, б изображены пересекающиеся фронтально-проецирующая прямая $k(k'',k')$ и плоскость общего положения, заданная треугольником ABC . В этом случае фронтальная проекция точки пересечения $O(O'')$ совпадает с вырожденной в точку проекцией прямой, а горизонтальная проекция $O(O')$ точки пересечения построена по принадлежности точки O плоскости ABC с помощью вспомогательной прямой m .

3-й случай – оба пересекающихся элемента занимают общее положение относительно плоскостей проекций, то есть пересекается плоскость

общего положения с прямой общего положения. В этом самом сложном для решения случае для построения точки пересечения элементов следует применить вспомогательные построения, чтобы привести условие задачи к более легкому для решения 2-му случаю (см. рис. 4.4), то есть прямую общего положения заменить элементом частного положения, «заклучив» эту прямую в плоскость частного положения (см. рис. 3.12 б, в).

На рис. 4.5 показана наглядная картина этого действия. Прямая общего положения k пересекается с плоскостью общего положения $\alpha(ABC)$. Для решения задачи через прямую проведена некоторая вспомогательная плоскость β , то есть прямая «заклучена» в плоскость β .

Определяется вспомогательная линия $1-2$ пересечения двух плоскостей – заданной и вспомогательной. Искомая точка O лежит на пересечении заданной прямой k и вспомогательной линии пересечения $1-2$.

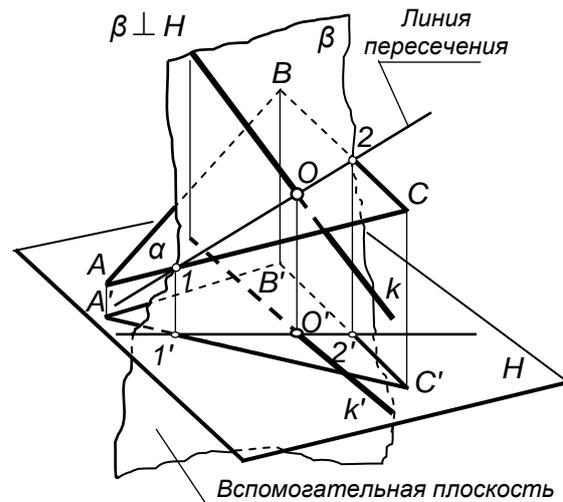
На рис. 4.6 показано построение на чертеже точки пересечения $O(O'', O')$ плоскости общего положения, заданной треугольником CDE , с прямой общего положения $k(k'', k')$. Для решения задачи в этом случае выполняется следующий графический алгоритм (графические действия):

1-е действие. Заклучить прямую k во вспомогательную, например горизонтально-проецирующую плоскость α , задав ее горизонтальным следом $\alpha_H(k \subset \alpha(\alpha_H))$.

2-е действие. Построить проекции вспомогательной линии пересечения $1-2(1''-2'', 1'-2')$ заданной плоскости CDE со вспомогательной плоскостью $\alpha(\alpha \cap \beta(\Delta CDE))$:

- $1'-2'$ совпадает со следом вспомогательной плоскости $\alpha(\alpha_H)$;
- $1''-2''$ строится по принадлежности точек 1 и 2 сторонам CE и DE плоскости $\beta(\Delta CDE)$.

3-е действие. Определить проекции искомой точки пересечения $O(O'', O')$ заданных элементов:



1. $k \subset \beta(\perp H)$
2. $\alpha(\Delta ABC) \cap \beta \rightarrow 1-2$
3. $k \cap 1-2 \rightarrow O$

Рис. 4.5

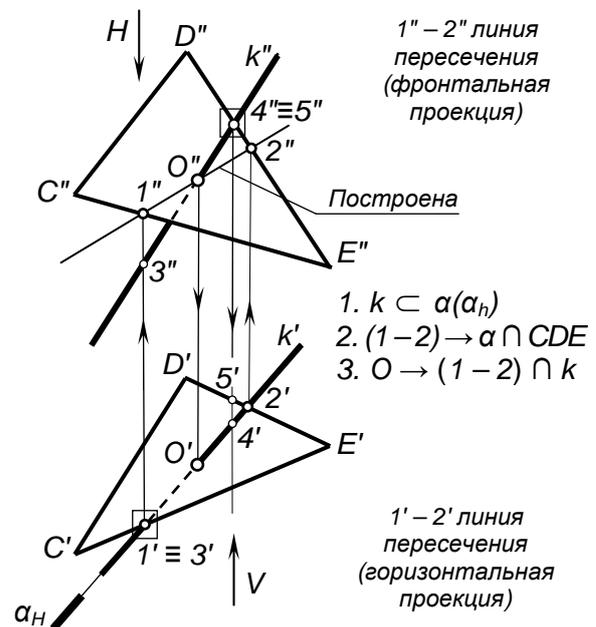


Рис. 4.6

– фронтальная проекция O'' определяется на пересечении фронтальной проекции заданной прямой $k(k'')$ и построенной фронтальной проекции $1''-2''$ вспомогательной линии пересечения $((1''-2'') \cap k'')$;

– горизонтальная проекция O' определяется на горизонтальной проекции $k(k')$ заданной прямой по линии связи ($O' \in k'$).

4-е действие. Определить на проекциях относительную видимость прямой и плоскости по конкурирующим точкам $1-3$ и $4-5$.

На рис. 4.6 показано определение относительной видимости заданной прямой k и плоскости CDE с помощью конкурирующих точек, лежащих на скрещивающихся прямых. На горизонтальную проекцию наблюдатель смотрит сверху вниз по стрелке H . Чтобы определить, какой из элементов – прямая или плоскость – находится ближе к наблюдателю, рассмотрим проекции конкурирующих точек 1 и 3 , лежащих на одном проецирующем луче, но на скрещивающихся прямых – точка 1 лежит на прямой CE , а точка 3 лежит на прямой k . Видно, что ближе к наблюдателю находится точка 1 на прямой CE , а точка 3 на прямой k расположена ниже. Это значит, что на горизонтальной проекции прямая $k(k')$ вниз от точки пересечения (O') «уходит» плоскость CDE .

Аналогичными рассуждениями, рассмотрев конкурирующие точки 4 и 5 по стрелке V , определяем относительную видимость прямой и плоскости на фронтальной проекции чертежа – прямая $k(k'')$ находится над плоскостью CDE вверх от точки $O(O'')$.

Пересечение двух плоскостей общего положения (3-й случай)

При задании пересекающихся плоскостей на чертеже возможны два варианта:

- проекции плоскостей в пределах чертежа не накладываются;
- проекции плоскостей накладываются.

Для каждого варианта есть разные рациональные способы построения линии пересечения.

Для варианта «а» рационально использовать две произвольные плоскости частного положения.

На рис. 4.7 показан пример построения линии пересечения плоскостей общего положения – $\alpha(k \cap l)$ и $\beta(m \cap n)$, проекции которых на чертеже не накладываются.

Линия пересечения заданных плоскостей построена по точкам N и M пересечения

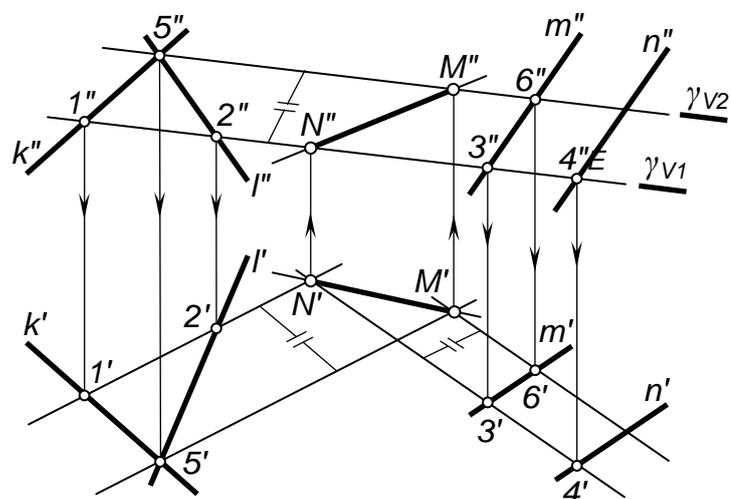


Рис. 4.7

чения между собой вспомогательных линий пересечения этих плоскостей произвольными вспомогательными фронтально-проецирующими плоскостями γ_1 и γ_2 в соответствии со следующим графическим алгоритмом:

I. Построить точку $N(N'',N')$ пересечения заданных плоскостей $\alpha(k\cap l)$ и $\beta(m//n)$ вспомогательной горизонтальной плоскостью уровня γ_1 :

1-е действие. Пересечь плоскости $\alpha(k\cap l)$ и $\beta(m//n)$ вспомогательной фронтально-проецирующей плоскостью уровня γ_1 , обозначив ее фронтальный след γ_{V1} .

2-е действие. Построить проекции $1-2(1''-2'', 1'-2')$ и $3-4(3''-4'', 3'-4')$ вспомогательных линий пересечения заданных плоскостей $\alpha(k\cap l)$ и $\beta(m//n)$ вспомогательной плоскостью $\gamma_1(\gamma_{V1})$.

3-е действие. Определить проекции точки $N(N'',N')$ пересечения между собой вспомогательных линий $1-2(1''-2'', 1'-2')$ и $3-4(3''-4'', 3'-4')$.

II. Построить точку $M(M'',M')$ пересечения заданных плоскостей $\alpha(k\cap l)$ и $\beta(m//n)$ вспомогательной фронтально-проецирующей плоскостью $\gamma_2(\gamma_{V2})$, повторив графические действия 1, 2 и 3, и соединить прямой линией построенные точки N и M . Если при этом плоскость $\gamma_2(\gamma_{V2})$ задавать параллельно ранее заданной плоскости $\gamma_1(\gamma_{V1})$, то построения можно упростить и использовать не четыре, а только две точки 5 и 6, так как пересечение параллельными плоскостями будет давать параллельные вспомогательные линии.

Рассмотрим наиболее часто встречающийся в различных задачах вариант «б» – проекции плоскостей накладываются. Построение проекций линии пересечения сводится здесь к построению точек пересечения двух любых прямых одной плоскости с другой плоскостью, то есть к выполнению дважды графического алгоритма построения точки пересечения прямой общего положения с плоскостью общего положения, изложенного выше (см. рис. 4.6).

На рис. 4.8 показан пример построения линии пересечения плоскостей общего положения – $\alpha(ABC)$ и $\beta(m//n)$, проекции которых на чертеже накладываются.

Линия пересечения построена по точкам K и M пересечения прямых m и n , которыми задана плоскость $\beta(m//n)$, с плоскостью $\alpha(\triangle ABC)$, то есть дважды выполнен вышеприведенный графический алгоритм.

I. Построить точку $K(K'',K')$ пересечения прямой m с плоскостью $\alpha(\triangle ABC)$:

1-е действие. «Заключить» прямую m во вспомогательную фронтально-проецирующую плоскость γ и обозначить ее фронтальный след γ_V .

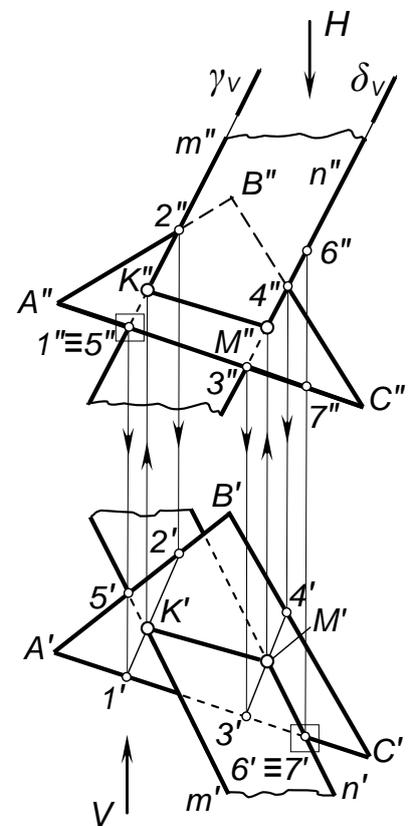


Рис. 4.8

2-е действие. Построить проекции $1-2(1''-2'', 1'-2')$ вспомогательной линии пересечения плоскостей – заданной $\alpha(\triangle ABC)$ со вспомогательной γ .

3-е действие. Определить проекции точки $K(K'', K')$ пересечения прямой m с плоскостью α .

II. Построить проекции точки $M(M'', M')$ пересечения прямой n с плоскостью α , повторив графические действия 1, 2 и 3 и соединить прямой линией построенные точки K и M .

4-е действие. Определить видимость плоскостей относительно построенной линии пересечения $K-M$, рассмотрев пары конкурирующих точек:

– точки 1 и 5 – для определения относительной видимости на фронтальной проекции;

– точки 6 и 7 – для определения относительной видимости на горизонтальной проекции.

Структуризация материала четвертой лекции в рассмотренном объеме схематически представлена на рис. 4.9 (лист 1). На последующих листах 2–4 компактно приведены иллюстрации к этой схеме для визуального закрепления основной части изученного материала при повторении (рис. 4.10–4.12).

Взаимное положение двух плоскостей, прямой линии и плоскости

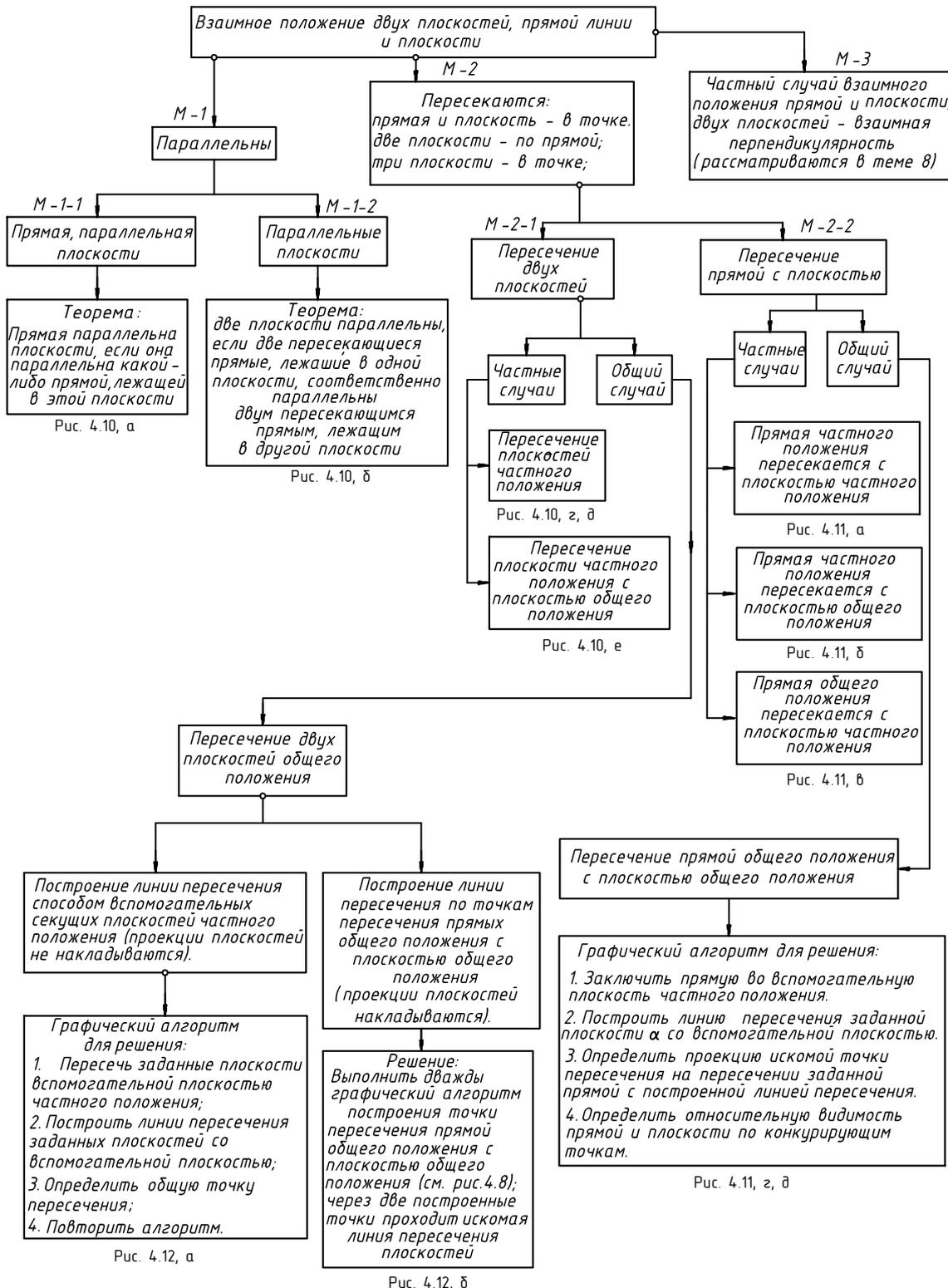
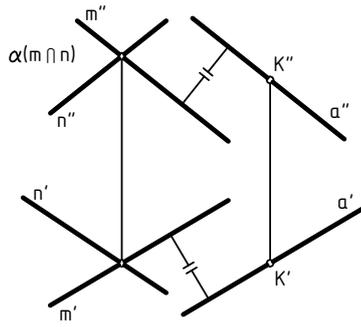


Рис. 4.9

Прямая, параллельная плоскости

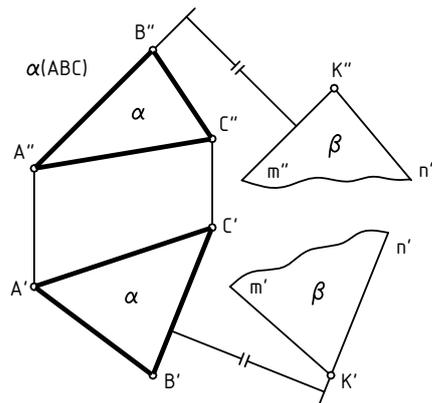


Требуется: провести через т.К (К',К'') прямую, параллельную плоскости.

Решение: прямая $a // \alpha(m \cap n)$, так как $a \cap m$.

а

Параллельные плоскости

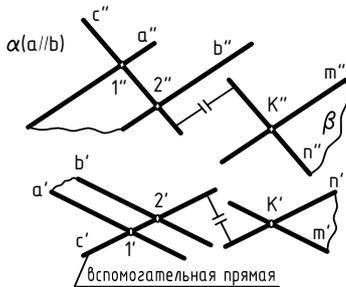


Требуется: провести через т.К (К',К'') плоскость β , параллельную заданной плоскости $\alpha(ABC)$.

Решение: плоскость $\beta(m \cap n) // \alpha(ABC)$, так как $m // AB$, а $n // BC$.

б

Параллельные плоскости



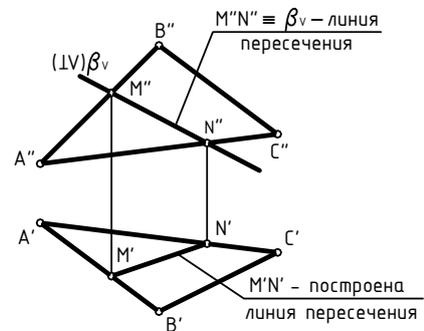
Требуется: провести через т.К (К',К'') плоскость β , параллельную заданной плоскости $\alpha(a // b)$.

Решение: плоскость $\beta(m \cap n) // \alpha(a // b)$, так как $m // a // b$, а $n // c$ (с - вспомогательная прямая).

в

- \equiv - знак совпадения
- \cap - пересечение элементов
- $//$ - параллельность элементов
- \in - знак принадлежности
- \subset - знак "заключить"

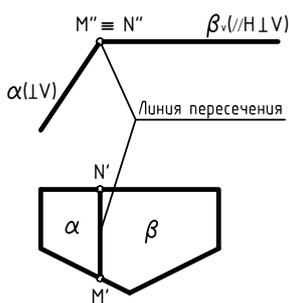
Пересечение плоскости частного положения с плоскостью общего положения



$\alpha(ABC)$ - общего положения
 β_v - фронтально-проецирующая
 $\alpha(ABC) \cap \beta(\beta_v) \rightarrow MN$ - линия пересечения (прямая общего положения)

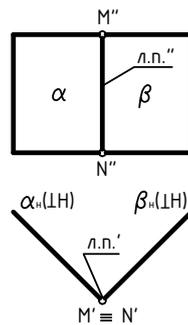
е

Пересечение плоскостей частного положения



$\alpha(\alpha_v) \cap \beta(\beta_v) \rightarrow MN(\perp V)$ - линия пересечения (фронтально-проецирующая прямая)

з

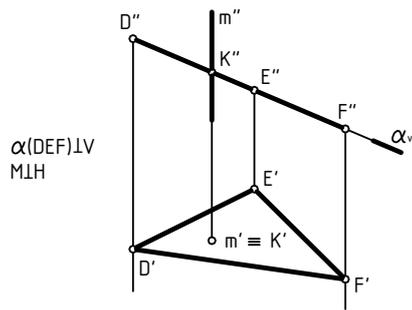


$\alpha(\alpha_v) \cap \beta(\beta_v) \rightarrow MN(\perp H)$ - линия пересечения (горизонтально-проецирующая прямая)

д

Рис. 4.10

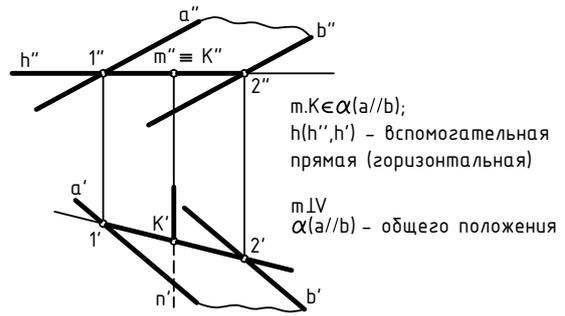
Пересечение прямой частного положения с плоскостью частного положения



$m \cap \alpha(DEF) \rightarrow \text{в } m.K$
 $m.K \in m; m.K \in \alpha(DEF)$

а

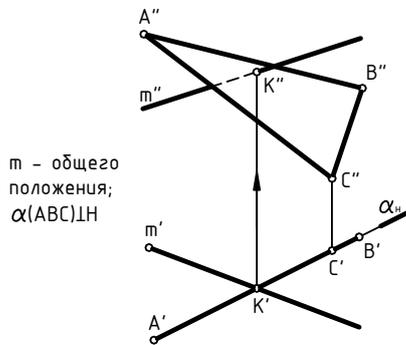
Пересечение прямой частного положения с плоскостью общего положения



$m \cap \alpha(a//b) \rightarrow \text{в } m.K$

б

Пересечение прямой общего положения с плоскостью частного положения

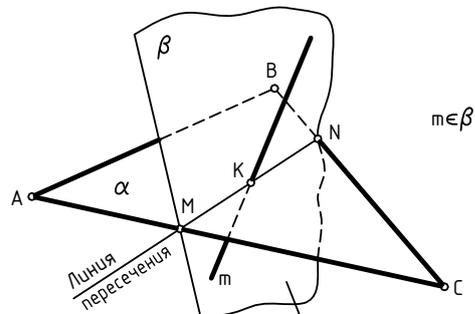


m - общего положения;
 $\alpha(ABC) \perp H$

$m \cap \alpha(ABC) \rightarrow \text{в } m.K$

в

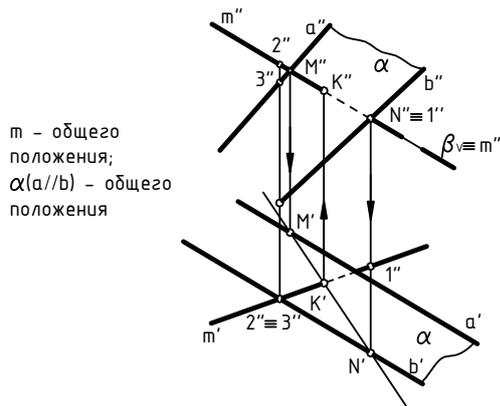
Пересечение прямой общего положения с плоскостью общего положения



вспомогательная пл. частного положения β , в которую заключена заданная прямая m

г

Пересечение прямой общего положения с плоскостью общего положения



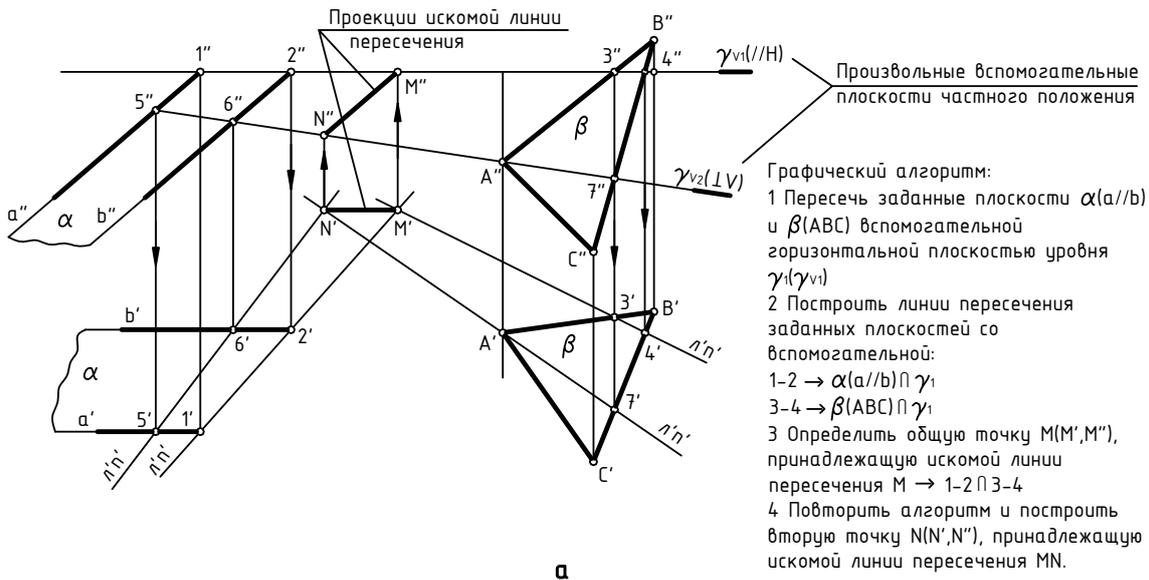
m - общего положения;
 $\alpha(a//b)$ - общего положения

Графический алгоритм:

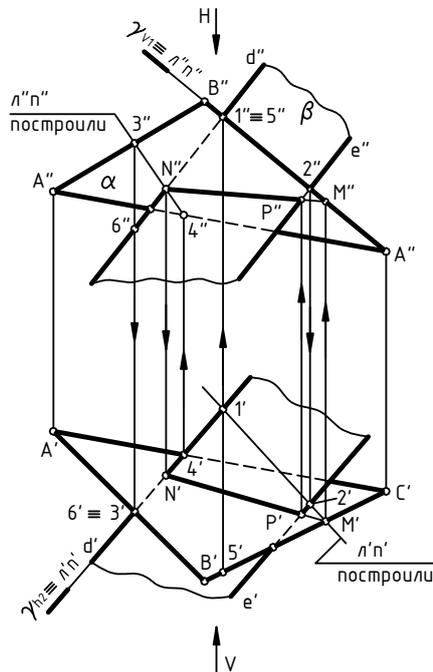
- 1 Заключить прямую m в плоскость частного положения β : $m \in \beta(\beta_v)$.
- 2 Построить линию MN пересечения заданной плоскости $\alpha(a//b)$ со вспомогательной $\beta(\beta_v)$ $\alpha(a//b) \cap \beta \rightarrow MN$.
- 3 Определить проекции $K(K', K'')$ искомой точки пересечения прямой m с плоскостью $\alpha(a//b)$: $MN \cap m \rightarrow K(K', K'')$.
- 4 Определить относительную видимость прямой и плоскости по конкурирующим точкам.

д

Пересечение плоскостей общего положения, проекции которых не накладываются
(способ вспомогательных секущих плоскостей частного положения)



Пересечение плоскостей общего положения, проекции которых накладываются



Линия пересечения плоскостей строится по двум точкам пересечения прямых общего положения с плоскостью общего положения с приведённого для рис. 4.8.

Графический алгоритм:
 1 Заключить прямую AB во вспомогательную фронтально-проецирующую плоскость $\gamma_1(\gamma_{v1})$.
 2 Построить линию пересечения $1-2$ заданной плоскости $\alpha(\Delta ABC)$ со вспомогательной плоскостью γ_1 .
 3 Определить первую общую точку $M(M',M'')$ линии пересечения заданных плоскостей.
 4 Повторить алгоритм, заключив прямую α заданной плоскости $\beta(d//e)$ во вспомогательную горизонтально-проецирующую плоскость $\gamma_2(\gamma_{h2})$ и определить вторую общую точку $N(N',N'')$.
 5 Соединить построенные точки MN – искомая линия пересечения: $\alpha(\Delta ABC) \cap \beta(d//e) \rightarrow MN$.
 6 Определить относительную видимость плоскостей по конкурирующим точкам: 1 и 5, 6 и 3.

б

Рис. 4.12

Лекция 5 ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ

Решение задач на тему перпендикулярности прямой и плоскости основано на двух теоремах геометрии:

1-я т е о р е м а: если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна к этой плоскости.

2-я т е о р е м а: о проекции прямого угла (изложена выше – см. рис. 2.14, 2.15 и 2.16) – если одна сторона прямого угла параллельна плоскости проекций, а вторая ей не перпендикулярна, то на эту плоскость проекций угол проецируется прямым.

Из этих двух теорем следует, что на чертеже проекции перпендикуляра к плоскости можно провести только к проекциям фронтали и горизонтали, то есть к двум пересекающимся прямым уровня, которые можно провести в плоскости.

!!! Запомните:

– фронтальная проекция m'' прямой, перпендикулярной прямой к плоскости, перпендикулярна к фронтальной проекции f'' фронтали этой плоскости ($m'' \perp f''$);

– горизонтальная проекция m' прямой, перпендикулярной прямой к плоскости, перпендикулярна к горизонтальной проекции h' горизонтали этой плоскости ($m' \perp h'$).

Задачи на тему перпендикулярности прямой и плоскости можно разделить на три группы:

1-я г р у п п а. Провести от точки, лежащей в плоскости, перпендикуляр в пространство.

2-я г р у п п а. Провести из точки, не лежащей в плоскости, перпендикуляр к этой плоскости.

3-я г р у п п а. Построить плоскость, перпендикулярную к прямой общего положения (построить геометрическое место точек – ГМТ).

П е р в а я г р у п п а з а д а ч требует по условию проведения перпендикуляра от плоскости (восставить перпендикуляр) в пространство (см. рис. 5.1).

В этой группе задач требуется, как правило, построить на проведенном перпендикуляре проекции отрезка заданной величины. Графические действия по построению проекций отрезка заданной величины на проекциях прямой общего положения изложены ранее (см. рис. 2.9).

На рисунке 5.1 показано решение примерной задачи первой группы: построить плоскость β , параллельную заданной плоскости $\alpha(ABC)$, на расстоянии 15 мм.

Эта задача относится к первой группе, поскольку для построения параллельной плоскости β нужно предварительно построить произвольную точку на расстоянии 15 мм от заданной плоскости α , то есть из произвольной точки плоскости провести перпендикуляр в пространство.

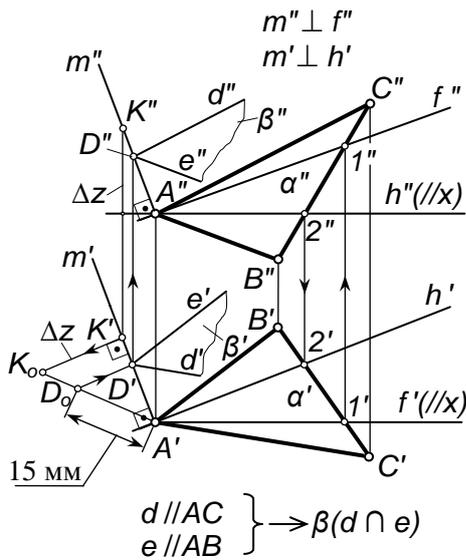


Рис. 5.1

Для решения задачи требуется выполнить следующий графический алгоритм:

1-е действие. Провести в заданной плоскости общего положения ABC проекции фронтали $f(f'', f')$ и горизонтали $h(h', h')$:

– $f' // x$, а f'' – построить по вспомогательной точке 1;

– $h'' // x$, а h' – построить по вспомогательной точке 2.

2-е действие. Провести от точки плоскости, например, от вершины A в пространство проекции перпендикуляра $m(m'', m')$:

– фронтальную проекцию m'' перпендикулярно f'' ($m'' \perp f''$);

– горизонтальную проекцию m' перпендикулярно h' ($m' \perp h'$).

3-е действие. На проекциях перпендикуляра m построить проекции отрезка заданной величины 15 мм, для чего выполнить следующие графические действия:

1. Ограничить построенную прямую $m(m'', m')$ произвольным отрезком $AK(AK'', AK')$.

2. Построить натуральную величину этого отрезка (см. рис. 5.1) способом прямоугольного треугольника – это гипотенуза $A'K_0$.

3. На построенной гипотенузе отложить заданную величину $A'D_0 = 15$ мм и построить проекции отрезка $AD(A''D'', A'D')$ заданной величины (см. построения), то есть проекции точки $D(D'', D')$, находящейся на расстоянии 15 мм от плоскости $\alpha(ABC)$.

4-е действие. Построить плоскость β , параллельную заданной плоскости ABC , проведя через проекции точки D две пересекающиеся прямые d и e , соответственно параллельные двум пересекающимся прямым AC и AB плоскости ABC :

– $d'' // A''C''$; $e'' // A''B''$;

– $d' // A'C'$; $e' // A'B'$, то есть $\beta(d \cap e) // \alpha(ABC)$.

Вторая группа задач требует по условию проведения перпендикуляра из точки в пространстве к плоскости (опустить перпендикуляр). В этой группе задач, как правило, требуется построить точку пересечения построенного перпендикуляра с заданной плоскостью.

Построение точки пересечения прямой общего положения с плоскостью общего положения было рассмотрено выше (см. рис. 4.6).

На рис. 5.2 показано решение примерной задачи второй группы: определить расстояние от точки K до заданной плоскости $\alpha(\triangle ABC)$.

Эта задача относится ко второй группе, так как расстояние от точки K до заданной плоскости $\alpha(\Delta ABC)$ определяется величиной перпендикуляра, проведенного из точки к плоскости.

Для решения задачи требуется выполнить следующий графический алгоритм:

1-е действие. Провести в плоскости фронталь $f(f'', f')$ и горизонталь $h(h'', h')$.

2-е действие. Провести через заданную точку $K(K'', K')$ проекции перпендикуляра $m(m'', m')$ к плоскости ABC :

- m'' перпендикулярно f'' ($m'' \perp f''$);
- m' перпендикулярно h' ($m' \perp h'$).

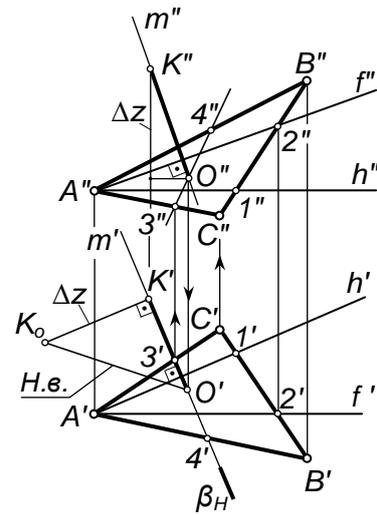


Рис. 5.2

3-е действие. Построить точку пересечения $O(O'', O')$ перпендикуляра m с заданной плоскостью общего положения ABC , выполнив промежуточный графический алгоритм:

1. Заключение прямую m во вспомогательную горизонтально-проецирующую плоскость $\beta(\beta_H)$.

2. Построить вспомогательную линию пересечения $3-4$ заданной плоскости $\alpha(\Delta ABC)$ со вспомогательной плоскостью β :

- $3'-4'$ – определяется на следе β_H ;
- $3''-4''$ – строится по принадлежности точек 3 и 4 сторонам AC и AB треугольника ABC ;

3. Определить проекции искомой точки пересечения $O(O'', O')$ на пересечении проекций построенной вспомогательной линии пересечения $3-4$ с проекциями перпендикуляра m .

4-е действие. Построить натуральную величину отрезка KO способом прямоугольного треугольника, то есть определить расстояние от точки K до плоскости ABC .

Третья группа задач требует по условию построения некоторой вспомогательной плоскости (геометрического места точек), перпендикулярной к прямой общего положения. Эту перпендикулярную плоскость можно задать двумя пересекающимися прямыми, каждая из которых должна быть перпендикулярна прямой общего положения (теорема о перпендикулярности прямой и плоскости, т. е. признак перпендикулярности прямой и плоскости). На чертеже плоскость, перпендикулярную к прямой общего положения, можно задать только проекциями пересекающихся прямых уровня – фронтальной (параллельной плоскости проекций V) и горизонтальной (параллельной плоскости H), что соответствует теореме о проекции прямого угла. В задачах этой группы, как правило, требуется по условию определить точку пересечения заданной прямой со вспомогательной перпендикулярной плоскостью.

На рис. 5.3 показано решение примерной задачи третьей группы: определить расстояние от точки K до прямой общего положения m .

Эта задача относится к третьей группе, поскольку на чертеже провести перпендикуляр к прямой общего положения, по которому определяется расстояние от точки K до заданной прямой m , нельзя (прямой угол в этом случае не проецируется прямым). Следовательно, для решения нужно построить вспомогательную плоскость β , перпендикулярную к заданной прямой, которая будет геометрическим местом всех перпендикуляров к этой прямой.

Для решения задачи требуется выполнить следующий графический алгоритм:

1-е действие. Построить трюим вспомогательную плоскость β , перпендикулярную заданной прямой m , задав ее двумя пересекающимися прямыми уровня a и b :

- горизонтальной прямой a : $a'' // x$; $a' \perp m'$;
- фронтальной прямой b : $b' // x$; $b'' \perp m''$.

2-е действие. Построить точку $O(O', O'')$ пересечения заданной прямой m со вспомогательной плоскостью $\beta(a \cap b)$ по алгоритму построения точки пересечения прямой общего положения с плоскостью общего положения (см. рис. 5.3).

3-е действие. Соединить одноименные проекции точек K и O : полученный отрезок общего положения $KO(K''O'', K'O')$ и есть расстояние от точки до прямой, искаженное на проекциях по величине.

4-е действие. Построить натуральную величину построенного отрезка KO способом прямоугольного треугольника (см. рис. 5.3).

Структуризация материала пятой лекции в рассмотренном объеме схематически представлена на рис. 5.4 (лист 1). На последующем листе 2 компактно приведены иллюстрации к этой схеме для визуального закрепления изученного материала при повторении (рис. 5.5).

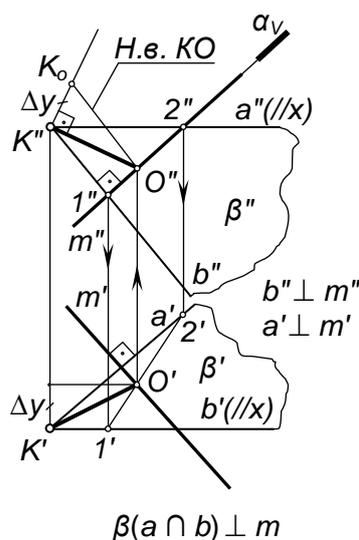


Рис. 5.3

Перпендикулярность

Перпендикулярность – частный случай взаимного положения прямой и плоскости, двух плоскостей

M-1
Перпендикулярность прямой и плоскости

На чертеже построение проекций прямой, перпендикулярной плоскости (или плоскости, перпендикулярной прямой), основано на двух теоремах:
1 теорема: прямая перпендикулярна плоскости, если она перпендикулярна двум пересекающимся прямым лежащим в этой плоскости.
2 теорема: (о проекции прямого угла) если одна сторона угла параллельна плоскости проекций, а вторая не перпендикулярна и не параллельна, то на эту плоскость угол проецируется прямым, т.е. равным 90° .

Исходя из этих теорем двумя пересекающимися прямыми в плоскости могут быть только горизонталь $h(h', h'')$ и фронталь $f(f', f'')$ заданной плоскости

Три типа задач

M-1-1

1 тип задач.
Построить проекции перпендикуляра из точки в пространстве к заданной плоскости

Графический алгоритм:
1. Провести в заданной плоскости произвольные горизонталь $h(h', h'')$ и фронталь $f(f', f'')$;
2. Провести из заданной точки в пространстве проекции прямой t , перпендикулярной плоскости: $t' \perp f''$, $t'' \perp h'$.
В задачах этого типа требуется построить точку пересечения перпендикулярной прямой t с заданной плоскостью и определить натуральную величину полученного отрезка.

Рис. 5.5, а

M-1-2

2 тип задач.
Провести перпендикуляр от точки в плоскости в пространство

Графический алгоритм:
1. Провести в заданной плоскости горизонталь $h(h', h'')$ и фронталь $f(f', f'')$;
2. Из точки, взятой в плоскости провести проекции прямой t перпендикулярной плоскости: $t' \perp f''$, $t'' \perp h'$.
В задачах этого типа требуется построить на проекциях построенного перпендикуляра проекции отрезка заданной величины

Рис. 5.5, б

M-2
Перпендикулярность двух плоскостей

Признак перпендикулярности двух плоскостей. Теорема: плоскости перпендикулярны, если одна из них содержит прямую перпендикулярную к другой плоскости. На чертеже плоскость перпендикулярная к заданной плоскости, определяется двумя пересекающимися прямыми – заданной прямой и перпендикулярной прямой, проведенной к заданной плоскости через точку взятую на заданной прямой

Рис. 5.5, г

M-1-3

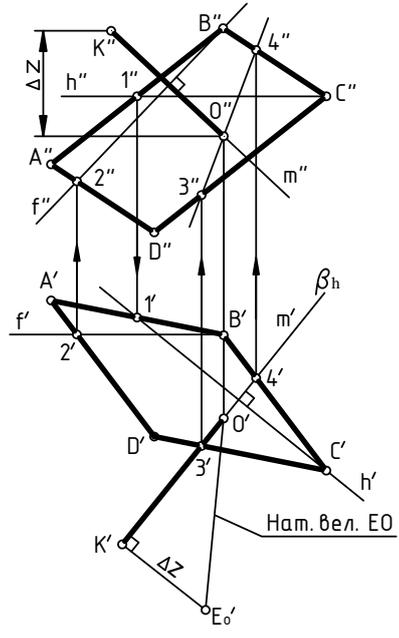
3 тип задач.
Построить плоскость к заданной прямой и задать эту плоскость двумя пересекающимися прямыми уровня: фронтальной и горизонтальной

Графический алгоритм:
1. Провести проекции двух пересекающихся прямых уровня определяющих плоскость, перпендикулярную к заданной прямой $t: \alpha (h \cap f) \perp t$.
В задачах этого типа требуется построить точку пересечения построенной перпендикулярной плоскости α с другой прямой.

Рис. 5.5, в

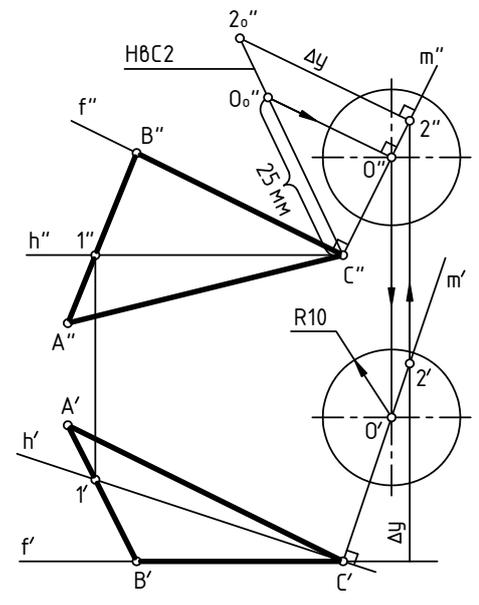
Рис. 5.4

1 тип задач



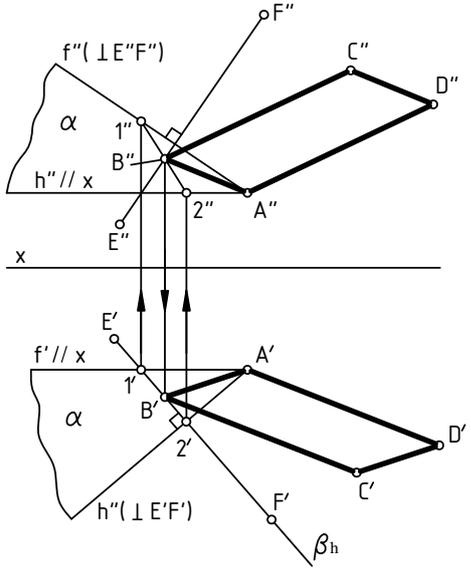
а

2 тип задач



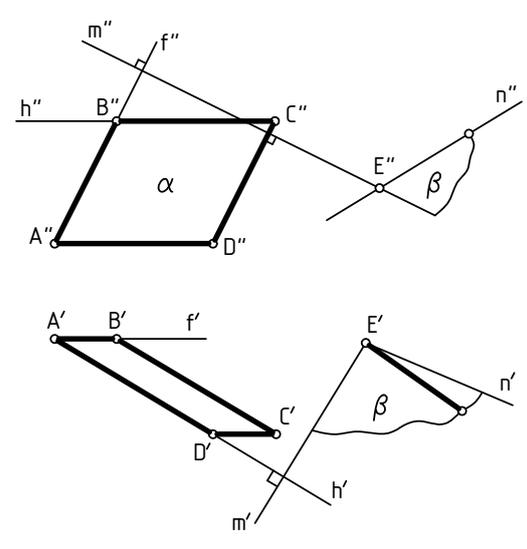
б

3 тип задач



в

Перпендикулярность плоскостей



г

Рис. 5.5

Лекция 6 ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЧЕРТЕЖА

Задание прямых линий и плоскостей в частных положениях относительно плоскостей проекций значительно упрощает построения и решение различных задач. Существует несколько способов преобразования чертежа, которые позволяют переходить от общих положений геометрических элементов в условиях задач к частным положениям. Рассмотрим эти способы.

Способ замены (перемены) плоскостей проекций

Способ замены плоскостей проекций дает возможность изменить общие положения прямых и плоскостей относительно плоскостей проекций H или V на частные положения введением дополнительных плоскостей проекций.

Сущность способа:

- положение предмета в пространстве не меняется, а изменяется положение плоскостей проекций относительно этого предмета так, чтобы в дополнительной системе плоскостей проекций предмет занял частное положение (проецирующее или положение уровня), удобное для решения задачи;

- проецирование предмета на дополнительные плоскости проекций выполняется по методу Г. Монжа – методу параллельного прямоугольного проецирования на взаимно перпендикулярные плоскости, то есть сохраняется взаимная перпендикулярность основных и дополнительных плоскостей проекций.

На рис. 6.1 изображена наглядная картина построения фронтальной проекции отрезка $AB(A''_1B''_1)$ на дополнительную плоскость проекций V_1 .

Образована дополнительная система перпендикулярных плоскостей проекций H/V_1 с новой осью проекций x_1 . Обратите внимание, что координаты z фронтальных проекций A''_1 и B''_1 конечных точек отрезка на дополнительной плоскости V_1 равны координатам z фронтальных проекций A'' и B'' точек в заданной системе $x-V/H$. Для получения чертежа дополнительную плоскость V_1 поворачивают вокруг новой оси проекций x_1 до совмещения с плоскостью проекций H .

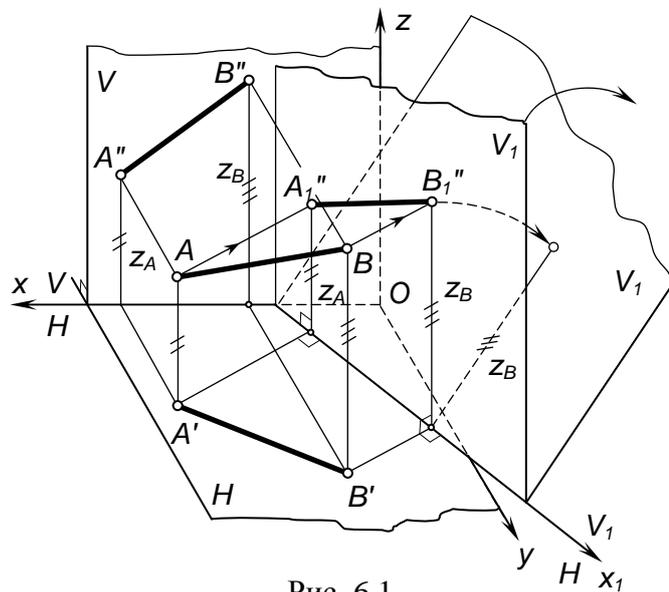


Рис. 6.1

На рис. 6.2 показан чертеж (эпюр) произвольного преобразования отрезка AB общего положения д в у м я последовательными заменами плоскостей проекций, для чего выполнены следующие графические действия:

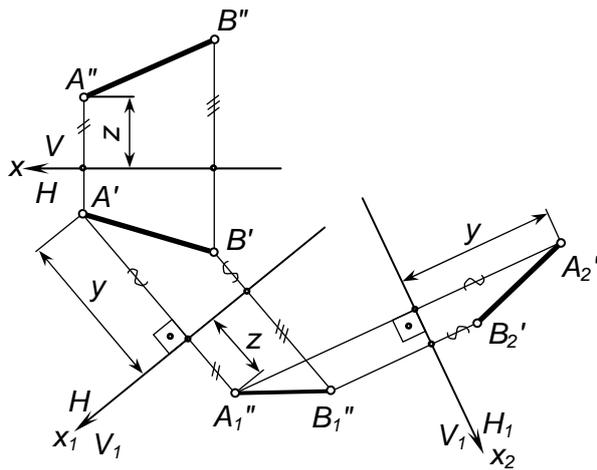


Рис. 6.2

– от оси проекций x_1 отложены координаты z , равные координатам z фронтальных A'' и B'' проекций точек A и B в заданной системе $x-V/H$.

И з м е н а.

3-е действие. Введена вторая дополнительная система x_2-V_1/H_1 ($H_1 \perp V_1$), ось проекций x_2 которой расположена произвольно на поле чертежа.

4-е действие. Построена в дополнительной плоскости проекций H_1 горизонтальная проекция $A'_1 B'_1$ отрезка AB :

– проведены линии связи от построенных в первой дополнительной системе фронтальных проекций точек A''_1 и B''_1 , перпендикулярные оси проекций x_2 ;

– от оси проекций x_2 отложены координаты y , взятые из предыдущей системы x_1-H/V_1 : от оси x_1 до горизонтальных A' и B' проекций точек A и B .

Поскольку на рис. 6.2 рассмотрен пример произвольного, без всяких условий, двойного преобразования прямой общего положения, то и в первой и во второй дополнительных системах этот отрезок преобразовался также в прямую общего положения.

AB – общего положения

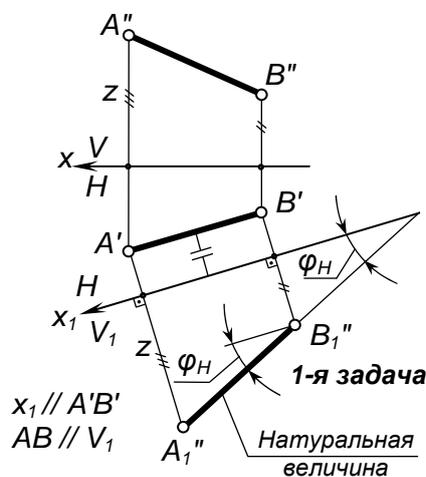


Рис. 6.3

И з м е н а.

1-е действие. Введена первая дополнительная система x_1-H/V_1 ($V_1 \perp H$), ось проекций x_1 которой расположена произвольно на поле чертежа.

2-е действие. Построена в дополнительной плоскости проекций V_1 фронтальная проекция $A''_1 B''_1$ отрезка AB :

– проведены линии связи от горизонтальных A' и B' проекций конечных точек отрезка, перпендикулярные оси проекций x_1 ;

Для преобразования прямой или плоскости общего положения в прямую или плоскость частного положения рассмотрим четыре основные задачи преобразования способом замены плоскостей проекций, применяемые как отдельные графические действия для решения различных задач.

Задача 1. Преобразовать прямую общего положения в прямую уровня.

На рис. 6.3 показано преобразование прямой общего положения AB во фронтальную прямую уровня. Для решения задачи выполнен следующий графический алгоритм:

1-е действие. Ввести дополнительную систему плоскостей проекций x_1-H/V_1 , расположив ось проекций x_1 параллельно горизонтальной проекции $A'B'$ отрезка AB .

2-е действие. Построить фронтальную проекцию $A''_1B''_1$ отрезка в дополнительной плоскости V_1 по координатам Z , взятым из предыдущей системы $x-V/H$.

В результате преобразования отрезок AB в дополнительной системе занял положение, параллельное дополнительной плоскости проекций V_1 , т. е. преобразовался во фронтальную прямую уровня. Следовательно, построены также натуральная величина отрезка и угол его наклона φ_H к плоскости проекций H .

На рис. 6.4 показано преобразование прямой общего положения AB в горизонтальную прямую уровня. Для решения задачи введена дополнительная система плоскостей проекций x_1-V/H_1 ($x_1 // A''B''$) и выполнены аналогичные графические действия.

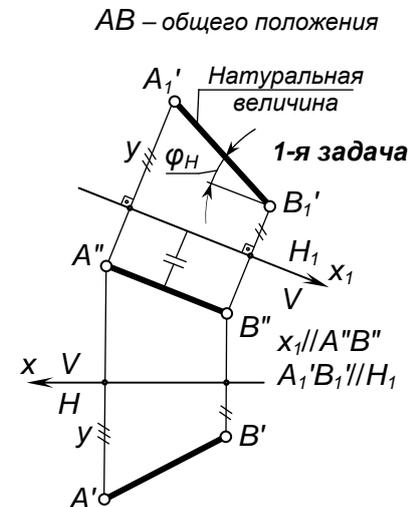


Рис. 6.4

Задача 2. Преобразовать прямую уровня в проецирующую прямую.

На рис. 6.5 показано преобразование фронтальной прямой CD в горизонтально-проецирующую прямую. Для решения задачи выполнен следующий графический алгоритм:

1-е действие. Ввести дополнительную систему плоскостей проекций x_1-V/H_1 , расположив ось проекций x_1 перпендикулярно фронтальной проекции $C''D''$ отрезка CD .

2-е действие. Построить горизонтальные совпадающие проекции C'_1 и D'_1 точек C и D отрезка в дополнительной плоскости проекций H_1 по координатам y , взятым из предыдущей системы $x-V/H$.

В результате преобразования горизонтальный отрезок CD в дополнительной системе занял положение, перпендикулярное дополнительной плоскости проекций H_1 , т. е. преобразовался в горизонтально-проецирующую прямую.

На рис. 6.6 показано преобразование горизонтальной прямой уровня CD во фронтально-проецирующую прямую. Для реше-

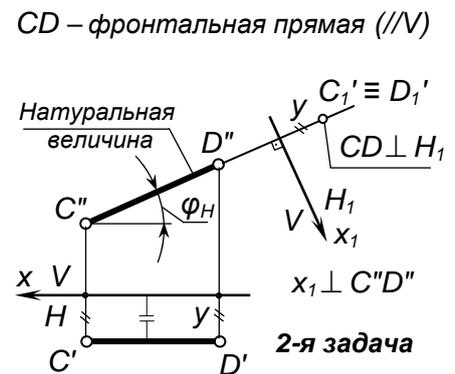


Рис. 6.5

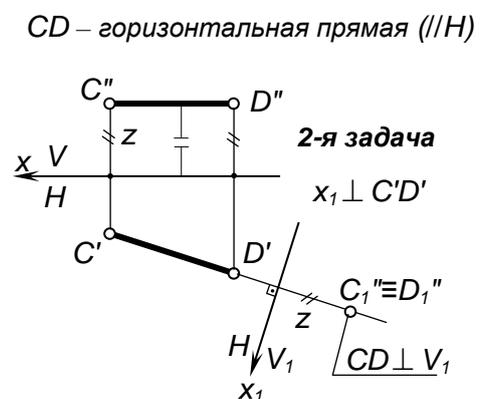


Рис. 6.6

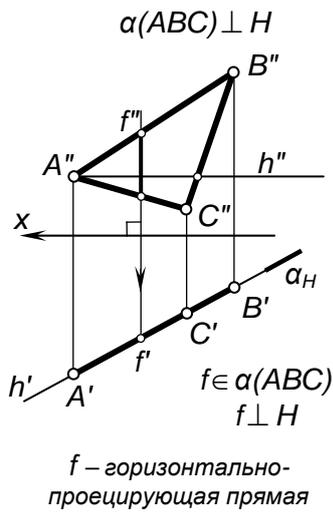


Рис. 6.7

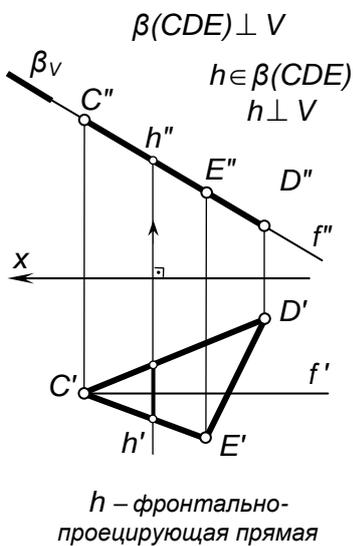


Рис. 6.8

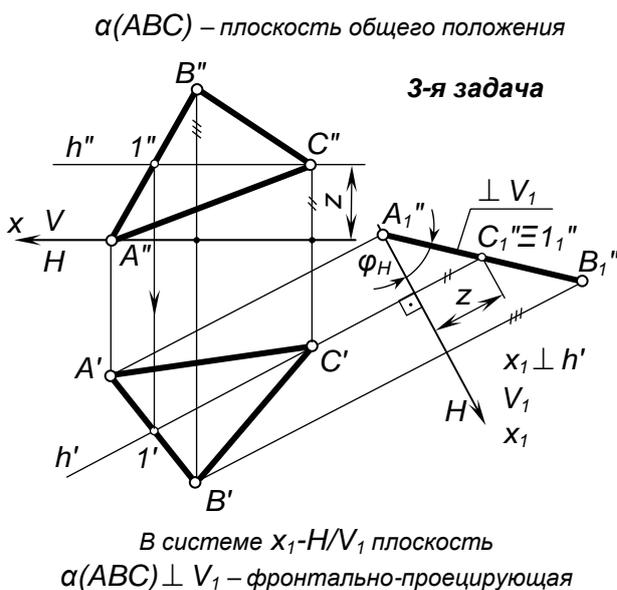


Рис. 6.9

ния задачи введена дополнительная система плоскостей проекций X_1-H/V_1 ($X_1 \perp C'D'$) и выполнены аналогичные графические действия.

Задача 3. Преобразование плоскости общего положения в проецирующую плоскость.

Чтобы понять сущность графических действий этого преобразования, напомним, что у проецирующих плоскостей, перпендикулярных V или H , одна из линий уровня – или фронталь, или горизонталь – является проецирующей прямой.

На рис. 6.7 показано, что у горизонтально-проецирующей плоскости $\alpha(ABC)$, горизонтальная проекция которой вырождается в линию, фронталь плоскости $f(f'', f')$ занимает положение горизонтально-проецирующей прямой, то есть она перпендикулярна плоскости проекций H (горизонтальная проекция f (f') вырождается в точку).

На рис. 6.8 показано, что у фронтально-проецирующей плоскости $\beta(CDE)$, фронтальная проекция которой вырождается в линию, горизонталь плоскости $h(h'', h')$ занимает положение фронтально-проецирующей прямой, то есть она перпендикулярна фронтальной плоскости проекций V (ее фронтальная проекция h (h'') вырождается в точку).

На рис. 6.9 показано преобразование плоскости общего положения во фронтально-проецирующую плоскость. Для решения задачи выполнен следующий графический алгоритм:

1-е действие. Провести в плоскости $\alpha(ABC)$ проекции горизонтали $h(h'', h')$.

2-е действие. Ввести дополнительную систему плоскостей X_1-H/V_1 , расположив ось проекций X_1 перпендикулярно горизонтальной проекции h' горизонтали плоскости.

3-е действие. Построить в дополнительной плоскости проекций V_1 фронтальную проекцию $A_1''B_1''C_1''$ плоскости ABC по координатам Z , взятым из предыдущей системы $x-V/H$, (проекция плоскости выродилась в прямую).

В результате преобразования плоскость общего положения $\alpha(ABC)$ в дополнительной системе заняла положение, перпендикулярное дополнительной плоскости проекций V_1 , т.е. преобразовалась во фронтально-проецирующую. Следовательно, построен также угол наклона φ_H плоскости ABC к плоскости проекций H .

На рис. 6.10 показано преобразование плоскости общего положения $\alpha(ABC)$ в горизонтально-проецирующую плоскость. Для решения задачи в плоскости проведены проекции фронтали $f(f'', f')$. Введена дополнительная система плоскостей x_1-V/H_1 , ось x_1 которой перпендикулярна фронтальной проекции f'' фронтали плоскости, и выполнены аналогичные графические действия.

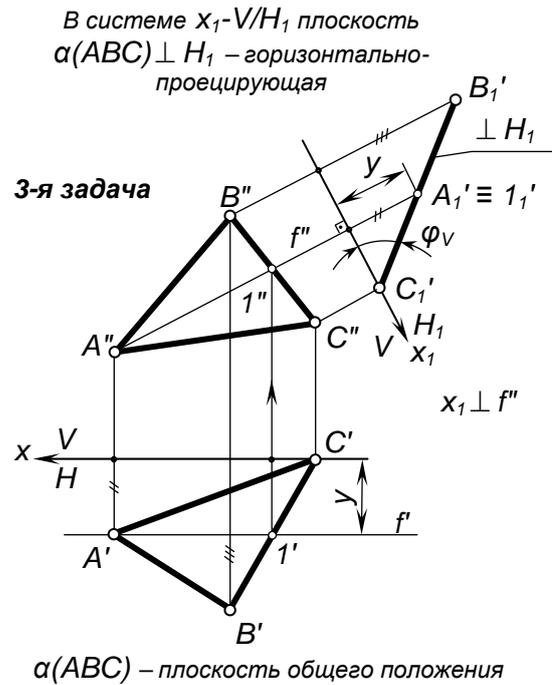


Рис. 6.10

Задача 4. Преобразовать проецирующую плоскость в плоскость уровня.

На рис. 6.11 показано преобразование фронтально-проецирующей плоскости $\beta(CDE)$ в горизонтальную плоскость уровня. Для решения задачи выполнен следующий графический алгоритм.

1-е действие. Ввести дополнительную систему плоскостей проекций x_1-V/H_1 , расположив ось проекций x_1 параллельно вырожденной фронтальной проекции $C''D''E''$ плоскости CDE .

2-е действие. Построить горизонтальную проекцию $C_1'D_1'E_1$ в дополнительной плоскости H_1 по координатам y , взятым из предыдущей системы $x-V/H$.

В результате преобразования фронтально-проецирующая плоскость $\beta(CDE)$ в дополнительной системе заняла положение, параллельное дополнительной плоскости проекций H_1 , т.е. преобразовалась в горизонтальную плоскость уровня. Следовательно, построена натуральная величина этой плоскости.

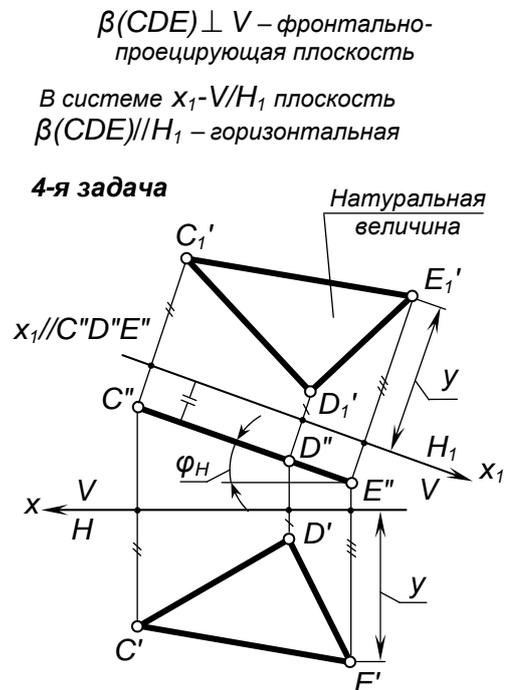


Рис. 6.11

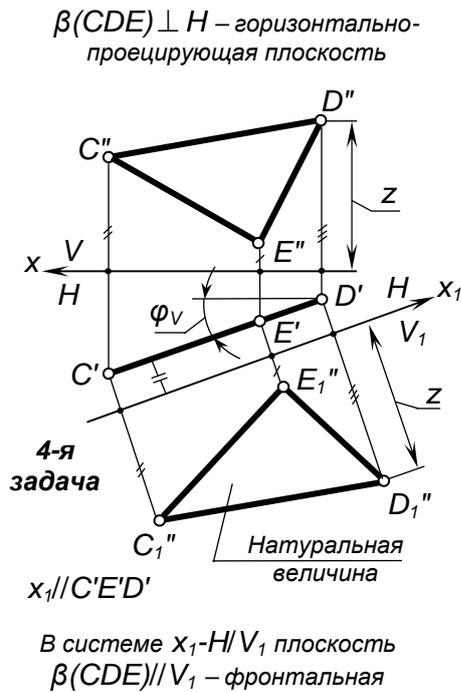


Рис. 6.12

ние относительно тех же плоскостей проекций, т. е. стал перпендикулярным (проецирующим) либо параллельным (уровня) плоскости проекций H или V .

На рис. 6.13 показана наглядная картина способа на примере вращения точки B вокруг фронтально-проецирующей оси i .

Точка B перемещается в положение B_1 , вращаясь по окружности n вокруг фронтально-проецирующей оси i в некоторой плоскости α , перпендикулярной плоскости проекций H .

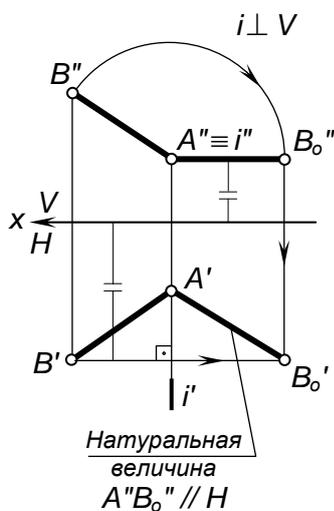


Рис. 6.14

На рис. 6.12 показано преобразование горизонтально-проецирующей плоскости $\beta(CDE)$ во фронтальную плоскость уровня. Для решения задачи введена дополнительная система x_1-H/V_1 и выполнены аналогичные графические действия.

Способ вращения вокруг проецирующей оси (фронтально-проецирующей или горизонтально-проецирующей прямой).

Сущность способа в том, что предмет, занимающий общее положение относительно плоскостей проекций, вращают вокруг проецирующей оси, и з м е н я я его положение в пространстве так, чтобы предмет занял част-

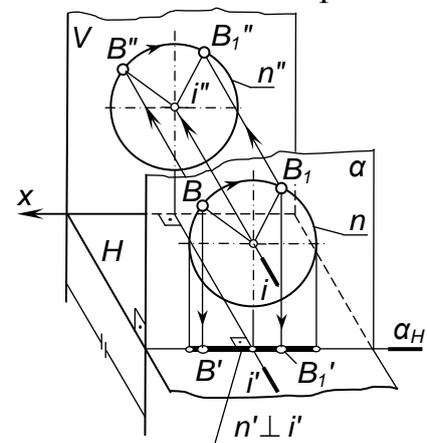


Рис. 6.13

На плоскость проекций H эта окружность проецируется в прямую линию $n(n')$, перпендикулярную оси вращения $i(i')$.

На плоскость проекций V окружность n вращения точки B проецируется в окружность n'' с центром в точке $i(i'')$, которая является вырожденной проекцией фронтально-проецирующей оси вращения i .

На рис. 6.14 и 6.15 показаны примеры применения способа вращения вокруг проецирующей оси для построения натуральной величины отрезка AB общего положения.

На чертеже натуральную величину имеют прямые уровня, параллельные плоскости проекций H или V (профильную прямую не рассматриваем).

Характерный признак прямых уровня на чертеже – одна из проекций параллельна оси проекций x : горизонтальная проекция для фронтальной прямой и фронтальная проекция – для горизонтальной прямой.

Следовательно, для решения задачи отрезок AB общего положения нужно повернуть (вращать) вокруг проецирующей оси так, чтобы он занял положение, параллельное плоскости проекций H или V .

Для решения задачи выполнен следующий графический алгоритм:

1-е действие. Выбрать ось вращения i , проходящую через любую конечную точку отрезка (на рис. 6.14 фронтально-проецирующая ось вращения проведена через точку $A(A'', A')$), и обозначить ее проекции $i(i'', i')$ на чертеже.

2-е действие. Повернуть фронтальную проекцию точки $B(B'')$ вокруг оси $i(i'')$ по часовой стрелке (можно против) так, чтобы фронтальная проекция отрезка $AB(A''B'')$ заняла горизонтальное положение $A''B_0''$, параллельное оси проекций x .

3-е действие. Построить натуральную проекцию $A'B_0'$ отрезка AB , переместив горизонтальную проекцию точки B перпендикулярно горизонтальной проекции оси вращения $i(i')$ (параллельно оси проекций x) до пересечения с вертикальной линией связи от точки B_0'' .

В результате преобразования отрезок AB занял положение горизонтальной прямой уровня.

!!! Конечная точка отрезка A при вращении остается неподвижной, так как лежит на оси вращения i .

На рис. 6.15 показано построение натуральной величины отрезка общего положения AB вращением вокруг горизонтально-проецирующей оси аналогичными графическими действиями (отрезок AB занял положение фронтальной прямой уровня).

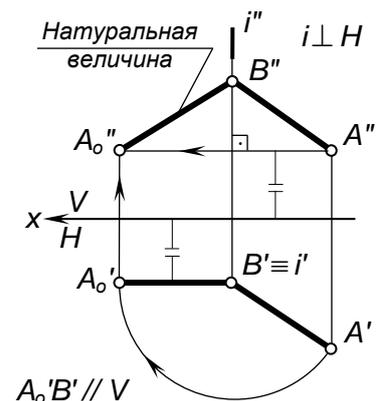


Рис. 6.15

П л о с к о п а р а л л е л ь н о е п е р е м е щ е н и е

Частный случай способа вращения вокруг проецирующей оси – вращение предмета без указания на чертеже осей вращения, который называют способом плоскопараллельного перемещения. Способ удобен тем, что повернутые вокруг предполагаемой проецирующей оси проекции предмета перемещают и располагают на свободном поле чертежа без взаимного их наложения.

На рис. 6.16 показано построение натуральной величины плоскости общего положения, заданной треугольником ABC , способом плоскопараллельного перемещения.

Для решения задачи плоскость ABC должна занять положение плоскости уровня – или фронтальной ($//V$) или горизонтальной ($//H$). Следовательно, плоскость нужно вращать и одновременно перемещать по

полно чертежа, чтобы она последовательно заняла сначала проецирующее положение, а затем положение плоскости уровня.

Для двух последовательных преобразований нужно выполнить следующий графический алгоритм.

Первое перемещение. Плоскость общего положения $\alpha(ABC)$ вращением вокруг предполагаемой, например, горизонтально-проецирующей оси преобразовать во фронтально-проецирующую плоскость, выполнив следующие графические действия:

1-е действие. Провести в плоскости горизонталь $h(h',h'')$.

2-е действие. Повернуть горизонтальную проекцию $A'B'C'$ треугольника, вращая вокруг предполагаемой горизонтально-проецирующей оси (например, проходящей через точку B') и одновременно перемещая вправо на свободное поле чертежа так, чтобы горизонталь h плоскости заняла положение фронтально-проецирующей прямой, то есть h_1' должна расположиться перпендикулярно оси x . Повернутую проекцию треугольника $A_1'B_1'C_1'$

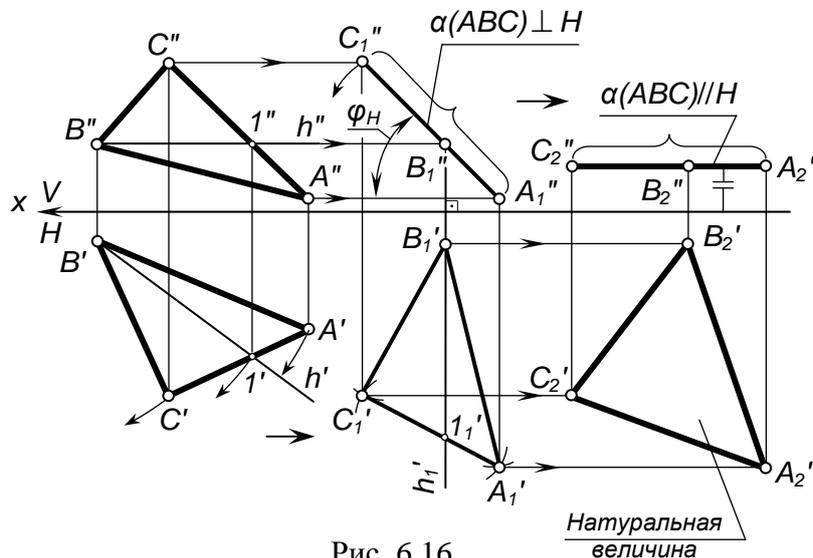


Рис. 6.16

относительно проекции горизонтали h_1' построить с помощью дуговых засечек, на пересечении которых определяются вершины.

3-е действие. Построить фронтальную проекцию $A_1''B_1''C_1''$ треугольника, переместив заданные фронтальные $A''B''C''$ проекции вершин треугольника параллельно оси проекций x до

пересечения с вертикальными линиями связи от точек A_1' , B_1' и C_1' повернутой проекции: фронтальная проекция выродилась в линию, то есть треугольник преобразовался во фронтально-проецирующую плоскость.

Второе перемещение. Плоскость фронтально-проецирующую вращением вокруг предполагаемой фронтально-проецирующей оси преобразовать в горизонтальную плоскость уровня, продолжая графические действия:

4-е действие. Повернуть построенную вырожденную проекцию $A_1''B_1''C_1''$ треугольника, вращая вокруг предполагаемой фронтально-проецирующей оси, проходящей через точку A_1'' , и одновременно перемещая вправо на свободное поле чертежа так, чтобы эта проекция расположилась параллельно оси проекций x : проекция $A_2''B_2''C_2'' //$ оси x .

5-е действие. Построить новую горизонтальную проекцию $A_2'B_2'C_2'$ треугольника, переместив горизонтальные проекции A_1' , B_1' и C_1' вершин треугольника параллельно оси проекций x до пересечения вертикальными

линиями связи от фронтальных проекций A_2'' , B_2'' и C_2'' вершин; построенная горизонтальная проекция $A_2'B_2'C_2'$ треугольника и есть его натуральная величина, так как после второго перемещения треугольник преобразовался в горизонтальную плоскость уровня.

Способ вращения вокруг прямой уровня – горизонтальной или фронтальной прямой.

Сущность способа в том, что плоскость общего положения изменяет свое положение в пространстве относительно плоскостей проекций вращением вокруг линии уровня до положения, параллельного плоскости проекций V (или H).

На рис. 6.17 показана наглядная картина вращения плоскости общего положения $\alpha(ABC)$ вокруг горизонтальной прямой. Пусть сторона AB треугольника ABC лежит в плоскости γ , параллельной плоскости проекций H , и является горизонтальной прямой h , вокруг которой и будет повернута плоскость ABC .

Поскольку вершины A и B треугольника лежат на оси вращения h и, следовательно, неподвижны, то требуется повернуть вокруг прямой уровня h только вершину C так, чтобы она совместилась с плоскостью γ . Вершина C вращается вокруг горизонтальной прямой h (стороны AB) в плоскости β , перпендикулярной оси вращения h .

После поворота треугольник ABC_0 лежит в плоскости γ и, следовательно, параллелен плоскости H . Точка C имеет радиус вращения R_C и на плоскость γ этот радиус проецируется в натуральную величину.

Рассмотрим проекцию этой картины на плоскость проекций H . На горизонтальной проекции видно, что натуральную величину $A'B'C'_0$ треугольника ABC определяет натуральная величина радиуса вращения R_C точки C .

На рис. 6.18 показано построение на чертеже натуральной величины плоскости $\alpha(ABC)$ способом вращения вокруг горизонтальной прямой уровня h . В этом случае выполняется вращение горизонтальной проекции $A'B'C'$ треугольника, то есть вращение выполняется от-

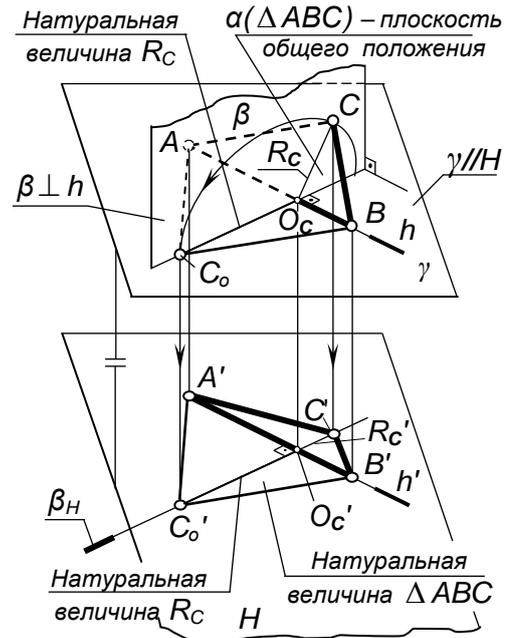


Рис. 6.17

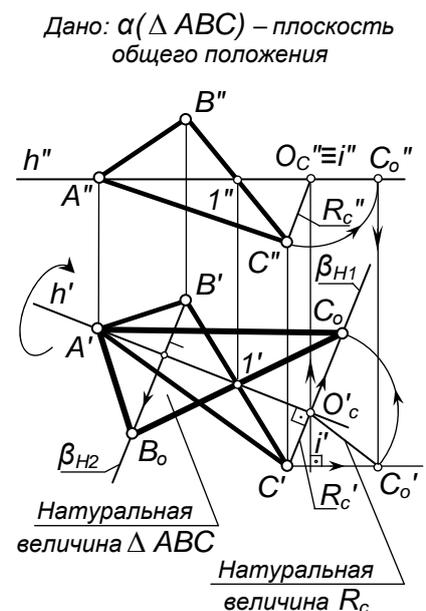


Рис. 6.18

носителем плоскости проекций, которой параллельна ось вращения. Для решения задачи выполнен следующий графический алгоритм:

1-е действие. В заданной плоскости ABC провести проекции горизонтали $h(h'', h')$, которая является осью вращения.

2-е действие. Провести следы плоскостей β_{H1} и β_{H2} перпендикулярно h' , в которых будут вращаться вершины $B(B')$ и $C(C')$ вокруг оси вращения h' ; точка $A(A')$ будет неподвижна, так как лежит на оси вращения.

3-е действие. Определить проекции отрезка $CO_c(C'O_c', C''O_c'')$, то есть радиуса R_c вращения точки C вокруг горизонтали $h(h')$ и построить любым рассмотренным графическим способом натуральную величину радиуса вращения $R_c(R_c'', R_c')$; в примере натуральная величина R_c построена способом вращения отрезка общего положения OC_c вокруг фронтально-проецирующей оси, вырожденная проекция которой совпадает с проекцией точки $O_c(O_c'')$ (по аналогии с построениями на рис. 6.14).

4-е действие. Построенную натуральную величину радиуса вращения $R_c=O_c'C_o'$ повернуть и расположить на следе плоскости β_{H1} , в которой вращается точка $C(C')$ треугольника, построив вершину C_o в повернутом положении.

5-е действие. Достроить повернутую проекцию треугольника $A'B_oV_o$, определив повернутую проекцию V_o вершины $B(B')$ на пересечении следа плоскости вращения β_{H2} с прямой, проходящей через точки C_o и $1(1')$, то есть натуральную величину радиуса вращения для точки B определять нет необходимости – ее повернутое положение V_o определяется графическим построением.

В результате преобразования проекция $A'B_oC_o$ треугольника заняла положение, параллельное горизонтальной плоскости проекций H и, следовательно, определяет его натуральную величину.

!!! Построение на чертеже натуральной величины плоскости ABC вращением вокруг фронтальной прямой уровня $f(f'', f')$ выполняется аналогичными графическими действиями, только

вращать следует фронтальную проекцию $A''B''C''$ треугольника, так как ось вращения f параллельна фронтальной плоскости проекций. Треугольник после вращения занимает положение фронтальной плоскости уровня, которая определяет его натуральную величину (рис. 6.19).

Структуризация материала шестой лекции в рассмотренном объеме схематически представлена на рис. 6.20 (лист 1). На последующих листах 2 и 3 компактно приведены иллюстрации к этой схеме для визуального закрепления изученного материала при повторении (рис. 6.21 и 6.22).

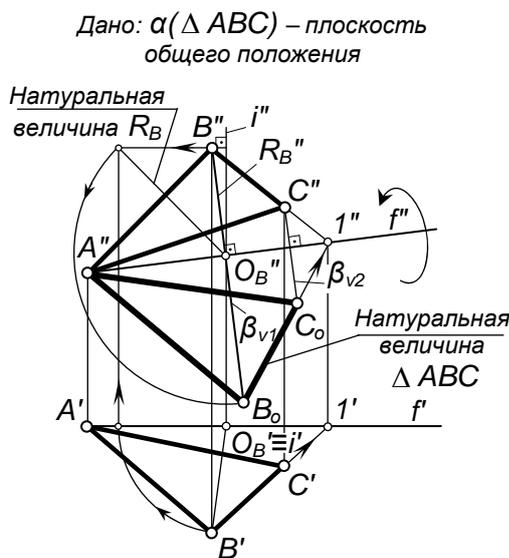
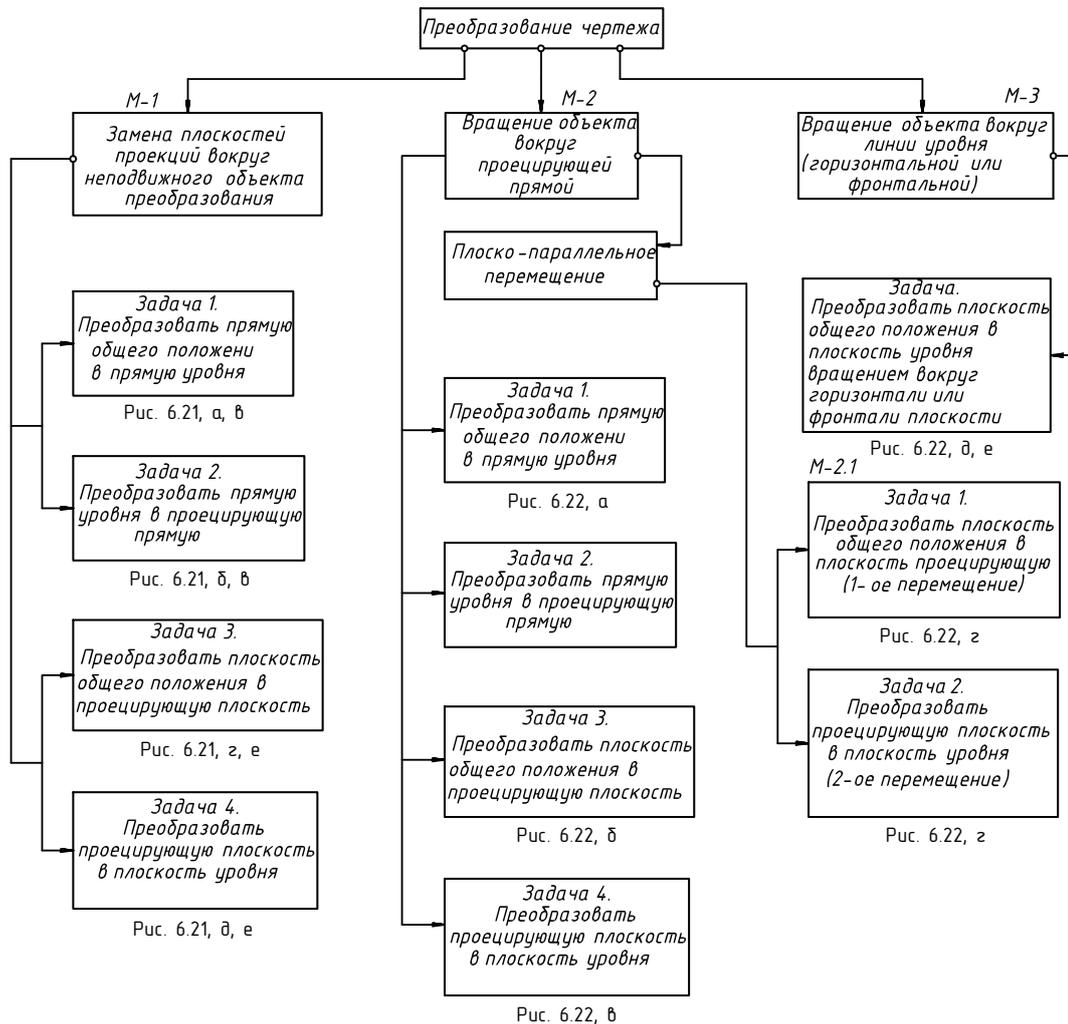


Рис. 6.19

Преобразование



Сущность преобразования чертежа: изменить графическое условие задачи таким образом, чтобы объект преобразования занял относительно плоскости проекций частное положение (проецирующее или положение уровня), которое упрощает графическое решение задачи.

Рис. 6.20

Замена плоскостей проекций

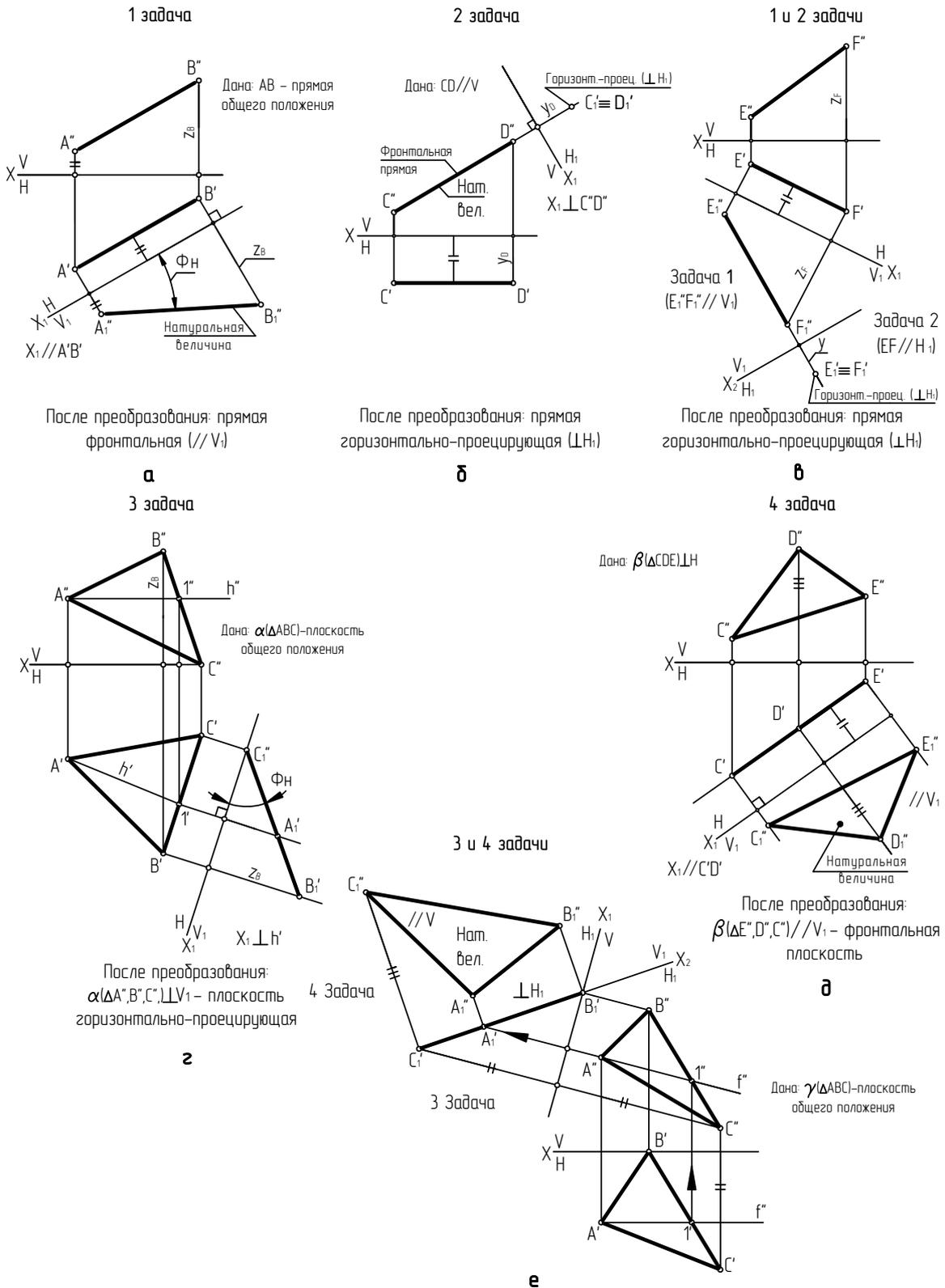
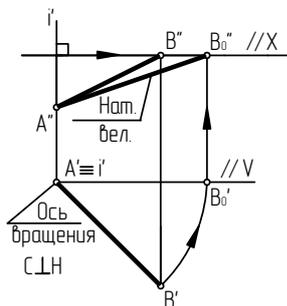


Рис. 6.21

Вращение вокруг проецирующей прямой

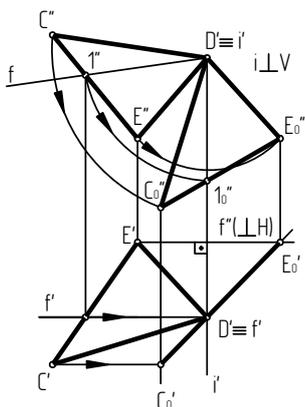
1 задача



Построить натуральную величину прямой AB

а

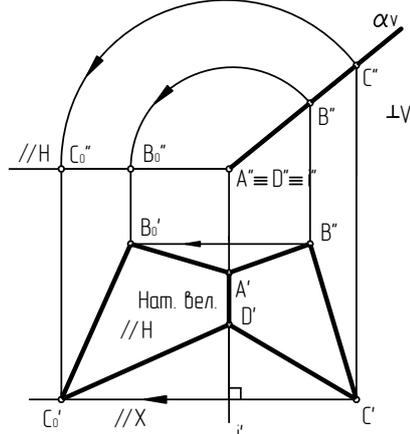
2 задача



Преобразовать плоскость α ($\triangle CDE$) в горизонтально-проецирующую плоскость

б

3 задача



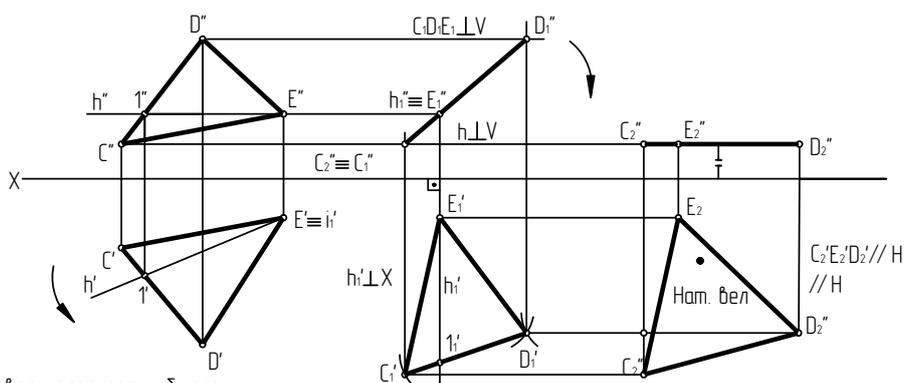
Преобразовать фронтально-проецирующую плоскость α (α_V) в горизонтальную плоскость уровня

в

Плоскопараллельное перемещение

1 перемещение

2 перемещение



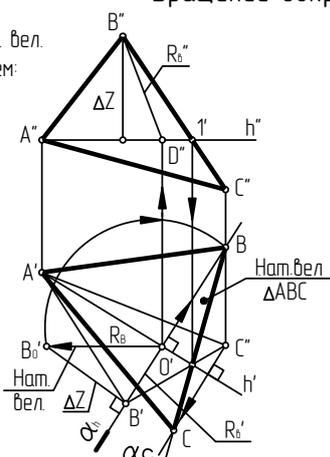
Преобразовать плоскость общего положения α (CDE) в горизонтальную плоскость уровня

г

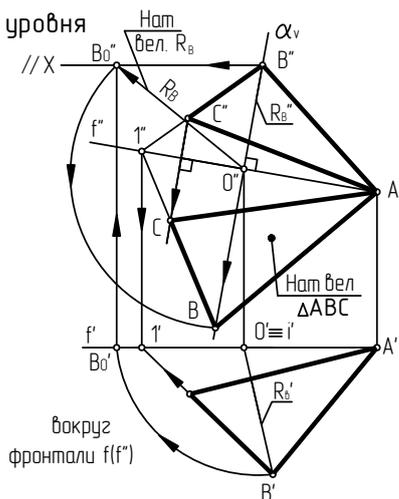
Вращение вокруг линии уровня

Построить натур. вел. $\triangle ABC$ вращением:

вокруг горизонта $h(h')$



д



е

Рис. 6.22

ПОВЕРХНОСТИ. ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ ГРАННЫХ И КРИВЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ТЕЛА

МНОГОГРАННИКИ

Геометрические тела – призма и пирамида

Многогранником называют геометрическое тело, поверхность которого ограничена плоскостями (гранями). Многогранник называют четырех-, пяти-, шестигранником и т. д. по количеству граней (включая основания), образующих его поверхность. На чертеже многогранник задают проекциями его граней и ребер (ребро – линия пересечения граней).

Рассмотрим призму и пирамиду – геометрические многогранники (тела), которые часто применяются при формообразовании различных деталей. Основанием призмы и пирамиды может быть любой многоугольник, по количеству сторон которого призму и пирамиду называют треугольной, четырехугольной и т. д. Такое название более соответствует изображению этих многогранников на чертеже, по которому определяется многоугольник основания, что позволяет создать в воображении соответствующий пространственный образ.

Призма как геометрическое тело имеет два параллельных основания, боковые грани и параллельные ребра. Призму называют *правильной*, если ее основаниями являются правильные многоугольники, вписанные в окружность. Призму называют *прямой*, если ее ребра перпендикулярны основанию, и *наклонной*, если ребра не перпендикулярны основанию.

Пирамида как геометрическое тело имеет одно основание и вершину, объединяющую все ее ребра. Пирамиду называют *правильной*, если ее основанием является правильный многоугольник, вписанный в окружность, а высота пирамиды проходит через центр этой окружности (то есть пирамида прямая).

Пирамида может быть *наклонной*, если основание высоты не лежит в центре окружности, в которую вписан многоугольник основания пирамиды. Пирамида со срезанной вершиной имеет два основания и называется *усеченной*.

Построение проекций прямой правильной призмы

На рис. 7.1 показан пример построения проекций (очерков) прямой правильной призмы высотой H с треугольником в основании, вписанном в окружность заданного диаметра; основания призмы параллельны горизонтальной плоскости проекций H .

Для построения проекций призмы требуется выполнить графоаналитические действия в следующем порядке:

1-е действие. Построить горизонтальную проекцию призмы по заданному основанию, которая представляет собой треугольник с обозначенными вершинами A' , B' и C' , вписанный в окружность заданного диаметра \emptyset .

2-е действие. Выполнить графический анализ построенной горизонтальной проекции призмы:

2.1. Плоскость треугольника $A'B'C'$ – это горизонтальные натуральные проекции совпадающих параллельных оснований призмы, которые являются горизонтальными плоскостями уровня ($//H$).

2.2. Боковые стороны $A'B'$, $B'C'$ и $C'A'$ треугольника $A'B'C'$ – это горизонтальные проекции боковых граней призмы, которые спроецировались (выродились) в отрезки прямых линий, так как:

- задняя грань AB – фронтальная плоскость ($//V$);
- передние грани BC и CA – горизонтально-проецирующие плоскости ($\perp H$).

2.3. Вершины A' , B' и C' треугольника $A'B'C'$ – это горизонтальные проекции ребер, которые спроецировались (выродились) в точки, так как являются горизонтально-проецирующими прямыми ($\perp H$).

3-е действие. Построить фронтальную проекцию (очерк) призмы, которая представляет собой прямоугольник, ограниченный:

- по заданной высоте h горизонтальными отрезками $A''B''C''$ – проекциями оснований ($//H$);
- слева – проекцией A'' ребра A , построенного по вертикальной линии связи;
- справа – проекцией B'' ребра B ;
- фронтальная проекция C'' ребра C – вертикальный отрезок, совпадающий с осью симметрии фронтальной проекции призмы.

4-е действие. Выполнить графический анализ построенной фронтальной проекции призмы:

4.1. Прямоугольники $A''C''C''A''$ и $C''B''B''C''$ – искаженные проекции передних видимых боковых граней призмы.

4.2. Прямоугольник $A''B''B''A''$ – натуральная величина невидимой задней грани призмы.

5-е действие. Построить профильную проекцию (очерк) призмы:

5.1. Задать на горизонтальной проекции призмы положение базовой линии, проходящей через заднюю грань $AB(A'B')$, относительно которой,

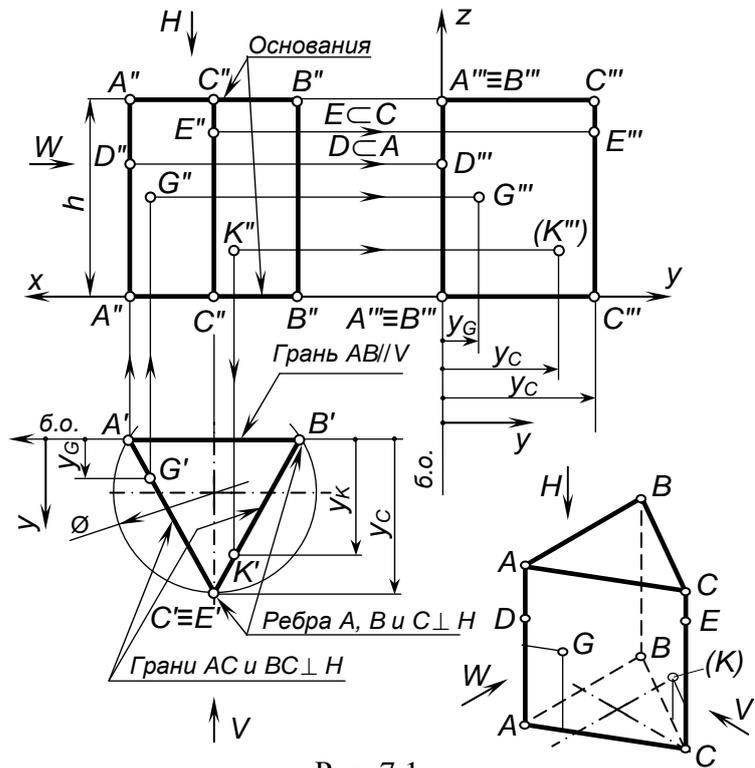


Рис. 7.1

как от базы отсчета (б.о.), можно определить координату u для любой точки на поверхности призмы.

5.2. На поле чертежа справа от фронтальной проекции выбрать положение базовой оси Z , относительно которой, как от базы отсчета (б.о.), можно построить по координатам u профильные проекции любой точки на поверхности призмы.

5.3. Профильная проекция призмы представляет собой прямоугольник, ограниченный:

- по высоте H горизонтальными отрезками – проекциями оснований;
- слева – вертикальным отрезком совпадающих проекций A''' и B''' ребер A и B , расположенным на выбранной базовой оси Z ;
- справа – вертикальной линией C''' ребра C , построенного по координате u_C .

6-е действие. Выполнить графический анализ построенной профильной проекции призмы.

6.1. Совпадающие прямоугольники $A'''C'''C'''B'''$ и $B'''C'''C'''B'''$ – искаженные проекции передних боковых граней призмы AC и BC .

6.2. Отрезок $A'''-A'''$ ($B'''-B'''$) слева – вырожденная проекция задней грани призмы AB .

Построение горизонтальных и профильных проекций точек, лежащих на поверхности призмы

Принадлежность точек поверхности призмы определяется их принадлежностью ребрам и граням этой призмы.

На рис. 7.1 показан пример построения горизонтальных и профильных проекций точек D , E , G и K , лежащих на боковой поверхности призмы и заданных фронтальными проекциями:

– горизонтальные проекции D' и F' точек D и F , лежащих на ребрах A и C совпадают с горизонтальными проекциями этих ребер – точками $A(A')$ и $C(C')$;

– горизонтальные проекции G' и K' точек G и K , лежащих на гранях AC и BC , определяются соответственно на сторонах $A'C'$ и $B'C'$ треугольника $A'B'C'$, которые являются вырожденными проекциями этих граней;

– профильные проекции точек D и E построены по их принадлежности ребрам призмы A и C : D''' лежит на A''' ; E''' лежит на C''' ;

– профильные проекции точек G и K построены по координатам " u ": G''' – определяется координатой u_G ; K''' – определяется координатой u_K и на профильной проекции невидима, поскольку лежит на невидимой грани BC (взята в скобки).

!!! **Запомните** характерные признаки очерков призмы на чертеже – два прямоугольника и многоугольник основания.

Построение проекций правильной пирамиды

На рис. 7.2 показан пример построения проекций правильной пирамиды высотой H с треугольником в основании, вписанном в окружность за-

данного диаметра \varnothing ; основание пирамиды параллельно горизонтальной плоскости проекций H .

Для построения проекций пирамиды требуется выполнить графоаналитические действия в следующем порядке:

1-е действие. Построить горизонтальную проекцию пирамиды по заданному основанию, которая представляет собой треугольник, вписанный в окружность заданного диаметра \varnothing , с обозначенными вершинами A' , B' и C' ; горизонтальная проекция S' вершины пирамиды совпадает с центром этой окружности; ребра пирамиды – видимые отрезки $S'A'$, $S'B'$ и $S'C'$, соединяющие вершины основания с вершиной пирамиды.

2-е действие. Выполнить графический анализ построенной горизонтальной проекции пирамиды:

2.1. Плоскость треугольника $A'B'C'$ – горизонтальная невидимая натуральная проекция основания пирамиды, которая является горизонтальной плоскостью уровня ($//H$).

2.2. Треугольники $A'S'C'$, $A'S'B'$ и $B'S'C'$ – горизонтальные искаженные проекции боковых граней пирамиды.

3-е действие. Построить фронтальную проекцию пирамиды, которая представляет собой треугольник, ограниченный:

- снизу – горизонтальным отрезком $A''B''$ – проекцией основания пирамиды ($//H$);
- по заданной высоте пирамиды H – вершиной $S(S'')$;
- слева – проекцией ребра $SA(S''A'')$ (прямая общего положения);
- справа – проекцией ребра $SB(S''B'')$ (прямая общего положения).

Фронтальная проекция ребра $SC(S''C'')$ (профильная прямая) совпадает с осью симметрии фронтальной проекции пирамиды.

4-е действие. Выполнить графический анализ построенной фронтальной проекции пирамиды:

4.1. Треугольники $S''A''C''$ и $S''C''B''$ – искаженные видимые проекции боковых передних граней пирамиды.

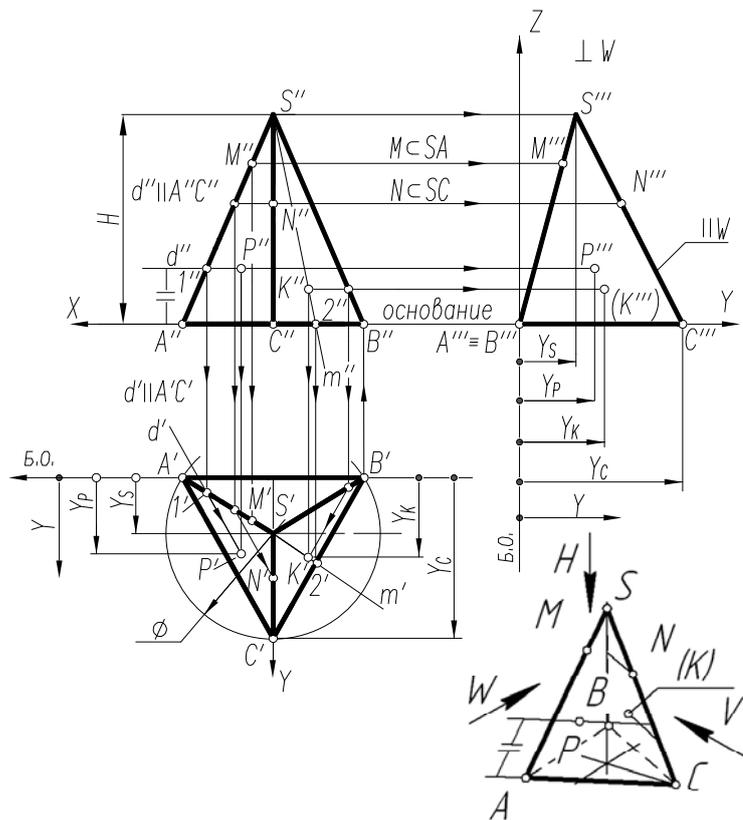


Рис. 7.2

4.2. Треугольник $S''A''B''$ – искаженная невидимая проекция задней невидимой грани пирамиды.

5-е действие. Построить профильную проекцию пирамиды:

5.1. Задать на горизонтальной проекции пирамиды базовую линию на стороне $A'B'$ основания, относительно которой, как базы отсчета (б.о.), можно определить координату u для любой точки на поверхности пирамиды.

5.2. На поле чертежа справа от фронтальной проекции выбрать положение базовой оси Z , относительно которой, как базы отсчета (б.о.), можно построить по координатам u профильные проекции любой точки на поверхности пирамиды.

5.3. Профильная проекция пирамиды представляет собой треугольник с вершинами $A'''(\equiv B''')$, S''' и C''' :

– точки A и B основания лежат на базовой линии, поэтому их профильные A''' и B''' проекции совпадают с выбранной базовой осью Z ;

– вершину пирамиды S''' построить по координате Y_s на горизонтальной линии связи;

– точку основания C''' построить по координате Y_c .

6-е действие. Выполнить графический анализ построенной профильной проекции пирамиды:

6.1. Совпадающие треугольники $S'''A'''C'''$ (видимый) и $S'''B'''C'''$ (невидимый) – искаженные проекции передних боковых граней пирамиды (плоскости общего положения).

6.2. Отрезок $S'''A'''(\equiv S'''B''')$ – вырожденная проекция задней грани пирамиды (профильно-проецирующая плоскость).

Построение проекций точек, лежащих на поверхности пирамиды

На рис. 7.2 показан пример построения горизонтальных и профильных проекций точек M , N , P и K , лежащих на поверхности пирамиды и заданных фронтальными проекциями M'' , N'' , P'' и K'' .

1. Построение горизонтальных проекций точек, лежащих на поверхности пирамиды:

– горизонтальная проекция M' точки M , лежащей на ребре пирамиды SA , определяется на горизонтальной проекции $S'A'$ этого ребра;

– горизонтальные проекции точек N , P и K построены на вспомогательных прямых, проведенных через их заданные фронтальные проекции N'' , P'' и K'' параллельно основанию пирамиды.

Рассмотрим графический алгоритм для построения горизонтальных проекций точек, лежащих на гранях пирамиды (на примере заданной точки $P(P'')$), действия которого определяются теоремами о принадлежности точки и прямой плоскости.

Графический алгоритм:

1-е действие. Провести через точку $P(P'')$ на поверхности пирамиды вспомогательную линию $d(d'')$, параллельную основанию пирамиды, которая пересекает ребро $SA(S'A')$ по вспомогательной точке $1(1'')$.

2-е действие. Построить горизонтальную проекцию точки $1(1')$ по ее принадлежности ребру $SA(S'A')$.

3-е действие. Через построенную точку $1(1')$ провести горизонтальную проекцию $d(d')$ вспомогательной линии параллельно стороне $A'C'$ основания пирамиды.

4-е действие. Построить по линии связи горизонтальную проекцию P' точки P по ее принадлежности вспомогательной линии $d(d')$.

Повторить действия графического алгоритма и построить аналогично горизонтальные проекции N' и K' точек N и K .

Проекции точек на поверхности пирамиды можно строить также с помощью вспомогательных прямых, проходящих через ее вершину. Смотри построение проекции точки $K(K')$ с помощью вспомогательной прямой $m(m'',m')$ (рис. 7.2).

2. Построение профильных проекций точек, лежащих на поверхности пирамиды:

– профильные проекции заданных точек M и N построены по их принадлежности ребрам пирамиды:

– M''' – по принадлежности ребру $SA(S''A''')$;

– N''' – по принадлежности ребру $SC(S''C''')$;

– профильные проекции точек P и K построены по координатам y : P''' – определяется координатой y_P ; K''' – определяется координатой y_K (на профильной проекции K''' невидима, так как лежит на невидимой грани SBC (взята в скобки)).

!!! **Запомните** характерные признаки очерков пирамиды на чертеже – два треугольника и многоугольник основания. Для усеченной пирамиды – две трапеции и многоугольник основания!

Построение проекций призмы и пирамиды со срезами плоскостями частного положения

Любая плоскость пересекает поверхность призмы и пирамиды по замкнутым ломаным линиям, вершины которых лежат в точках пересечения ребер, граней и оснований многогранника с плоскостями срезов.

Следовательно, построение срезов на проекциях граничных поверхностей сводится к построению проекций точек, лежащих на поверхности призмы или пирамиды.

Построение проекций призмы со срезами плоскостями частного положения.

На рис. 7.3 показан пример построения проекций прямой правильной треугольной призмы высотой H со срезами, выполненными плоскостями частного положения – фронтально-проецирующей плоскостью α и профильной плоскостью β . Для упрощения графических описаний взята призма без срезов из предыдущего примера (см. рис. 7.1), горизонтальная, фронтальная и профильная проекции которой уже построены.

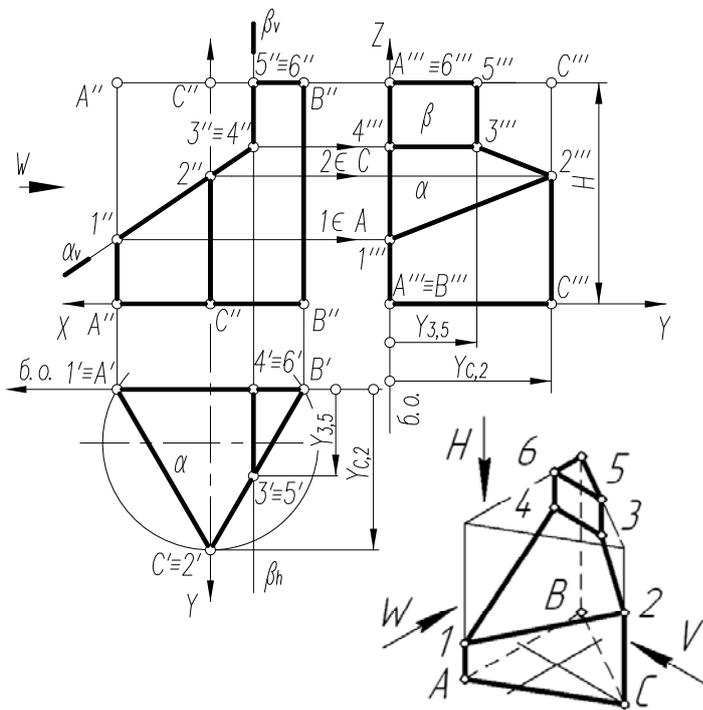


Рис. 7.3

Для построения проекций призмы со срезами следует выполнить предлагаемый графический алгоритм, определяющий порядок действий при решении всех подобных задач:

1-е действие. Построить тонкими линиями на поле чертежа горизонтальную, фронтальную и профильную проекции заданной прямой правильной треугольной призмы без срезов, а затем выполнить на ее фронтальной проекции срезы плоскостями частного положения по заданному условию: фронтально-проецирующей плоскостью $\alpha(\alpha_V)$ и профильной плоскостью $\beta(\beta_V)$.

2-е действие. Обозначить на фронтальной проекции призмы характерные точки пересечения плоскостей срезов с ребрами, гранями и основанием призмы:

- точки $1(1'')$ и $2(2'')$ – лежат на ребрах призмы $A(A'')$ и $C(C'')$;
- совпадающие точки $3(3'')$ и $4(4'')$ – лежат на гранях призмы и определяют вырожденную в точку проекцию фронтально-проецирующей линии пересечения плоскостей срезов α и β ;
- совпадающие точки $5(5'')$ и $6(6'')$ – лежат на верхнем основании призмы и определяют вырожденную в точку проекцию фронтально-проецирующей линии пересечения плоскости β с верхним основанием призмы.

3-е действие. Достроить горизонтальную проекцию призмы со срезами, построив проекции плоскостей срезов по горизонтальным проекциям обозначенных точек, и определить видимость плоскостей срезов:

3.1. Плоскость среза α определяет четырехугольник $1'-2'-3'-4'$:

- точка $1(1')$ лежит на ребре $A(A')$;
- точка $2(2')$ лежит на ребре $C(C')$;
- совпадающие точки $3(3')$ и $5(5')$ лежат на передней грани $CB(C'B')$;
- совпадающие точки $4(4')$ и $6(6')$ лежат на задней грани $AB(A'B')$.

Четырехугольник $1'-2'-3'-4'$ – искаженная по величине видимая горизонтальная проекция фронтально-проецирующей плоскости среза α .

3.2. Плоскость среза β определяет совпадающие проекции отрезков $5'-6'$ и $3'-4'$:

- отрезок $5'-6'(3'-4')$ – горизонтальная, вырожденная в линию, видимая проекция профильной плоскости среза β (проекция прямоугольника).

4-е действие. Выполнить графический анализ построенной горизонтальной проекции призмы для определения ее очерка и внутреннего контура:

4.1. Горизонтальный очерк определяет треугольник $ABC(A'B'C')$.

4.2. Внутренний контур определяет видимый отрезок $5'-6'(3'-4')$.

5-е действие. Достроить профильную проекцию призмы, построив проекции плоскостей срезов по профильным проекциям обозначенных точек, и определить видимость плоскостей срезов:

5.1. Плоскость среза α определяет видимый и искаженный по величине четырехугольник $1''-2''-3''-4''$:

– точка $1(1'')$ – лежит на ребре $A(A'')$;

– точка $2(2'')$ – лежит на ребре $C(C'')$;

– точка $3(3'')$ – построена по координате y_3 ;

– точка $4(4'')$ – лежит на задней грани $AB(A''B'')$, которая спроецировалась в прямую.

5.2. Плоскость среза β определяет видимая натуральная проекция прямоугольника $3''-4''-6''-5''$:

– точки $3(3'')$ и $4(4'')$ – уже построены, так как линия пересечения плоскостей среза $3-4$ принадлежит плоскости α и плоскости β ;

– точка $6(6'')$ – лежит на задней грани AB ;

– точка $5(5'')$ – построена по координате $y_5(\equiv y_3)$.

6-е действие. Выполнить графический анализ построенной профильной проекции призмы для определения ее очерка и внутреннего контура.

6.1. Профильный очерк определяют:

– слева – профильная проекция ребра $B(B'')$, совпадающая с проекцией грани $AB(A''B'')$;

– справа – участок $C''2''$ ребра C и ломаная линия $2''-3''-5''$;

– снизу – отрезок $A''(B'')-C''$ нижнего основания призмы;

– сверху – отрезок $5''-6''$ – линия пересечения плоскости β с верхним основанием призмы (участок основания).

6.2. Внутренний контур определяют видимые отрезки $1''-2''$ и $3''-4''$.

7-е действие. Оформить чертеж призмы, обведя сплошными толстыми линиями очерки и видимые линии внутреннего контура каждой ее проекции (оставить на чертеже тонкими сплошными линиями очерки проекции призмы без срезов и линии построения).

Построение проекций пирамиды со срезами плоскостями частного положения

На рис. 7.4 показан пример построения проекций правильной треугольной пирамиды со срезами, выполненными плоскостями частного положения: фронтально-проецирующей плоскостью α и профильной плоскостью β . Для упрощения графических описаний взята пирамида без срезов из предыдущего примера (см. рис. 7.2), фронтальная, горизонтальная и профильная проекции которой уже построены.

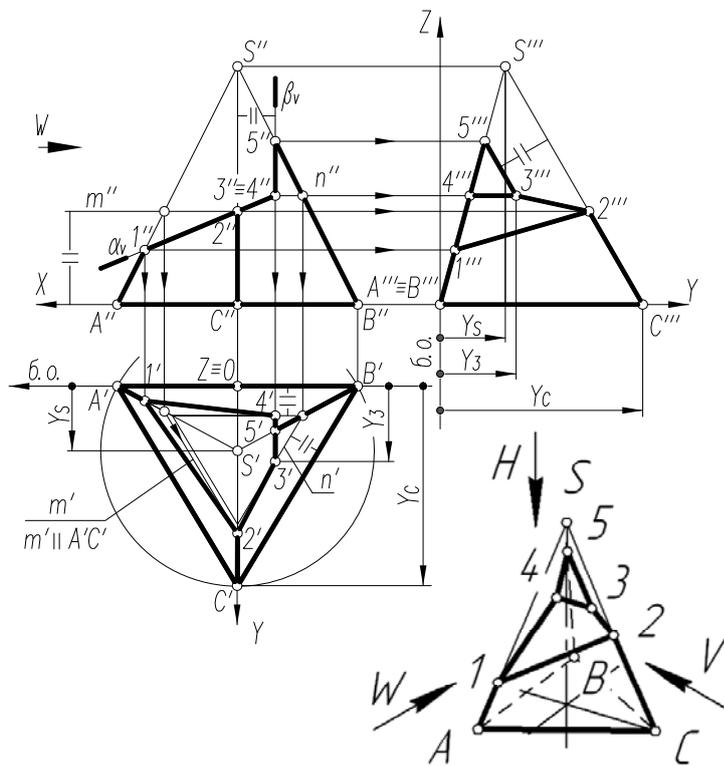


Рис. 7.4

Для построения проекций пирамиды со срезами следует выполнить предлагаемый графический алгоритм, определяющий порядок действий при решении всех подобных задач.

1-е действие. Построить тонкими линиями на поле чертежа горизонтальную, фронтальную и профильную проекции заданной правильной треугольной пирамиды без срезов, а затем выполнить на ее фронтальной проекции срезы фронтально-проецирующей плоскостью $\alpha(\alpha_v)$ и профильной плоскостью $\beta(\beta_v)$.

2-е действие. Обозначить на фронтальной проекции характерные точки пересечения плоскостей срезов с ребрами и гранями пирамиды:

- точка 1(1'') – на ребре SA(S''A'');
- точка 2(2'') – на ребре SC(S''C'');
- совпадающие точки 3(3'') и 4(4'') – на гранях SAB(S''A''B'') и SBC(S''B''C'') определяют вырожденную в точку проекцию фронтально-проецирующей линии пересечения плоскостей срезов α и β ;
- точка 5(5'') – на ребре SB(S''B'').

3-е действие. Достроить горизонтальную проекцию пирамиды со срезами, построив проекции плоскостей срезов по горизонтальным проекциям обозначенных точек, и определить видимость плоскостей срезов.

3.1. Плоскость среза α определяет четырехугольник 1-2'-3'-4':

- точка 1(1') – на ребре SA(S'A');
- точка 2(2') – на ребре SC(S'C') (построена на вспомогательной линии $m // AC$), см. рис. 7.4);
- точки 3(3') и 4(4') лежат на гранях пирамиды и построены с помощью вспомогательной линии $n // BC$;
- четырехугольник 1'-2'-3'-4' – горизонтальная, искаженная по величине видимая проекция фронтально-проецирующей плоскости α .

3.2. Плоскость среза β определяет отрезок 3'-5'-4' – вырожденная в видимую линию горизонтальная проекция профильной плоскости β :

- точка 5(5') – на ребре SB(S'B');
- точки 3(3') и 4(4') – построены.

4-е действие. Выполнить графический анализ построенной горизонтальной проекции пирамиды со срезами для определения ее очерка и внутреннего контура.

4.1. Горизонтальный очерк определяет треугольник $A'B'C'$ основания пирамиды.

4.2. Внутренний контур определяют:

- видимый отрезок $A'1'$ – участок ребра SA ;
- видимый отрезок $B'5'$ – участок ребра SB ;
- видимый отрезок $C'2'$ – участок ребра SC ;
- видимый четырехугольник $1'-2'-3'-4'$.

5-е действие. Достроить профильную проекцию пирамиды, построив проекции плоскостей срезов по профильным проекциям обозначенных точек и определить видимость плоскостей срезов.

5.1. Плоскость среза α определяет видимый четырехугольник $1''-2''-3''-4''$:

- точка $1(1'')$ – лежит на ребре $SA(S''A'')$;
- точка $2(2'')$ – лежит на ребре $SC(S''C'')$;
- точка $3(3'')$ – построена по координате Y_3 ;
- точка $4(4'')$ – лежит на задней грани $SAB(S''A''B'')$, вырожденной в линию;

– четырехугольник $1''-2''-3''-4''$ – искаженная по величине видимая проекция фронтально-проецирующей плоскостью α .

5.2. Плоскость среза β определяет видимая натуральная проекция треугольника $3''-4''-5''$:

- точки $3(3'')$ и $4(4'')$ – уже построены (отрезок $3-4$ – линия пересечения плоскостей среза α и β);
- точка $5(5'')$ – лежит на ребре $SB(S''B'')$;
- отрезок $3''-5''//S''C''$.

6-е действие. Выполнить графический анализ построенной профильной проекции пирамиды со срезами для определения ее очерка и внутреннего контура.

6.1. Профильный очерк определяют:

- слева – отрезок $B''5''$ – участок ребра $S''B''$;
- справа – отрезок $C''2''$ – участок ребра $S''C''$ и ломаная линия $2''-3''-5''$;
- снизу – горизонтальная линия проекции основания $ABC(A''B''C'')$.

6.2. Внутренний контур определяют:

- видимый отрезок $1''-2''$;
- видимый отрезок $3''-4''$ (линия пересечения плоскостей α и β).

7-е действие. Оформить чертеж пирамиды, выполнив сплошными толстыми линиями очерки и видимые линии внутреннего контура каждой ее проекции (тонкими линиями оставить на чертеже очерки проекции пирамиды без срезов и вспомогательные линии построения).

ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ

Поверхностью вращения называют поверхность, образованную вращением некоторой линии (образующей поверхности) вокруг неподвижной прямой, называемой осью вращения. При этом образующая, вращаясь вокруг оси вращения, может пересекать окружность, называемую направляющей поверхности. Образующей поверхности вращения может быть кривая или прямая линия. Поверхность вращения называют *линейчатой*, если ее образующей является прямая линия, и *криволинейной*, если образующая – кривая линия.

На рис. 7.5 показана поверхность вращения общего вида, образующая которой (кривая линия) вращается вокруг горизонтально-проецирующей оси i . Все точки образующей вращаются вокруг оси i по окружностям соответствующего радиуса, которые называют *параллелями поверхности*. На фронтальную и профильную проекции поверхности эти параллели проецируются в прямые линии, перпендикулярные оси вращения. На горизонтальную проекцию параллели проецируются в виде окружностей. Некоторые параллели имеют определенные общепринятые наименования:

- *горло* поверхности – параллель наименьшего (минимального) радиуса;
- *экватор* – параллель наибольшего (максимального) радиуса.

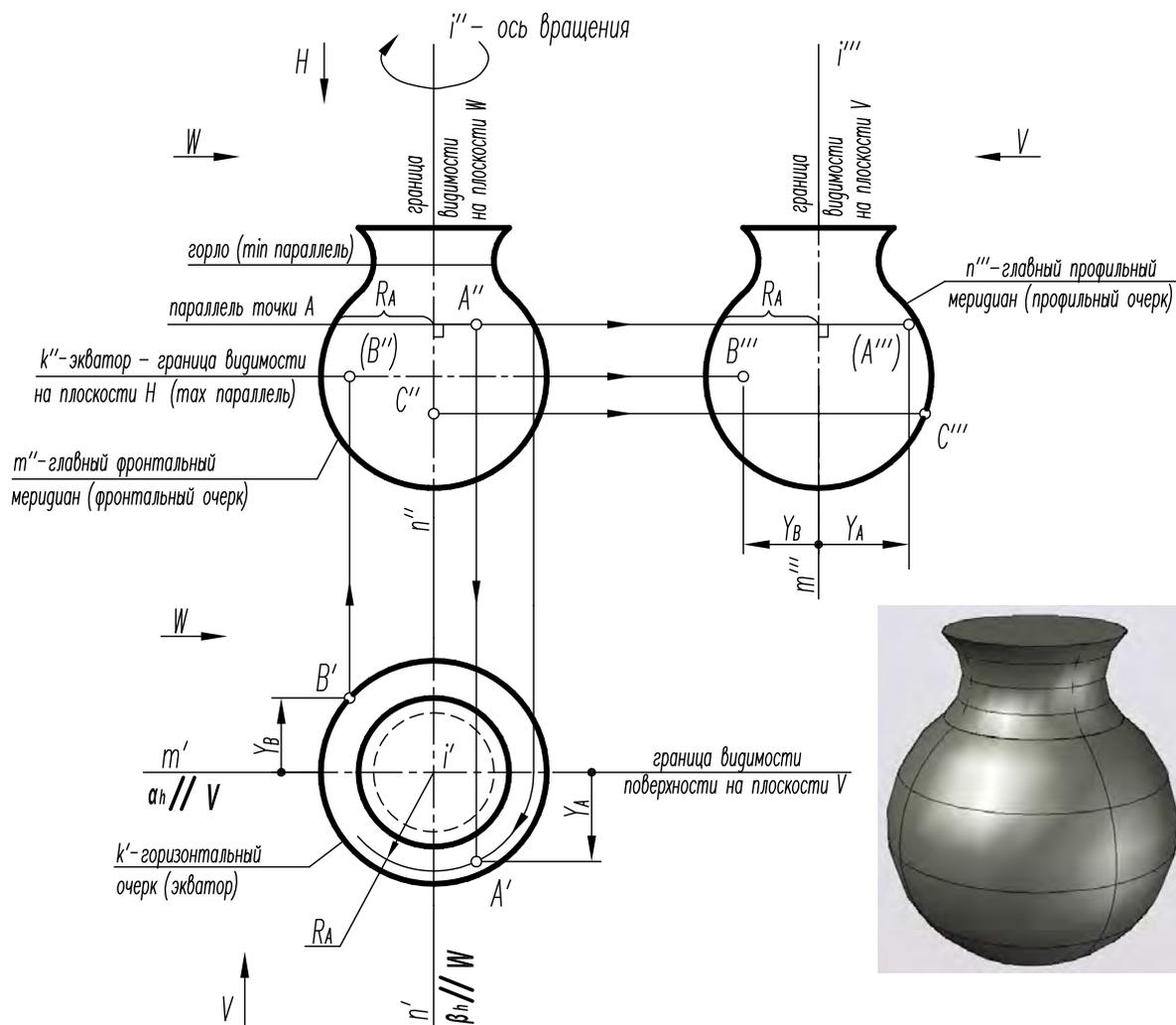


Рис. 7.5

Проекция поверхности вращения:

– горизонтальная проекция, то есть ее горизонтальный очерк, определяется окружностью экватора $k(k')$;

– фронтальная проекция, то есть ее фронтальный очерк, образуется замкнутой линией главного фронтального меридиана $m(m'')$, полученного при пересечении этой поверхности фронтальной плоскостью уровня $\alpha(\alpha_H)$, проходящей через ось вращения i ;

– профильная проекция, то есть ее профильный очерк, образуется замкнутой линией главного профильного меридиана $n(n''')$, полученного при пересечении этой поверхности профильной плоскостью уровня $\beta(\beta_H)$, проходящей через ось вращения i .

Построение проекций точек на поверхности вращения

Принадлежность точки поверхности вращения определяется ее принадлежностью параллели, по которой точка вращается вокруг оси вращения.

Проекция точек, лежащих на экваторе или на главных фронтальном и профильном меридианах поверхности, строятся по их принадлежности этим характерным линиям.

На рис. 7.5 показан пример построения невидимой фронтальной проекции характерной точки $B(B'; B''-?)$, лежащей на экваторе k , по ее заданной горизонтальной проекции $B(B')$ и построение профильной проекции характерной точки $C(C'; C''-?)$, лежащей на главном профильном меридиане n , по ее заданной фронтальной проекции.

Для построения проекций точки $A(A'; A''-?; A'''-?)$, заданной своей фронтальной проекцией и не лежащей на характерных линиях поверхности, требуется выполнить следующий графический алгоритм:

1-е действие. Провести через заданную фронтальную проекцию точки $A(A'')$ параллель, которая имеет радиус R_A .

2-е действие. Провести на горизонтальной проекции поверхности окружность-параллель радиусом R_A .

3-е действие. Построить по вертикальной линии связи горизонтальную видимую проекцию точки $A(A')$ по ее принадлежности построенной параллели радиусом R_A .

4-е действие. Построить профильную проекцию точки $A(A''')$ на горизонтальной линии связи по координате Y_A (лежит на невидимой части поверхности, проекция взята в скобки).

Видимость точек на проекциях поверхности вращения

На рис. 7.5 показаны границы видимости поверхности для каждой проекции по направлению взгляда на плоскости проекций H , V и W .

Видимость точек на проекциях поверхности определяется этими границами, то есть видимостью части поверхности на каждой проекции: если часть

поверхности является по направлению взгляда на соответствующую плоскость проекций видимой, то точка на этой проекции будет также видимой.

На рис. 7.5 видно, что горизонтальная проекция B' заданной точки B , лежащей на экваторе, расположена на невидимой части поверхности при взгляде на фронтальную плоскость проекций V . Следовательно, ее фронтальная проекция B'' лежит на экваторе, но будет невидимой (проекция взята в скобки). Профильная проекция B''' точки будет видимой, так как точка лежит на видимой для профильной проекции части поверхности (см. взгляд по стрелке на плоскость W). Поскольку заданная фронтальная проекция точки C , лежащей на фронтальной проекции $n(n'')$ главного профильного меридиана, не взята в скобки, значит, она лежит на видимой для фронтальной проекции части поверхности и профильная проекция точки $C(C''')$ должна лежать на профильной проекции главного меридиана $n(n''')$ справа от оси вращения. Горизонтальная же проекция точки C (на рисунке не построена) по направлению взгляда на горизонтальную плоскость проекций H будет невидима, так как расположена под экватором. Соответственно профильная проекция точки $A(A''')$ будет невидимой, так как лежит на невидимой для профильной проекции части поверхности.

!!! К поверхностям вращения относятся две линейчатые поверхности с прямолинейными образующими – цилиндр и конус, а также поверхности с криволинейными образующими – сфера (образующая – окружность), эллипсоид (образующая – эллипс), одно- и двуполостные гиперболоиды (гипербола), параболоид (парабола), торовые (окружность). Все перечисленные виды поверхностей вращения, кроме торовых, являются поверхностями второго порядка (по порядку образующей или направляющей).

Торовые поверхности вращения относятся к поверхностям четвертого порядка (по произведению порядков двух окружностей – образующей и направляющей).

Геометрические тела – цилиндр конус

Цилиндрическая поверхность вращения – прямой круговой цилиндр

Цилиндрическая поверхность вращения – это линейчатая поверхность, образованная параллельным перемещением прямолинейной образующей вокруг оси вращения, которая пересекает криволинейную направляющую окружность. Геометрическое тело, ограниченное цилиндрической поверхностью вращения (боковой поверхностью) и двумя параллельными секущими плоскостями (основаниями), перпендикулярными оси вращения, называют *цилиндром*.

Цилиндр называют *круговым*, поскольку направляющей является окружность, перпендикулярная оси цилиндра.

Цилиндр называют *прямым*, если ось вращения цилиндра перпендикулярна его основаниям.

Прямой круговой цилиндр по положению относительно плоскостей проекций называют *проецирующим*, если его боковая поверхность (или ось вращения) перпендикулярна какой-либо плоскости проекций:

- *горизонтально-проецирующим*, если боковая поверхность перпендикулярна горизонтальной плоскости проекций ($\perp H$);
- *фронтально-проецирующим*, если боковая поверхность перпендикулярна фронтальной плоскости проекций ($\perp V$);
- *профильно-проецирующим*, если боковая поверхность перпендикулярна профильной плоскости проекций ($\perp W$).

Построение проекций прямого кругового цилиндра
 На рис. 7.6 показан пример построения проекций прямого кругового горизонтально-проецирующего цилиндра заданной высоты H с горизонтальными основаниями заданного радиуса R .

Для построения проекций цилиндра требуется выполнить графо-аналитические действия в следующем порядке.

1-е действие. Построить горизонтальную проекцию (очерк) цилиндра по заданному условию, которая представляет собой окружность заданного радиуса R .

2-е действие. Выполнить графический анализ построенной горизонтальной проекции цилиндра.

2.1. Окружность является горизонтальной проекцией боковой поверхности, так как образующие этого цилиндра – горизонтально-проецирующие прямые.

2.2. Круг заданного радиуса R – совпадающие горизонтальные проекции оснований цилиндра, лежащих в горизонтальных плоскостях уровня.

2.3. Обозначить вырожденные в точки проекции характерных образующих цилиндра $A(A')$, $B(B')$, $C(C')$ и $D(D')$, которые будут определять очерки фронтальной и профильной проекций цилиндра.

3-е действие. Построить фронтальную проекцию (очерк) цилиндра, которая представляет собой прямоугольник, ограниченный:

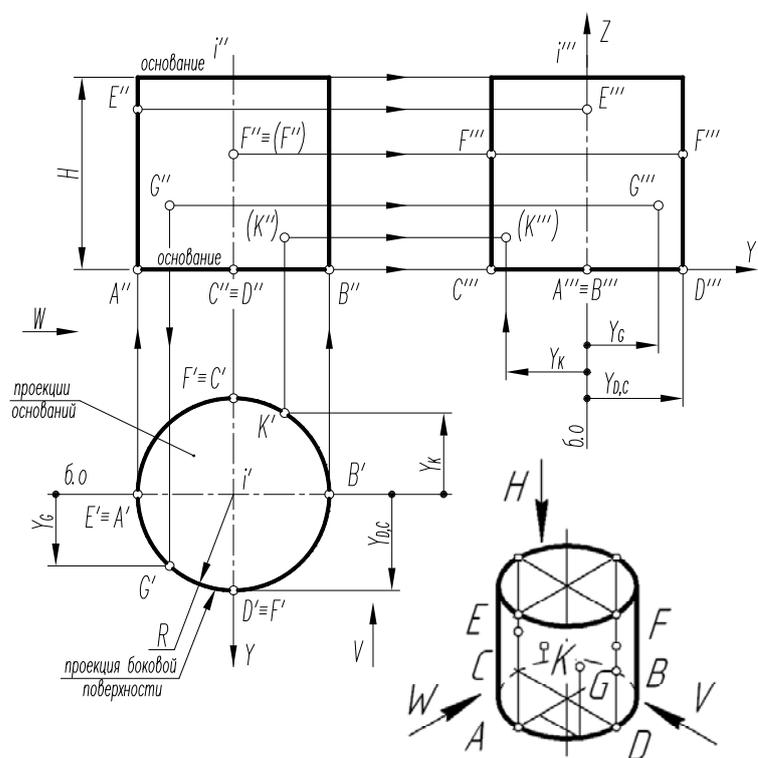


Рис. 7.6

– слева и справа вертикальными отрезками – характерными очерковыми образующими $A(A'')$ и $B(B'')$;

– по заданной высоте H – горизонтальными отрезками, которые являются проекциями оснований цилиндра, лежащих в горизонтальных плоскостях уровня;

– фронтальные проекции характерных образующих $C(C'')$ и $D(D'')$ совпадают с осью вращения цилиндра $i(i'')$.

4-е действие. Построить профильную проекцию (очерк) цилиндра.

4.1. Задать на окружности горизонтальной проекции цилиндра положение базовой линии (*б.о.*), совпадающей с горизонтальной линией оси этой окружности, то есть проходящей через ось вращения $i(i')$.

4.2. Выбрать положение базовой оси Z (*б.о.*), которая будет совпадать с вертикальной осью $i(i''')$ вращения на профильной проекции цилиндра.

4.3. Профильная проекция цилиндра представляет собой прямоугольник, ограниченный:

– слева и справа вертикальными отрезками – характерными очерковыми образующими $C(C''')$ и $D(D''')$, построенными по координате $y_D = y_C = R$;

– по заданной высоте H – горизонтальными отрезками, которые являются проекциями оснований;

– профильные проекции характерных образующих $A(A''')$ и $B(B''')$ совпадают с осью вращения цилиндра $i(i''')$.

!!! **Запомните** характерные признаки очерков прямого кругового цилиндра на чертеже – о к р у ж н о с т ь и д в а п р я м о у г о л ь н и к а .

П о с т р о е н и е п р о е к ц и й т о ч е к , л е ж а щ и х н а п о в е р х н о с т и цилиндра.

Принадлежность точки поверхности цилиндра определяется ее принадлежностью образующей этого цилиндра.

На рис. 7.6 показан пример построения горизонтальных и профильных проекций точек E, F, G и K , лежащих на образующих боковой поверхности цилиндра, по их заданным фронтальным проекциям:

Горизонтальные проекции E', F', G' и K' заданных точек лежат на окружности радиуса R , которая является проекцией его боковой поверхности.

Профильные проекции точек строятся по их принадлежности образующим цилиндра:

– точка $E(E''')$ – лежит на характерной образующей $A(A''')$ – видимая;

– две точки $F(F''')$ – лежат на характерных образующих $D(D''')$ и $C(C''')$;

– точка $G(G''')$ – построена по координате y_G , так как лежит не на характерной образующей (видимая);

– точка $K(K''')$ – построена по координате y_K (невидимая).

Ц и л и н д р и ч е с к и е с е ч е н и я :

1. Плоскость пересекает поверхность цилиндра по *образующим*, если она расположена параллельно оси вращения цилиндра (см. плоскость α на рис. 7.7).

2. Плоскость пересекает поверхность цилиндра по эллипсу, если она расположена к оси вращения цилиндра под углом φ , отличным от прямого (см. плоскость $\beta(\beta_v)$ на рис. 7.7).

3. Плоскость пересекает поверхность цилиндра по окружности, если она перпендикулярна оси вращения цилиндра (окружности оснований).

Построение проекций цилиндра со срезами плоскостями частного положения.

На рис. 7.7 показан пример построения проекций прямого кругового горизонтально-проецирующего цилиндра со срезами профильной плоскостью α и фронтально-проецирующей плоскостью β .

Для построения проекций цилиндра со срезами следует выполнить предлагаемый графический алгоритм, определяющий порядок действий при решении всех подобных задач:

1-е действие. Построить на чертеже тонкими линиями по заданному диаметру и заданной высоте горизонтальную, фронтальную и профильную проекции прямого кругового горизонтально-проецирующего цилиндра без срезов, а затем выполнить на ее фронтальной проекции заданные по условию срезы профильной плоскостью $\alpha(\alpha_v)$ и фронтально-проецирующей плоскостью $\beta(\beta_v)$.

2-е действие. Обозначить на фронтальной проекции характерные точки пересечения плоскостей срезов с образующими и основаниями цилиндра и выполнить графический анализ сечений.

2.1. Профильная плоскость $\alpha(\alpha_v)$, проекцией которой является вертикальный отрезок, расположена параллельно оси цилиндра и пересекает его поверхность по прямоугольнику $1-2-2'-1'(1''-2''-2''-1'')$:

– точки $1(1'')$ – лежат на нижнем основании цилиндра и определяют вырожденную в точку проекцию фронтально-проецирующей линии пересечения плоскости среза α с основанием цилиндра;

– точки $2(2'')$ – определяют вырожденную в точку проекцию фронтально-проецирующей линии пересечения плоскостей среза α и β .

2.2. Фронтально-проецирующая плоскость $\beta(\beta_v)$, проекцией которой является наклонный отрезок, расположена к оси цилиндра под углом, от-

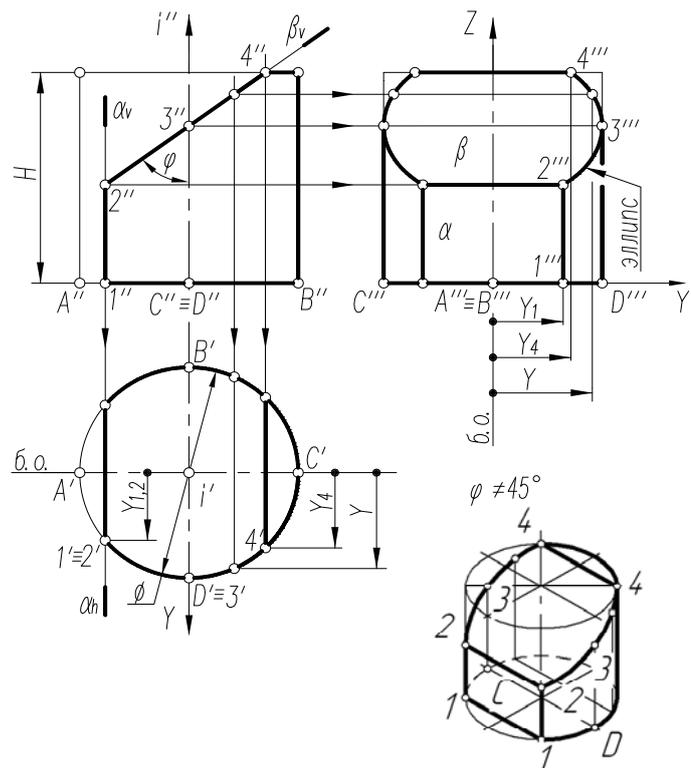


Рис. 7.7

личным от прямого, и пересекает его поверхность по неполному эллипсу $2-3-4(2''-3''-4'')$:

- точки $3(3'')$ – лежат на характерных образующих $D(D'')$ и $C(C'')$;
- точки $4(4'')$ – лежат на верхнем основании и определяют вырожденную в точку проекцию фронтально-проецирующей линии пересечения плоскости среза β с верхним основанием цилиндра.

3-е действие. Достроить горизонтальную проекцию цилиндра со срезами, построив проекции плоскостей срезов по горизонтальным проекциям обозначенных точек, и определить видимость плоскостей срезов.

3.1. Плоскость среза α определяет видимый отрезок $2'-2'$ вырожденной в линию проекции профильной плоскости β , обозначенные точки которой лежат на окружности боковой поверхности цилиндра.

3.2. Плоскость среза β определяет искаженный по величине неполный видимый эллипс $2-3-4(2'-3'-4')$, обозначенные точки которого совпадают с окружностью боковой поверхности цилиндра.

!!! Поскольку горизонтальная проекция имеет вертикальную симметрию относительно базовой оси (б.о.), точки обозначены на одной ее половине (нижней).

4-е действие. Выполнить графический анализ построенной горизонтальной проекции для определения ее очерка и внутреннего контура.

4.1. Горизонтальный очерк определяет часть окружности основания и отрезок $2'-2'$.

4.2. Внутренний контур определяется видимым отрезком $4'-4'$.

5-е действие. Достроить профильную проекцию цилиндра со срезами, построив проекции плоскостей срезов по профильным проекциям обозначенных точек, и определить видимость плоскостей срезов.

5.1. Плоскость среза α определяет:

- видимая натуральная проекция прямоугольника $1'''-2'''-2'''-1'''$;
- образующие $1-2(1'''-2''')$ – построены по координате $y_1=y_2$;
- отрезок $1-1(1'''-2''')$ – совпадает с проекцией нижнего основания цилиндра;
- отрезок $2-2(2'''-2''')$ – профильная проекция линии пересечения плоскостей срезов α и β .

5.2. Плоскость среза β определяет искаженная по величине видимая проекция неполного эллипса $2'''-3'''-4'''$, ограниченная видимыми линиями пересечения плоскостей среза $2'''-2'''$ (построена) и линией $4'''-4'''$ пересечения плоскости среза β с верхним основанием цилиндра:

- точки $2(2''')$ – построены;
- точки $3(3''')$ – лежат на характерных образующих $C(C''')$ и $D(D''')$;
- точки $4(4''')$ – построены по координате y_4 ;
- необозначенные промежуточные точки построены по координате y .

6-е действие. Выполнить графический анализ построенной профильной проекции цилиндра для определения ее очерка и внутреннего контура.

6.1. Профильный очерк определяют:
 – слева и справа – участки $C'''-3'''$ и $D'''-3'''$ очерковых образующих C и D и участки $3'''-4'''$ эллипса;
 – снизу – проекция нижнего основания цилиндра;
 – сверху – отрезок $4'''-4'''$ – профильная проекция линии пересечения верхнего основания с плоскостью среза β .

6.2. Внутренний контур определяют:
 – видимые участки эллипса $2'''-3'''$;
 – отрезок $2'''-2'''$ – видимая линия пересечения плоскостей среза α и β ;
 – видимые участки $1'''-2'''$ образующих, по которым плоскость среза α пересекает поверхность цилиндра.

7-е действие. Оформить чертеж цилиндра, выполнив сплошными толстыми линиями очерки и видимые линии внутреннего контура всех проекций цилиндра (оставить сплошными тонкими линиями полные очерки проекций и линии построения).

На рис. 7.8 показан частный случай сечения цилиндра фронтально-проецирующей плоскостью δ (δ_v), расположенной к его оси под углом $\varphi = 45^\circ$. В этом случае на профильную проекцию цилиндра эллипс, полученный в сечении, проецируется в виде окружности!

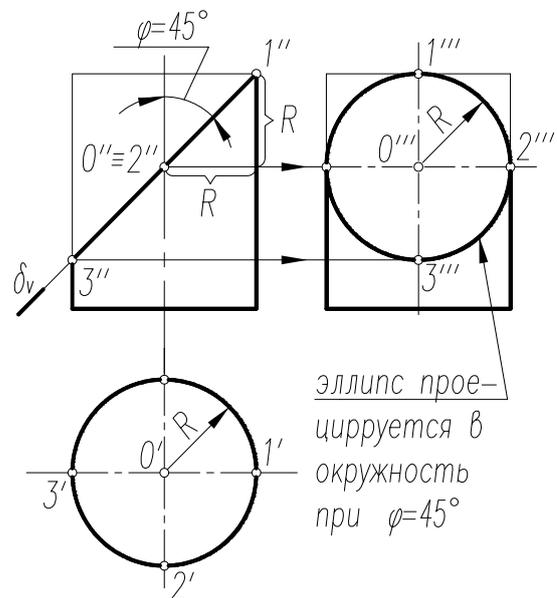


Рис. 7.8

Коническая поверхность вращения – прямой круговой конус

Коническая поверхность вращения – это линейчатая поверхность, образованная вращением прямолинейной образующей, которая пересекает криволинейную направляющую (окружность) и проходит через неподвижную точку оси вращения, называемую вершиной.

Конусом называют геометрическое тело, ограниченное конической поверхностью и плоскостью основания, пересекающего все его образующие.

Конус называют *прямым*, если ось вращения перпендикулярна его основанию. Конус называют *круговым*, так как направляющей является окружность. Конус с двумя параллельными основаниями, то есть конус со срезанной вершиной, называют *усеченным*.

Построение проекций прямого кругового конуса

На рис. 7.9 показан пример построения проекций прямого кругового конуса с горизонтально-проецирующей осью вращения i , заданной высотой H и основанием радиусом R .

Для построения проекций конуса требуется выполнить графо-аналитические действия в следующем порядке:

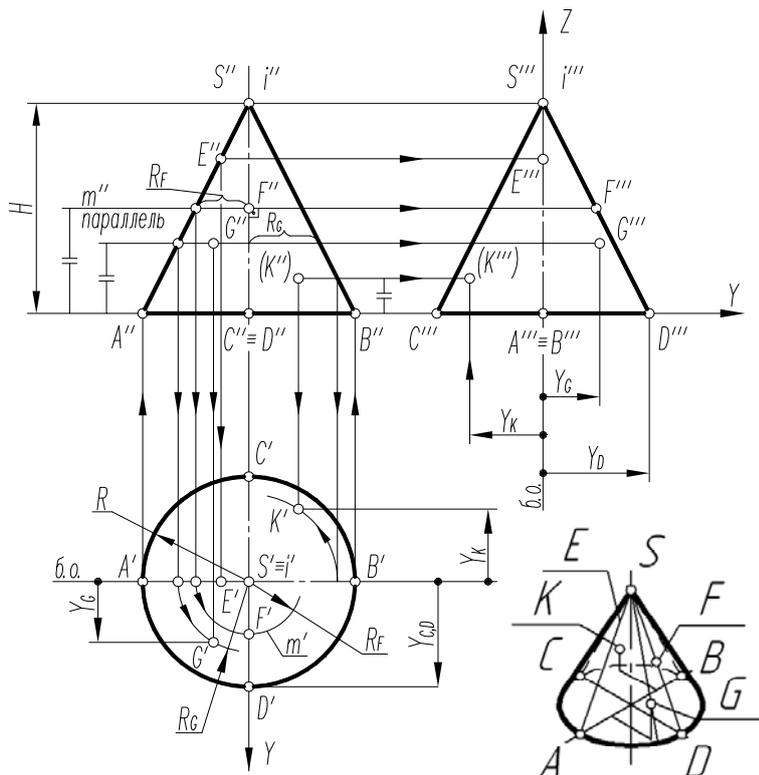


Рис. 7.9

1-е действие. Построить горизонтальную проекцию очерка прямого кругового конуса по заданному условию, которая представляет собой окружность заданного радиуса R с вершиной $S(S')$, совпадающей с осью вращения $i(i')$.

2-е действие. Выполнить графический анализ построенной горизонтальной проекции конуса.

2.1. Круг радиуса R является невидимой проекцией основания конуса.

2.2. Круг радиуса R с вершиной конуса $S(S')$ является видимой проекцией боковой поверхности конуса.

2.3. Обозначить на горизонтальной проекции характерные образующие конуса $SA(S'A')$, $SB(S'B')$, $SC(S'C')$ и $SD(S'D')$, которые будут определять очерки фронтальной и профильной проекций конуса.

3-е действие. Построить фронтальную проекцию (очерк) конуса, которая представляет собой треугольник $SAB(S''A''B'')$ заданной высоты H , ограниченный:

– слева и справа проекциями боковых очерковых образующих $S''A''$ и $S''B''$;

– горизонтальным отрезком $AB(A''B'')$, который является проекцией основания конуса;

Фронтальные проекции характерных образующих $SC(S''C'')$ и $SD(S''D'')$ совпадают с осью конуса $i(i'')$.

4-е действие. Построить профильную проекцию (очерк) конуса:

4.1. Задать на окружности горизонтальной проекции конуса положение базовой линии (б.о.), совпадающей с горизонтальной линией оси этой окружности.

4.2. Выбрать положение базовой оси Z (б.о.), которая будет совпадать с вертикальной осью $i(i''')$ вращения на профильной проекции конуса.

4.3. Профильная проекция конуса представляет собой треугольник $SCD(S'''C'''D''')$, ограниченный:

- слева и справа очерковыми образующими $S'''C'''$ и $S'''D'''$, построенными по координате $Y_C=Y_D=R$;
- вершиной S''' , лежащей на базовой оси Z ;
- горизонтальным отрезком – проекцией основания;
- профильные проекции характерных образующих $SA(S'''A''')$ и $SB(S'''B''')$ совпадают с осью вращения конуса $i(i''')$.

!!! **Запомните** характерные признаки очерков прямого кругового конуса на чертеже – окружность основания и два треугольника.

!!! **Характерные признаки** очерков прямого кругового усеченного конуса – окружность основания и две равнобокие трапеции.

Построение проекций точек, лежащих на поверхности конуса

Принадлежность точки поверхности конуса определяется ее принадлежностью образующей поверхности и принадлежностью круговым параллелям (окружностям), по которой точка вращается вокруг оси конуса. Следовательно, проекции точки можно строить либо по принадлежности образующей, либо по принадлежности круговой параллели.

На рис. 7.9 показан пример построения горизонтальных и профильных проекций точек E, F, G и K , заданных фронтальными проекциям E'', F'', G'' и K'' по их принадлежности круговым параллелям.

1. Построение горизонтальных проекций заданных точек:

- горизонтальная проекция E' характерной точки E , лежащей на характерной образующей конуса SA , определяется на горизонтальной проекции $S'A'$ этой образующей;

- горизонтальные проекции точек F, G и K построены на вспомогательных круговых параллелях, проведенных через заданные фронтальные проекции точек.

Рассмотрим графический алгоритм для построения горизонтальных проекций точек, лежащих на боковой поверхности конуса (на примере заданной точки $F(F'')$), по их принадлежности круговым параллелям.

Графический алгоритм I:

1-е действие. Провести фронтальную проекцию вспомогательной круговой параллели $m(m'')$ через заданную фронтальную проекцию точки $F(F'')$: проекция параллели – это прямая, перпендикулярная оси конуса и параллельная его основанию.

2-е действие. Провести окружность горизонтальной проекции параллели $m(m')$ полученным радиусом R_F .

3-е действие. Построить по вертикальной линии связи горизонтальную проекцию точки $F(F')$ на горизонтальной проекции параллели $m(m')$.

Повторить действия графического алгоритма I и построить аналогично горизонтальные проекции G' и K' точек G и K .

Построение профильных проекций заданных точек. Точки $E(E''')$ и $F(F''')$ построены по принадлежности характерным образующим:

- точка $E(E''')$ – лежит на видимой характерной образующей $SA(S''A'')$, совпадающей с осью конуса;
- точка $F(F''')$ – лежит на характерной образующей $SD(S''D'')$;
- точки $G(G''')$ и $K(K''')$ – построены по координатам y :
- точка $G(G''')$ – по координате y_G (видимая);
- точка $K(K''')$ – по координате y_K (невидимая).

На рис. 7.10 показан пример построения горизонтальной и профильной проекции точки $P(P'-?, P'''-?)$ по ее принадлежности образующей $a(a'', a''')$.

Построение горизонтальной проекции точки $P(P')$ по принадлежности образующей выполняется по графическому алгоритму II:

1-е действие. Провести через вершину конуса $S(S'')$ и заданную невидимую фронтальную проекцию точки $P(P'')$ вспомогательную образующую $a(a'')$.

2-е действие. Построить горизонтальную проекцию образующей $a(a')$, проходящей через вершину конуса $S(S')$ и вспомогательную точку $1(1')$, лежащую на основании конуса.

3-е действие. Построить по вертикальной линии связи горизонтальную проекцию точки $P(P')$ по ее принадлежности образующей $a(a')$.

Построение профильной проекции невидимой точки $P(P''')$ выполняется по принадлежности образующей $a(a''')$, построенной по координате y_a .

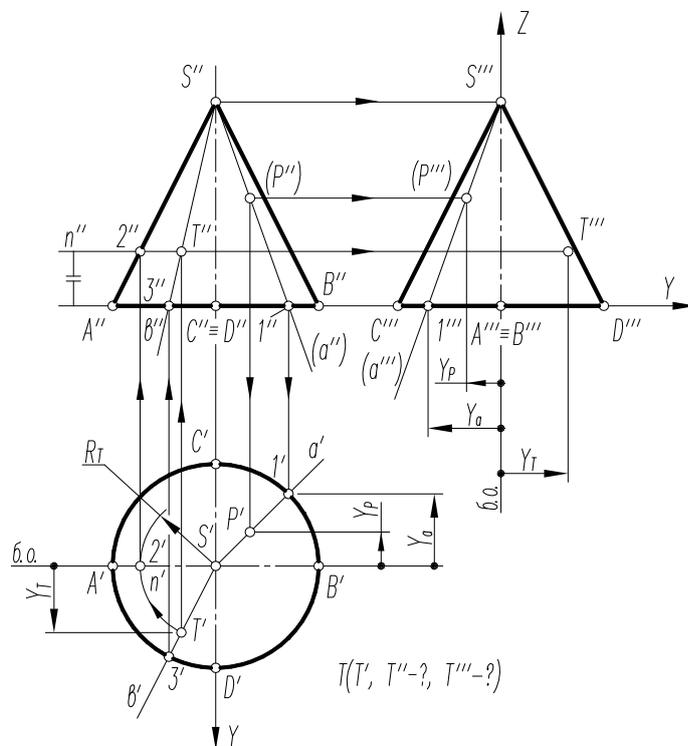


Рис. 7.10

На этом же рисунке 7.10 показано построение фронтальной и профильной проекции точки $T(T', T''-?, T'''-?)$ по ее заданной горизонтальной проекции. Построение выполнено по приведенным алгоритмам I и II, но в обратном порядке:

1-е действие. Провести на горизонтальной проекции конуса радиусом R_T окружность вспомогательной параллели $n(n')$ или вспомогательную образующую $b(b')$, на которых лежит горизонтальная проекция точки $T(T')$.

2-е действие. Построить фронтальные проекции вспомогательной параллели $n(n'')$ или вспомогательной образующей $b(b'')$:

- параллель $n(n'')$ провести через вспомогательную точку $2(2'')$ на образующей $SA(S''A'')$ параллельно основанию конуса;
- образующую $b(b'')$ провести через вспомогательную точку $3(3'')$ на основании конуса и вершину конуса $S(S'')$.

3-е действие. Построить по вертикальной линии связи фронтальную проекцию точки $T(T'')$ по ее принадлежности либо параллели $n(n'')$, либо образующей $b(b'')$.

Конические сечения

Рассмотрим пять возможных случаев расположения секущей плоскости относительно оси конуса и его образующих, определяющих форму линии ее пересечения с поверхностью конуса (математические доказательства не приводятся).

1-й случай. Если секущая плоскость проходит через вершину конуса, то эта плоскость пересекает коническую поверхность по двум образующим $S3$ (фронтально-проецирующая плоскость $\alpha(\alpha_V)$, рис. 7.11).

2-й случай. Если секущая плоскость расположена перпендикулярно оси конуса, то эта плоскость пересекает коническую поверхность по окружности (горизонтальная плоскость $\beta(\beta_V)$, рис. 7.11).

3-й случай. Если секущая плоскость расположена параллельно одной образующей конуса, то эта плоскость пересекает коническую поверхность по параболе (фронтально-проецирующая плоскость $\gamma(\gamma_V)$ параллельна одной образующей SA , рис. 7.12).

4-й случай. Если секущая плоскость расположена параллельно двум образующим конуса, то эта плоскость пересекает коническую поверхность по гиперболе (фронтальная плоскость $\delta(\delta_V)$ параллельна двум образующим SA и SB , рис. 7.13).

5-й случай. Если плоскость пересекает все образующие конуса под углом, отличным от прямого (или иначе не параллельна ни одной образующей конуса), то эта плоскость пересекает коническую поверхность по эллипсу (фронтально-проецирующая плоскость $\epsilon(\epsilon_V)$, рис. 7.14).

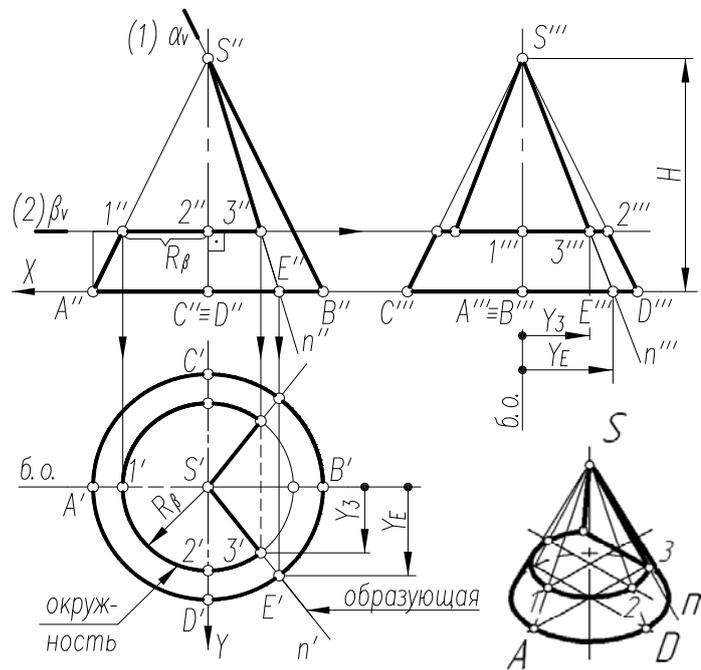


Рис. 7.11

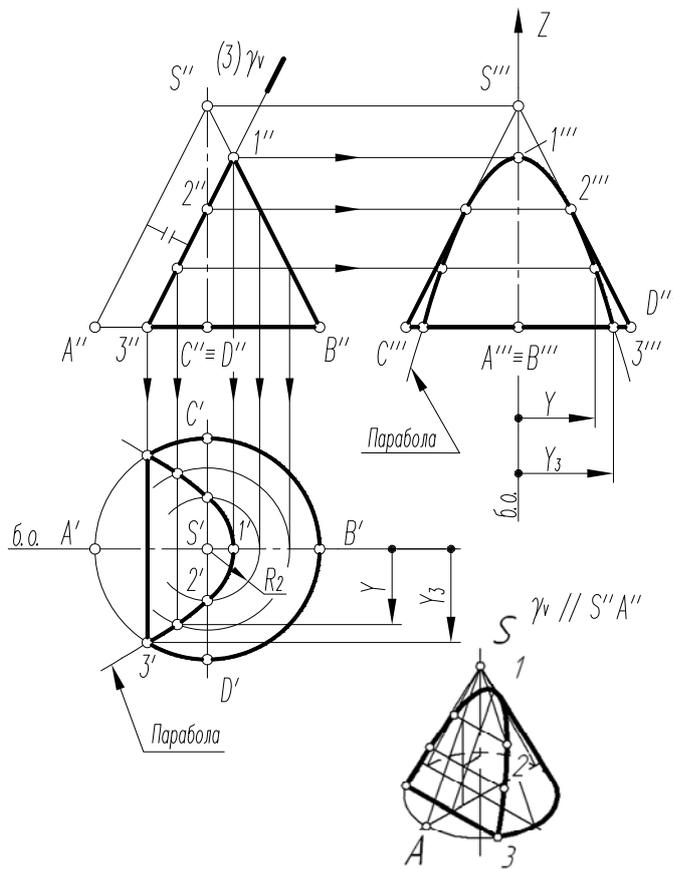


Рис. 7.12

Плоскость β пересекает поверхность конуса по окружности радиуса R_β , ограниченной линией 3-3 пересечения плоскостей выреза.

Построение горизонтальной и профильной проекций конуса с вырезом и оформление очерков этих проекций видно из чертежа.

3-й случай. На рис. 7.12 показано построение проекций конуса со срезом фронтально-проецирующей плоскостью $\gamma(\gamma_v)$, расположенной параллельно одной образующей конуса SA .

Плоскость γ пересекает поверхность конуса по *параболе*, горизонтальная и профильная проекции которой строятся по отмеченным характерным точкам 1, 2 и 3 и промежуточной точке (не обозначена).

Построение проекций этих точек выполнено по их принадлежности:

- точка 1(1', 1'') – лежит на проекциях характерной образующей $SB(S'B', S''B'')$;

- точки 2(2', 2'') – лежат на проекциях характерных образующих SD и SC , горизонтальные проекции которых построены с помощью параллели радиусом R_2 (алгоритм I);

- точки 3(3', 3'') – лежат на окружности основания конуса: горизонтальные проекции этих точек определяются по линии связи на горизонтальной проекции окружности основания, а их профильные проекции построены по координате Y_3 ;

- проекции промежуточной точки построены по ее принадлежности соответствующей параллели (профильные проекции – по координате Y).

Рассмотрим построение на проекциях конуса линий пересечения для всех пяти случаев сечений.

1-й и 2-й случаи. На рис. 7.11 показано построение проекций прямого кругового конуса с вырезом, образованным сечениями конической поверхности фронтально-проецирующей плоскостью $\alpha(\alpha_v)$, проходящей через вершину конуса (*1-й случай*), и горизонтальной плоскостью $\beta(\beta_v)$, расположенной перпендикулярно оси конуса (*2-й случай*).

Плоскость α пересекает поверхность конуса по образующим SE , горизонтальные и профильные проекции которых строятся с помощью вспомогательной точки E , лежащей на основании конуса.

Оформление очерков проекций видно из чертежа.

4-й случай. На рис. 7.13 показано построение проекций конуса со срезом фронтальной плоскостью $\delta(\delta_H)$, расположенной параллельно двум образующим конуса SA и SB .

Плоскость δ пересекает поверхность конуса по гиперболе, фронтальная проекция которой строится по отмеченным точкам 1, 2 и 3 по их принадлежности параллелям (обратный алгоритм I), а профильная проекция гиперболы проецируется в вертикальную линию и совпадает с вырожденной проекцией плоскости среза $\delta(\delta_W)$.

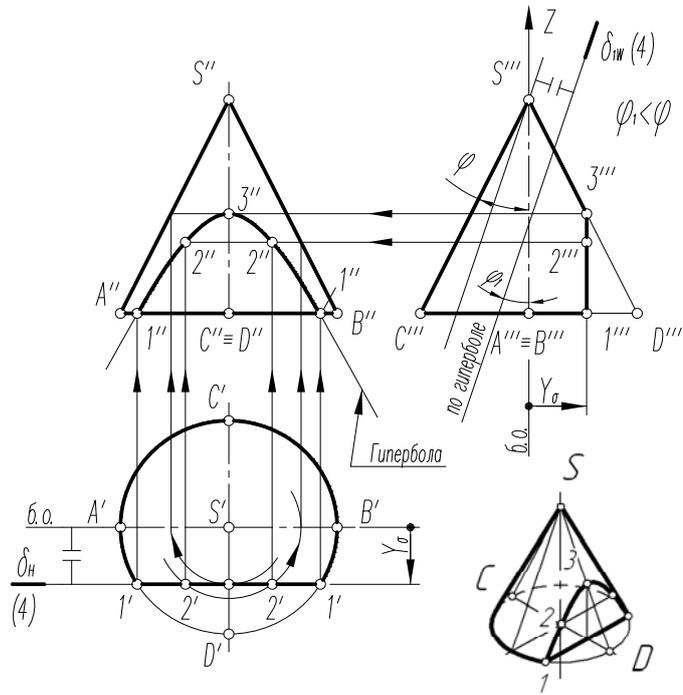


Рис 7.13

Оформление очерков проекций видно из чертежа.

На рис. 7.13 на профильной проекции конуса показано положение секущей плоскости $\delta_1(\delta_{1W})$ под углом φ_1 к оси конуса. При $\varphi_1 < \varphi$ плоскость пересекает поверхность конуса также по гиперболе.

5-й случай. На рис. 7.14 показано построение проекций конуса со срезом фронтально-проецирующей плоскостью $\varepsilon(\varepsilon_V)$, пересекающей все образующие конуса под углом φ к оси, отличным от прямого.

Плоскость ε пересекает поверхность конуса по эллипсу, горизонтальная и профильная проекции которого построены по проекциям отмеченных характерных точек 1, 2, 4 и промежуточных точек 3, взятых на середине отрезка 1-4, который является совпадающей проекцией эллипса и его большой оси. Точки 3 определяют проекции малой оси эллипса и построены на горизонтальной проекции конуса по радиусу параллели, а на профильной проекции по координате Y_3 (алгоритм I).

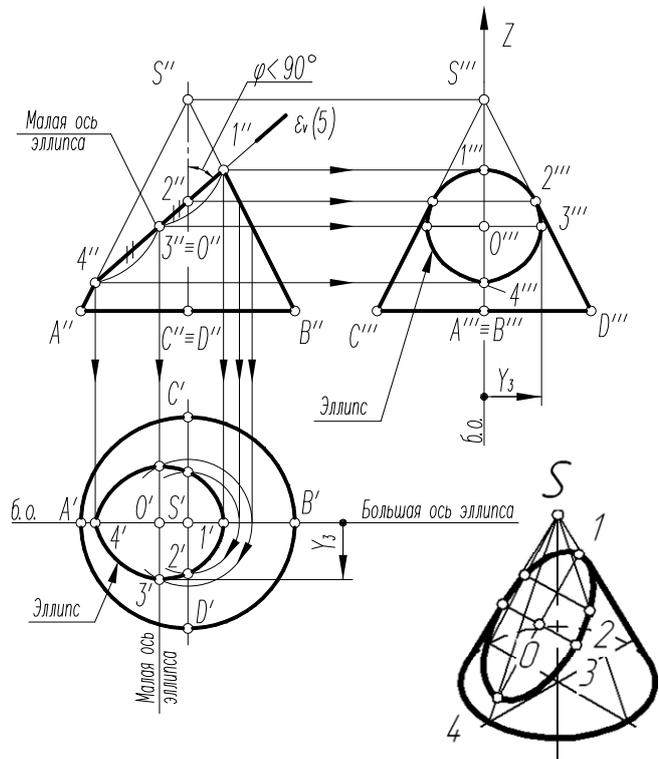


Рис. 7.14

Оформление очерков проекций видно из чертежа.

!!! Количество взятых промежуточных точек должно быть минимальным, но достаточным, чтобы построить на проекциях конуса формы кривых второго порядка (параболы, гиперболы и эллипса), которые выполняются на чертеже по построенным характерным и промежуточным точкам с помощью лекала.

Построение проекций прямого конуса со срезами плоскостями частного положения

На рис. 7.15 показан пример построения проекций прямого кругового конуса со срезами фронтально-проецирующей плоскостью α и профильной плоскостью β .

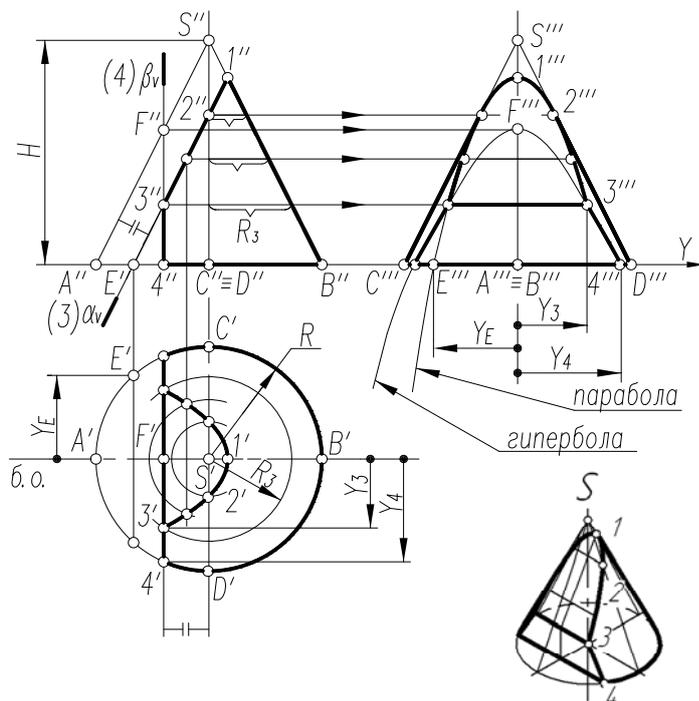


Рис. 7.15

Для построения проекций конуса со срезами следует выполнить графический алгоритм, определяющий порядок действий при решении всех подобных задач.

Графический алгоритм:

1-е действие. Построить на чертеже тонкими линиями по заданному радиусу основания R и высоте H фронтальную, горизонтальную и профильную проекции конуса без срезов, а затем выполнить на его фронтальной проекции заданные срезы фронтально-проецирующей плоскостью $\alpha(\alpha_V)$ и профильной плоскостью $\beta(\beta_V)$.

2-е действие. Обозначить на фронтальной проекции характерные точки пересечения плоскостей срезов с образующими и основанием конуса и выполнить графический анализ сечений.

2.1. Фронтально-проецирующая плоскость $\alpha(\alpha_V)$ параллельна одной образующей конуса $SA(S''A'')$ и пересекает его поверхность по участку параболы $1-2-3(1''-2''-3'')$, которая проецируется в отрезок и ограничена вырожденной в точку фронтально-проецирующей линией пересечения $3-3(3'-3'')$ плоскостей срезов α и β .

2.2. Профильная плоскость $\beta(\beta_V)$ параллельна двум образующим конуса $SC(S''C'')$ и $SD(S''D'')$ и пересекает его поверхность по участку гиперболы $3-4(3''-4'')$, которая проецируется в отрезок и ограничена вырожденными в точки фронтально-проецирующими линиями пересечения плоскостей срезов α и $\beta(3-3)$ и плоскости β с основанием конуса $(4-4)$.

3-е действие. Достроить горизонтальную проекцию конуса со срезом, построив проекции плоскостей срезов по горизонтальным проекциям обозначенных точек и определить видимость плоскостей срезов:

3.1. Плоскость среза α определяет видимая горизонтальная проекция участка параболы $1-2-3(1'-2'-3')$, построенной по горизонтальным проекциям обозначенных точек:

– точка $1(1')$ лежит на образующей $SB(S'B')$;

– точки $2(2')$ и $3(3')$ построены по принадлежности соответствующим параллелям (алгоритм I).

3.2. Плоскость среза β определяет вертикальный видимый отрезок $4'-4'$ вырожденной в линию проекции профильной плоскости, точки $4(4')$ которой лежат на очерковой окружности основания конуса.

!!! Поскольку горизонтальная проекция имеет вертикальную симметрию, точки обозначены на одной ее половине (нижней).

4-е действие. Выполнить графический анализ построенной горизонтальной проекции конуса для определения ее очерка и внутреннего контура.

4.1. Горизонтальный очерк определяют участок окружности и отрезок $4'-4'$.

4.2. Внутренний контур определяет видимый участок параболы $3'-2'-1'$.

5-е действие. Достроить профильную проекцию конуса со срезами, построив проекции плоскостей срезов по профильным проекциям обозначенных точек, и определить видимость плоскостей срезов.

5.1. Плоскость среза α определяет видимый участок параболы $1-2-3(1'''-2'''-3''')$, построенный по профильным проекциям обозначенных точек:

– точка $1(1''')$ – лежит на характерной образующей $SB(S'''B''')$;

– точки $2(2''')$ – лежат соответственно на характерных образующих $SC(S'''C''')$ и $SD(S'''D''')$;

– точки $3(3''')$ – построены по координате y_3 .

5.2. Плоскость среза β определяют видимые участки гиперболы $3-4(3'''-4''')$, ограниченные видимым отрезком $3'''-3'''$ (построен) и видимым отрезком $4-4(4'''-4''')$, точки которого построены по координате y_4 .

6-е действие. Выполнить графический анализ построенной профильной проекции конуса для определения ее очерка и внутреннего контура.

6.1. Профильный очерк определяют:

– слева – участок $C'''-2'''$ образующей SC ;

– справа – участок $D'''-2'''$ образующей SD ;

– сверху – участок параболы $1'''-3'''$;

– снизу – проекция основания конуса.

6.2. Внутренний контур определяют:

– видимые участки параболы $2'''-3'''$;

– видимый отрезок $3'''-3'''$ пересечения плоскостей срезов α и β ;

– видимые участки гиперболы $3'''-4'''$.

7-е действие. Оформить чертеж конуса выполнив толстыми сплошными линиями очерка и видимый внутренний контур каждой его проекции

(оставить сплошными тонкими линиями полные очерки проекций и линии построения).

Сферическая поверхность – шар

При вращении окружности вокруг ее диаметра образуется поверхность вращения, называемая сферой. Сферическая поверхность – геометрическое место точек, равноудаленных от ее центра. Сфера – единственная геометрическая поверхность, которая имеет бесконечное число осей, проходящих через ее центр, что удобно использовать при построении проекций точек на ее поверхности и при решении различных позиционных задач с геометрическими формами, в образование которых входит сфера.

Геометрическое тело, ограниченное сферой, называют *шаром*.

Проекция шара и проекция его очерковых окружностей

Все три очерка шара – фронтальный, горизонтальный и профильный – представляют собой окружности одного диаметра с центром в точке $O(O', O'', O''')$ – это характерный признак проекций шара на чертеже (рис. 7.16).

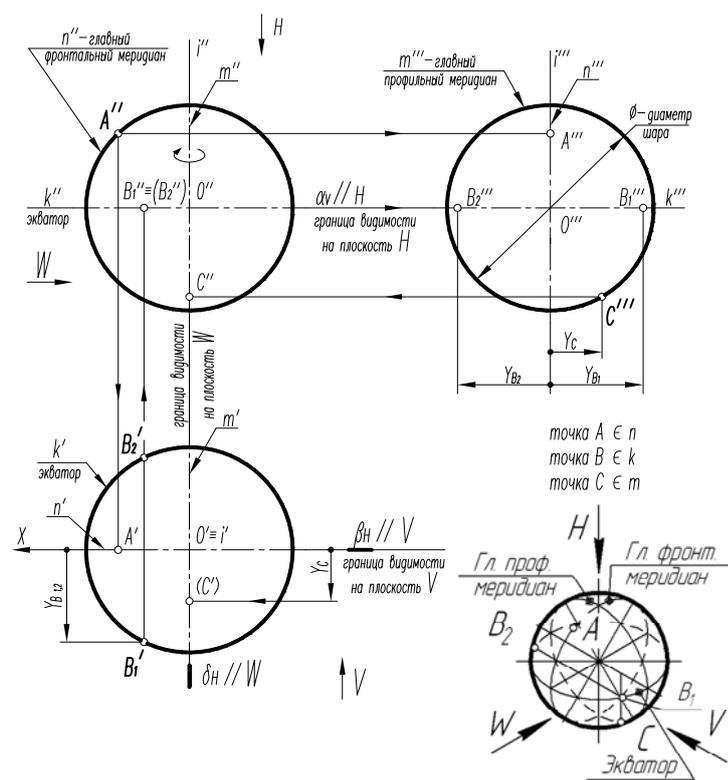


Рис. 7.16

Каждая точка на поверхности шара описывает вокруг соответствующей оси окружности, называемые параллелями.

Фронтальный очерк шара – окружность $n(n'')$ – называется *главным фронтальным меридианом*, который лежит во фронтальной плоскости уровня $\beta(\beta_H)$, и его горизонтальная проекция n' – это горизонтальная прямая, а профильная проекция n''' – вертикальная прямая, проходящие через центр шара.

Горизонтальный очерк шара – это окружность $k(k')$, то есть *экватор шара*, лежащий в горизонтальной плоскости уровня $\alpha(\alpha_V)$, и

его фронтальная k'' и профильная k''' проекции – горизонтальные прямые, проходящие через центр шара.

Профильный очерк шара – это окружность $m(m''')$ главного профильного меридиана, лежащего в профильной плоскости $\delta(\delta_H)$, и его фронтальная m'' и горизонтальная m' проекции – вертикальные прямые, проходящие через центр шара.

!!! **Запомните** характерные признаки шара на чертеже – три очерковые окружности одного диаметра.

Построение проекций точек на поверхности шара
 На рис. 7.16 показаны примеры построения проекций точек, лежащих на характерных очерковых окружностях шара.

Точка $A(A'')$, заданная своей фронтальной проекцией, лежит на главном фронтальном меридиане $n(n'')$; ее горизонтальная проекция A' и профильная проекция A''' определяются на соответствующих проекциях этого меридиана по линиям связи.

Точки $B_1(B_1')$ и $B_2(B_2')$, заданные своими горизонтальными проекциями, лежат на экваторе шара $k(k')$; фронтальные проекции точек совпадают и определяются на фронтальной проекции экватора $k(k'')$ по линии связи (B_2'' – невидимая), а профильные проекции B_1''' и B_2''' построены по координатам $y_{B_1} = y_{B_2}$ и лежат на профильной проекции $k(k''')$ экватора.

Точка $C(C''')$, заданная своей профильной проекцией, лежит на главном профильном меридиане $m(m''')$; ее фронтальная проекция $C(C'')$ определяется по линии связи на фронтальной проекции $m(m'')$ профильного меридиана, а горизонтальная невидимая проекция $C(C')$ построена по координате y_C и лежит на горизонтальной проекции профильного меридиана $m(m')$.

!!! Видимость проекций точки на проекциях шара определяется видимостью той части поверхности шара, на которой лежит точка, и определяется указанными границами видимости при взгляде на каждую плоскость проекций.

На рис. 7.17 показаны примеры построения проекций точек D и E , лежащих на поверхности шара, недостающие проекции которых построены с использованием различных осей вращения (без координат y).

Точка D задана видимой фронтальной проекцией D'' .

Для построения ее горизонтальной проекции $D(D')$ нужно использовать горизонтально-проецирующую ось вращения i_1 и выполнить следующие графические действия (алгоритм I):

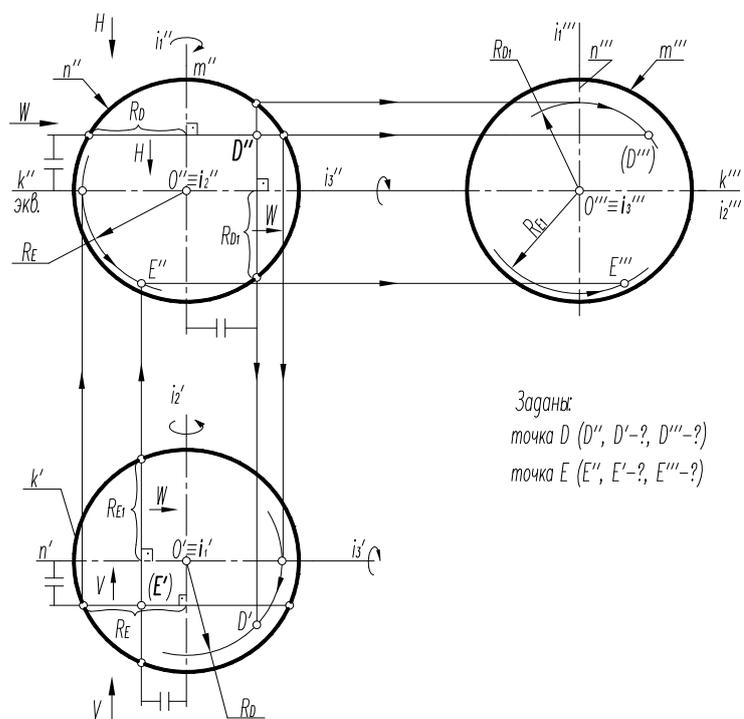


Рис. 7.17

1-е действие. Провести через фронтальную проекцию точки $D(D'')$ прямую, перпендикулярную оси $i(i''')$ – это проекция круговой параллели радиусом R_D , по которой точка D вращается вокруг оси i_1 .

2-е действие. Провести горизонтальную проекцию этой параллели: окружность радиусом R_D с центром в точке $O(O')$.

3-е действие. Построить по линии связи горизонтальную (видимую) проекцию точки $D(D')$ на этой параллели.

Точка E задана невидимой горизонтальной проекцией E' .

Для построения ее фронтальной проекции $E(E'')$ нужно использовать фронтально-проецирующую ось i_2 и выполнить следующие графические действия (алгоритм II):

1-е действие. Провести через горизонтальную проекцию точки $E(E')$ прямую, перпендикулярную оси $i_2(i_2')$ – это проекция круговой параллели радиусом R_E , по которой точка E вращается вокруг оси i_2 .

2-е действие. Провести фронтальную проекцию этой параллели: окружность радиусом R_E с центром в точке $O(O'')$.

3-е действие. Построить по вертикальной линии связи фронтальную видимую проекцию точки $E(E'')$ на этой параллели.

Для построения профильных проекций заданных точек D и E нужно использовать профильно-проецирующую ось i_3 и выполнить следующие графические действия (алгоритм III):

1-е действие. Провести через фронтальную проекцию точки $D(D'')$ и горизонтальную проекцию точки $E(E')$ прямые, перпендикулярные оси $i_3(i_3'', i_3')$, – это проекции круговых параллелей с радиусами R_{D1} и R_{E1} (расположены вертикально), по которым точки D и E вращаются вокруг оси i_3 .

2-е действие. Провести профильные проекции этих параллелей: окружности радиусами R_{D1} и R_{E1} с центром в точке $O(O''')$.

3-е действие. Построить по горизонтальным линиям связи профильные проекции точек $D(D''')$ и $E(E''')$ на соответствующих параллелях (профильная проекция точки $D(D''')$ невидимая).

Построение проекций шара со срезами плоскостями частного положения

Всякая плоскость пересекает поверхность шара по *окружностям* (круговым параллелям). В зависимости от расположения секущих плоскостей относительно плоскостей проекций H , V и W окружности сечений могут проецироваться либо в окружности, либо в эллипсы.

На рис. 7.18 показан пример построения проекций шара со срезами горизонтальной плоскостью $\alpha(\alpha_V)$ и профильной плоскостью $\beta(\beta_V)$.

Окружность сечения шара горизонтальной плоскостью $\alpha(\alpha_V)$ проецируется в окружность (круговую параллель) радиусом R_α на горизонтальную проекцию шара, а профильная проекция этой окружности – горизонтальная прямая. В качестве оси вращения для построения горизонтальной проекции окружности сечения взята горизонтально-проецирующая ось i_1 .

Окружность сечения шара профильной плоскостью β проецируется в окружность (круговую параллель) радиусом R_β на профильную проекцию шара (невидимая окружность), а горизонтальная проекция этой окружности – вертикальная прямая. В качестве оси вращения для построения параллели R_β взята профильно-проецирующая ось i_3 .

На этом же рисунке показано расположение проекции характерных точек 1, 2, 3, 4, 5 и 6, лежащих в плоскостях сечений на характерных очерковых окружностях шара:

- точки 1, 3, 4 и 6 лежат на главном фронтальном меридиане шара n и их проекции определяются на проекциях этого меридиана;
- точки 5 лежат на экваторе шара k и их проекции определяются на проекциях экватора;
- точки 2 лежат на профильном меридиане m и их проекции определяются на проекциях этого меридиана.

Оформление очерков проекций ясно из чертежа.

На рис. 7.19 показан пример построения проекций шара со срезом фронтально-проецирующей плоскостью γ (γ_v). Фронтальная проекция окружности сечения шара плоскостью γ совпадает с вырожденной в линию фронтальной проекцией плоскости γ , а на горизонтальную и профильную проекции шара эта окружность сечения проецируется в эллипсы.

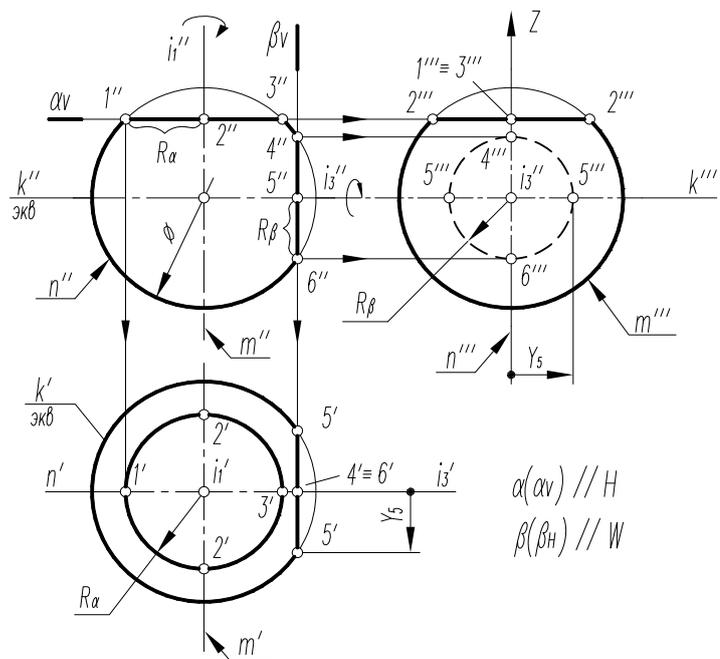


Рис. 7.18

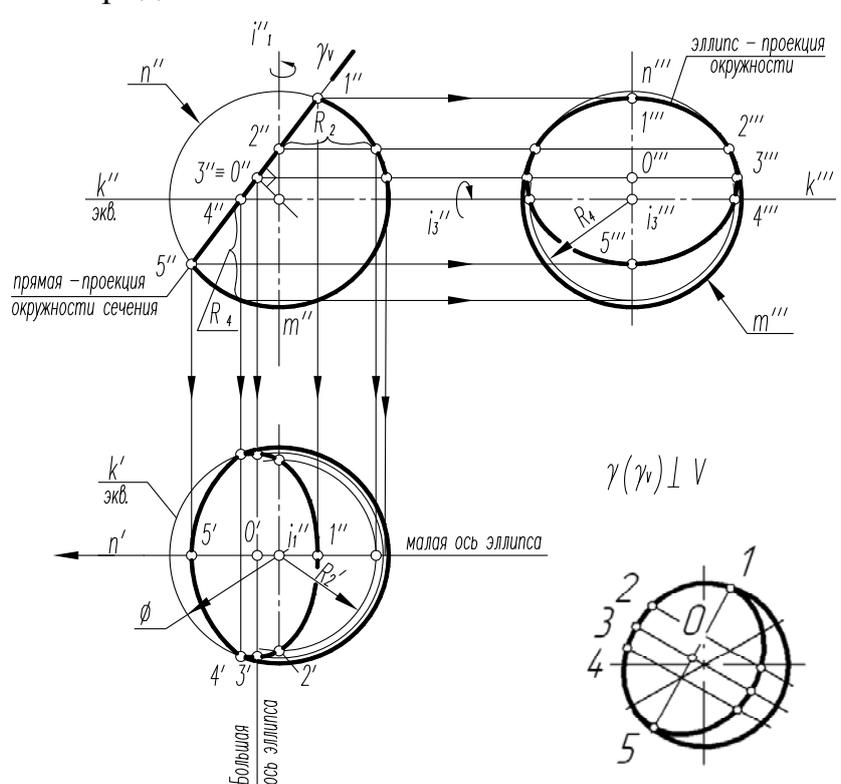


Рис. 7.19

Проекция шара со срезом построены по проекциям точек, обозначенных на фронтальной проекции сечения.

Горизонтальная проекция шара со срезом в виде эллипса построена по горизонтальным проекциям обозначенных точек:

– точки $1(1')$ и $5(5')$ – лежат на проекции $n(n')$ главного фронтального меридиана;

– точки $2(2')$ – лежат на проекции $m(m')$ профильного меридиана и построены на параллели радиусом R_2 (ось вращения i_1 , алгоритм I);

– точка $4(4')$ – лежит на проекции $k(k')$ экватора;

– точки 3 – отмечены на перпендикуляре к плоскости сечения γ и определяют положение большой оси эллипса $3-3'$; точки $3(3')$ построены по принадлежности своей параллели (алгоритм I); малая ось эллипса – линия $5'-1'$.

Построенные видимые горизонтальные проекции точек соединить плавной кривой эллипса с помощью лекала.

Очерк горизонтальной проекции определяет его экватор вправо от точек $4(4')$.

Профильная проекция шара со срезом в виде эллипса построена по профильным проекциям обозначенных точек:

– точки $1(1''')$ и $5(5''')$ – лежат на $n(n''')$ главного меридиана;

– точки $2(2''')$ – лежат на проекции $m(m''')$ профильного меридиана;

– точки $3(3''')$ и $4(4''')$ – построены или по принадлежности соответствующим относительно оси вращения i_3 параллелям (алгоритм III, отмечена параллель R_4).

Построенные видимые проекции точек соединить плавной кривой эллипса.

Очерк профильной проекции определяет профильный меридиан $m(m''')$ от точек $2(2''')$ вниз.

Т о р о в а я п о в е р х н о с т ь – т о р

Поверхность, получаемая при вращении образующей окружности m (или ее дуги) вокруг оси i , лежащей в плоскости этой окружности, но не проходящей через ее центр, называется *торовой*. Образующая окружность m вращается вокруг оси тора i по *направляющей* окружности радиусом R (рис. 7.20, а, б, в, г).

Геометрическое тело, ограниченное торовой поверхностью, называют *тором*.

Тор называют *открытым* (круговое кольцо), если образующие окружности m в осевом сечении не пересекаются и не касаются друг друга, то есть $R > r$. Проекция открытого тора с горизонтально-проецирующей осью вращения i показаны на рис. 7.20, а.

Тор называют *замкнутым*, если образующие окружности m касаются, то есть $R = r$. Проекция замкнутого тора показаны на рис. 7.20, б.

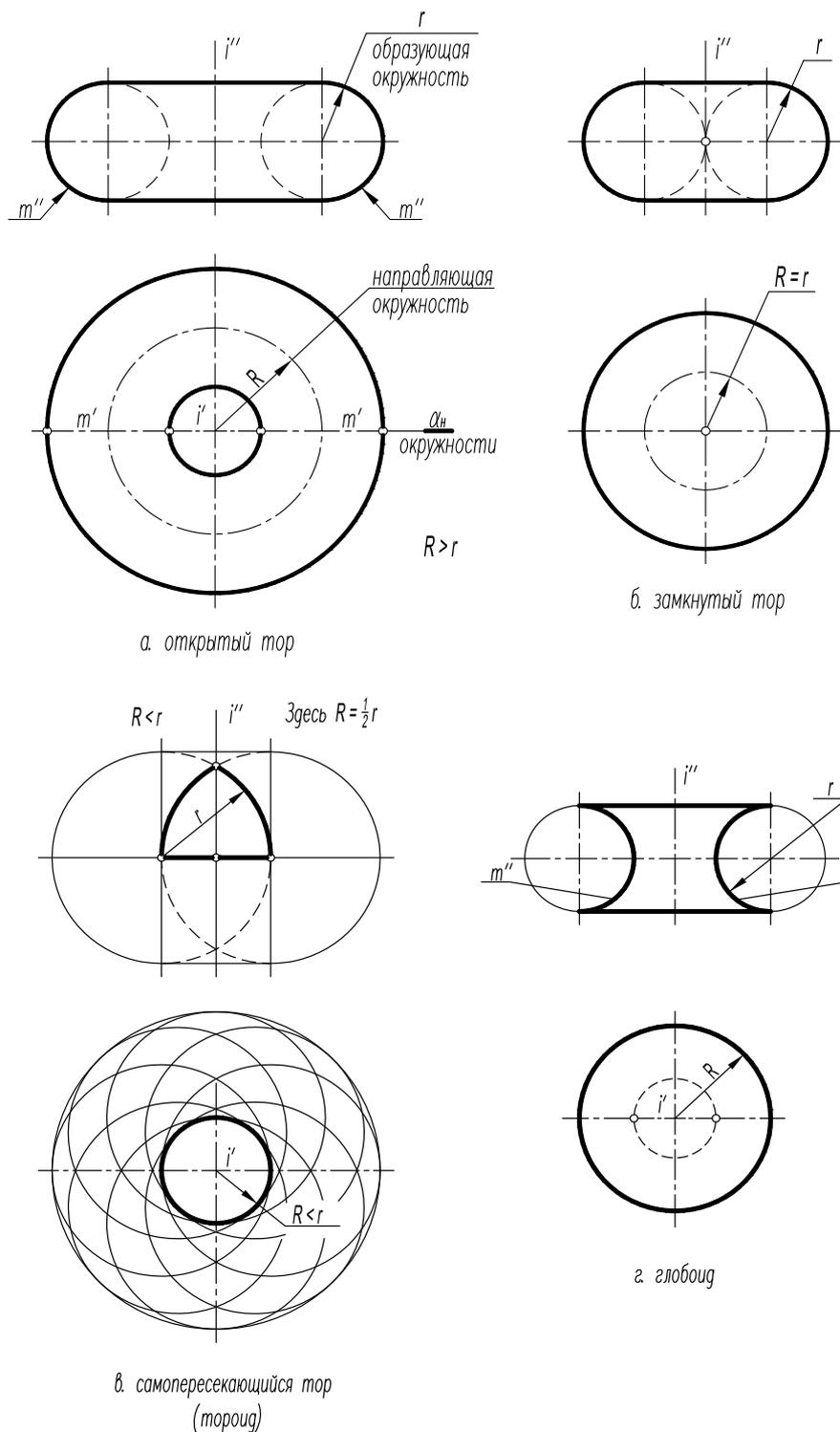


Рис. 7.20

Тор называют *самопересекающимся*, если образующие окружности пересекаются, то есть $R < r$. Проекции самопересекающегося тора показаны на рис. 7.20, в. Выделенную часть самопересекающегося тора называют *тороидом* и часто используют в графических условиях различных задач.

На рис. 7.20, г показаны проекции глобоида – это геометрическое тело, образованное как открытый тор, но материализующее полость (отверстие) в открытом торе.

Построение проекций открытого тора

На рис. 7.21 показан пример построения фронтальной, горизонтальной и профильной проекций половины открытого тора с фронтально-проецирующей осью i .

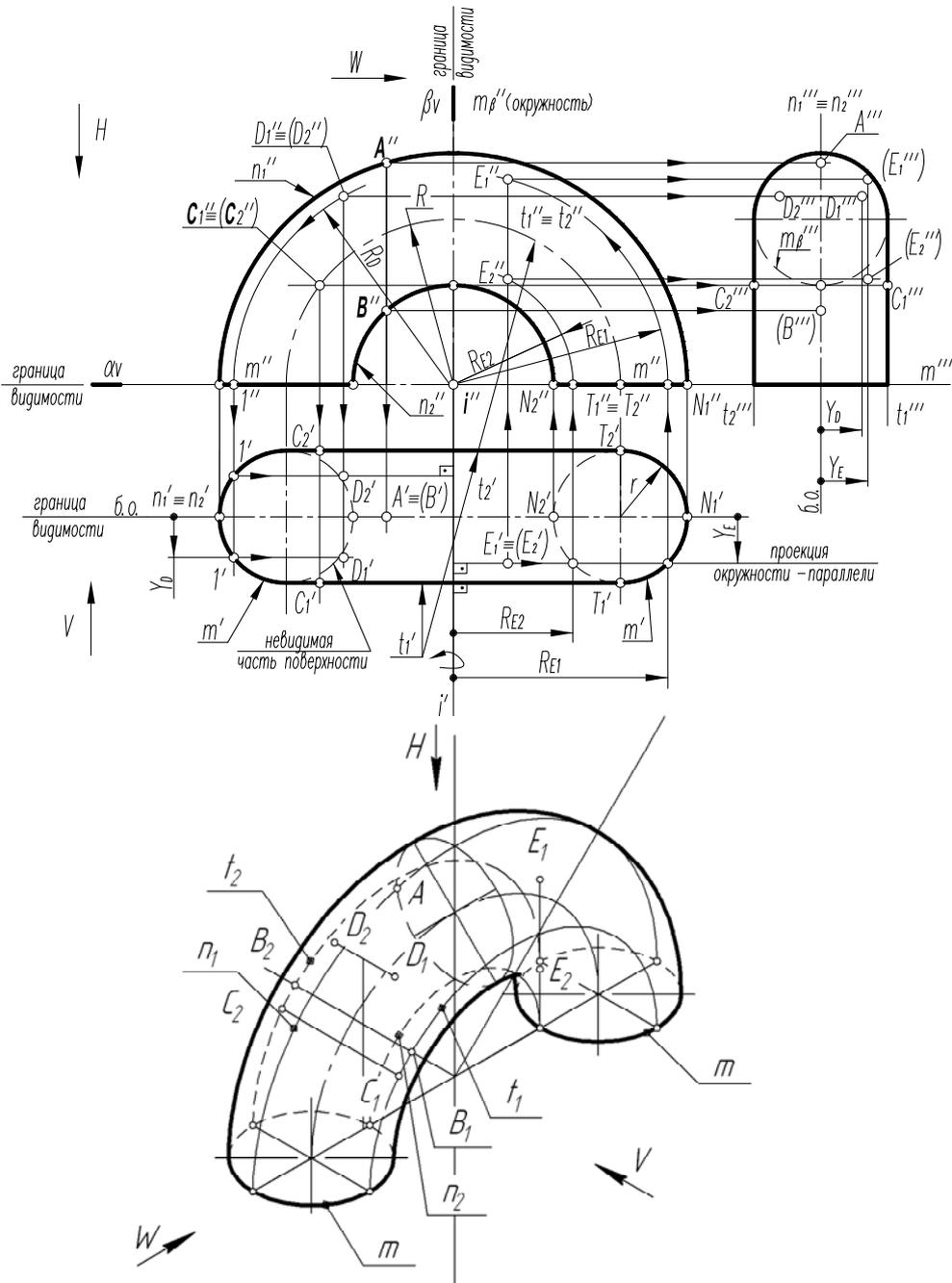


Рис. 7.21

Фронтальную проекцию (очерк) тора определяют:

– максимальная и минимальная круговые окружности-параллели $n_1(n_1'')$ и $n_2(n_2'')$, по которым диаметральные точки N_1 и N_2 образующей окружности m вращаются вокруг оси тора i ;

– окружности-параллели $t_1(t_1'')$ и $t_2(t_2'')$ диаметральных точек T_1 и T_2 , которые совпадают между собой и совпадают с проекцией направляющей

окружности радиусом R тора (выполняются на чертеже тонкой штрихпунктирной линией);

– две горизонтальные прямые $m(m'')$ – проекции образующих окружностей m , полученных в сечениях тора горизонтальной плоскостью $\alpha(\alpha_V)$, проходящей через ось вращения тора.

Горизонтальную проекцию (очерк) тора определяют:

– совпадающие проекции $n_1(n_1')$ и $n_2(n_2')$ окружностей-параллелей фронтального очерка проецируются в прямую линию, перпендикулярную оси $i(i')$ тора, и совпадают с горизонтальной осью симметрии проекции;

– две образующие окружности $m(m')$, лежащие в плоскости среза $\alpha(\alpha_V)$, которые проецируются в натуральную величину и видимыми являются только их половины;

– две горизонтальные линии, в которые проецируются окружности-параллели $t_1(t_1')$ и $t_2(t_2')$, полученные при вращении диаметральных точек T_1 и T_2 (перпендикулярны оси вращения $i(i')$).

Профильную проекцию (очерк) тора определяют:

– совпадающие проекции $n_1(n_1''')$ и $n_2(n_2''')$ окружностей-параллелей фронтального очерка проецируются в прямую вертикальную линию и совпадают с осью симметрии проекции;

– окружность m_β , лежащая в профильной плоскости β (половина ее – невидимая);

– прямая горизонтальная линия совпадающих проекций образующих окружностей $m(m''')$, лежащих в плоскости среза $\alpha(\alpha_V)$;

– две вертикальные прямые – проекции окружностей-параллелей $t_1(t_1''')$ и $t_2(t_2''')$.

!!! **Запомните** характерные признаки проекций открытого тора на чертеже.

Построение проекций точек, лежащих на поверхности тора

Точки на поверхности тора лежат на круговых параллелях, по которым они вращаются вокруг его оси i .

1. Точки, лежащие на характерных очерковых окружностях тора n_1 и n_2 , t_1 и t_2 и m строятся по их принадлежности этим окружностям.

На рис. 7.21 показаны примеры построения проекций точек по одной заданной проекции.

Например, горизонтальные и профильные проекции точек A и B , заданных своими фронтальными проекциями A'' и B'' , лежат на очерковых окружностях n_1 и n_2 и определяются на проекциях этих окружностей (горизонтальные проекции точек совпадают); профильная проекция $B(B''')$ – невидимая.

Горизонтальные и профильные проекции точек C_1 и C_2 , заданных своими фронтальными совпадающими проекциями, лежат на окружностях t_1 и t_2 и определяются на проекциях этих окружностей.

2. Проекции точек D_1 и D_2 (невидимая), заданных своими совпадающими фронтальными проекциями D_1'' и D_2'' и не лежащие на характерных окружностях тора, строятся по следующему графическому алгоритму (алгоритм I):

1-е действие. Провести вспомогательную круговую параллель радиусом R_D через заданные фронтальные проекции точек $D_1(D_1'') \equiv D_2(D_2'')$.

2-е действие. Провести горизонтальные прямые – проекции этих параллелей – перпендикулярно оси вращения $i(i')$, используя вспомогательные точки $1(1'', 1')$, лежащие на проекциях образующей окружности $m(m_1'', m_2')$.

3-е действие. Построить по линии связи видимые горизонтальные проекции точек $D(D_1')$ и $D(D_2')$ на проекциях этих вспомогательных параллелей.

4-е действие. Профильные видимые проекции точек $D_1(D_1''')$ и $D_2(D_2''')$ построить по координатам y_D .

Проекции точек E_1 и E_2 (невидимая), заданных своими совпадающими горизонтальными проекциями $E_1(E_1') \equiv E_2(E_2')$ и не лежащие на характерных окружностях тора, строятся по "обратному" алгоритму II:

1-е действие. Провести на горизонтальной проекции тора прямую, перпендикулярную оси вращения тора $i(i')$ – это горизонтальные совпадающие проекции вспомогательных круговых параллелей радиусами R_{E1} и R_{E2} для точек E_1 и E_2 .

2-е действие. Построить радиусами R_{E1} и R_{E2} фронтальные проекции этих параллелей: R_{E2} – параллель на внутренней поверхности тора, а R_{E1} – параллель на наружной поверхности тора.

3-е действие. Построить по линии связи фронтальные проекции точек $E_1(E_1'')$ и $E_2(E_2'')$ на проекциях этих вспомогательных параллелей.

4-е действие. Профильные невидимые проекции точек $E_1(E_1''')$ и $E_2(E_2''')$ построить по координатам y_E .

Сечения тора плоскостями частного положения

Тор является поверхностью вращения 4-го порядка (образующая и направляющая окружности 2-го порядка – порядки умножаются) и кривые его сечений также являются кривыми 4-го порядка (кроме круговых сечений).

Тор имеет две системы круговых сечений:

– первая система парных круговых сечений получается во всех плоскостях, проходящих через ось i , тора на той его проекции, на которую ось i проецируется в точку – смотри сечение во фронтально-проецирующей плоскости $\alpha(\alpha_V)$ на фронтальной проекции тора (сечение по образующим окружностям m);

– вторая система круговых сечений получается в плоскостях $\beta(\beta_H)$, перпендикулярных оси тора – смотри сечение во фронтальной плоскости уровня β_H на горизонтальной проекции тора (сечение по круговым параллелям тора).

Тор имеет также третью систему сечений плоскостями уровня, параллельными оси его вращения i .

На рис. 7.22 показаны формы кривых в различных сечениях открытого тора плоскостями уровня (ось тора $i \perp V$).

На рис. 7.22, а сечения проведены параллельно оси тора $i(i''')$ на его фронтальной проекции и являются горизонтальными плоскостями уровня.

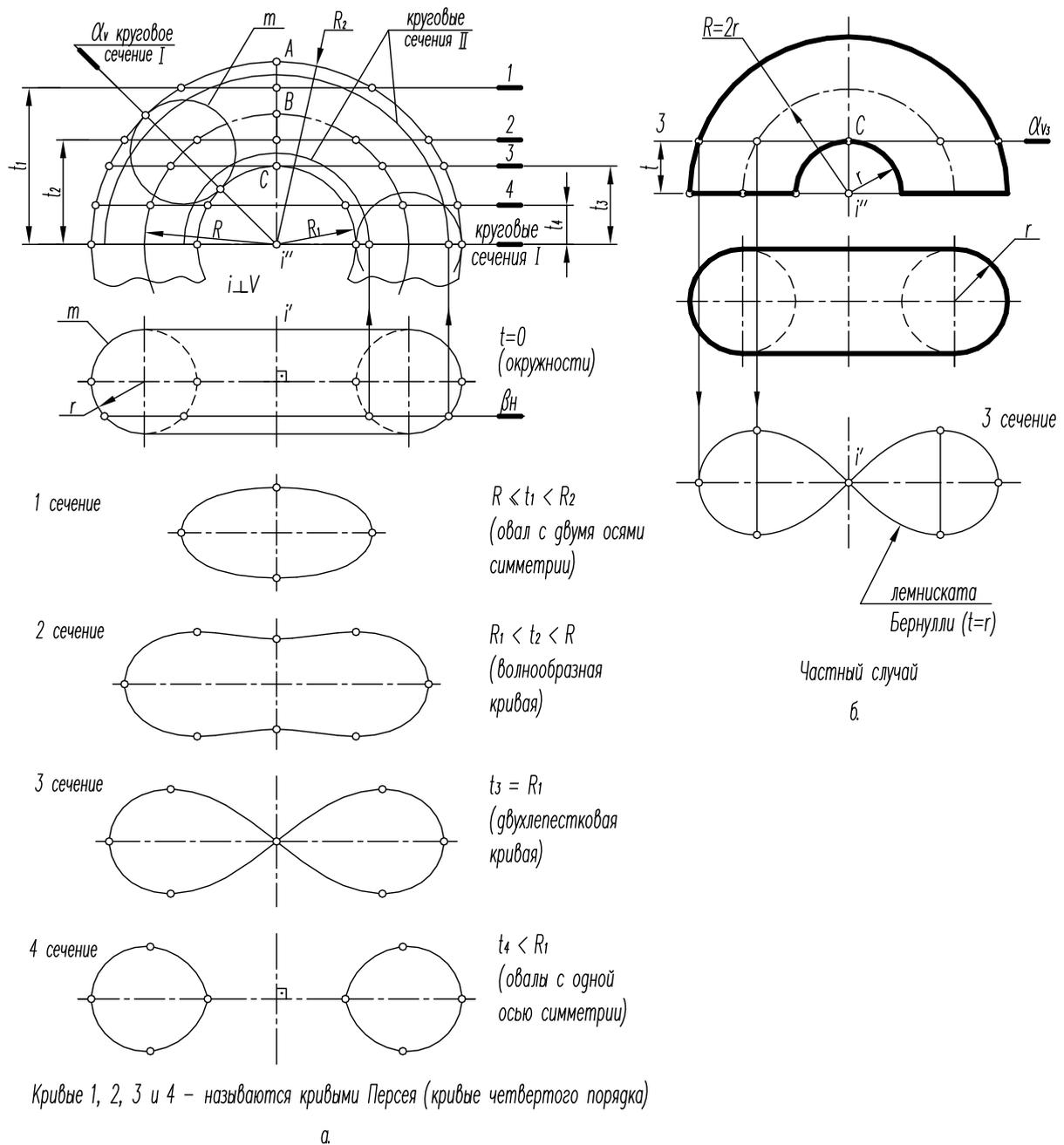


Рис. 7.22

В зависимости от расстояния t секущей плоскости до оси тора на его поверхности получается 4 вида кривых, объединенных общим названием – *кривые Персея* (геометр древней Греции).

1-е сечение. Плоскость сечения на расстоянии t_1 от оси тора образует на его поверхности кривую линию – овал с двумя осями симметрии (для плоскостей между точками A и B , то есть $R \leq t_1 < R_2$).

2-е сечение. Плоскость сечения на расстоянии t_2 от оси тора образует на его поверхности волнообразную кривую (для плоскостей между точками B и C , то есть $R_1 < t_2 < R$).

3-е сечение. Плоскость сечения на расстоянии t_3 от оси тора образует на его поверхности двухлепестковую кривую (для плоскости, проходящей через точку C , то есть $t_3 = R_1$).

4-е сечение. Плоскость сечения на расстоянии t_4 от оси тора образует на его поверхности два овала с одной осью симметрии (для плоскостей ниже точки C и не проходящих через ось вращения тора $i(i''')$, то есть когда $t_4 < R_1$).

На рис. 7.22, б изображена фронтальная и горизонтальная проекции открытого тора, у которого $R = 2r$ (частный случай). Кривые сечений этого тора называют овалами Кассини, а двухлепестковая кривая в сечении 3 называется лемнискатой Бернулли.

Построение проекций открытого тора со срезами плоскостями частного положения

На рис. 7.23 показан пример построения проекций открытого тора с комбинированным срезом фронтально-проецирующей плоскостью $\alpha(\alpha_v)$ и горизонтальной плоскостью $\beta(\beta_v)$.

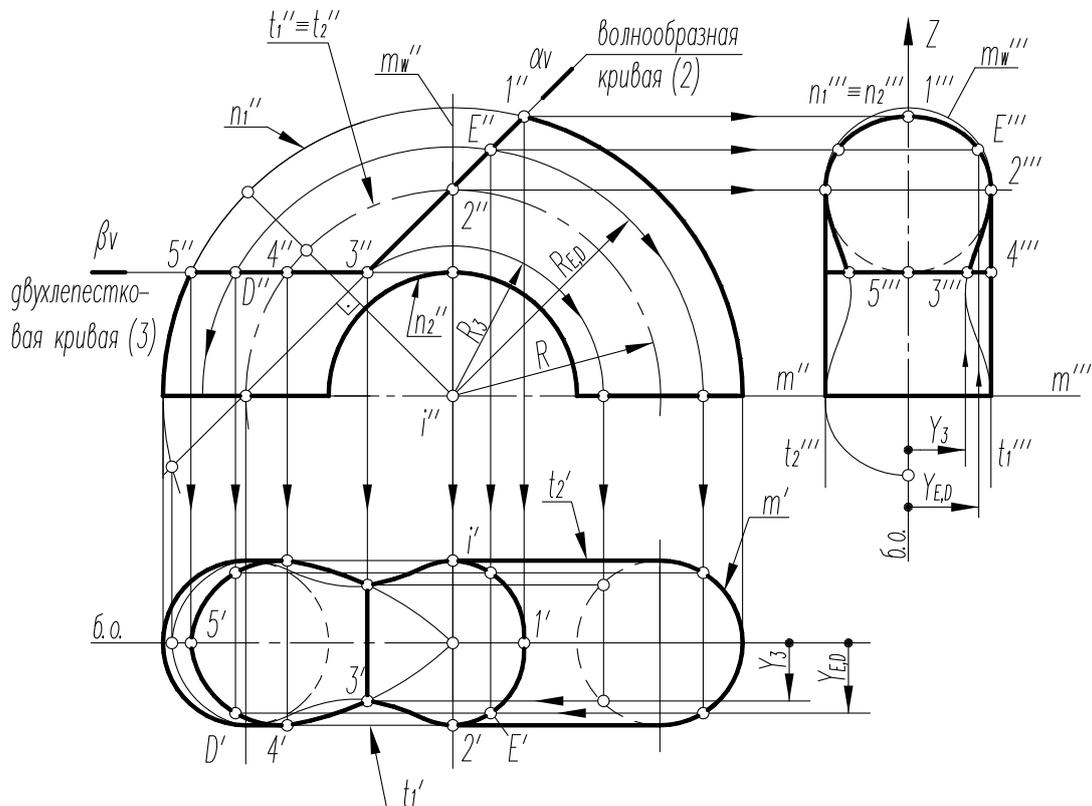


Рис. 7.23

Для построения проекций тора со срезами следует выполнить предлагаемый графический алгоритм, определяющий порядок действий при решении всех подобных задач:

1-е действие. Построить на чертеже тонкими линиями по заданным размерам фронтальную, горизонтальную и профильную проекции тора без срезов, а затем выполнить на его фронтальной проекции (или любой другой) заданные по условию срезы фронтально-проецирующей плоскостью $\alpha(\alpha_V)$ и горизонтальной плоскостью $\beta(\beta_V)$.

2-е действие. Обозначить на фронтальной проекции характерные точки и выполнить графоаналитический анализ сечений:

2.1. Фронтально-проецирующая плоскость $\alpha(\alpha_V)$ пересекает поверхность тора по участку волнообразной кривой 1-2-3 (сечение 2), часть которой ограничена вырожденной в точку фронтально-проецирующей линией пересечения 3-3 плоскостей среза α и β .

2.2. Горизонтальная плоскость $\beta(\beta_V)$ пересекает поверхность тора по участку двухлепестковой кривой 3-4-5 (сечение 3).

!!! Поскольку горизонтальная проекция тора имеет вертикальную симметрию, точки обозначены на одной его половине (нижней).

3-е действие. Достроить горизонтальную проекцию тора, построив проекции плоскостей срезов по горизонтальным проекциям отмеченных точек и определить видимость плоскостей срезов.

3.1. Горизонтальная проекция видимого участка волнообразной кривой в плоскости α построена по проекциям обозначенных точек 1(1'), E(E'), 2(2') и 3(3') по их принадлежности характерным n_1 , t_1 и t_2 (точки 1 и 2) и вспомогательным (точки E и 3) параллелям.

3.2. Горизонтальная проекция видимого участка двухлепестковой кривой в плоскости β построена по проекциям обозначенных точек 3(3'), 4(4'), D(D') и 5(5') по их принадлежности характерным t_1 , t_2 и n_1 (точки 4 и 5) и вспомогательным (точки D) параллелям (точки 3(3') уже построены).

3.3. Видимый отрезок 3-3(3'-3') – горизонтальная проекция линии пересечения плоскостей срезов α и β , ограничивающая участки кривых в плоскостях срезов.

4-е действие. Выполнить графический анализ построенной горизонтальной проекции тора для определения ее очерка и внутреннего контура.

- 4.1.* Горизонтальный очерк определяют:
- видимые половины окружностей $m(m')$;
 - участки очерковых параллелей $t_1(t_1')$ и $t_2(t_2')$, не существующие между точками 4(4') и 2(2');
 - участки кривых 4'-3' и 3'-2'.
- 4.2.* Внутренний контур определяют:
- невидимые половины окружностей $m(m')$;
 - видимые участки кривых 4'-D'-5' и 2'-E'-1';
 - видимый отрезок 3'-3' пересечения плоскостей срезов α и β .

5-е действие. Достроить профильную проекцию тора, построив проекции плоскостей срезов по профильным проекциям обозначенных точек и определить видимость плоскостей срезов:

5.1. Профильная проекция видимого участка волнообразной кривой построена по проекциям обозначенных точек $1(1''')$, $E(E''')$, $2(2''')$ и $3(3''')$ по их принадлежности характерным параллелям n_1 , t_1 и t_2 (точки $1(1''')$ и $2(2''')$) и по координатам y (точки $E(E''')$ – y_E , $3(3''')$ – y_3).

5.2. Профильная проекция горизонтальной плоскости среза β проецируется в видимый горизонтальный отрезок $4'''-4'''$ (точки $4(4''')$ – на очерковых линиях t_1 и t_2).

6-е действие. Выполнить графический анализ построенной профильной проекции тора для определения ее очерка и внутреннего контура:

6.1. Профильный очерк определяют:

– слева и справа – проекции очерковых параллелей $t_1(t_1')$ и $t_2(t_2')$ до точек $2(2''')$;

– сверху – видимый участок $2'''-E'''-1'''$ волнообразной кривой;

– снизу – видимые совпадающие проекции образующих окружностей $m(m''')$.

6.2. Внутренний контур определяют:

– видимый горизонтальный отрезок $4'''-4'''$ (проекция плоскости среза β);

– видимые участки $2'''-4'''$ волнообразной кривой;

– невидимая часть окружности $m_W(m_W''')$ между точками $2'''$.

7-е действие. Оформить чертеж тора, выполнив толстыми сплошными линиями очерки и видимый внутренний контур каждой проекций (оставить тонкими линиями полные очерки проекций и линии построений).

Структуризация материала седьмой лекции в рассмотренном объеме схематически представлена на рис. 7.24 (лист 1). На последующих листах 2–6 компактно приведены иллюстрации к этой схеме для визуального закрепления основной части изученного материала при повторении (рис. 7.25–7.29).

Поверхности. Частные случаи гранных и кривых поверхностей. Геометрические тела

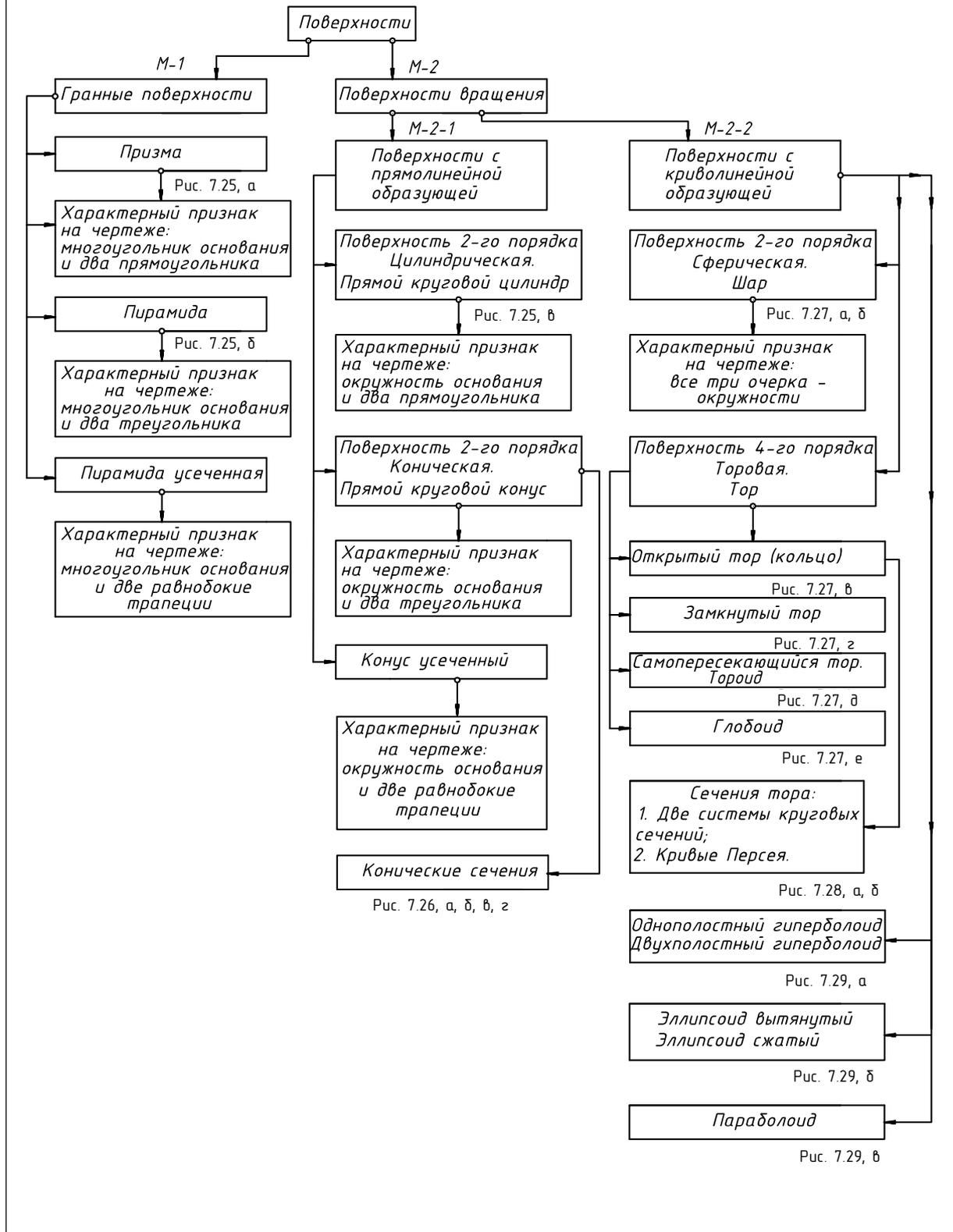
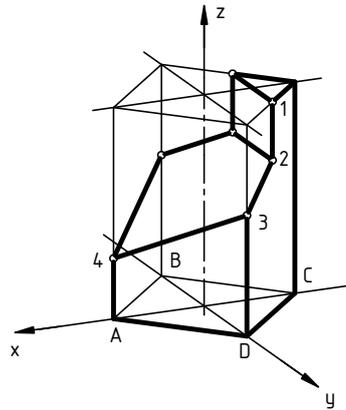
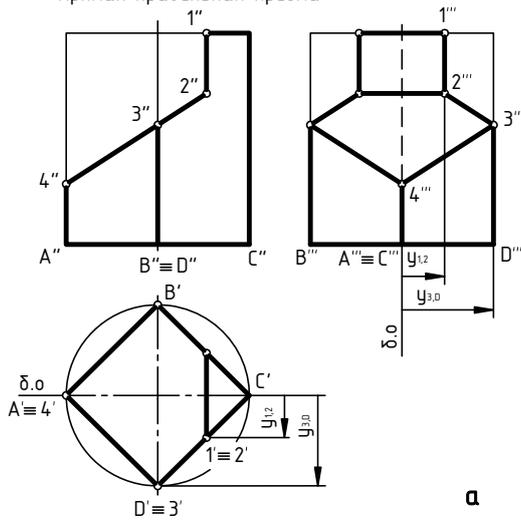


Рис. 7.24

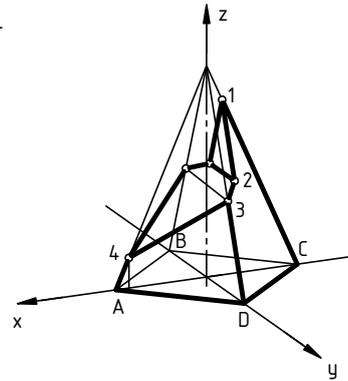
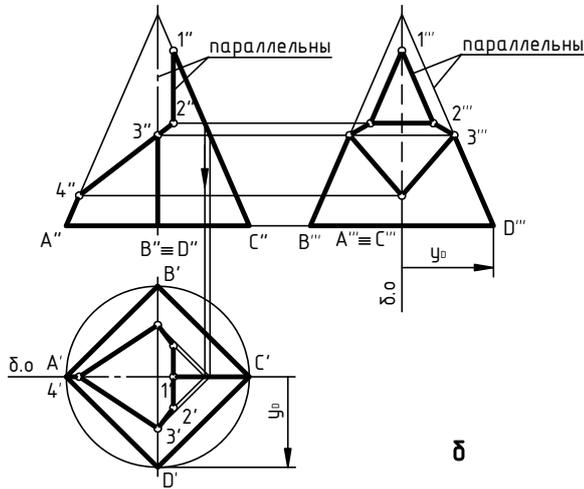
Геометрические тела

Гранные поверхности
Прямая правильная призма



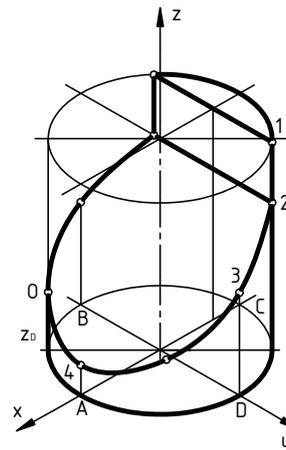
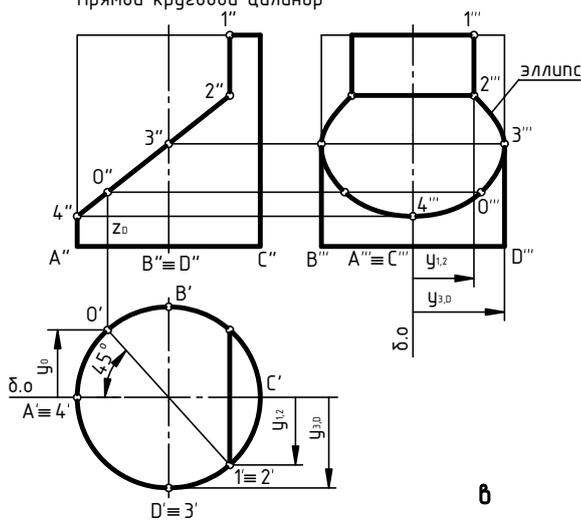
а

Правильная пирамида



б

Поверхности вращения
Прямой круговой цилиндр

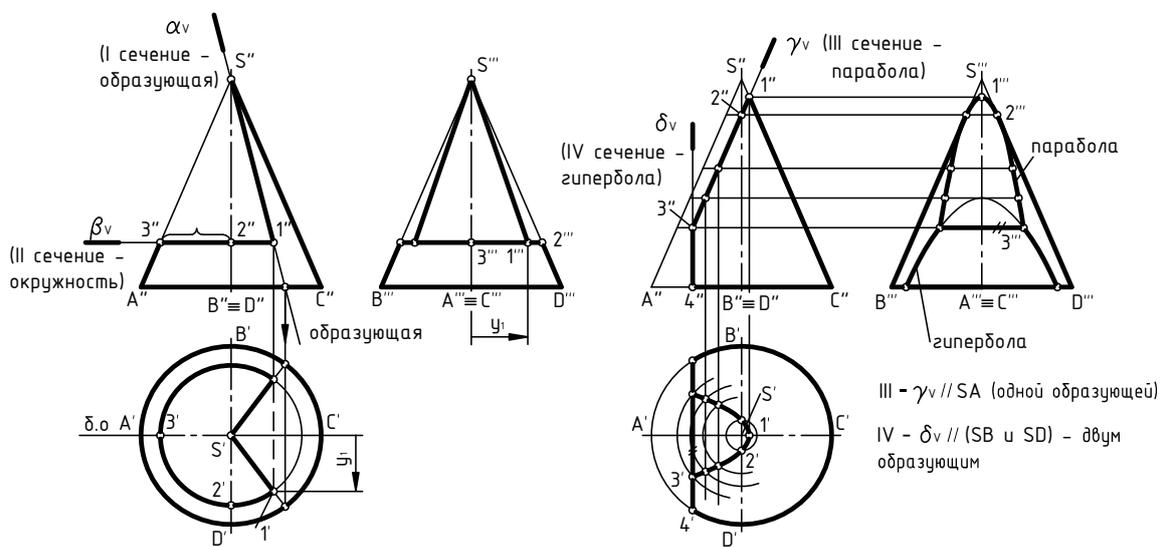


в

Рис. 7.25

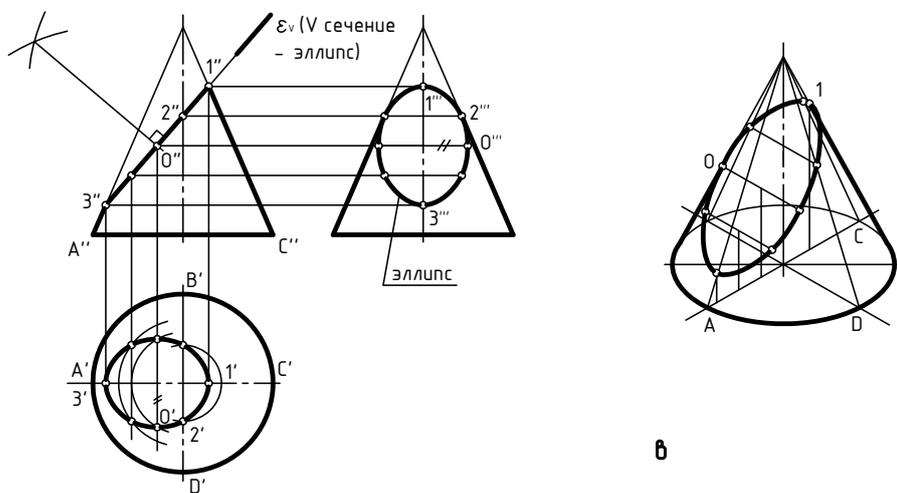
Геометрические тела

Прямой круговой конус. Конические сечения.



а

б



в

Рис. 7.26

Геометрические тела

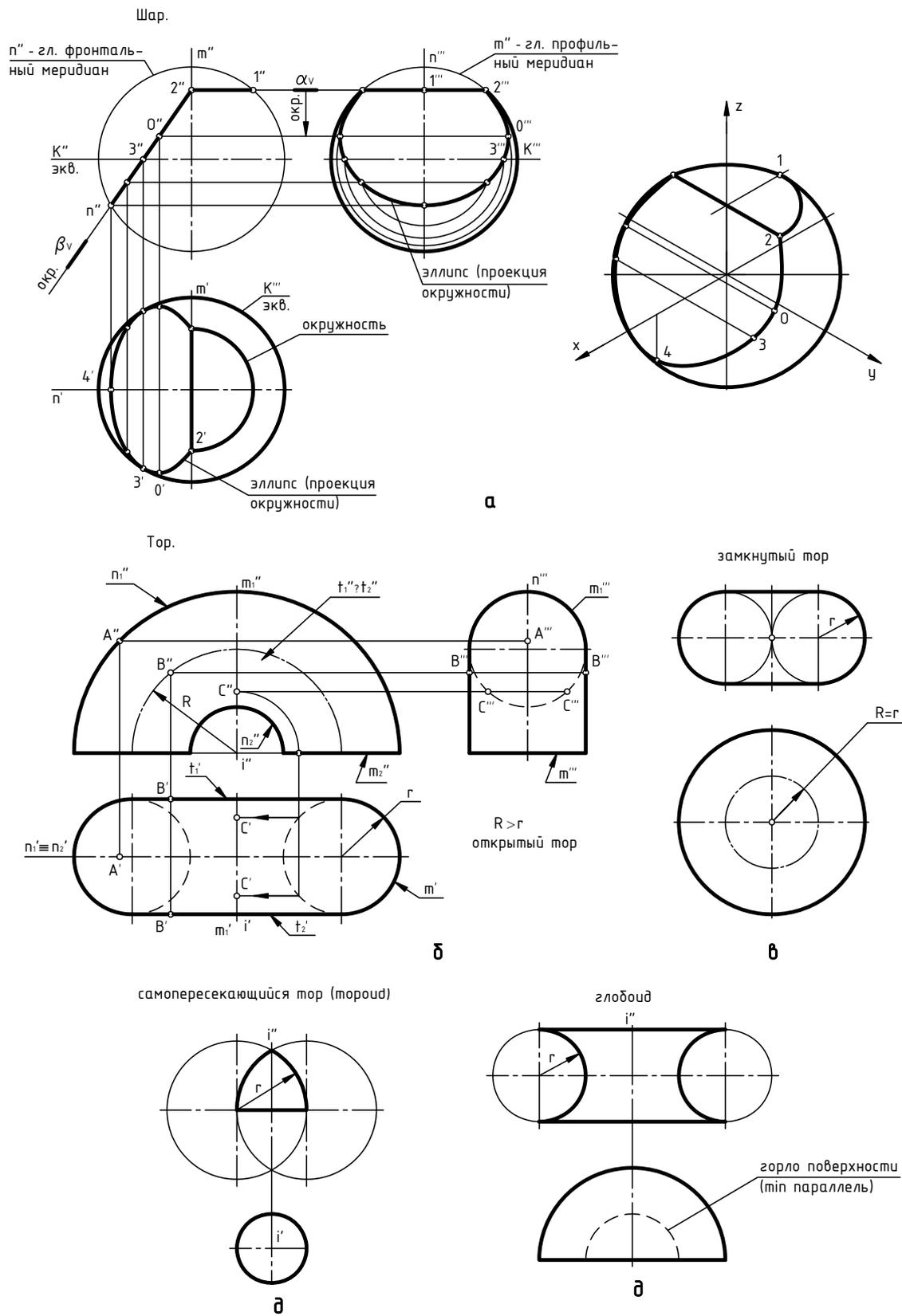
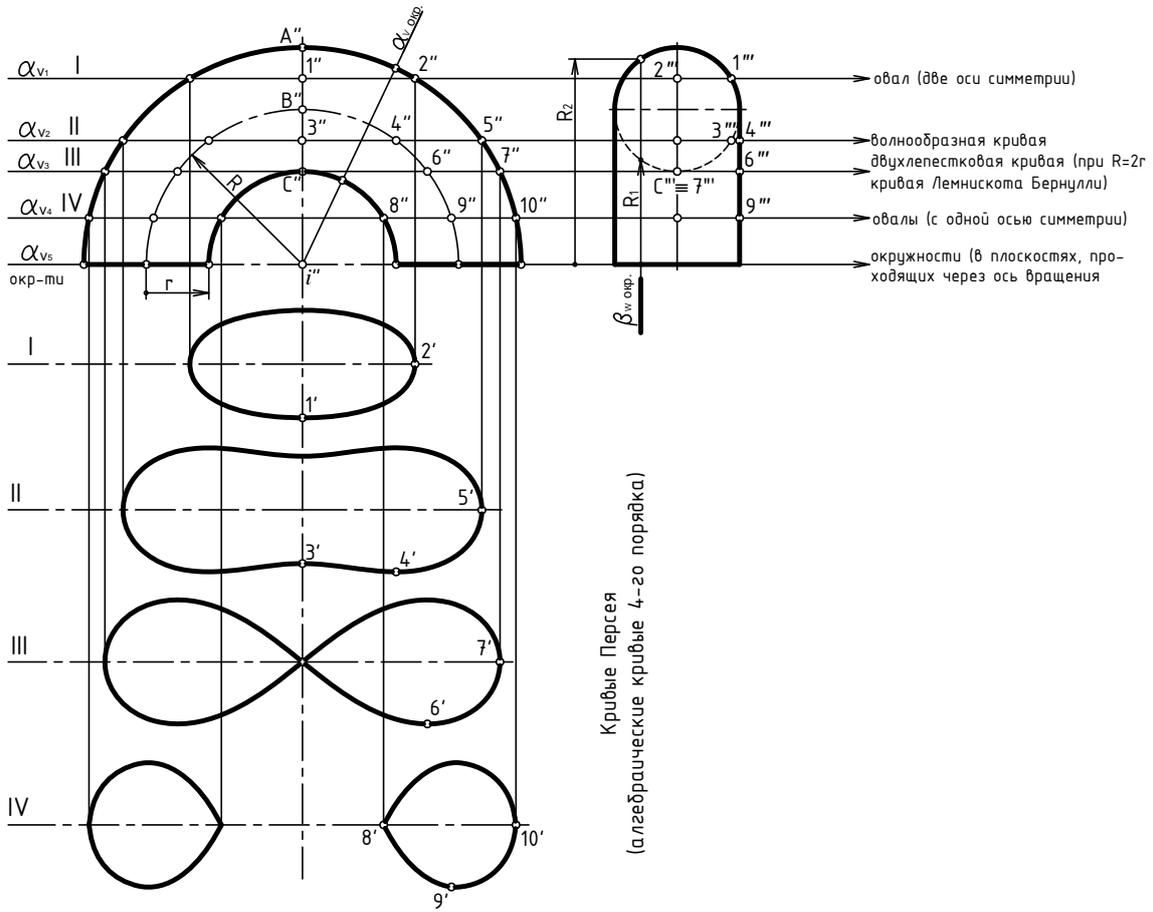


Рис. 7.27

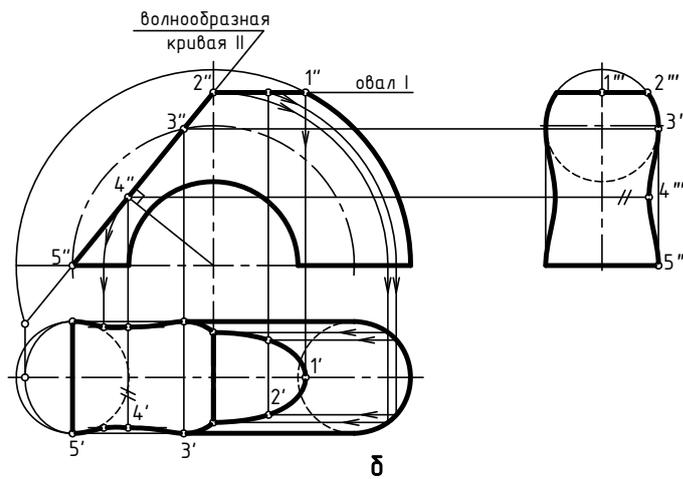
Геометрические тела

Сечения открытого тора. Кривые Персея.



а

Построение сечений поверхности открытого тора плоскостями частного положения



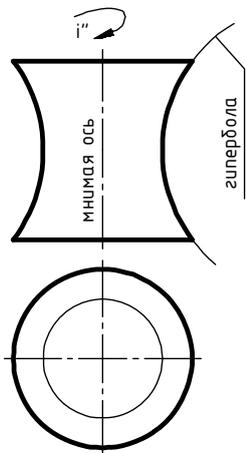
Лист 5

Рис. 7.28

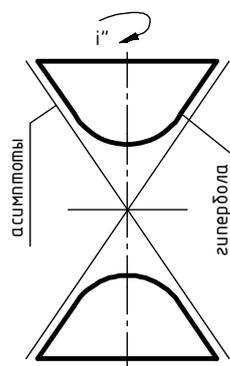
Поверхности вращения

Прочие поверхности вращения

Однополостной гиперболоид

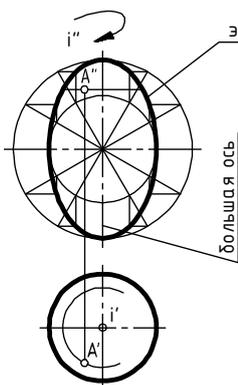


Двухполостной гиперболоид

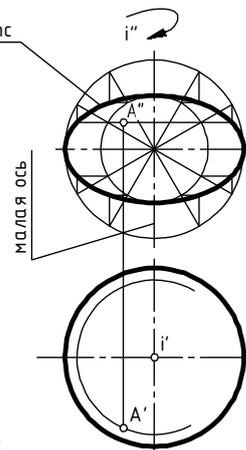


а

Вытянутый эллипсоид

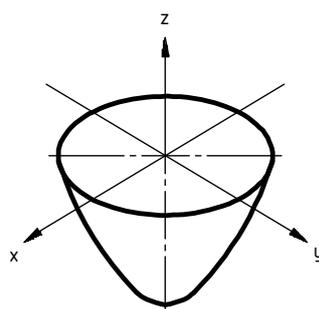
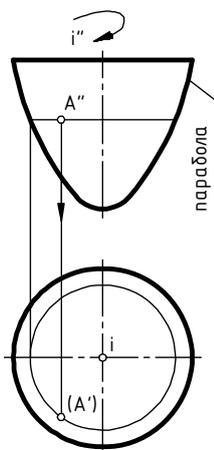


Сжатый эллипсоид



б

Параболоид



в

Лист 6

Рис. 7.29

Лекция 8 ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Пересечение поверхностей и способы построения линий пресечения

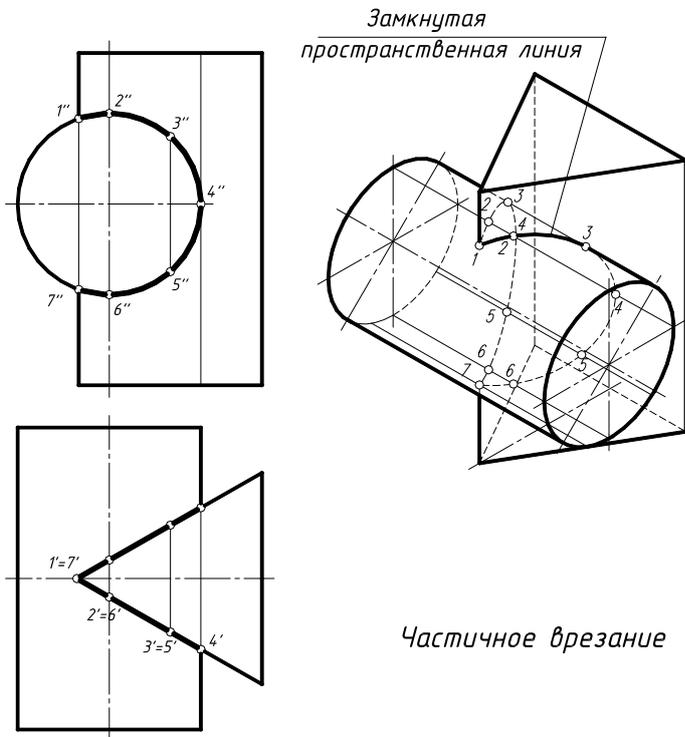


Рис. 8.1

Линия пересечения принадлежит обоим пересекающимся поверхностям и образуется множеством их общих точек. Следовательно, построение линии пересечения поверхностей сводится к построению этих общих точек.

При пересечении поверхностей вращения порядок линии пересечения определяется умножением порядков пересекающихся поверхностей. Например, если пересекаются круговой конус (поверхность 2-го порядка) и сфера (поверхность 2-го порядка), то линия пересечения является кривой 4-го порядка.

Определение способа построения линии пересечения зависит от взаимного расположения пересекающихся поверхностей, а также от их расположения относительно плоскостей проекций.

Из всех возможных вариантов пересечения поверхностей геометрических тел в зависимости от их взаимного расположения можно выделить четыре случая, которые позволяют определить и представить форму линии пересечения поверхностей:

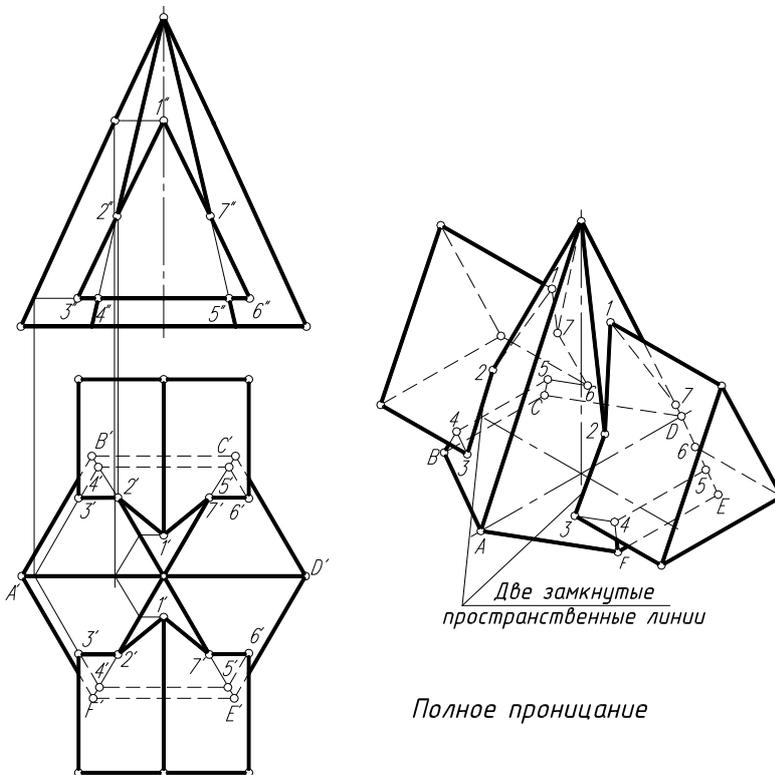


Рис. 8.2

I случай. *Частичное врезание* (рис. 8.1). В этом

случае линией пересечения является одна замкнутая пространственная линия.

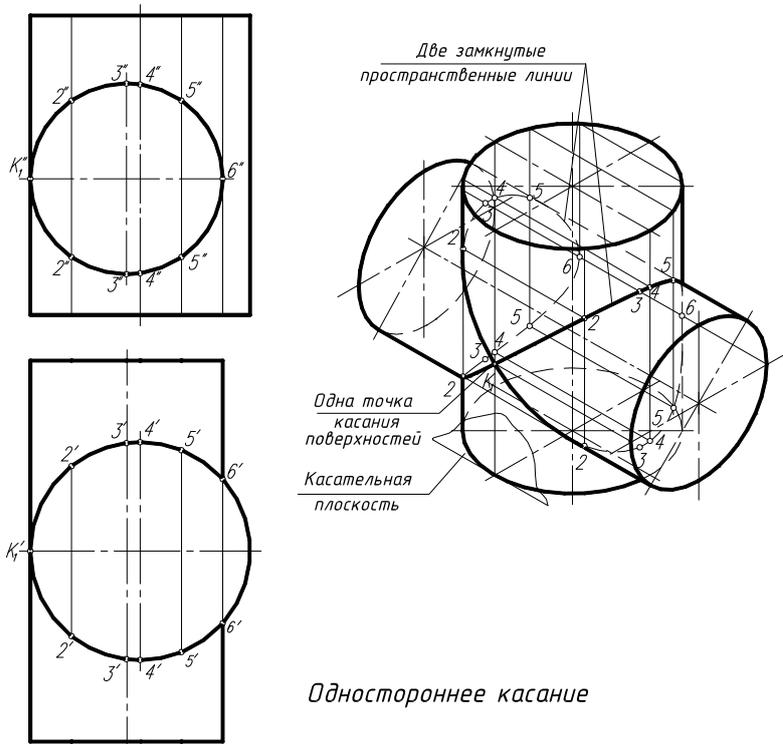
II случай. *Полное проникание* (рис. 8.2). В этом случае линией пересечения являются две замкнутые пространственные линии.

III случай. *Одностороннее соприкосновение* (рис. 8.3). В этом случае поверхности соприкасаются в одной общей точке K_1 и линия их пересечения, проходя через эту точку, распадается на две замкнутые пространственные линии (поверхности имеют одну общую касательную плоскость).

IV случай. *Двойное соприкосновение* (рис. 8.4).

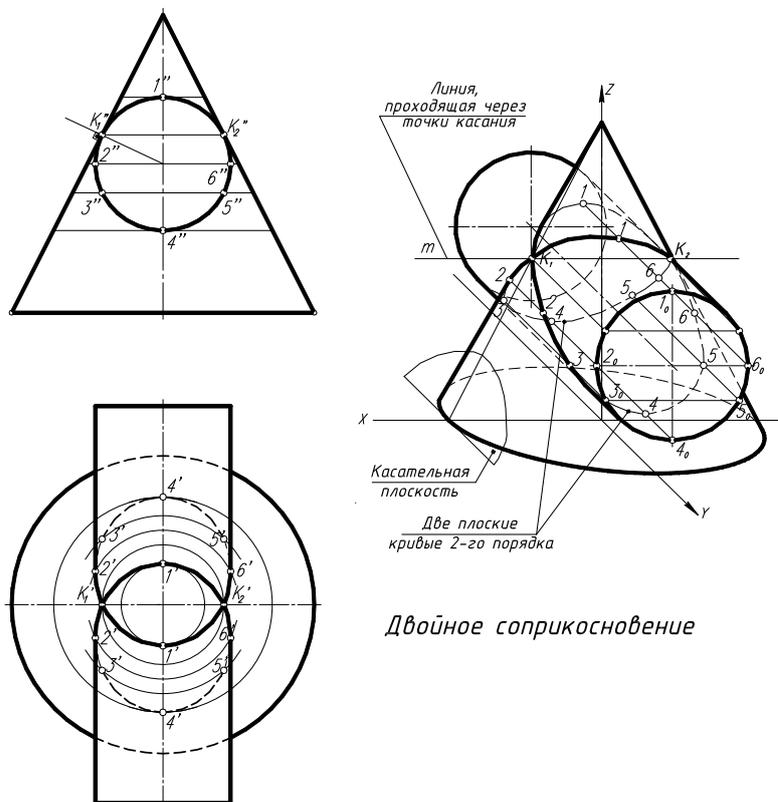
В этом случае поверхности имеют две точки соприкосновения K_1 и K_2 и линия их пересечения распадается на две плоские кривые в соответствии с теоремой 2 (С. А. Фролов «Начертательная геометрия» [23]): «Если две поверхности вращения второго порядка имеют касание в двух точках, то линия их пересечения распадается на две кривые второго порядка, плоскости которых проходят через прямую m , соединяющую точки касания» (поверхности имеют две общие касательные плоскости).

В зависимости от расположения пересекающихся геометрических тел относительно



Одностороннее касание

Рис. 8.3



Двойное соприкосновение

Рис. 8.4

плоскостей проекций и участия в пересечении геометрических тел, имеющих проецирующую поверхность (как призма или цилиндр) или не имеющих проецирующей поверхности (пирамида, конус, шар, тор, тороид, наклонная призма или наклонный цилиндр, глобоид и др.), следует выбрать оптимальный способ построения проекций линии пересечения поверхностей на чертеже.

По этим признакам способы построения линий пересечения поверхностей можно объединить в две группы:

Первая группа: частные случаи пересечения поверхностей, когда для построения линий пересечения не требуется применения специальных способов, а используется частное положение пересекающихся геометрических тел относительно плоскостей проекций.

Вторая группа: общие случаи пересечения поверхностей, когда для построения линий пересечения требуется применить специальные способы посредников.

Частные случаи пересечения поверхностей

К первой группе частных случаев пересечения поверхностей относятся следующих *четыре случая*:

1 случай: пересечение геометрических тел, боковые поверхности которых являются проецирующими, то есть, перпендикулярны какой-либо плоскости проекций.

2 случай: пересечение геометрических тел, у одного из которых боковая поверхность является проецирующей.

3 случай: пересечение соосных поверхностей вращения, т. е. имеющих общую ось вращения,

4 случай: пересечение поверхностей вращения второго порядка, описанных вокруг сферы (по теореме Г. Монжа).

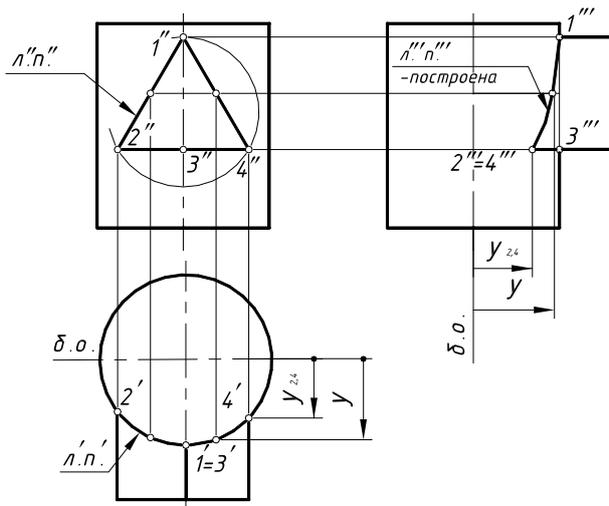


Рис. 8.5

Рассмотрим на примерах построение проекций линий пересечения поверхностей геометрических тел в четырех частных случаях первой группы.

Следует отметить, что перечисленные частные случаи пересечения поверхностей наиболее часто встречаются при формообразовании различных реальных деталей.

1-й частный случай.

На рис. 8.5 показан пример построения проекций линии пересечения поверхностей горизонтально-проецирующего цилиндра и фронтально-проецирующей прямой правильной треугольной призмы, то есть пересече-

каются два геометрических тела, боковые поверхности которых занимают относительно плоскостей проекций проецирующее положение.

Характерный признак 1-го частного случая: на заданных проекциях тел определяются две проекции искомой линии пересечения:

- фронтальная проекция ($л''п''$) линии пересечения $1''-2''-3''-4''$ совпадает с вырожденной в ломаную линию боковой поверхностью призмы;
- горизонтальная проекция ($л'п'$) линии пересечения $1'-2'-3'-4'$ совпадает с участком окружности, которая является вырожденной проекцией боковой поверхности цилиндра.

Следовательно, требуется достроить только профильную проекцию ($л'''п'''$) линии пересечения, построив профильные проекции обозначенных точек по их принадлежности одному из тел (в данной задаче – цилиндру), и соединить их плавной кривой с учетом ее видимости на поверхностях.

2-й частный случай.

На рис. 8.6 показан пример построения проекций линии пересечения поверхностей прямого кругового конуса и фронтально-проецирующего цилиндра, то есть пересекающихся геометрических тел, у одного из которых боковая поверхность проецирующая.

Характерный признак 2-го частного случая: на заданных проекциях тел определяется одна проекция линии пересечения:

- фронтальная проекция ($л''п''$) линии пересечения $1''-2''-3''-4''$ совпадает с окружностью, которая является вырожденной проекцией боковой поверхности цилиндра.

Следовательно, требуется достроить горизонтальную ($л'п'$) и профильную ($л'''п'''$) проекции линии пересечения, построив горизонтальные и профильные проекции обозначенных точек по их принадлежности конусу, и соединить построенные на проекциях точки плавными кривыми линиями с учетом их видимости на поверхностях.

!!! На профильную проекцию предмета пространственная кривая линия пересечения 4-го порядка проецируется в виде участка *гиперболы*.

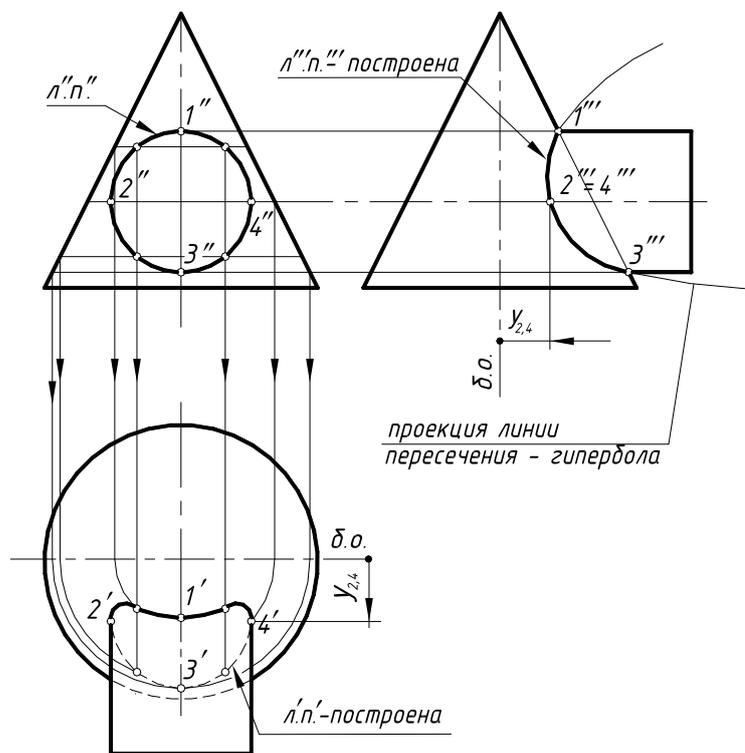


Рис. 8.6

3-й частный случай.

Пересечение *соосных* геометрических тел.

Соосными называются геометрические тела вращения, имеющие общую ось вращения « i ». Поверхности соосных тел пересекаются по окружностям, перпендикулярным их общей оси. Если общая ось « i » соосных геометрических тел является прямой проецирующей (т. е. она перпендикулярна какой-либо одной плоскости проекций, а двум другим параллельна), то окружность пересечения проецируется дважды в прямую линию, перпендикулярную их общей оси, на те плоскости проекций, которым эта общая ось параллельна.

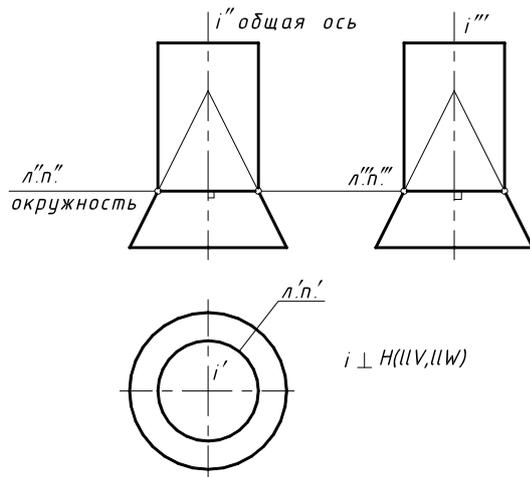


Рис. 8.7

Горизонтальная проекция этой окружности пересечения ($л'п'$) совпадает с вырожденной горизонтальной проекцией боковой поверхности цилиндра.

На рис. 8.7 показан пример построения линии пересечения соосных геометрических тел – конуса и горизонтально-проецирующего цилиндра, имеющих общую горизонтально-проецирующую ось i (ось перпендикулярна H и параллельна V и W). Линией пересечения является *о к р у ж н о с т ь*, фронтальная ($л''п''$) и профильная ($л'''п'''$) проекции которой представляют собой прямые линии, перпендикулярные их общей оси i и проходящие через точки пересечения фронтальных и профильных очерков поверхностей.

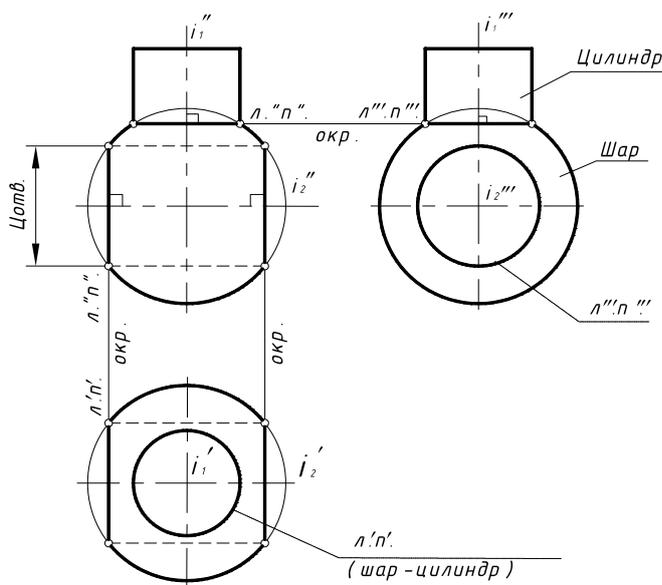


Рис. 8.8

На рис. 8.8 показан пример построения линий пересечения *д в у х* пар соосных поверхностей:

- поверхности шара и горизонтально-проецирующего цилиндра, соосных относительно горизонтально-проецирующей оси i_1 , окружности пересечения которых проецируются в прямые линии на фронтальную и профильную проекции;

- поверхности шара и сквозного профильно-проецирующего цилиндрического отверстия $\underline{Ц}_{отв}$ в шаре, соосных относительно

профильно-проецирующей оси i_2 , окружности пересечения которых проецируются в прямые линии на фронтальную и горизонтальную проекции.

4-й частный случай.

Пересечение поверхностей вращения второго порядка, описанных вокруг сферы (по теореме Г. Монжа).

Напоминаем, к поверхностям вращения второго порядка относятся круговые цилиндр и конус, шар, эллипсоиды, параболоид и одно-, двуполостные гиперboloиды.

Эллиптические цилиндры и конусы, а также наклонный круговой конус – это не поверхности вращения!

Все торы (открытый, закрытый и самопересекающийся), глобоиды и тороиды относятся к поверхностям вращения четвертого порядка!

В 4-м частном случае имеет место двойное соприкосновение пересекающихся поверхностей вращения второго порядка, описанных вокруг сферы, и построение линии пересечения основано на теореме 2 (С. А. Фролов «Начертательная геометрия» [23]):

Теорема 3, известная как теорема Г. Монжа, вытекает из теоремы 2: «Если две поверхности вращения второго порядка описаны вокруг третьей поверхности второго порядка или вписаны в нее, то линия их пересечения распадается на две кривые второго порядка, плоскости которых проходят через прямую, соединяющую точки касания».

Практическое применение теоремы возможно в том случае, когда две поверхности вращения второго порядка описаны вокруг сферы или вписаны в нее.

Использовать теорему Г. Монжа для построения на чертеже линии пересечения поверхностей можно при наличии в задаче четырех обязательных графических условий:

1. Пересекаются поверхности вращения второго порядка.
2. Оси поверхностей вращения должны пересекаться (точка пересечения – центр вписанной сферы).
3. Поверхности описаны вокруг общей сферы или вписаны в нее.
4. Общая плоскость симметрии, проходящая через оси поверхностей, является плоскостью уровня.

При соблюдении этих четырех условий на одной из заданных проекций можно построить проекции двух плоских кривых, на которые распадается искомая линия пересечения:

– плоские кривые проецируются в отрезки прямых линий на ту проекцию предмета, которая расположена на плоскости проекций, параллельной общей плоскости симметрии поверхностей;

– точки пересечения очерков поверхностей на этой проекции принадлежат искомой линии пересечения и через эти точки проходят прямые, в которые проецируются плоские кривые пересечения;

– прямые, как проекции плоских кривых, пересекаются в точке, с которой совпадают проекции двух точек $K_1 \equiv K_2$ соприкосновения поверхностей и соответственно проекция прямой $m(m', m'')$, соединяющей эти точки соприкосновения (точки касания).

!!! Точки касания (соприкосновения) поверхностей $K_1(K_1'')$ и $K_2(K_2'')$ определяются на пересечении проекций окружностей касания вписанной сферы с каждой из поверхностей.

На рис. 8.9 показан пример построения проекций линии пересечения поверхностей вращения второго порядка – прямого кругового конуса и наклонного кругового цилиндра, описанных вокруг общей сферы. Для решения задачи использована теорема Г. Монжа, поскольку здесь соблюдены все четыре обязательных условия ее применения:

1. Пересекаются прямой круговой конус и круговой наклонный цилиндр, т. е. поверхности вращения второго порядка.

2. Оси конуса и цилиндра пересекаются в точке $O(O'')$.

3. Обе поверхности описаны вокруг общей для них сферы с центром точке $O(O'')$.

4. Общая плоскость симметрии поверхностей $\alpha(\alpha_H)$ является фронтальной плоскостью уровня ($//V$).

Построение проекций линии пересечения поверхностей по теореме Г. Монжа выполняется по следующему графическому алгоритму:

1-е действие. Определить проекцию предмета, на которую плоские кривые проецируются в отрезки прямых линий: в данной задаче это фронтальная проекция, так как общая плоскость симметрии $\alpha(\alpha_H)$ параллельна фронтальной плоскости проекций V .

2-е действие. Построить фронтальные совпадающие проекции $K_1 \equiv K_2$ точек соприкосновения заданных поверхностей, лежащих на пересечении проекций окружностей касания вписанной сферы с каждой из поверхностей (прямые линии – проекций этих окружностей касания – строятся как линии пересечения соосных поверхностей, так как вписанная сфера образует две пары соосных поверхностей – конус/сфера с общей осью i_1 и цилиндр/сфера с общей осью i_2 . На чертеже проекции этих окружностей касания проходят через точки, полученные на пересечении перпендикуляров, проведенных из точки $O(O'')$ – центра вписанной сферы – к образующим конуса (окружность касания 1) и цилиндра (окружность касания 2).

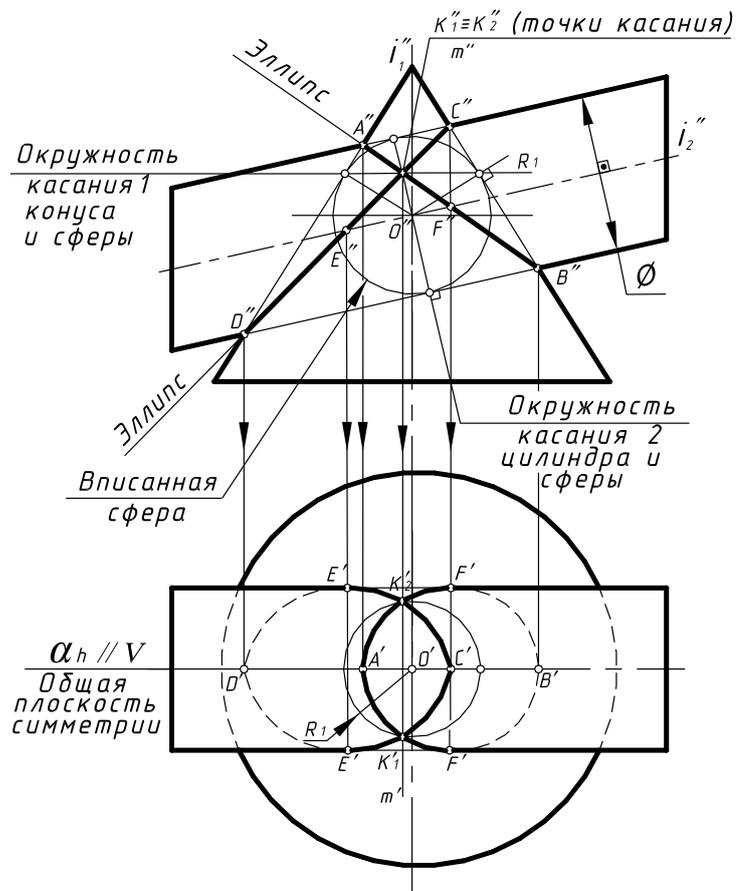


Рис. 8.9

3-е действие. Отметить на фронтальной проекции точки $A(A'')$, $B(B'')$, $C(C'')$ и $D(D'')$ пересечения очерков поверхностей и построить фронтальные проекции плоских кривых пересечения 2-го порядка, соединив прямыми линиями $A-B(A''-B'')$ и $C-D(C''-D'')$ противоположные точки пересечения очерков (обе прямые обязательно должны пройти через построенные проекции точек соприкосновения поверхностей $K_1 \equiv K_2$ ($K''_1 \equiv K''_2$));

4-е действие. Построить горизонтальные проекции двух плоских кривых пересечения – эллипсов, по горизонтальным проекциям обозначенных точек A, B, C, D, K_1 и K_2 , построенных по принадлежности поверхности конуса; обозначить и построить точки $E(E')$ и $F(F')$, которые лежат на очерковых образующих горизонтальной проекции цилиндра и определяют границу видимости кривых на горизонтальной проекции предмета, а также отметить и построить необходимое количество промежуточных точек (здесь не обозначены).

5-е действие. Оформить фронтальный и горизонтальный очерки пересекающихся поверхностей.

!!! Построение точек соприкосновения $K_1 \equiv K_2$ поверхностей особенно важно в задачах, где по условию нельзя определить одну из четырех точек пересечения очерков поверхностей. Совпадающие проекции точек соприкосновения в этом случае определяют направление одной из двух прямых линий – проекций плоских кривых пересечения (рис. 8.10). В данном случае проекция плоской кривой линии пересечения CE проведена через точки C и $K_1 \equiv K_2$. Точка E определяется на основании конуса.

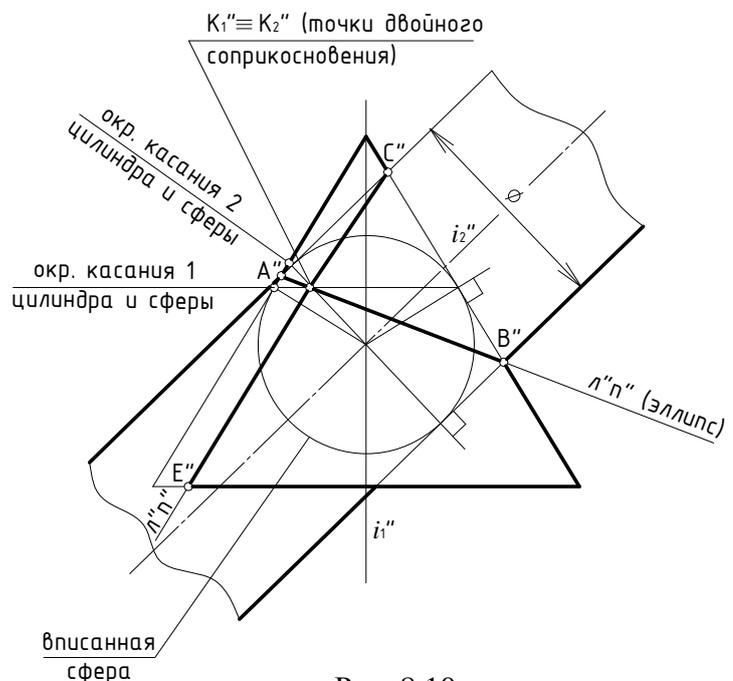


Рис. 8.10

На рис. 8.11 показаны примеры построения линий пересечения поверхностей второго порядка, описанных вокруг сферы, с применением теоремы Г. Монжа. Они часто встречаются при конструировании различных переходов цилиндрических и конических труб, или пересечений отверстий в деталях.

Общие случаи пересечения поверхностей и способы построения линий пересечения поверхностей

Ко второй рассматриваемой группе относятся общие случаи пересечения геометрических тел, боковые поверхности которых могут занимать относительно плоскостей проекций не проецирующую

ще е положение (это наклонные призмы и цилиндры), а также геометрические тела, поверхности которых не проецирующе – это конус, сфера, торы, глобoid, эллипсоид, параболоид и гиперболоиды. Сюда же относятся наклонный эллиптический цилиндр, имеющий круговые сечения, и наклонный круговой конус.

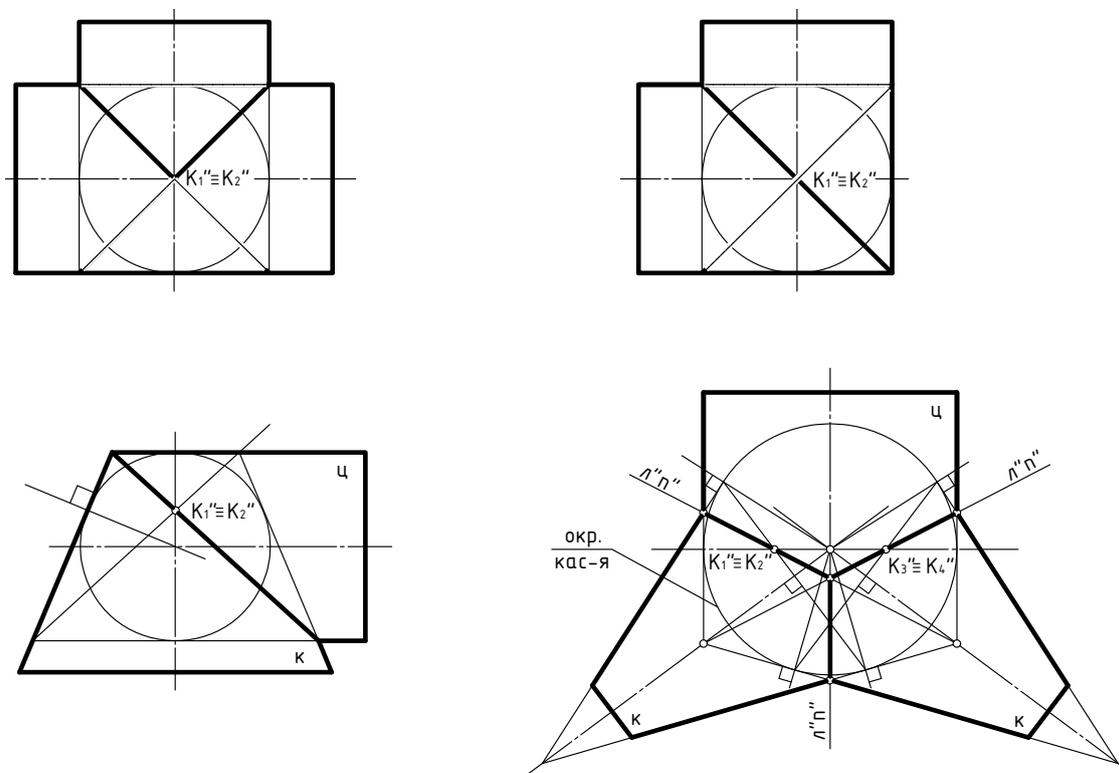


Рис. 8.11

Для построения линий пересечения поверхностей в этом случае применяются специальные способы вспомогательных посредников – плоскостей уровня или поверхностей (сфер, цилиндров, конусов), из которых мы рассматриваем следующие:

- 1) способ вспомогательных секущих плоскостей уровня;
- 2) способ вспомогательных концентрических сфер;
- 3) способ вспомогательных эксцентрических сфер.

Применение одного из указанных способов для построения линий пересечения поверхностей геометрических тел возможно при наличии некоторых обязательных графических условий расположения геометрических тел относительно плоскостей проекций и зависит от того, какие именно геометрические тела пересекаются в конкретной задаче.

Линия пересечения поверхностей является общей для обеих поверхностей и образуется множеством общих точек, которые строятся с помощью вспомогательных посредников.

Предварительно требуется выполнить графический анализ условия задачи для выбора рационального способа ее решения, определить проекцию

предмета, на которой следует начинать решение задачи, и границы введения посредников.

Для построения проекций точек, принадлежащих линии пересечения поверхностей, способом посредников следует применять общий для всех рассматриваемых способов графический алгоритм.

Графический алгоритм I:

1-е действие. Ввести вспомогательную плоскость или поверхность-посредник.

2-е действие. Построить вспомогательные линии пересечения плоскости – или поверхности-посредника с каждой из заданных поверхностей.

3-е действие. Определить точки пересечения построенных вспомогательных линий пересечения – эти точки принадлежат искомой линии пересечения.

Рассмотрим на примерах применение различных способов вспомогательных посредников для построения проекций линий пересечения поверхностей.

Способ вспомогательных секущих плоскостей уровня

Применение способа вспомогательных секущих плоскостей рационально при наличии двух графических условий:

1. Общая плоскость симметрии пересекающихся геометрических тел является *плоскостью уровня*; при соблюдении этого условия точки пересечения

очерков поверхностей принадлежат искомой линии пересечения и определяют верхнюю и нижнюю границу введения плоскостей-посредников на соответствующей проекции предмета.

2. Сечениями геометрических тел в одной из плоскостей уровня должны быть простые в построении линии пересечения – прямые линии (образующие) или окружности; эту плоскость уровня и следует выбрать в качестве посредника.

На рис. 8.12 показан пример построения проекций линии пересечения прямого конуса и половины шара.

Для решения задачи требуется предварительно выполнить графический анализ заданных проекций предмета:

А. Выбираем для решения задачи способ вспомогательных секущих плоскостей, так как здесь соблюдены два графических условия его применения:

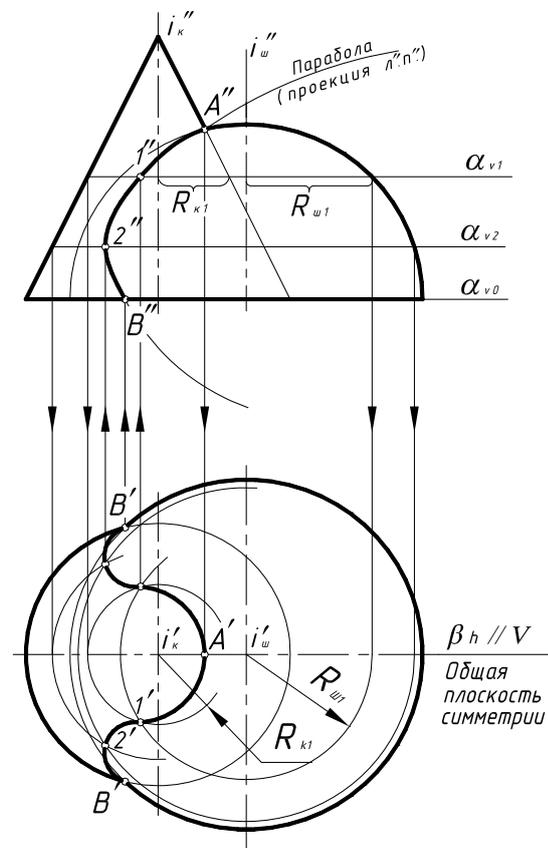


Рис. 8.12

– общая плоскость симметрии $\beta(\beta_H)$ геометрических тел – конуса и полушара – является фронтальной плоскостью уровня (первое условие применения);

– горизонтальные плоскости уровня, которые пересекают поверхности конуса и полушара по окружностям, выбираем в качестве вспомогательных плоскостей-посредников (второе условие применения).

Б. Решение задачи, то есть введение плоскостей-посредников, начинаем на фронтальной проекции предмета, так как общая плоскость симметрии геометрических тел является фронтальной плоскостью уровня.

В. Определяем границы введения плоскостей-посредников – это точка $A(A'')$ пересечения фронтальных очерков и точки $B(B', B'')$ пересечения окружностей оснований конуса и полушара, лежащие в горизонтальной плоскости уровня $\alpha(\alpha_{V_0})$.

Построить проекции точек искомой линии пересечения, выполнив действия предложенного графического алгоритма I:

1-е действие. Ввести на фронтальной проекции предмета первую вспомогательную секущую горизонтальную плоскость-посредник $\alpha(\alpha_{V_1})$ произвольно и ниже точки $A(A'')$.

2-е действие. Построить на горизонтальной проекции предмета вспомогательные окружности радиусами R_{K1} и $R_{ш1}$, по которым секущая плоскость-посредник $\alpha(\alpha_{V_1})$ пересекает поверхности конуса и шара.

3-е действие. Определить на пересечении построенных вспомогательных окружностей горизонтальные проекции точек $1(1')$, принадлежащих линии пересечения; фронтальные совпадающие проекции $1(1'')$ этих точек определяются по линии связи на фронтальной проекции плоскости-посредника $\alpha(\alpha_{V_1})$.

3.1. Повторить действия основного графического алгоритма, введя вторую плоскость-посредник $\alpha_2(\alpha_{V_2})$, и построить проекции точек $2(2', 2'')$ и т. д.

Дополнительные действия:

4-е действие. Соединить проекции построенных точек на фронтальной и горизонтальной проекциях предмета плавными кривыми линиями с учетом их видимости на проекциях: на фронтальную проекцию предмета пространственная кривая пересечения проецируется в видимую плоскую кривую второго порядка (участок параболы), поскольку горизонтальная проекция предмета имеет фронтальную симметрию; на горизонтальную проекцию предмета – в участок видимой кривой 4-го порядка сложной формы.

5-е действие. Оформить очерки поверхностей на заданных проекциях предмета с учетом их относительной видимости:

– на фронтальной проекции – очерк конуса существует влево от точки $A(A'')$, а очерк шара вправо от точки $A(A'')$ (несуществующие очерки конуса и шара оставить тонкими линиями);

– на горизонтальной проекции – окружность основания конуса существует влево от точек $B(B')$, а окружность основания шара существует

вправо от точек $B(B')$ (несуществующие части окружностей оснований конуса и шара оставить тонкими линиями).

!!! Способ вспомогательных секущих плоскостей позволяет строить одновременно две проекции искомой линии пересечения.

Способ вспомогательных концентрических сфер
Основанием для применения сферы в качестве вспомогательной поверхности-посредника являются две ее характерные особенности:

- в сфере можно провести через ее центр бесконечное количество осей;
- сфера может быть соосна любой поверхности вращения; соосные поверхности пересекаются по окружностям, проекции которых легко построить (см. рис. 8.7 и 8.8).

Сфера-посредник образует две пары соосных поверхностей с каждой из заданных поверхностей. Каждая образованная пара соосных поверхностей пересекается по соответствующим окружностям, которые проецируются в прямые, перпендикулярные общей оси каждой пары, и проходят через точки пересечения очерков каждой пары соосных поверхностей.

Применение способа вспомогательных концентрических сфер для построения линии пересечения поверхностей возможно при наличии трех следующих графических условий:

1. Пересекаются поверхности вращения (кроме открытого и закрытого тора).

2. Общая плоскость симметрии пересекающихся поверхностей является плоскостью уровня; при этом условии точки пересечения очерков на проекции предмета, изображенного на параллельной общей плоскости симметрии плоскости проекций, принадлежат искомой линии пересечения.

3. Оси поверхностей пересекаются; точка пересечения осей является центром всех вспомогательных сфер.

На рис. 8.13 показан пример построения проекций линии пересечения усеченного конуса и тороида (самопересекающийся тор).

Рассмотренный способ вспомогательных секущих плоскостей здесь применять не следует, так как ни одна плоскость уровня не пересекает поверхности одновременно по окружностям (одно из условия применения).

Для решения задачи требуется предварительно выполнить графический анализ заданных проекций предмета.

А. Выбираем для решения задачи способ вспомогательных концентрических сфер, так как здесь соблюдены три графических условия его применения:

- пересекаются поверхности вращения – прямой круговой конус и тороид (самопересекающийся тор);

- общая плоскость симметрии геометрических тел $\beta(\beta_H)$ является фронтальной плоскостью уровня;

- оси поверхностей пересекаются в точке $O(O'')$ – центр всех вспомогательных сфер.

Б. Решение задачи, то есть введение вспомогательных сфер-посредников начинаем на фронтальной проекции предмета, так как общая плоскость симметрии является фронтальной плоскостью уровня и точки $A(A'')$, $B(B'')$, $C(C'')$ и $D(D'')$ пересечения фронтальных очерков принадлежат линии пересечения.

В. Определяем границы введения сфер – это точки $C(C'')$ и $D(D'')$ пересечения фронтальных очерков пересекающихся геометрических тел.

Построить проекции точек линии пересечения, выполнив действия предложенного графического алгоритма I.

1-е действие. Ввести на фронтальной проекции вспомогательную сферу-посредник минимального радиуса R_{1min} , с центром в точке $O(O'')$, вписанную в тороид (минимальная сфера-посредник должна вписываться в одну из поверхностей, а с другой поверхностью – пересекаться).

2-е действие. Построить проекции вспомогательных окружностей пересечения двух пар соосных поверхностей, образованных сферой-посредником с каждой заданной поверхностью:

- первая пара соосных поверхностей – сфера-посредник и тороид – имеют горизонтальную общую ось i_1'' и пересекаются по окружности касания n_1'' , которая проецируется в прямую линию (совпадает с осью конуса);
- вторая пара соосных поверхностей – сфера-посредник и конус имеют вертикальную общую ось вращения i_2'' и пересекаются по двум вспомогательным окружностям m_1'' , которые проецируются в прямые линии;

3-е действие. Определить точки $1(1_1'')$ пересечения построенных проекций вспомогательных окружностей m_1'' и n_1'' , которые принадлежат искомым линиям пересечения (по две пары совпадающих точек).

!!! Здесь имеет место случай полного проникания (II случай), и линия пересечения распадается на две замкнутые кривые.

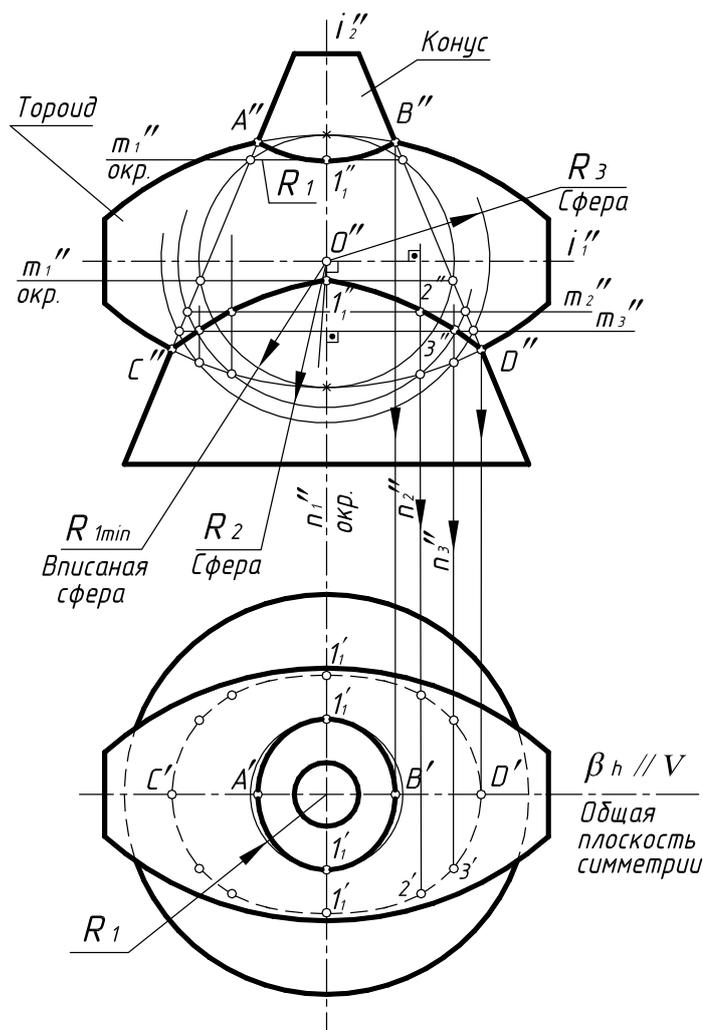


Рис. 8.13

Дополнительные действия:

4-е действие. Повторить действия основного графического алгоритма, введя вспомогательные сферы большего радиуса R_2 и R_3 с тем же центром в точке $O(O'')$, и построить следующие пары точек $2(2'')$ и $3(3'')$.

4.1. Достроить горизонтальные проекции построенных точек линии пересечения по принадлежности параллелям конуса.

4.2. Соединить проекции построенных точек на фронтальной и горизонтальной проекциях предмета плавными кривыми линиями с учетом их видимости на проекциях (только линия пересечения $D'-3'-2'-1_1'-C'$ будет невидимой на горизонтальной проекции предмета).

5-е действие. Оформить очерки поверхностей на заданных проекциях предмета с учетом их относительной видимости.

Способ вспомогательных эксцентрических сфер

Наименование способа говорит о том, что вспомогательные сферы имеют разные центры, которые и нужно определять в процессе построения проекций линии пересечения поверхностей.

Способ вспомогательных эксцентрических сфер для построения линии пересечения поверхностей возможно применять при наличии трех следующих графических условий:

1. Пресекаются:

– поверхности вращения 4-го порядка, т. е. торовые поверхности – открытый или закрытый тор;

– поверхности эллиптических цилиндра и конуса, имеющие круговые сечения.

2. Общая плоскость симметрии поверхностей является плоскостью уровня.

3. Оси поверхностей пересекаются или скрещиваются.

Поскольку в этом способе центр каждой вспомогательной сферы нужно определять графическими построениями, первое действие графического алгоритма для построения проекций точек линии пересечения дополняется построением центра каждой вспомогательной сферы.

Порядок графических действий для построения линий пересечения способом вспомогательных эксцентрических сфер показан на двух примерах.

На рис. 8.14 показан пример построения проекции линии пересечения профильно-проецирующего цилиндра с поверхностью четвертой части открытого тора. Задача решается способом вспомогательных эксцентрических сфер, так как здесь соблюдены три необходимых условия для применения этого способа:

– одна из пересекающихся поверхностей – открытый тор, имеющий круговые сечения во фронтально-проецирующих плоскостях, проходящих через его ось вращения i''_m ;

– общая плоскость симметрии поверхностей – фронтальная плоскость уровня (подразумевается), поэтому точка $A(A'')$ пересечения фронтальных очерков принадлежит искомой линии пересечения;

– оси поверхностей i_u и i_m скрещиваются.

Построение проекций точек линии пересечения поверхностей выполняется на заданной фронтальной проекции предмета по предлагаемому графическому алгоритму II.

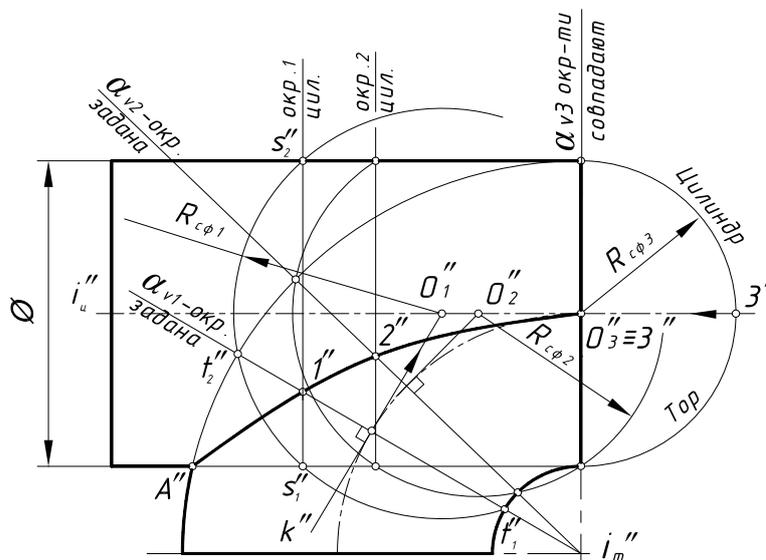


Рис. 8.14

Графический алгоритм II.

1-е действие. Ввести вспомогательную сферу, выполнив предварительно следующие графические действия.

1.1. Задать произвольное круговое сечение поверхности тора фронтально-проецирующей плоскостью α_{V1} , проходящей через его ось i_m'' ; окружность t_1-t_2 , (ее проекция – прямая линия $t''_1-t''_2$) – это заданная линия пересечения тора с искомой вспомогательной сферой, центр которой должен лежать на перпендикуляре к проекции этой окружности – прямой $t''_1-t''_2$ (хорда окружности, в которую проецируется вспомогательная сфера).

1.2. Провести к прямой $t''_1-t''_2$ через ее середину перпендикуляр k'' и на его пересечении с осью цилиндра i_u'' определить центр первой вспомогательной сферы – точку O''_1 .

1.3. Провести окружность – проекцию вспомогательной сферы-посредника – с центром в точке O''_1 , радиус которой $R_{сф.1}$ определяется расстоянием от точки O''_1 до одной из крайних точек t''_1 или t''_2 прямой $t''_1-t''_2$.

2-е действие. Построить проекцию окружности пересечения построенной сферы-посредника с поверхностью соосного ей цилиндра – это прямая $s''_1-s''_2$, проходящая через точки s''_1 и s''_2 пересечения очерков цилиндра и сферы-посредника.

3-е действие. Определить на пересечении построенных проекций заданной окружности $t''_1-t''_2$ и построенной окружности $s''_1-s''_2$ совпадающие точки $1(1'')$, принадлежащие искомой линии пересечения заданных поверхностей.

Дополнительные действия:

4-е действие. Повторить действия графического алгоритма и построить достаточное количество точек линии пересечения. В данном примере дополнительными сечениями вспомогательных плоскостей α_{V2} и α_{V3} и вспомогательными сферами $R_{сф.2}$ и $R_{сф.3}$ с центрами O_2 и O_3 построены

точки 2 и 3, принадлежащие линии пересечения. Причем в плоскости α_{V3} окружности сечений совпадают и совпадающие точки 3 делят существование этих окружностей на две половины – верхняя часть принадлежит цилиндру, а нижняя – тору.

5-е действие. Соединить на фронтальной проекции точки $A''-1''-2''-3''$ линии пересечения плавной видимой кривой.

6-е действие. Оформить очерки поверхностей на заданной проекции.

На рис. 8.15 показан пример построения линии пересечения наклонного кругового цилиндра ζ_1 с осью i''_1 и наклонного эллиптического цилиндра с осью i''_2 , у которого есть круговые сечения в горизонтальных плоскостях уровня.

Выполнить графический анализ условия и исключить нерациональный способ решения задачи.

Рассмотренный способ вспомогательных секущих плоскостей применять не следует, так как на заданной фронтальной проекции ни одна плоскость уровня не пересекает поверхности одновременно по окружностям или образующим (одно из условий применения).

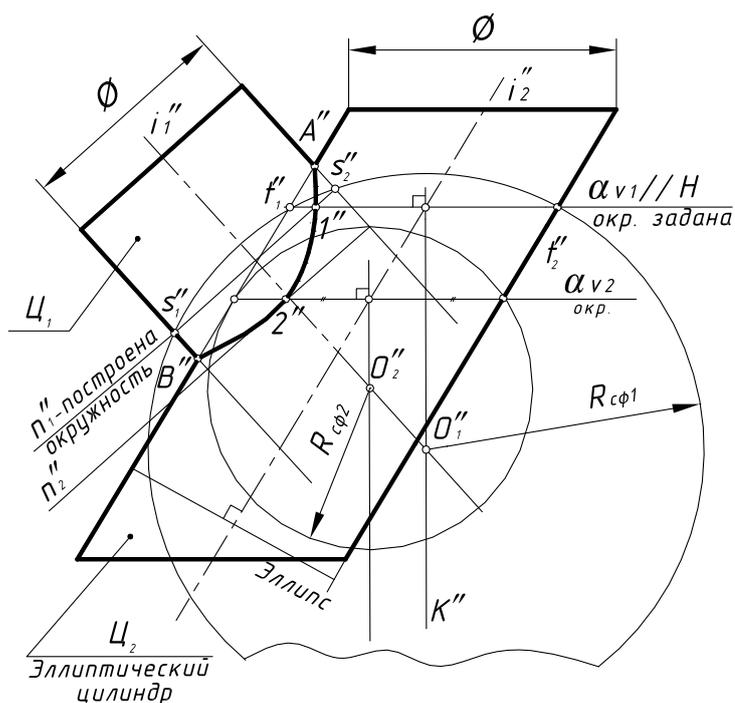


Рис. 8.15

Рассмотренный способ вспомогательных концентрических сфер применять нельзя, так как проведенные сферы с центром в точке пересечения осей образуют соосные пары только с одной заданной поверхностью ζ_1 (одно из условий применения).

Выбираем для решения задачи способ вспомогательных эксцентрических сфер, так как здесь соблюдены три условия его применения:

- пересекаются наклонный круговой цилиндр ζ_1 и эллиптический цилиндр ζ_2 (поверхность не вращения);
- общая плоскость симметрии поверхностей является фронтальной плоскостью уровня (подразумевается);
- оси поверхностей i_1 и i_2 – пересекаются.

Решение задачи, то есть введение сечений цилиндра ζ_2 (параллельных заданному) горизонтальными плоскостями уровня α , начинаем на фронтальной проекции предмета, так как общая плоскость симметрии является фронтальной плоскостью уровня и точки $A(A'')$ и $B(B'')$ пересечения фронтальных очерков принадлежат линии пересечения.

Определяем границы введения сечений цилиндра ζ_2 – это точки $A(A'')$ и $B(B'')$ пересечения фронтальных очерков пересекающихся геометрических тел.

Построить проекции точек линии пересечения поверхностей, выполнив действия предложенного графического алгоритма II.

Графический алгоритм II.

1-е действие. Ввести вспомогательную сферу, выполнив предварительные графические действия.

1.1. Задать произвольное круговое сечение эллиптического цилиндра ζ_2 горизонтальной плоскостью α_{V1} – прямую t_1-t_2 . Эта заданная линия t_1-t_2 – окружность пересечения эллиптического цилиндра с искомой вспомогательной сферой, центр которой лежит на перпендикуляре, проведенном из середины этой прямой.

1.2. Провести к прямой t_1-t_1 через ее середину перпендикуляр k'' и на пересечении с осью i_1 кругового цилиндра ζ_1 определить точку O_1 – центр первой вспомогательной сферы-посредника.

1.3. Провести окружность сферы-посредника радиусом $R_{сф.1}$, который определяется расстоянием от точки O''_1 до одной из точек t''_1 или t''_2 прямой t_1-t_2 .

2-е действие. Построить проекцию окружности пересечения сферы-посредника с соосной ей поверхностью кругового цилиндра ζ_1 – это прямая s_1-s_2 , проходящая через точки пересечения очерков сферы и цилиндра.

3-е действие. Определить на пересечении заданной окружности $t_1''-t_2''$ и построенной окружности $s_1''-s_2''$ совпадающие точки $1(1'')$, принадлежащие искомой линии пересечения.

Дополнительные действия.

4-е действие. Повторить действия графического алгоритма II и построить проекции точек $2(2'')$;

5-е действие. Соединить на фронтальной проекции точки $A''-1''-2''-B''$ линии пересечения плавной видимой кривой.

6-е действие. Оформить очерки поверхностей на заданной проекции.

Структуризация материала восьмой лекции в рассмотренном объеме схематически представлена на рис. 8.16 (лист 1). На последующих листах 2–5 приведены иллюстрации к этой схеме для быстрого визуального закрепления изученного материала при повторении (рис. 8.17–8.20).

Пересечение поверхностей

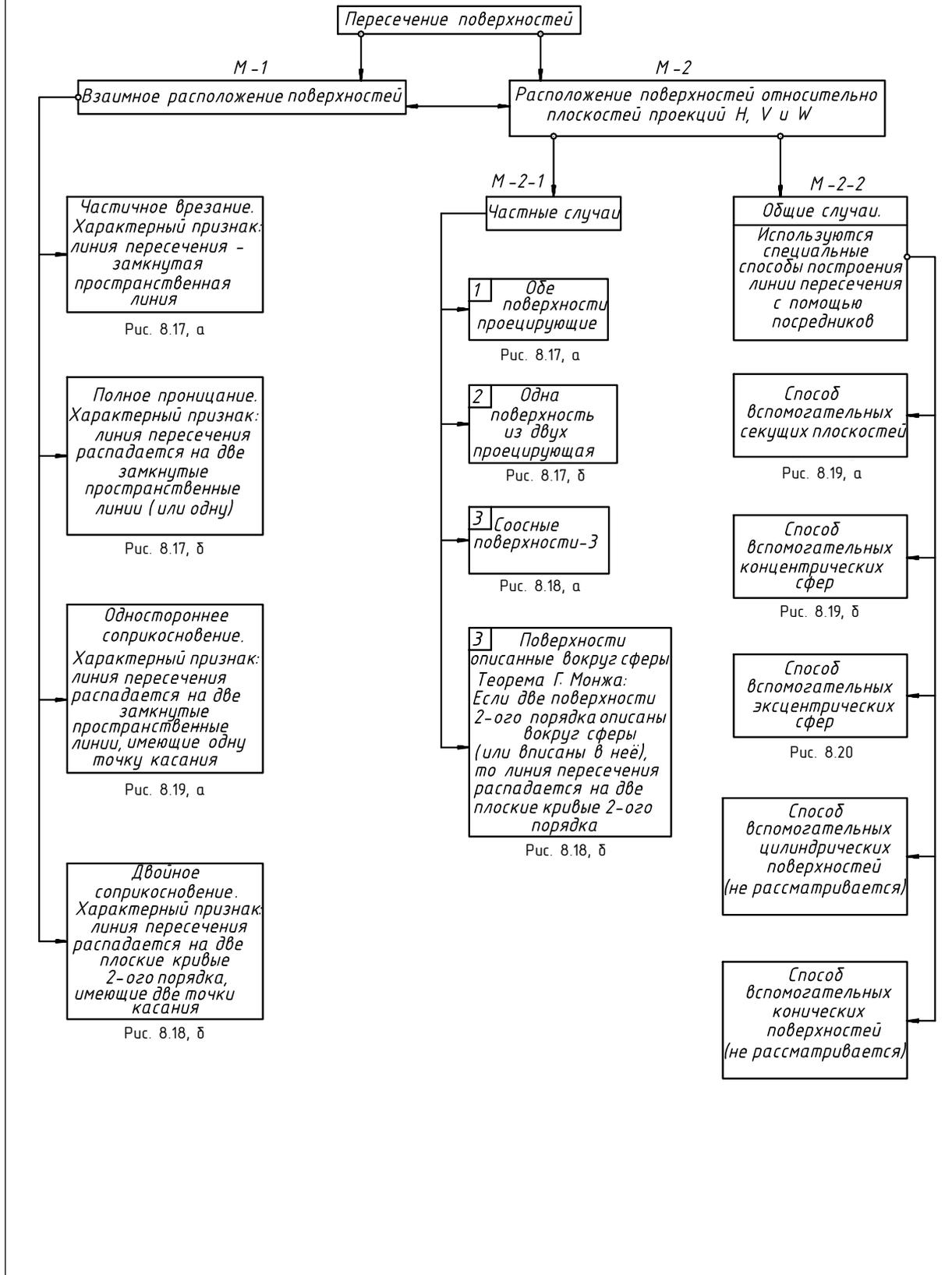
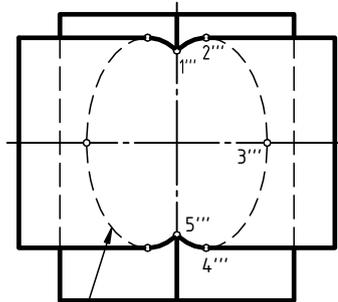
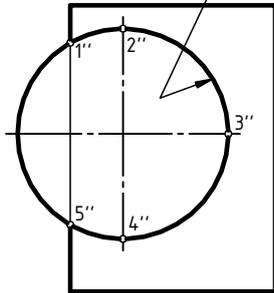


Рис. 8.16

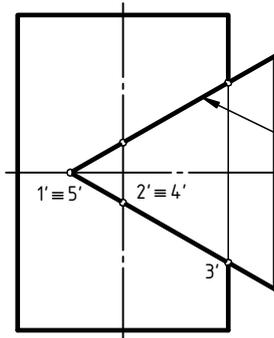
Пересечение поверхностей

Частный случай 1. Обе пересекающиеся поверхности проецирующие

Фронтальная проекция линии пересечения - дана на чертеже



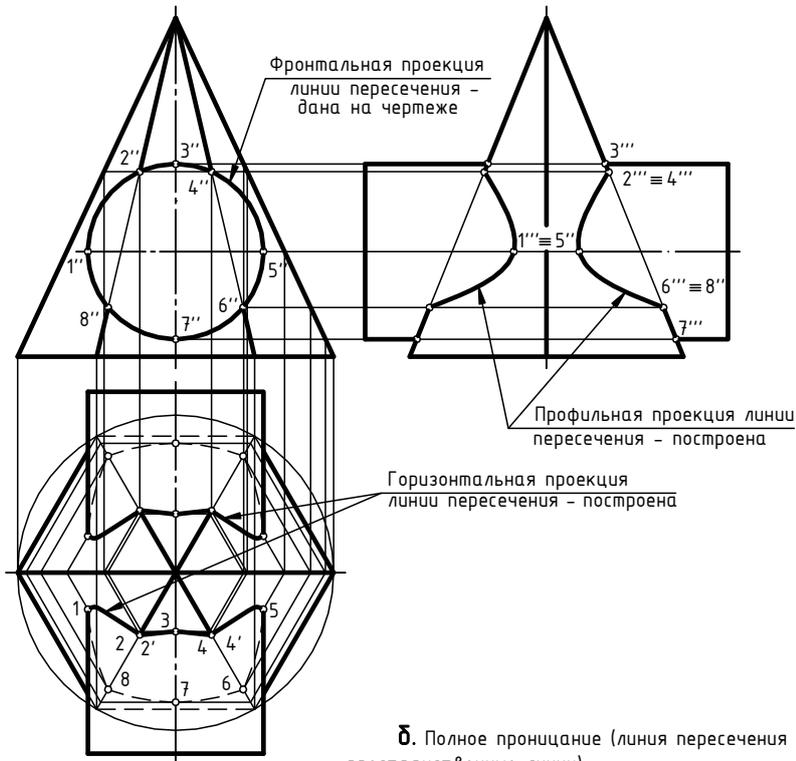
Профильная проекция линии пересечения - построена



Горизонтальная проекция линии пересечения - дана на чертеже

а. Частичное врезание (линия пересечения - замкнутая пространственная линия)

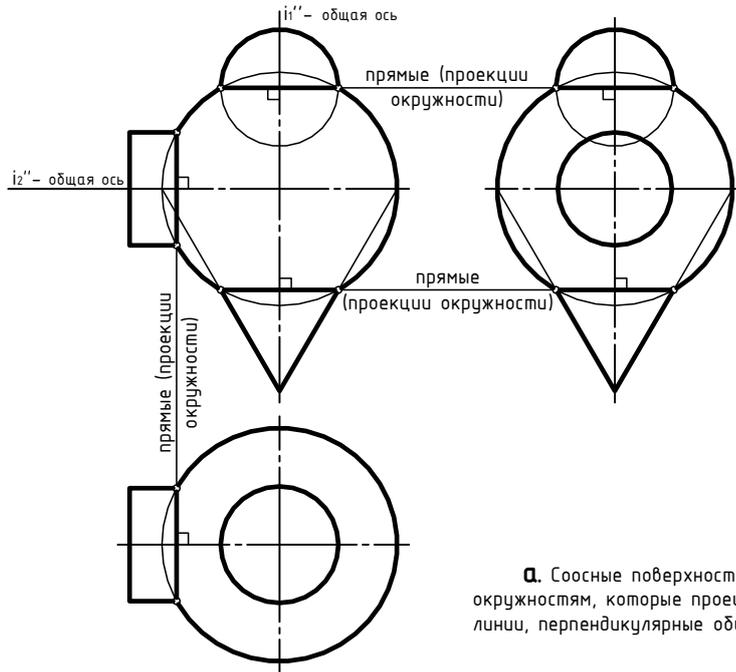
Частный случай 2. Одна из двух пересекающихся поверхностей проецирующая



б. Полное проникание (линия пересечения - две замкнутые пространственные линии)

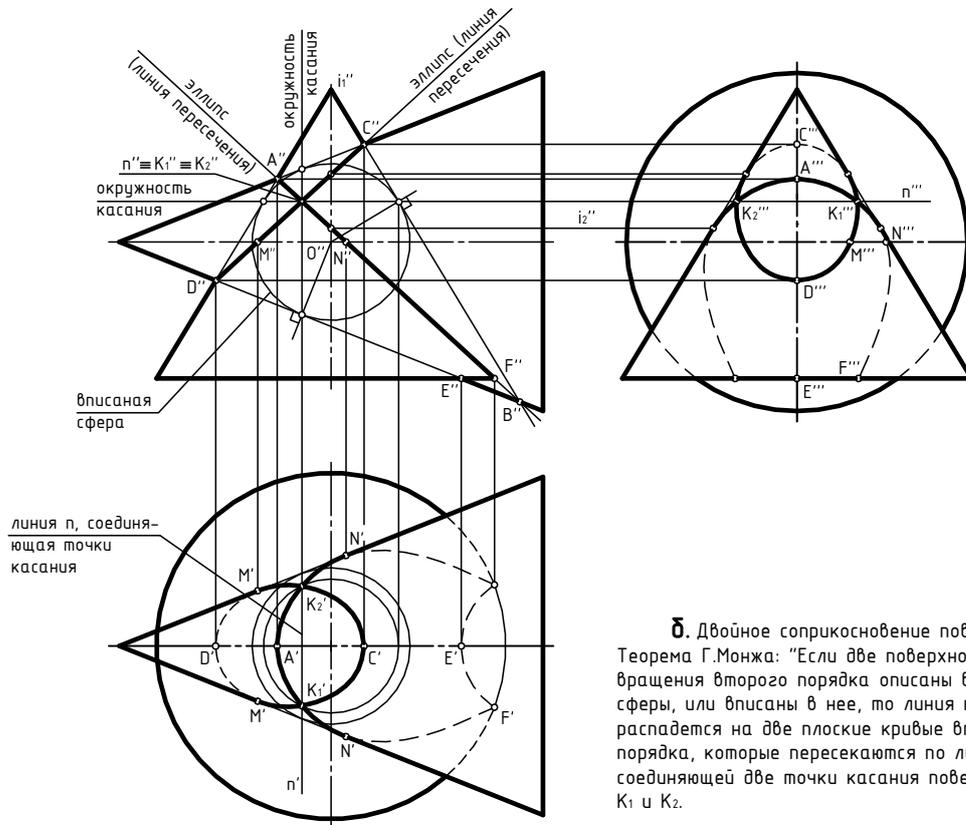
Пересечение поверхностей

Частный случай 3. Соосные поверхности вращения (с общей осью i)



а. Соосные поверхности пересекаются по окружностям, которые проецируются в прямые линии, перпендикулярные общей оси вращения i .

Частный случай 4. Пересечение поверхностей вращения 2-го порядка, описанных вокруг сферы



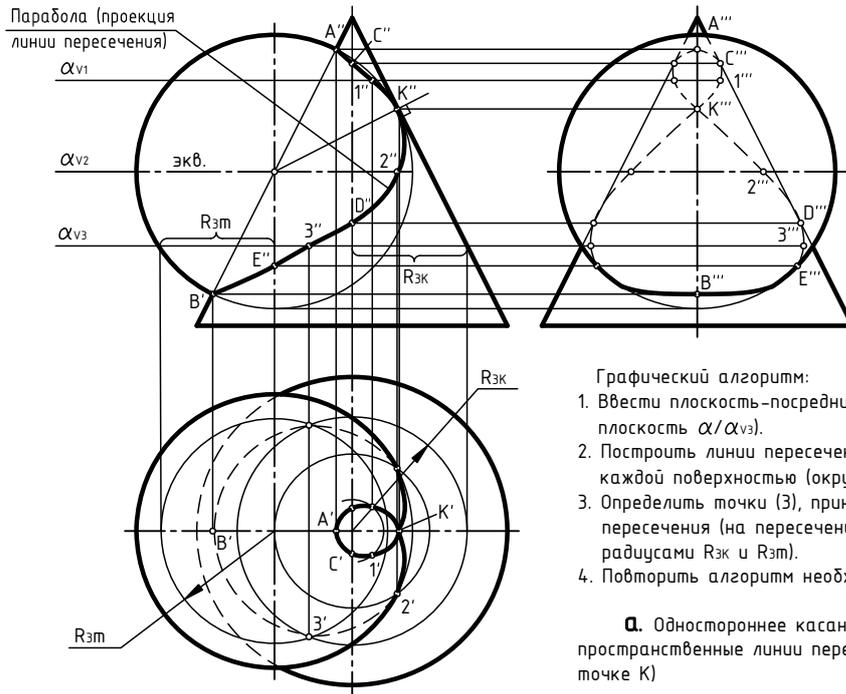
б. Двойное соприкосновение поверхностей. Теорема Г.Монжа: "Если две поверхности вращения второго порядка описаны вокруг сферы, или вписаны в нее, то линия пересечения распадется на две плоские кривые второго порядка, которые пересекаются по линии n , соединяющей две точки касания поверхностей K_1 и K_2 ."

Рис. 8.18

Пересечение поверхностей

Общие случаи пересечения поверхностей

1. Способ вспомогательных секущих плоскостей

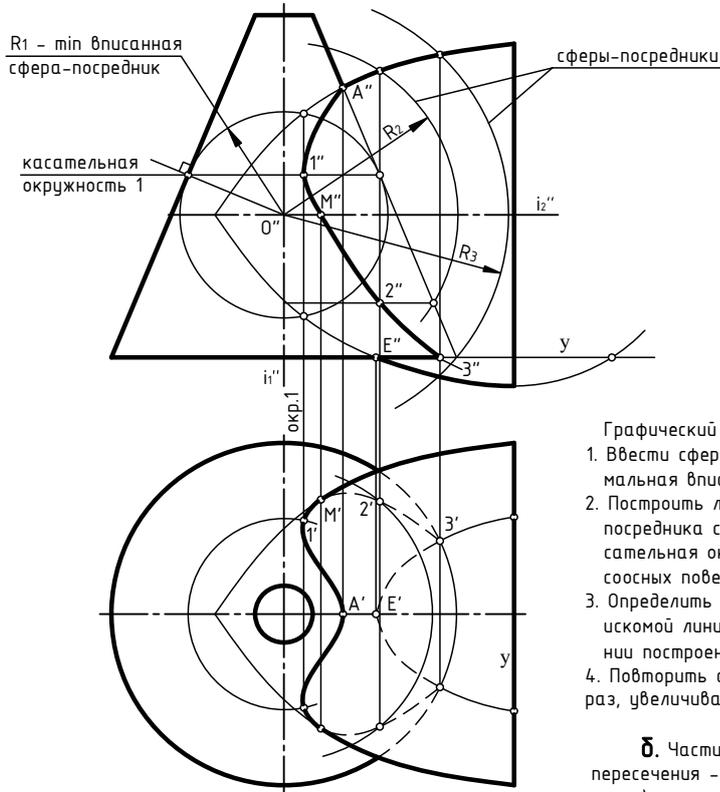


Графический алгоритм:

1. Ввести плоскость-посредник (горизонтальная плоскость α/α_{v3}).
2. Построить линии пересечения плоскости-посредника с каждой поверхностью (окружности радиусом $R_{зк}$ и $R_{зм}$).
3. Определить точки (3), принадлежащие искомой линии пересечения (на пересечении построенных окружностей радиусами $R_{зк}$ и $R_{зм}$).
4. Повторить алгоритм необходимое число раз.

а. Одностороннее касание (две замкнутые пространственные линии пересечения касаются в одной точке K)

2. Способ вспомогательных концентрических сфер



Графический алгоритм:

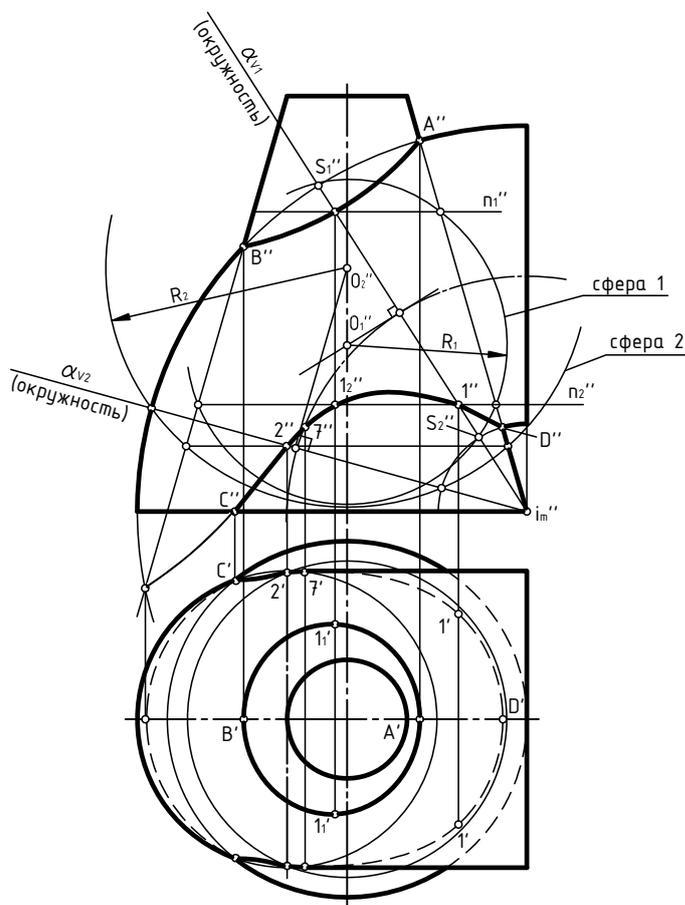
1. Ввести сферу-посредник (R_{\min} – минимальная вписанная сфера-посредник)
2. Построить линии пересечения сферы-посредника с каждой поверхностью (касательная окр.1 и окр.1, пересечение соосных поверхностей)
3. Определить точки 1, принадлежащие искомой линии пересечения (на пересечении построенных проекций окружностей 1)
4. Повторить алгоритм необходимое число раз, увеличивая радиусы сфер-посредников

б. Частичное врезание (линия пересечения – замкнутая пространственная линия)

Рис. 8.19

Пересечение поверхностей

3. Способ вспомогательных эксцентрических сфер



Графический алгоритм:

1. Предварительные действия для определения центра вспомогательной сферы-посредника

1. Задать проекцию окружности (прямая $S_1 - S_2$) по которой вспомогательная плоскость α/α_{v1} пересекает поверхность открытого тора.

2. Провести через середину этой проекции перпендикуляр к ней до пересечения с осью конуса - на пересечении определяется центр первой сферы-посредника $O_1(O'')$.

II. Основные действия

3. Ввести сферу-посредник радиусом R_1 с центром в т. $O_1(O'')$.

4. Построить линии пересечения сферы-посредника с каждой поверхностью (заданная окружность $S_1 - S_2$ и две построенные окружности π_1 и π_2).

5. Определить точки $1_1''$ и $1_2''$, принадлежащие искомой линии пересечения (на пересечении линий $S_1 - S_2$ ($S_1'' - S_2''$) и π_1'' и π_2'').

Полное проициание (линия пересечения распадается на две замкнутые пространственные линии)

Лекция 9

РАЗВЕРТКИ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Развертки поверхностей. Общие сведения

Разверткой называется плоская фигура, в которую преобразуется поверхность предмета при ее совмещении с плоскостью. При этом подразумевается, что поверхность – это гибкая, но нерастяжимая и несжимаемая пленка и при ее развертке не происходит разрывов и образования складок.

Поверхности, которые допускают такое преобразование, называются *развертывающимися*.

К развертывающимся поверхностям относятся многогранники и некоторые линейчатые поверхности – цилиндрические, конические и поверхности с ребром возврата (торсы – развертка торсов не рассматривается).

Развертки можно построить *точные* и *приближенные*.

Точные развертки можно строить для гранных поверхностей призмы и пирамиды (не считая графических погрешностей построения), для круговых цилиндров (развертка – прямоугольник с размерами $(\pi \cdot d) \times H$) и круговых конусов (круговой сектор с углом $\varphi = R \cdot 360^\circ / L$, где R – радиус основания конуса; L – длина его образующей).

Развертки, которые можно построить графически, заменяя (*аппроксимирова*) заданные поверхности участками развертывающихся призматических, пирамидальных или цилиндрических поверхностей, называются *приближенными*. К поверхностям, развертку которых можно построить *приближенно*, относятся круговые наклонные конуса, эллиптические цилиндры с круговыми сечениями, сферические, торовые, а также комбинированные поверхности, участки которых состоят из развертывающихся поверхностей.

Каждой точке на поверхности соответствует единственная точка на развертке, т. е. между поверхностью и ее разверткой существует взаимно однозначное соответствие, которое обладает следующими основными свойствами:

- а) длины соответствующих линий на поверхности и на развертке равны;
- б) линии, параллельные на поверхности, сохраняют параллельность на развертке;
- в) углы между соответствующими пересекающимися линиями на поверхности и на развертке равны;
- г) площади соответствующих фигур на поверхности и на развертке, ограниченные замкнутыми линиями, равны.

Развертки многогранников

Построение развертки многогранников сводится к определению натуральных величин боковых граней или ребер этих поверхностей. Натуральные величины граней (плоскостей) или ребер (прямых) могут быть определены любым из рассмотренных выше способов преобразования чертежа (см. тему «Преобразование чертежа»).

Развертка поверхности призмы

Построение развертки поверхности призмы можно выполнить несколькими способами:

1. Способ нормального сечения.
2. Способ раскатки.
3. Способ треугольников (*триангуляции*) – здесь не рассматривается.

Рассмотрим на примерах построение развертки поверхности призмы первыми двумя способами.

1-й способ. Способ нормального сечения (нормальное сечение перпендикулярно ребрам призмы).

Этот способ развертки боковой поверхности призмы можно применить, если на чертеже:

– ребра призмы являются прямыми уровня, то есть имеют на одной из заданных проекций натуральную величину,

– на проекциях нет натуральных величин оснований призмы.

!!! Если на чертеже ребра призмы являются прямыми общего положения, то следует изменить положение призмы относительно плоскостей проекций, преобразовав ребра в прямые уровня, например, способом замены плоскостей проекций.

Построение развертки боковой поверхности призмы способом нормального сечения выполняется по следующему графическому алгоритму:

1-е действие. Провести на проекции призмы, на которую ребра призмы проецируются в натуральную величину, плоскость *нормального сечения*, перпендикулярную ее ребрам (в произвольном месте по длине ребер).

2-е действие. Построить натуральную величину многоугольника нормального сечения (например, способом замены плоскостей проекций).

3-е действие. Развернуть на свободном поле чертежа натуральный многоугольник сечения в прямую и через точки его вершин провести перпендикулярные прямые – направления ребер.

4-е действие. Отложить на направлениях ребер в обе стороны от линии нормального сечения натуральные отрезки соответствующих ребер.

5-е действие. Соединить построенные конечные точки ребер отрезками прямых и достроить плоскую фигуру развертки боковой поверхности призмы.

6-е действие. Оформить чертеж развертки, проведя линии сгиба в местах расположения ребер тонкими штрихпунктирными линиями с двумя короткими пунктирами.

На рис. 9.1 показан пример построения развертки поверхности треугольной призмы способом нормального сечения, так как на чертеже призмы ее ребра являются горизонтальными прямыми уровня, а основания являются плоскостями общего положения, т. е. не имеют натуральной величины.

Поверхность призмы «разрезана» по ребру *A* и развернута по часовой стрелке.

Для построения развертки выполнены графические действия предложенного алгоритма.

1-е действие. Провести горизонтально-проецирующую плоскость нормального сечения $\alpha(\alpha_n)$ перпендикулярно горизонтальным проекциям ребер призмы (произвольно по длине ребер).

2-е действие. Способом замены плоскостей проекций построить натуральную величину нормального сечения – треугольник $1''-2''-3''$, стороны которого определяют ширину каждой грани призмы.

3-е действие. На свободном поле чертежа треугольник $1''-2''-3''$ нормального сечения развернуть в горизонтальную линию и отметить натуральные величины его сторон; из отмеченных на линии сечения точек 1, 2, 3 и 1 провести перпендикулярные прямые – направления ребер.

4-е действие. Отложить на проведенных направлениях ребер вверх и вниз отрезки натуральных величин ребер (см. ребро $B'-B'_1$), взятых с заданной горизонтальной проекции призмы, где ребра имеют натуральную величину.

5-е действие. Соединить отрезками прямых построенные конечные точки ребер и достроить плоскую фигуру развертки.

6-е действие. Оформить чертеж развертки, выполнив линии сгиба по ребрам призмы тонкими штрихпунктирными линиями с двумя короткими штрихами.

На этом же рис. 9.1 показано также построение на развертке точки $E(E'', E')$, лежащей на грани AB призмы.

2-й способ. Способ раскатки

Этот способ развертки применяется, если на чертеже:

- ребра призмы являются прямыми уровня;
- основания призмы (или одно из оснований) лежат в плоскости уровня, т. е. имеют на чертеже натуральную величину.

Способ нормального сечения

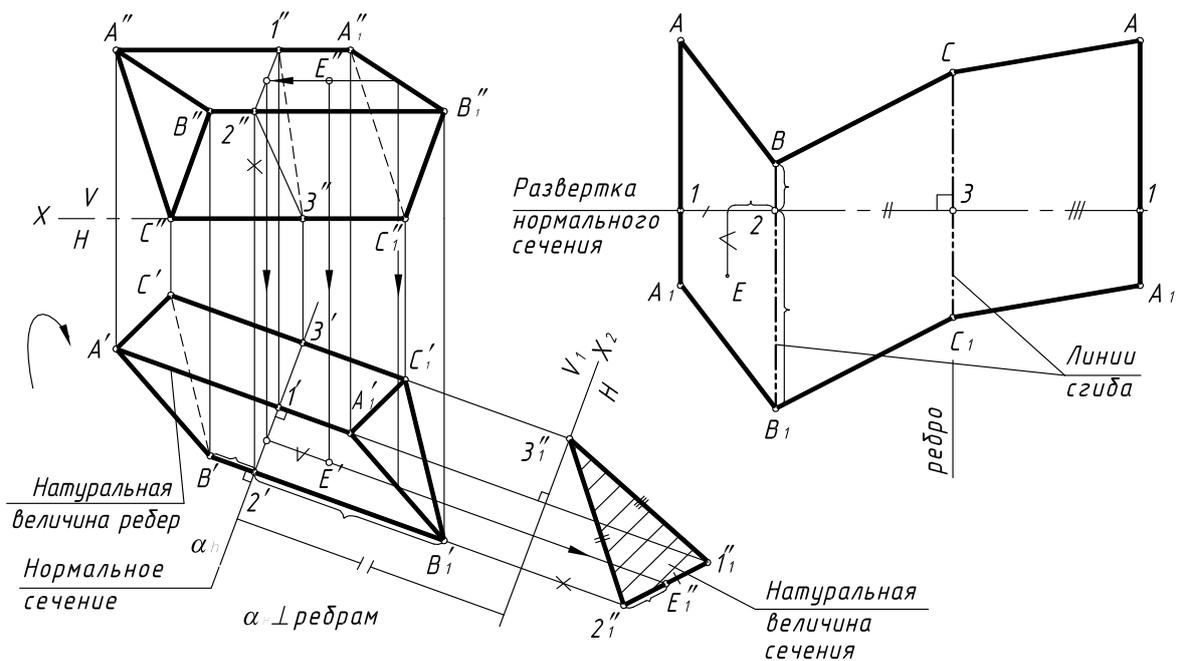


Рис. 9.1

Суть способа в том, что, «разрезав» поверхность призмы по одному из ее ребер, вращением призмы (раскаткой) вокруг этого ребра ближайшая грань призмы совмещается с плоскостью развертки (за плоскость развертки принимается плоскость проекций, которой параллельны ребра призмы). Затем последовательным вращением призмы вокруг следующих ребер с плоскостью развертки совмещаются все прочие грани призмы, т. е. выполняется полная раскатка ее боковой поверхности.

На рис. 9.2 показан пример построения развертки способом раскатки, так как на чертеже ребра призмы являются фронтальными прямыми, а оба основания лежат в горизонтальных плоскостях уровня и на горизонтальной проекции призмы имеют натуральную величину. За плоскость развертки принята фронтальная плоскость проекций, так как ребра призмы фронтальные прямые.

Построение развертки способом раскатки выполняется по следующему графическому алгоритму:

1-е действие. «Разрезать» поверхность призмы по очерковому ребру $A-A_1(A''-A_1'')$ и повернуть вокруг этого ребра грань AB призмы до совмещения с плоскостью развертки, построив ребро $B-B_1$; чтобы построить на развертке это ребро, нужно провести из вершин оснований $B(B'')$ и $B_1(B_1'')$ перпендикуляры к ребру $A-A_1(A''-A_1'')$ и на пересечении этих перпендикуляров с дугой-засечкой, равной стороне основания $AB(A'B')$, построить точки B и B_1 , определяющие положение ребра $B-B_1$ на развертке (ребро $B-B_1$ параллельно ребру $A-A_1$).

2-е действие. Повторить последовательное вращение каждой грани

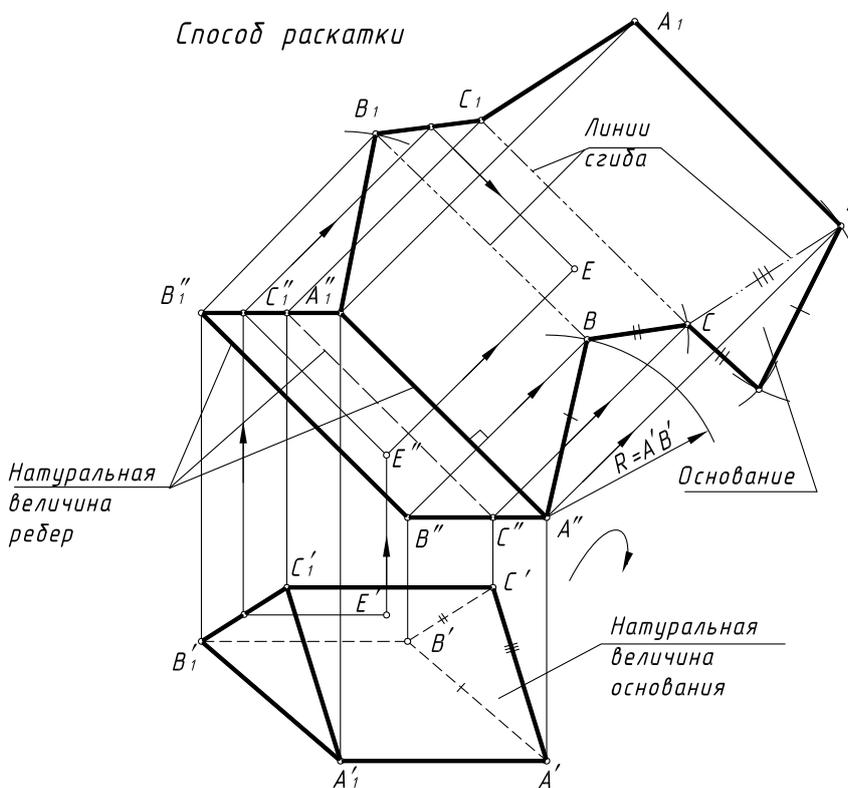


Рис. 9.2

вокруг следующего ребра и совместить каждую грань с плоскостью развертки, построив конечные точки каждого ребра с помощью дуг-засечек, равных следующим сторонам основания $BC(B'C')$ и $CA(C'A')$.

3-е действие. Соединить построенные конечные точки ребер отрезками прямых и достроить плоскую фигуру развертки (достроено также одно основание призмы).

4-е действие. Оформить чертеж развертки, выполнив линии сгиба по ребрам тонкими штрихпунктирными линиями с двумя короткими пунктирами.

На этом же рисунке показано построение на развертке точки E , лежащей на грани BC пирамиды.

Развертка поверхности пирамиды

Построение развертки боковой поверхности пирамиды по натуральным величинам ее ребер выполняется по следующему графическому алгоритму.

1-е действие. Построить на заданных проекциях пирамиды натуральные величины всех ее боковых ребер (например, способом вращения вокруг проецирующей прямой) и натуральные величины сторон многоугольника основания пирамиды (если основание лежит в плоскости уровня, то натуральные величины даны на одной из проекций).

2-е действие. Построить на свободном поле чертежа последовательно грани пирамиды по натуральным величинам ребер и натуральным величинам сторон основания (с помощью дуг-засечек) так, чтобы они имели общую вершину S и примыкали друг к другу.

3-е действие. Оформить чертеж развертки, выполнив линии сгиба по ребрам пирамиды тонкими штрихпунктирными линиями.

На рис. 9.3 показан пример построения развертки поверхности правильной треугольной пирамиды, основание которой треугольник ABC на горизонтальной проекции имеет натуральные величины сторон, так как лежит в горизонтальной плоскости уровня.

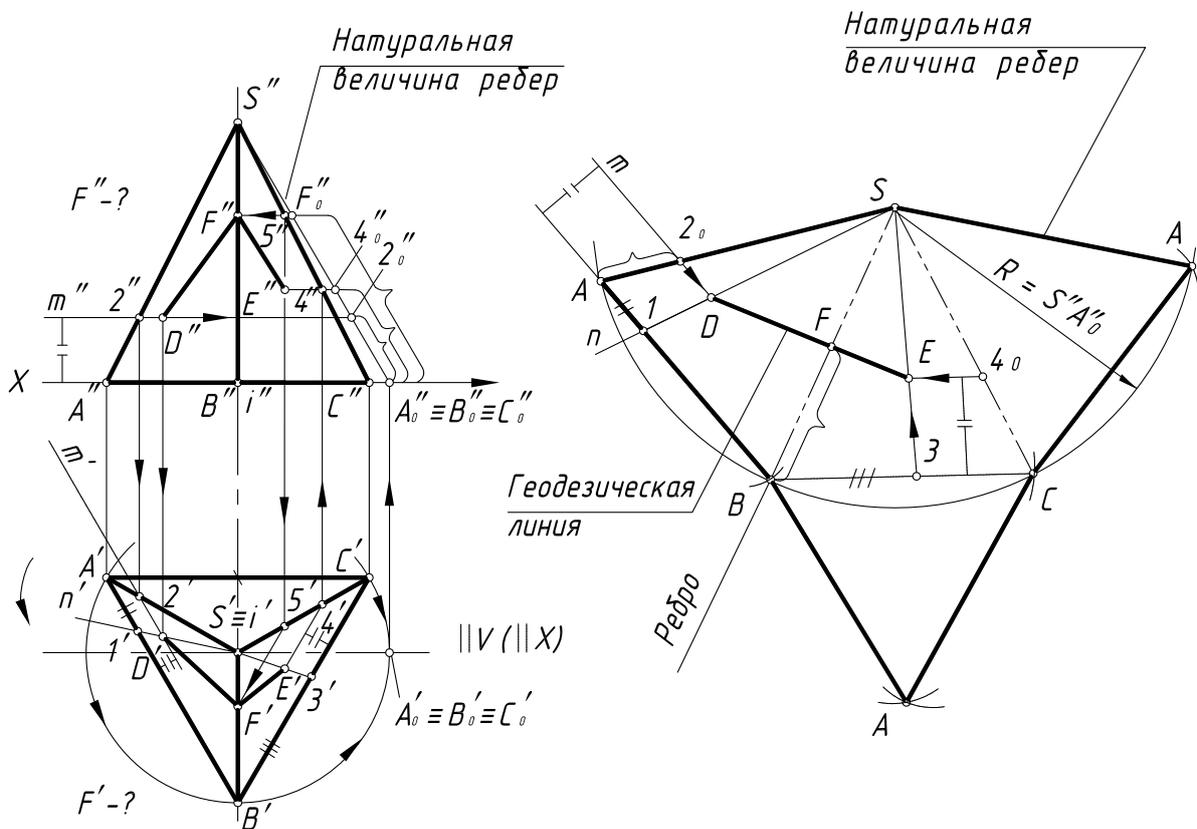


Рис. 9.3

Для построения развертки выполнены графические действия предложенного алгоритма.

1-е действие. Построить на заданной фронтальной проекции натуральные величины ребер пирамиды способом вращения вокруг горизонтально-проецирующей оси $i(i')$, проходящей через вершину пирамиды точку $S(S')$ и совпадающую с ее высотой. Напоминаем графические действия этого способа преобразования:

1.1. Повернуть горизонтальные проекции ребер $S'A'$, $S'B'$ и $S'C'$ вокруг оси $i(i')$ так, чтобы они расположились параллельно фронтальной плоскости проекций V (все ребра правильной пирамиды равны по длине), и получить совмещенные проекции точек $A_o' \equiv B_o' \equiv C_o'$.

1.2. На фронтальной проекции пирамиды конечные точки A'' , B'' и C'' ребер перемещаются по горизонтальной линии, перпендикулярной оси $i(i'')$, и на пересечении с линией связи от точек $A_o'(B_o' \equiv C_o')$ построить точки $A_o''(B_o'' \equiv C_o'')$.

1.3. Соединить вершину пирамиды $S(S'')$ с совпадающими точками $A_o''(B_o'' \equiv C_o'')$ – полученный отрезок $S''A''(S''B'' \equiv S''C'')$ и есть натуральная величина всех ребер пирамиды.

2-е действие. На свободном поле чертежа построить последовательно (например, против часовой стрелки) от ребра SA , по которому «разрезается» поверхность, треугольники граней пирамиды с общей вершиной S следующим образом:

2.1. Провести дугу радиусом R равным натуральной величине ребер $S''A_o''$ пирамиды из произвольной точки S плоскости чертежа.

2.2. На дуге отметить (произвольно) вершину основания точку A , то есть построить ребро SA пирамиды.

2.3. На проведенной дуге засечками, равными длине сторон основания пирамиды $A'B' = B'C' = C'A'$ отметить следующие точки вершин основания – B , C и точку A .

2.4. Построить треугольники граней пирамиды, соединив вершину S с вершинами основания и достроить основание пирамиды к стороне, например, BC грани SBC .

3-е действие. Оформить чертеж развертки, выполнив линии сгиба по ребрам пирамиды тонкими штрихпунктирными линиями с двумя короткими пунктирами.

Г е о д е з и ч е с к а я л и н и я

Геодезическая линия – это линия кратчайшего расстояния между двумя точками на поверхности. На развертке этой линии соответствует прямая. Геодезическая линия строится на развертке по двум ее конечным точкам, заданным на проекциях предмета, а затем достраивается на заданных проекциях по дополнительным промежуточным точкам, взятым на построенной развертке.

На рис. 9.3 показано построение проекций геодезической линии на поверхности пирамиды по двум заданным на проекциях конечным точкам $D(D'', D'/?)$ и $E(E', E''/?)$.

Порядок графических действий для построения геодезической линии:

1-е действие. Построить полную развертку поверхности (в данном примере развертка пирамиды уже построена).

2-е действие. Построить на развертке геодезическую линию.

2.1. Построить на развертке заданные точки $D(D'', D')$ и $E(E', E'')$:

– точка D определяется на развертке на пересечении вспомогательной линии m , проведенной параллельно стороне AB основания на расстоянии $A-2_0$, равным отрезку $A_0''-2_0''$, взятому на построенной натуральной величине ребер и отложенному по ребру SA развертки, и линии, проведенной через точку S и точку 1 , построенную на стороне AB развертки по отрезку $A'-1'$, взятому на горизонтальной проекции $A'B'$ стороны основания;

– точка E определяется на пересечении аналогично построенных линий 4_0-E и $S-3$;

2.2. Соединить построенные на развертке точки геодезической линией $D-E$, которая пересекает ребро SB в точке F .

3-е действие. Достроить фронтальную и горизонтальную проекции геодезической линии $D-F-E$ на проекциях пирамиды по промежуточной точке F с учетом видимости линии на поверхности (на проекциях пирамиды проекции геодезической линии – ломаные линии):

3.1. Отрезок $B-F$, взятый на развертке (отмечен скобкой), отложить на натуральной величине ребер, построенных на фронтальной проекции, и определить положение точки F_0'' .

3.2. Провести через точку F_0'' линию, параллельную основанию пирамиды, и на пересечении с проекцией ребра $SB(S''B'')$ построить фронтальную проекцию точки $F(F'')$ геодезической линии.

3.3. Достроить горизонтальную проекцию точки $F(F')$ по вспомогательной точке $5(5')$, лежащей на ребре SC .

3.4. Соединить на проекциях пирамиды заданные проекции точек D и E с построенной точкой F , определив видимость участков ломаной геодезической линии.

На рис. 9.4 показан пример построения развертки неправильной треугольной пирамиды $SABC$ и геодезической линии $D-E-F$ на развертке и на проекциях пирамиды по заданным конечным точкам D и E . Основание пирамиды лежит в горизонтальной плоскости и на горизонтальной проекции пирамиды стороны основания имеют натуральную величину.

Построение развертки поверхности пирамиды выполнено по приведенному выше алгоритму с дополнительными графическими действиями по построению геодезической линии:

1-е действие. Построить на фронтальной проекции пирамиды способом вращения вокруг горизонтально-проецирующей оси $i(i')$, проходящей через вершину пирамиды $S(S')$, натуральные величины всех ребер пира-

миды и вспомогательной линией $S-1$, проведенной на грани пирамиды SAC через заданную точку D , и определить проекцию D_0'' точки D на натуральной величине $S''-1_0''$ вспомогательной линии $S-1$: вспомогательная линия $S-2$, проведенная через точку $E(E', E'')$, является фронтальной ($//V$), и проекция $S''-2''$ есть ее натуральная величина, которую можно использовать для построения точки E на развертке.

2-е действие. Построить на свободном поле чертежа последовательно от ребра SA по часовой стрелке треугольники граней пирамиды с общей вершиной S по натуральным величинам ее ребер и сторон основания дугами-засечками соответствующей величины и достроить основание пирамиды к стороне AB .

3-е действие. Оформить чертеж развертки, проведя линии сгиба.

4-е действие. Построить геодезическую линию на развертке и заданных проекциях пирамиды.

4.1. Построить на развертке конечные точки D и E на вспомогательных линиях $S-1$ и $S-2$ по натуральным величинам отрезков $1-D(1_0''-D_0'')$ и $2-E(2''-E'')$ и соединить эти точки прямой геодезической линией $D-E$, которая пересекает ребро SC в точке F .

4.2. Достроить фронтальную и горизонтальную проекции ломаной геодезической линии $D-F-E$ на проекциях пирамиды с учетом ее видимости, определив проекции точки $F(F', F'')$ на ребре $SC(S'C', S''C'')$ по ее положению на развертке (по отрезку $C-F$).

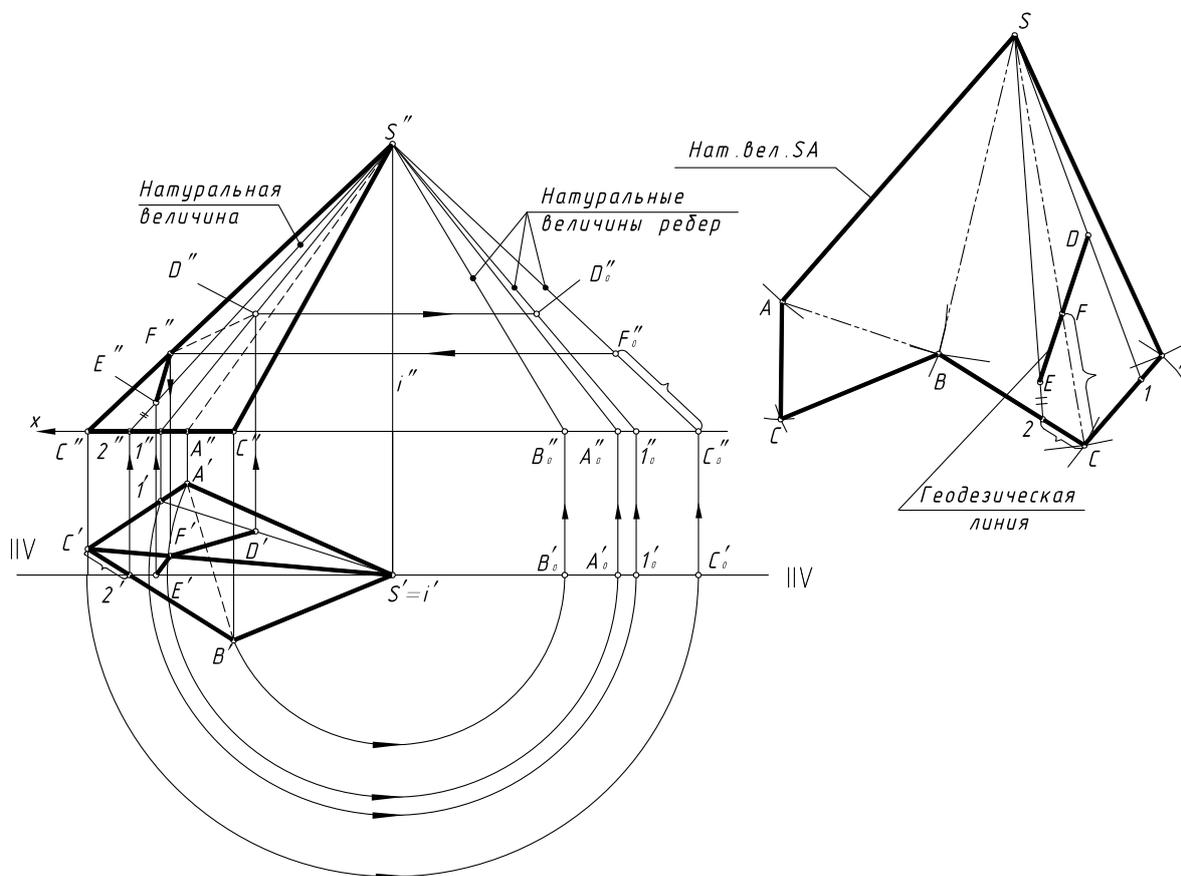


Рис. 9.4

Приближенные развертки цилиндрических и конических поверхностей

Развертки цилиндрических и конических поверхностей выполняются аналогично разверткам призматических и пирамидальных поверхностей. При этом цилиндрическая поверхность заменяется (аппроксимируется) вписанной многоугольной призматической поверхностью (обычно 12-угольной), а коническая поверхность заменяется вписанной многоугольной пирамидальной поверхностью, т. е. строятся приближенные развертки.

Развертка кругового цилиндра

Развертку поверхности прямого кругового цилиндра можно выполнять следующими способами:

– способом нормального сечения на свободном поле чертежа, если образующие являются прямыми уровня, а основания не перпендикулярны образующим;

– способом раскатки при тех же условиях (развертка является при этом продолжением проекции).

Развертка эллиптического цилиндра (нормальное сечение – эллипс) выполняется способом раскатки, если образующие являются прямыми уровня, и на проекциях есть круговое основание (не рассматривается).

Графические алгоритмы для построения разверток поверхности цилиндра этими способами аналогичны вышеприведенным графическим алгоритмам для построения разверток призмы такими же способами.

На рис. 9.5 показан пример построения развертки боковой поверхности прямого кругового цилиндра, наклоненного относительно горизонтальной плоскости проекций H и срезанного по одному торцу профильной плоскостью.

Поскольку по условию задачи образующие являются фронтальными прямыми уровня, а нормальным сечением кругового цилиндра является окружность, то здесь для построения развертки можно объединить и способы построения, и графические действия алгоритмов.

Развертка выполняется по предлагаемому графическому алгоритму.

1-е действие. Провести на фронтальной проекции цилиндра фронтально-проецирующую плоскость нормального сечения $\alpha(\alpha_V)$ перпендикулярно фронтальным проекциям образующих (в произвольном месте по длине образующих) и построить окружность нормального сечения, повернув плоскость этой окружности вокруг линии сечения.

1.1. Окружность нормального сечения разделить на двенадцать частей и точки деления пронумеровать от точки O на очерковой образующей $A''-A_1''$, то есть цилиндр заменить (аппроксимировать) двенадцатиугольной вписанной призмой; из точек деления окружности сечения провести на фронтальной проекции образующие до их пересечения с проекциями оснований.

2-е действие. На продолжении линии нормального сечения отметить двенадцать отрезков – сторон двенадцатиугольника (хорды окружности),

которым заменяется окружность сечения, и провести направления ребер (образующих), перпендикулярно линии сечения (линии пронумеровать), то есть выполнить от ребра $A''-A_1''$ последовательную раскатку граней призмы, заменившей цилиндр.

3-е действие. Построить конечные точки каждой образующей (ребра) на пересечении образующих с линиями, проведенными перпендикулярно образующим из одноименных точек нижнего основания.

4-е действие. Оформить чертеж развертки боковой поверхности цилиндра, соединив построенные конечные точки образующих плавными кривыми линиями (в примере развертка оборвана из-за недостатка места).

Для построения более точной развертки следует по формуле (1) (рис. 9.5, где L – диаметр цилиндра) вычислить длину развертки и разделив эту длину на 12 равных частей, провести образующие и далее выполнить 3 и 4 действия алгоритма.

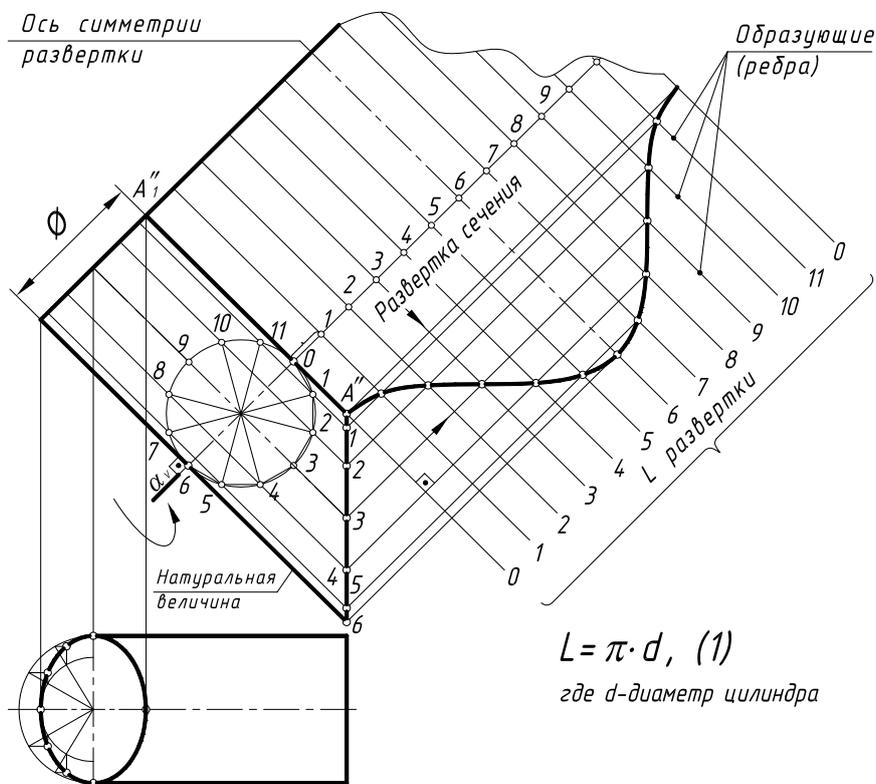


Рис. 9.5

Развертка кругового конуса

На рис. 9.6 показан пример построения развертки боковой поверхности прямого кругового конуса со срезом фронтально-проецирующей плоскостью $\alpha(\alpha_V)$, которая пересекает его поверхность по эллипсу.

Построение развертки боковой поверхности конуса выполняется по алгоритму, приведенному выше для построения развертки пирамиды, с некоторыми дополнениями.

Развертка выполняется по предлагаемому алгоритму.

1-е действие. Заменить прямой круговой конус вписанной правильной 12-угольной пирамидой с ребрами-образующими.

2-е действие. Построить развертку боковой поверхности пирамиды по натуральным величинам ребер (образующих) и сторон основания, выполнив следующие графические действия:

2.1. Отметить на свободном поле чертежа точку S и провести дугу радиусом L , равным натуральной величине всех образующих конуса (ребер пирамиды).

2.2. Отметить на дуге точку O на вертикальной линии симметрии развертки и построить вправо и влево на дуге засечками, равными сторонам хордам 12-угольника, точки, соответствующие вершинам этого многоугольника; пронумеровать эти точки и соединить их с вершиной развертки, построив таким образом вспомогательные ребра-образующие (границы пирамиды).

3-е действие. Достроить на развертке линию среза конуса фронтально-проецирующей плоскостью $\alpha(\alpha_V)$, выполнив следующие графические действия:

3.1. На фронтальной проекции конуса перенести горизонтально на натуральную величину образующей $S''-6''$ точки сечения, отмеченные на вспомогательных образующих, то есть вращением вокруг оси $i''(i')$ построить натуральные величины отрезков образующих-ребер сечения.

3.2. Отложить на соответствующих образующих развертки натуральные величины отрезков образующих-ребер до точек сечения (отмечены на фронтальной проекции и на развертке фигурными скобками отрезки $O''-O_0''$ образующей для точки O_0 и $2''-2_0''$ образующей для точки 2_0) и соединить построенные точки сечения на развертке плавной кривой линией.

4-е действие. Оформить чертеж развертки, проведя сплошными толстыми линиями контур построенной развертки.

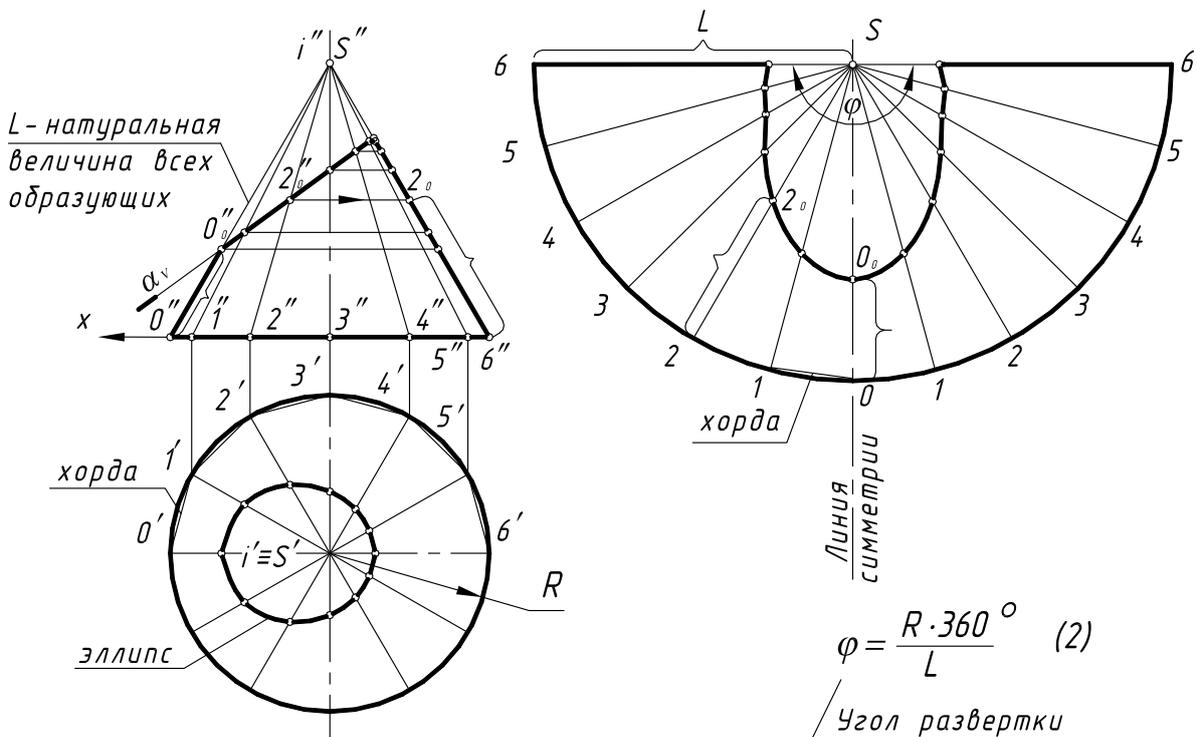


Рис. 9.6

Для построения более точной развертки следует вычислить по формуле (2) (рис. 9.6, где R – радиус основания конуса; L – длина образующей конуса) угол развертки и разделить дугу развертки на 12 равных частей, провести образующие и далее выполнить 3 и 4 действия алгоритма.

На рис. 9.7, а дан чертеж поверхностей кругового цилиндра и кругового конуса, описанных вокруг сферы, и построена линия пересечения этих поверхностей по теореме Г. Монжа. На рис. 9.7, б построена развертка конической части этой конструкции по следующему графическому алгоритму:

1-е действие.

Провести произвольное сечение, перпендикулярное оси конуса, и повернуть половину окружности сечения в очерковую плоскость конуса.

2-е действие.

Разделить окружность сечения на 6 частей и перенести точки 1-6 параллельно оси конуса на линию сечения (проекцию окружности), то есть построить точки 1_0-6_0 .

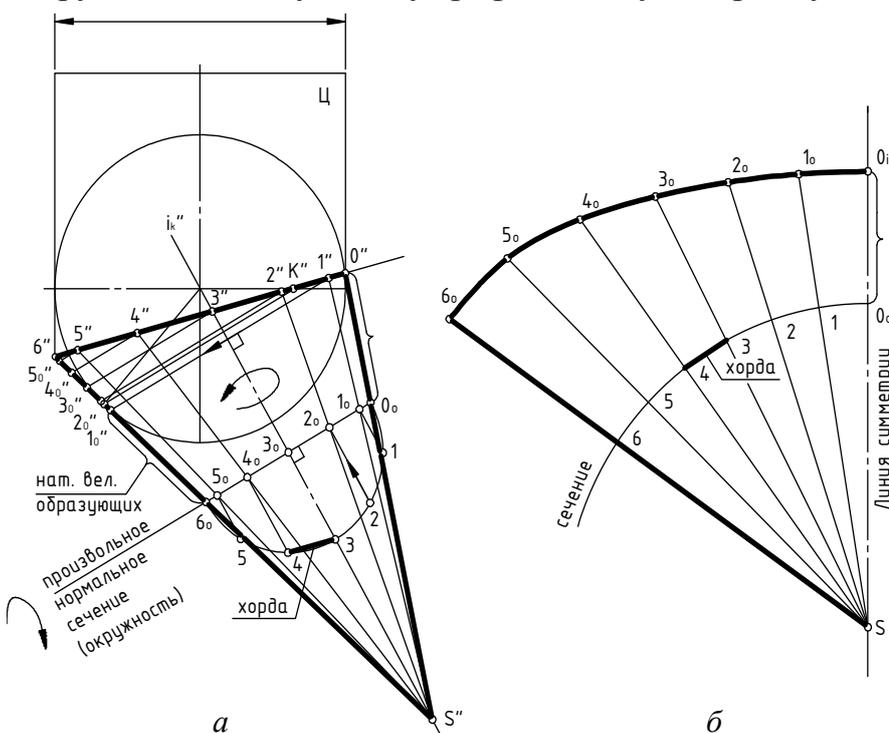


Рис. 9.7

3-е действие. Через вершину конуса $S(S'')$ и точки 1_0-6_0 провести образующие конуса до пересечения с проекцией линии пересечения с проекцией линии пересечения цилиндра и конуса $O_1''-6''$.

4-е действие. Вращением построенных образующих вокруг оси конуса перенести точки $1_0''-5_0''$ на очерковую образующую $S''-6''$, имеющую на чертеже натуральную величину.

5-е действие. На свободном поле чертежа провести радиусом $R=S''O_0$ дугу и отложить на этой дуге шесть отрезков-хорд, на которые было поделено сечение конуса.

6-е действие. Через точку S на развертке и построенные точки O_0-6 провести семейство образующих.

7-е действие. Отложить от точек O_0-6 на каждой образующей развертки соответствующие натуральные величины образующих, взятые с чертежа, то есть отрезки 6_0-1_0 , 6_0-2_0 и т. д.

8-е действие. Построенные на концах семейства образующих точки соединить плавной кривой и оформить чертеж развертки (построена половина развертки).

На рис. 9.8 показано построение развертки боковой поверхности боковой поверхности усеченного конуса (если вершину конуса на чертеже достроить нельзя) с основаниями, равными d и D .

Предварительно на чертеже усеченного конуса строится вспомогательный неусеченный конус подобный заданному так, чтобы отношение диаметра D исходного конуса к диаметру вспомогательного конуса d , было целым числом, то есть $K = D/d_1$ – целое число, где K – коэффициент кратности оснований конусов.

Примем $K = 3$ и впишем в заданный конус вспомогательный конус с вершиной S'' .

Достроим горизонтальную проекцию вспомогательного конуса и разделим половину окружности основания d_1 на 6 частей (1-6).

Далее приступаем к построению развертки половины усеченного конуса по следующему графическому алгоритму:

1-е действие. На свободном поле чертежа построить развертку вспомогательного конуса с вершиной S (см. рис. 9.8), то есть построить точки $0-2-4-6$ на дуге развертки.

2-е действие. На оси симметрии развертки (биссектриса полной развертки) выбрать произвольную точку K и провести семейство лучей, соединяющих соответственно произвольную точку K с точками $0-2-4-6$ развертки вспомогательного конуса.

3-е действие. Отложить на проведенных лучах отрезки, величины которых определяются произведениями:

$$KO_0 = K \times KO;$$

$$K2_0 = K \times K2;$$

$$K4_0 = K \times K4;$$

$$K6_0 = K \times K6,$$

где K – принятый коэффициент пропорциональности, а величины KO , $K2$, $K4$ и $K6$ следует измерить на строящейся развертке.

На концах лучей определяются точки O_0 , 2_0 , 4_0 и 6_0 .

4-е действие. Через построенные точки на концах лучей провести прямые n_0-n_6 , каждая из которых должна быть соответственно параллельна образующим вспомогательного конуса на его развертке.

5-е действие. На проведенных прямых n_0-n_6 отложить натуральную величину длин образующих заданного усеченного конуса L .

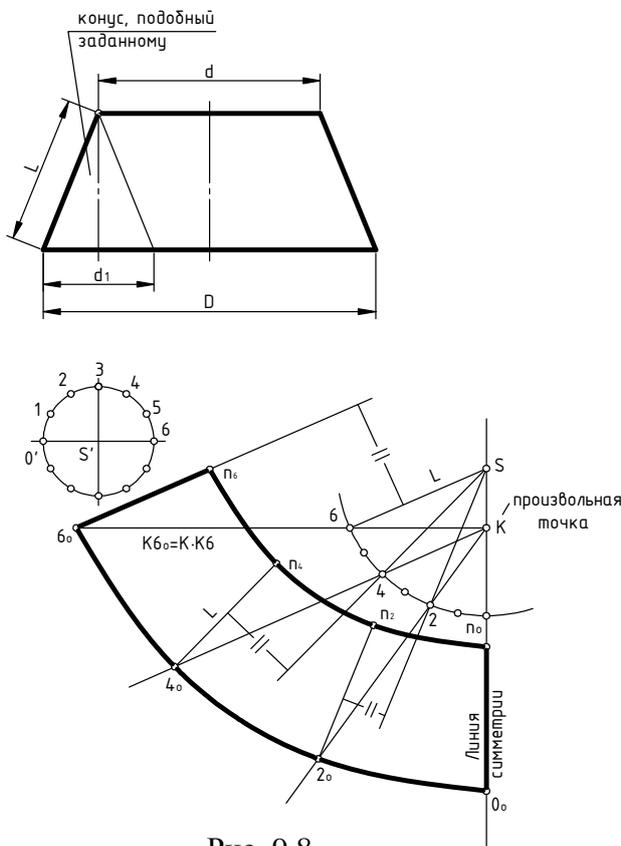


Рис. 9.8

6-е действие. Оформить чертеж развертки, соединив построенные точки развертки лекальными прямыми.

Условные развертки поверхностей

Условные развертки можно выполнить для некоторых неразвертывающихся поверхностей.

Рассмотрим построение условных разверток неразвертывающихся поверхностей сферы и открытого тора (кругового кольца).

Развертка сферической поверхности

На рис. 9.9 показано построение условной развертки сферической поверхности.

Поверхность сферы условно разрезают на какое-то количество частей (6, 12 и более) и каждую часть заменяют (аппроксимируют) цилиндрической описанной поверхностью, фронтальная проекция которой совпадает с фронтальным очерком сферы – окружностью.

Далее выполняется развертка одной доли поверхности сферы как сектора цилиндрической поверхности по следующему графическому алгоритму:

1-е действие. На горизонтальной проекции разрезать поверхность сферы на 6 частей и рассмотреть эту 1/6 часть (сектор) как фронтально-проецирующий цилиндр, описанный вокруг сферы.

2-е действие. Разделить дугу очерковой окружности A_0B_0 сферы, которая совпадает с окружностью описанного цилиндра, на 12 частей (поскольку есть симметрия, рассматриваем дугу A_0C_0) и заменить участки хордами (то есть вписать 12-угольную призму) – $A_0''-1''$, $1''-2''$ и т. д.

3-е действие. Спроецировать точки $1''-6''$ на стороны взятого сектора его горизонтальной проекции.

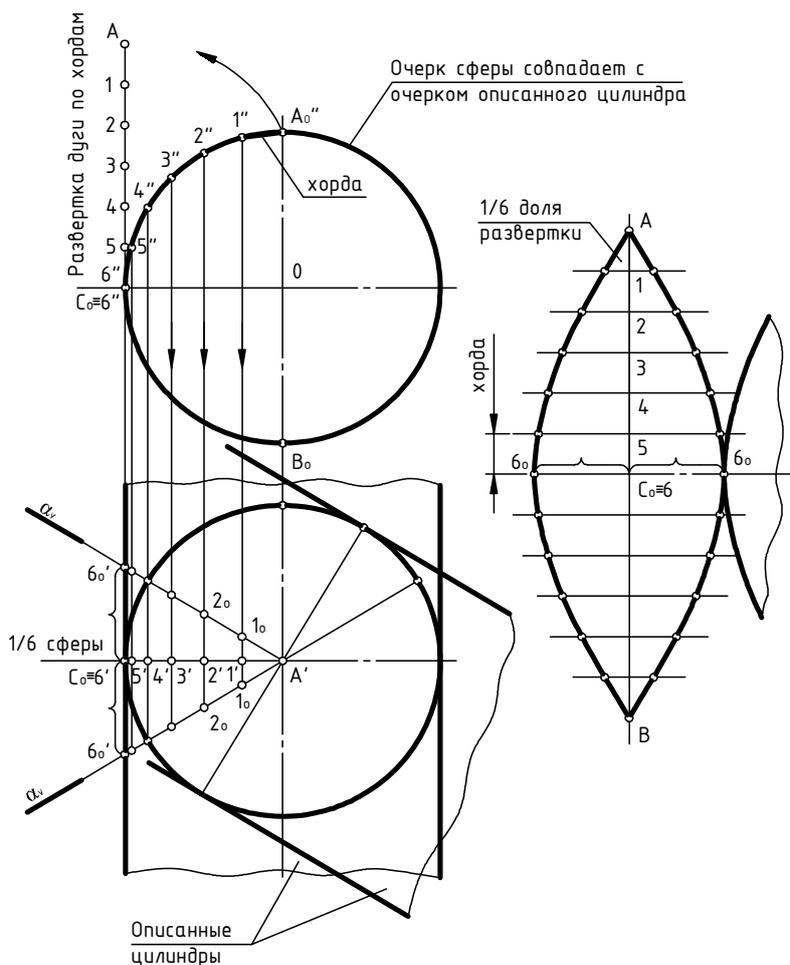


Рис. 9.9

4-е действие. Свободном поле чертежа провести вертикальную линию и отложить от точки C_0 вверх и вниз по 6 отрезков, равных величине хорд (точки пронумеровать).

5-е действие. Через каждую построенную точку $A-6$ провести горизонтальные линии и на каждой отложить величину соответствующей образующей: 1_0-1_0 , 2_0-2_0 и т. д.

6-е действие. Конечные точки соединить лекальной кривой.

Таким образом построена 1/6 доля условной поверхности сферы, а 6 таких долей составят развертку всей поверхности.

С увеличением количества долей (1/12, 1/24 и т. д.) точность развертки увеличивается.

Развертка поверхности открытого тора

На рис. 9.10 показана условная развертка поверхности открытого тора.

Поверхность кольца разрезают на какое-то количество долей (6, 12 и более) плоскостями, проходящими через его ось i'' , и заменяют каждую долю (сектор) поверхности описанной цилиндрической поверхностью.

Далее выполняют развертку одной доли поверхности по графическому алгоритму, приведенному для построения развертки одной доли поверхности сферы.

На рис. 9.11 приведен чертеж построения части (правой) развертки комбинированной геометрической поверхности, состоящей из трех полых цилиндров, сообщенных двумя коническими рукавами, в котором подытоживается изученный материал данной темы. Показано, что развертка каждой части комбинированной поверхности строится отдельно.

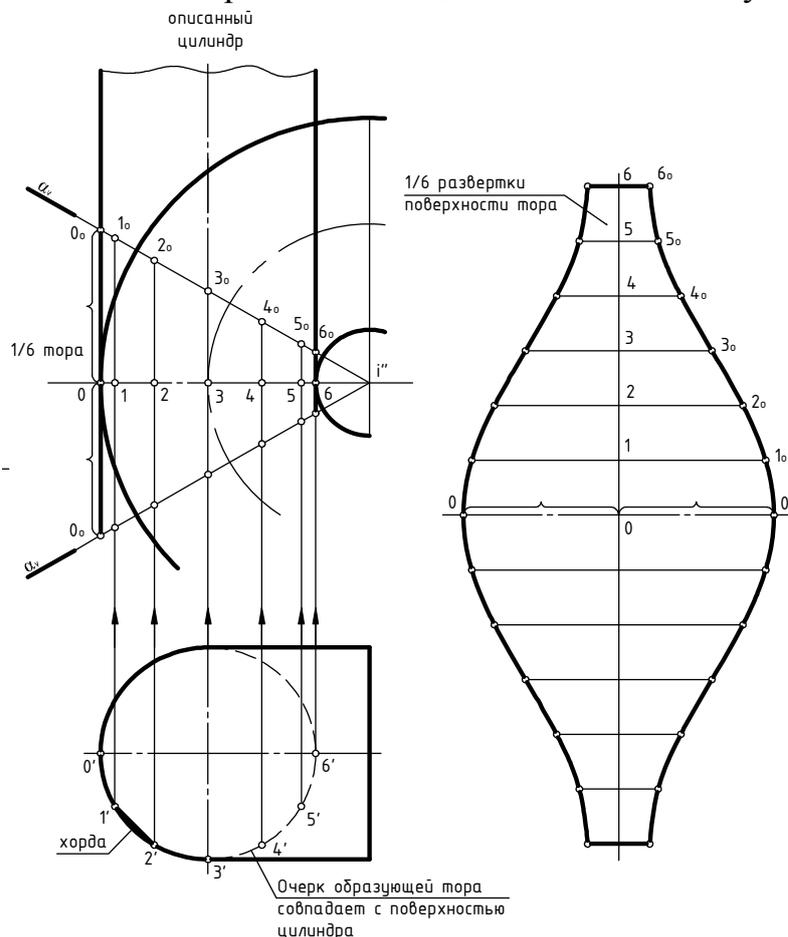
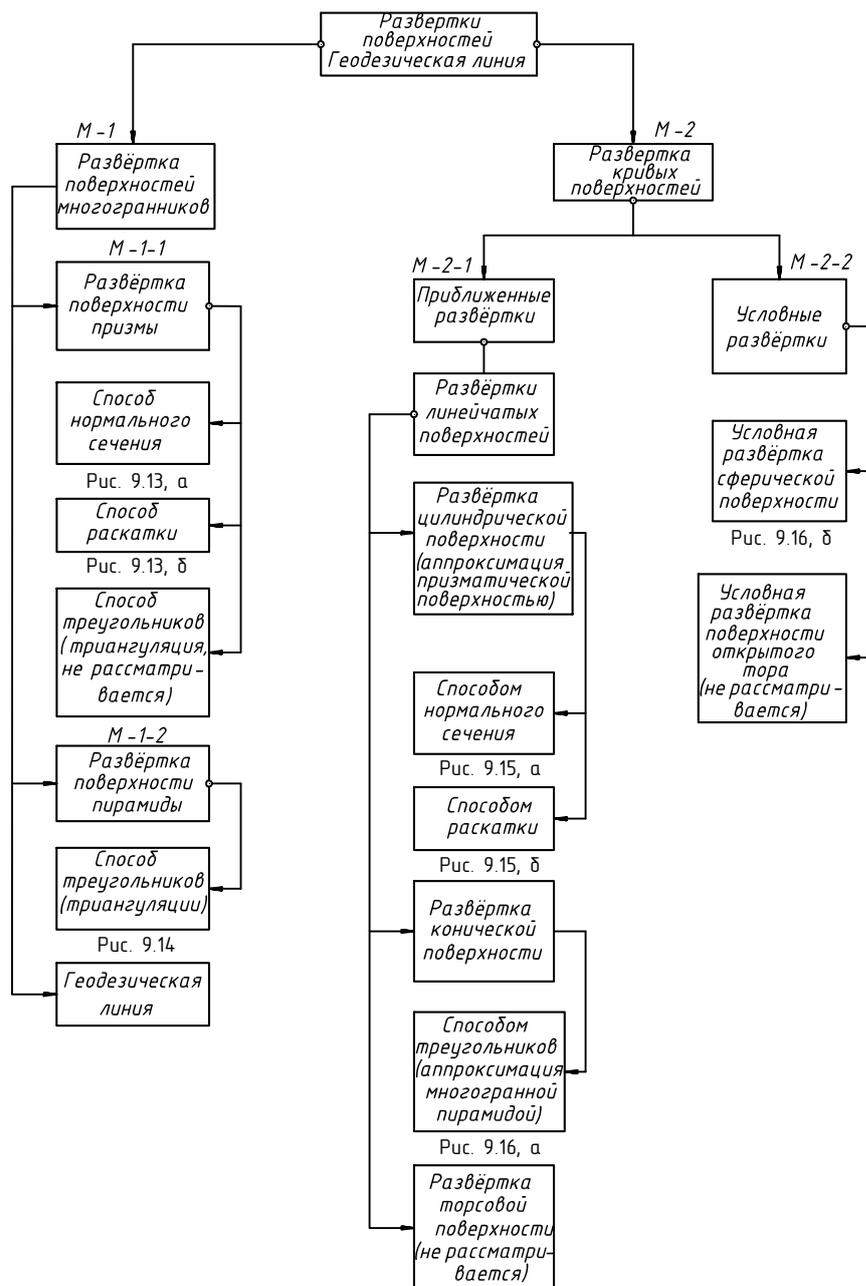


Рис. 9.10

Структуризация материала девятой лекции в рассмотренном объеме схематически представлена на рис. 9.12 (лист 1). На последующих листах 2–5 компактно приведены иллюстрации к этой схеме для визуального закрепления изученного материала при повторении (рис. 9.13–9.16).

Развёртки поверхностей



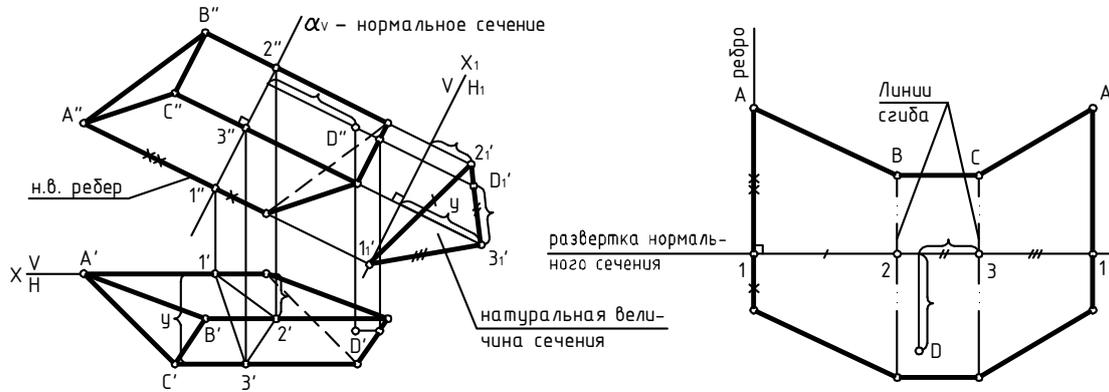
*Развёртка – плоская фигура, в которую преобразовывается поверхность при её совмещении с плоскостью без разрывов и складок.
Геодезическая линия – кратчайшее расстояние между двумя точками на поверхности. На развёртке этой линии соответствует прямая.*

Развертки поверхностей

Развертка гранных поверхностей

Развертка призмы.

а. Способ нормального сечения (применяется если на чертеже ребра призмы являются прямыми уровнями)

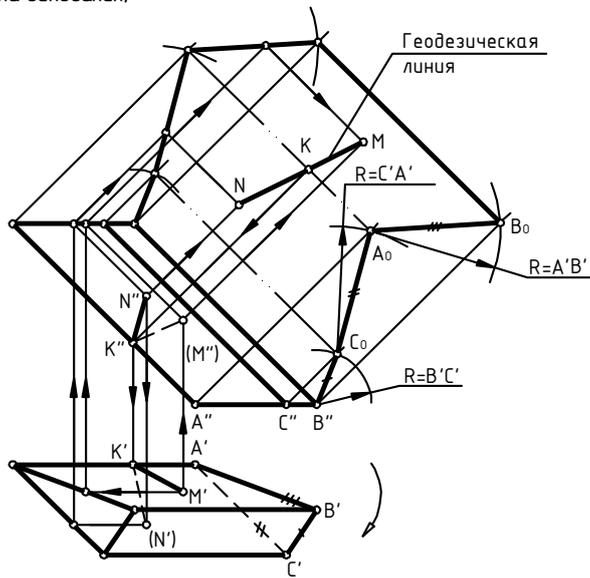


а.

Графический алгоритм

1. Построить натуральную величину нормального сечения, перпендикулярного к ребрам призмы.
2. Развернуть стороны сечения в линию и из вершин, провести направления ребер перпендикулярно к линии развертки.
3. Отложить вверх и вниз от точек вершин натуральные отрезки ребер и соединить построенные вершины, провести линии сгиба на месте ребер тонкими штрихпунктирными линиями с двумя штрихами.

б. Способ раскатки (применяется, если на чертеже ребра являются прямыми уровнями и есть натуральная величина основания)



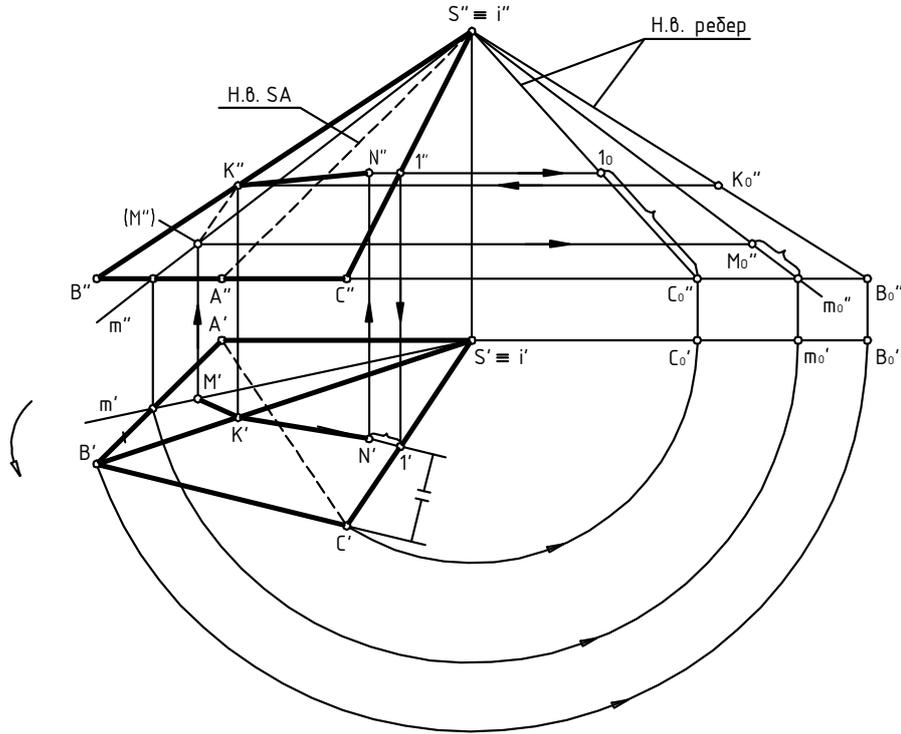
б.

Графический алгоритм построения на чертеже геодезической линии

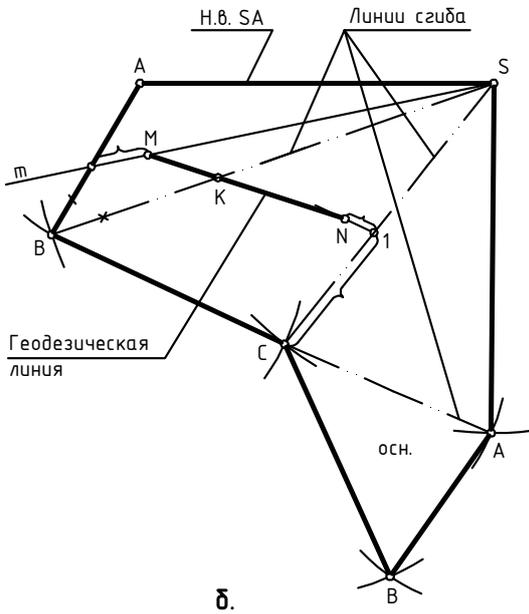
1. Построить развертку поверхности призмы.
2. Построить на развертке заданные на поверхности точки (M и N) и соединить прямой геодезической линией, которая пересекает ребро A в т.К.
3. Вернуть построенную т.К на проекции призмы и соединить с заданными точками M и N ломаной линией с учетом ее видимости на поверхности.

Развертки поверхностей

Развертка поверхности пирамиды.



а.



б.

Графический алгоритм построения развертки поверхности пирамиды:

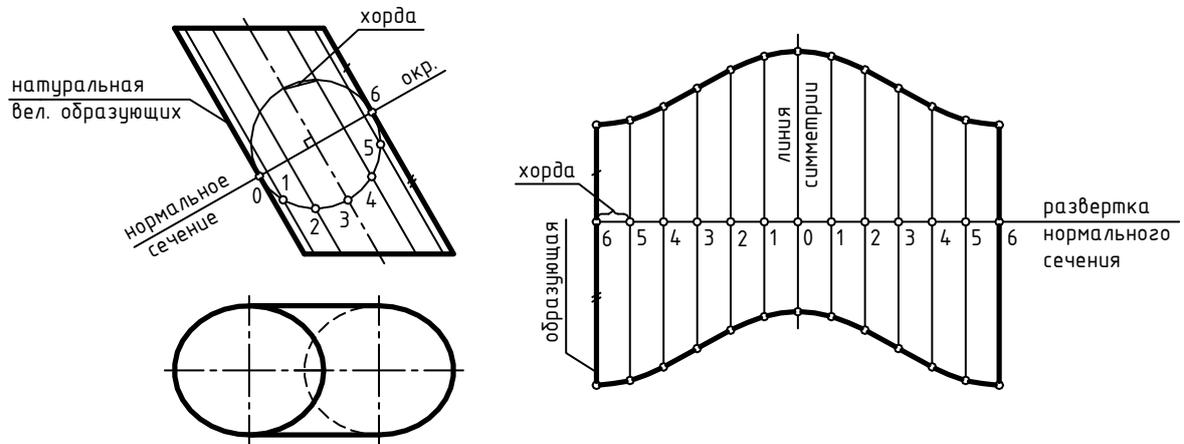
1. Построить натуральные величины всех ребер пирамиды (способом вращения вокруг проецирующей оси).
2. Выполнить развертку поверхности, построив по натуральным величинам ребер треугольники граней и основание.
3. Соединить отрезками построенные на развертке вершины и оформить линии сгиба.

Рис. 9.14

Развертки поверхностей

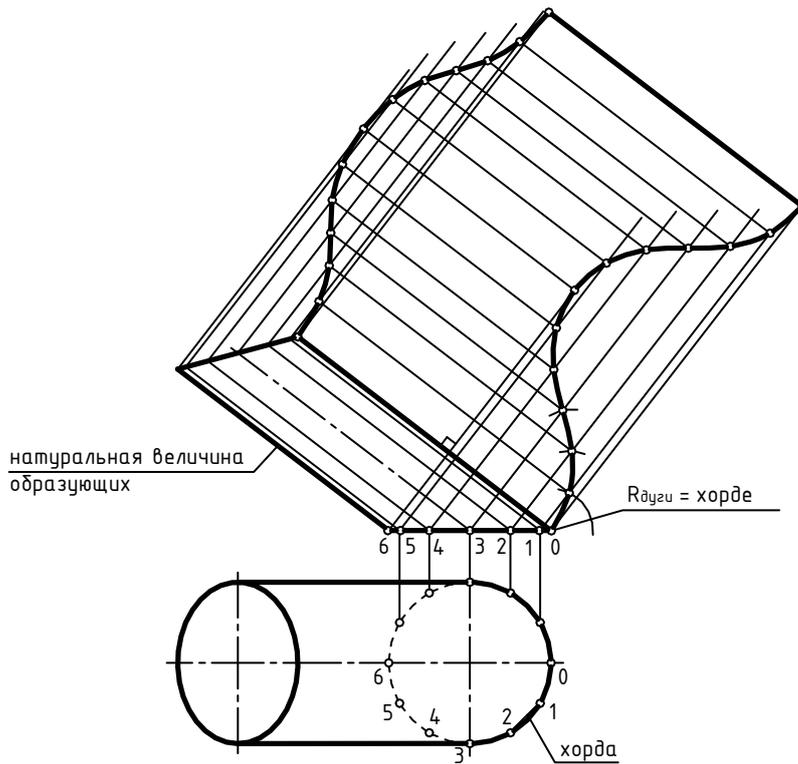
Развертка цилиндрических поверхностей

1. Способ нормального сечения



а.

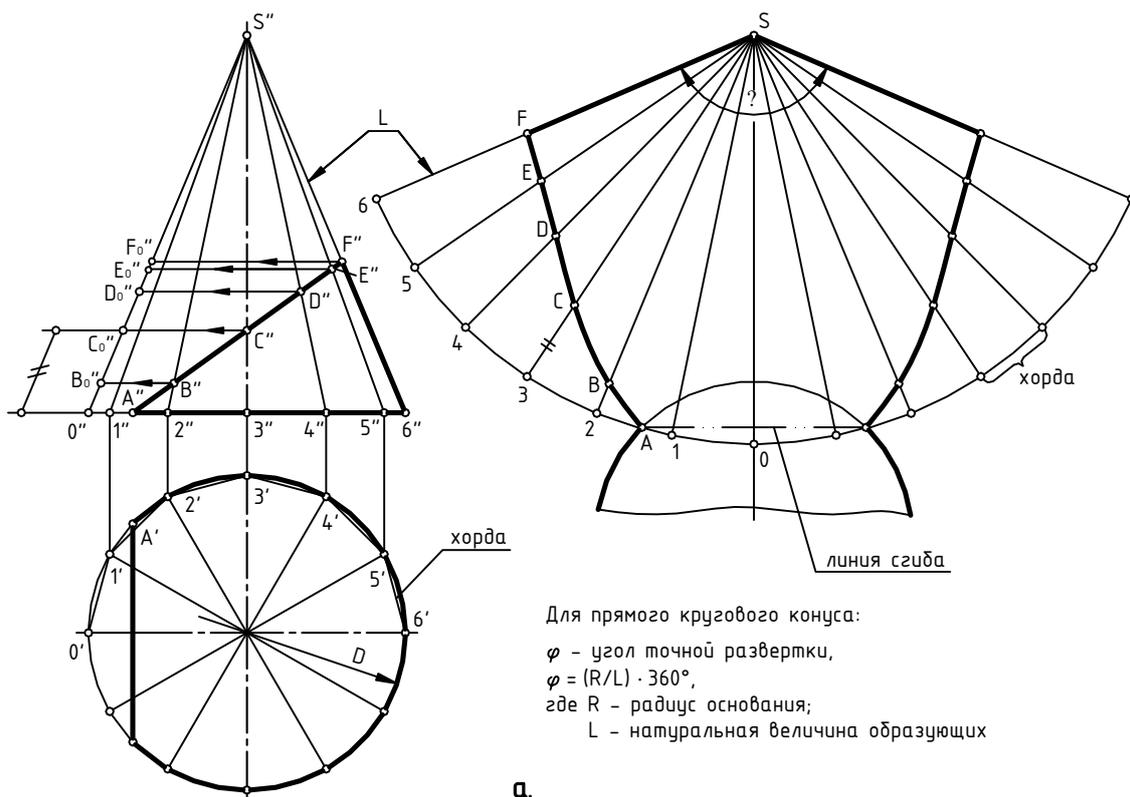
2. Способ раскатки



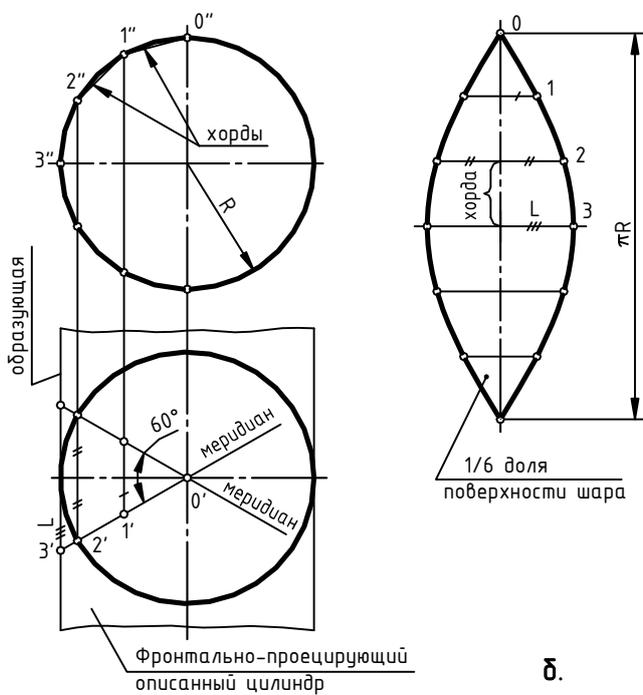
б.

Рис. 9.15

Развертки поверхностей



а.



б.

Рис. 9.16

Лекция 10 АКСОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ

Общие сведения и определения

Прямоугольные проекции предмета на взаимно перпендикулярные плоскости проекций по методу Г. Монжа позволяют точно передать на чертеже форму предмета и его размеры, просты в построении, но не обладают наглядностью. Создание в уме по комплексному чертежу пространственного образа изображенного предмета требует навыков аналитического мышления и наличия пространственного воображения, т. е. достаточно развитого пространственного мышления.

Для наглядного изображения предмета существуют проекции, которые называют аксонометрическими проекциями, или аксонометриями (в переводе с древнегреческого – осеизмерение).

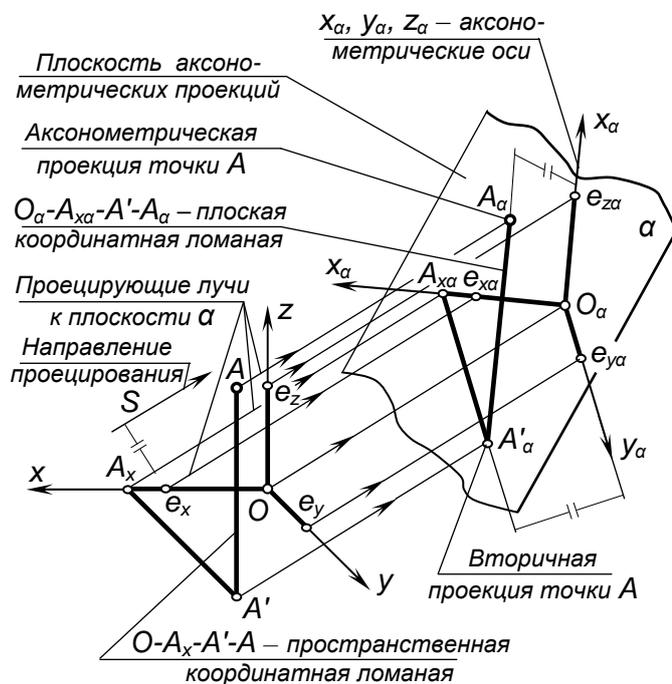
Аксонометрическая проекция – это параллельная проекция предмета вместе с системой прямоугольных координат, к которым этот предмет отнесен в пространстве, на некоторую плоскость аксонометрических проекций (рис. 10.1).

Чтобы обеспечить наглядность предмета по одному изображению на одной аксонометрической плоскости, направление проецирования (направление проецирующих лучей) не должно быть параллельным координатным плоскостям проекций xOy , xOz и zOy , относительно которых выполняются проекции предмета на чертеже.

Систему прямоугольных координат O_{xyz} , к которой предмет относят в пространстве для построения его аксонометрии, выбирают обычно так, чтобы оси x , y и z этой системы совпадали с натуральной системой координатных осей чертежа.

Аксонометрические проекции как проекции параллельные имеют некоторые свойства параллельных проекций:

- аксонометрическая проекция отрезка прямой также является прямой;
- если отрезки прямых параллельны на предмете, они также параллельны на его аксонометрической проекции;
- аксонометрической проекцией окружности на аксонометрии в общем случае является эллипс.



На рис. 10.1 показана схема проецирования точки A , построенной на чертеже в системе натуральных прямоугольных координат O_{xyz} и отнесенную к этим же координатам, на некоторую плоскость аксонометрических проекций α по направлению проецирования S .

Положение точки A определяется в этой системе пространственной координатной ломаной $O-A_x-A'-A$, отрезки которой соответствуют координатам x , y и z точки A . На взятой произвольно плоскости аксонометрических проекций α получены три прямые X_α , Y_α и Z_α , выходящие из одной точки O_α , которые называются *аксонометрическими осями* и являются проекциями пространственных координатных осей x , y и z , к которым отнесена точка A . Полученные углы между аксонометрическими осями зависят от положения аксонометрической плоскости и угла проецирования к этой плоскости. На аксонометрии положение точки A_α определяет плоская координатная ломаная $O_\alpha-A_{x_\alpha}-A_{y_\alpha}-A_\alpha$, отрезки которой соответствуют *аксонометрическим координатам* x_α , y_α и z_α аксонометрической проекции точки $A(A_\alpha)$.

Поскольку направление проецирования S не параллельно ни одной из осей системы прямоугольных пространственных координат, то истинные размеры отрезков пространственной координатной ломаной $O-A_x-A'-A$ на аксонометрической проекции искажаются и, следовательно, искажаются размеры любого предмета на его аксонометрическом изображении.

Для определения степени искажения размеров предмета на аксонометрических проекциях введено понятие *коэффициентов искажения* по аксонометрическим осям.

Если на осях x , y и z системы натуральных прямоугольных координат отложить от точки O равные масштабные отрезки $e_x = e_y = e_z$, то в системе аксонометрических координатных осей получают искаженные проекции этих отрезков e_{x_α} , e_{y_α} и e_{z_α} .

Отношения аксонометрических проекций масштабных отрезков к натуральным величинам масштабных отрезков и называются *коэффициентами искажения* по аксонометрическим осям:

$$K_x = \frac{e_{x_\alpha}}{e_x}; K_y = \frac{e_{y_\alpha}}{e_y}; K_z = \frac{e_{z_\alpha}}{e_z}.$$

Расчетные коэффициенты искажения имеют дробные значения, неудобные для выполнения аксонометрических построений (0,82; 0,47 и т. д.).

Для построения на чертежах аксонометрических проекций пользуются так называемыми *приведенными* коэффициентами искажения, округленными до 1 или 0,5.

Математические (тригонометрические) расчеты величин коэффициентов искажения, углов между аксонометрическими осями, расположение и размеры больших и малых осей эллипсов здесь не рассматриваются (подробнее об этом см. в [12]).

В зависимости от соотношения коэффициентов искажения аксонометрические проекции разделяются на:

а) **изометрические**, у которых все коэффициенты искажения равны, т. е. $K_x = K_y = K_z$ (*i*_{zos} – равный);

б) **диметрические**, у которых два коэффициента равны, т. е. $K_x = K_z$, а K_y им не равен (*di* – двойной);

в) **триметрические**, у которых все коэффициенты разные, т. е. $K_x \neq K_y \neq K_z$ (*treis* – три).

В зависимости от угла наклона проецирующих лучей к плоскости аксонометрических проекций (угла проецирования), аксонометрические проекции разделяются на:

а) **прямоугольные** – проецирующие лучи перпендикулярны аксонометрической плоскости проекций (угол проецирования равен 90°);

б) **косугольные** – проецирующие лучи не перпендикулярны аксонометрической плоскости проекций (угол проецирования не равен 90°).

Аксонометрических проекций можно получить бесконечное множество, как может быть бесконечно количество аксонометрических плоскостей проекций и направлений проецирования к ним.

Основная теорема аксонометрических проекций была сформулирована немецким геометром К. Польке: «Любые три отрезка на плоскости, выходящие из одной точки, могут быть приняты за параллельные проекции (то есть аксонометрические проекции) трех равных и взаимно перпендикулярных отрезков (аксонометрических осей) в пространстве».

Г. Шварц, немецкий математик, обобщил теорему К. Польке, доказав, что «любой полный четырехугольник на плоскости всегда является параллельной проекцией некоторого масштабного тетраэдра (пирамиды), имеющего равные и взаимно перпендикулярные ребра» (диагонали четырехугольника можно рассматривать как аксонометрические оси, рис. 10.2). Эту обобщенную теорему и называют *теоремой Польке-Шварца*.

OABC – масштабный тетраэдр (треугольная пирамида), выделенный из куба с равными взаимноперпендикулярными ребрами:
 $OA \perp OC$; $OC \perp OB$; $OB \perp OA$

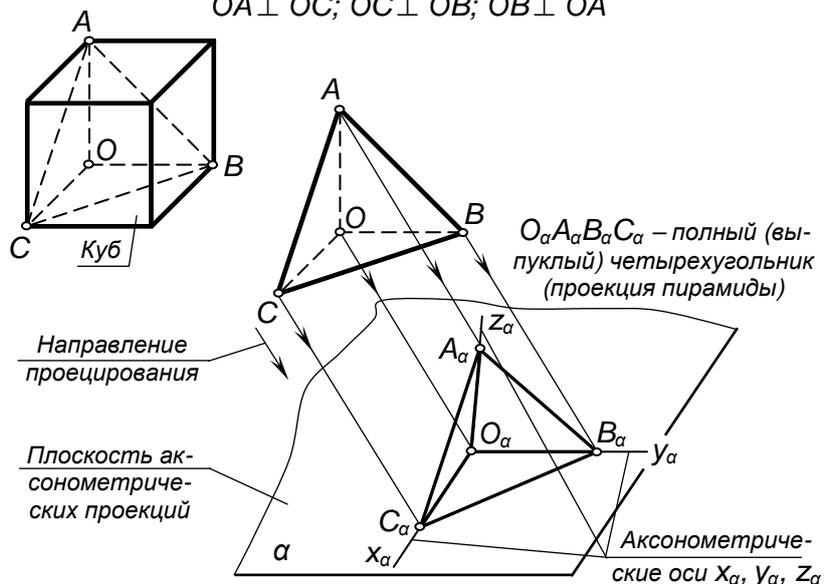


Рис. 10.2

Стандартные аксонометрии
ГОСТ 2.317–2011 – «Аксонометрические проекции».

Математические (тригонометрические) расчеты величин коэффициентов искажения, углов между аксонометрическими осями, расположение и размеры больших и малых осей эллипсов здесь, как указывалось, не рассматриваются (подробнее об этом см. в [12]).

В стандарте даны пять видов аксонометрических проекций:

1. Прямоугольная изометрия.
2. Прямоугольная диметрия.
3. Косоугольная фронтальная диметрия.
4. Косоугольная фронтальная изометрия.
5. Косоугольная горизонтальная изометрия.

В курсе начертательной геометрии рассматриваются первых три вида аксонометрических проекций.

Окружности на проекциях предметов проецируются на аксонометрическое изображение предмета в виде эллипсов. Различные графические способы построения четырехцентровых овалов, которыми заменяют эллипсы, окружности которых лежат в плоскостях, параллельных плоскостям проекций V , H и W , рассматриваются в учебниках по черчению и инженерной графике. Эллипсы, окружности которых лежат в плоскостях, непараллельных плоскостям проекций, строятся на аксонометриях в основном по точкам, принадлежащих этим окружностям.

Прямоугольная изометрия

В прямоугольной изометрии аксонометрические оси расположены под равными углами друг к другу (120°).

Для прямоугольных аксонометрий получена расчетная формула по коэффициентам искажения:

$$K_x^2 + K_y^2 + K_z^2 = 2 ,$$

т. е. сумма квадратов коэффициентов искажения равна двум [12].

В прямоугольной изометрии коэффициенты искажения равны и по приведенной формуле получается, что $K_x = K_y = K_z = 0,82$. Для построения прямоугольной изометрии пользуются приведенными коэффициентами искажения, округленными до единицы, то есть $K_x = K_y = K_z = 1$.

Аксонометрическая плоскость прямоугольной изометрии равнонаклонена ко всем трем плоскостям проекций H , V и W и пересекает эти плоскости проекций по равностороннему треугольнику, который называют *треугольником следов*. Следовательно, аксонометрические оси прямоугольной изометрии являются высотами, биссектрисами и медианами этого треугольника, а точка O_α их пересечения является точкой начала аксонометрических координат. Как известно из геометрии, углы между высотами равностороннего треугольника равны 120 градусам и соответственно углы между аксонометрическими осями также равны 120° .

На рис. 10.3 показано расположение аксонометрических осей в прямоугольной изометрии (ось «Z» всегда располагается вертикально), размеры и расположение больших и малых осей эллипсов и их построение одним из известных способов.

Большие оси AB всех трех эллипсов равны $1,22d$, где d – диаметр окружности, а малые оси EF эллипсов равны $0,71d$.

Ориентация больших и малых осей эллипсов относительно аксонометрических осей:

– эллипс 1: аксонометрическая проекция окружности, лежащей на проекциях предмета в плоскости, параллельной плоскости проекций V : большая ось эллипса перпендикулярна аксонометрической оси Y , а малая ось совпадает с осью Z ;

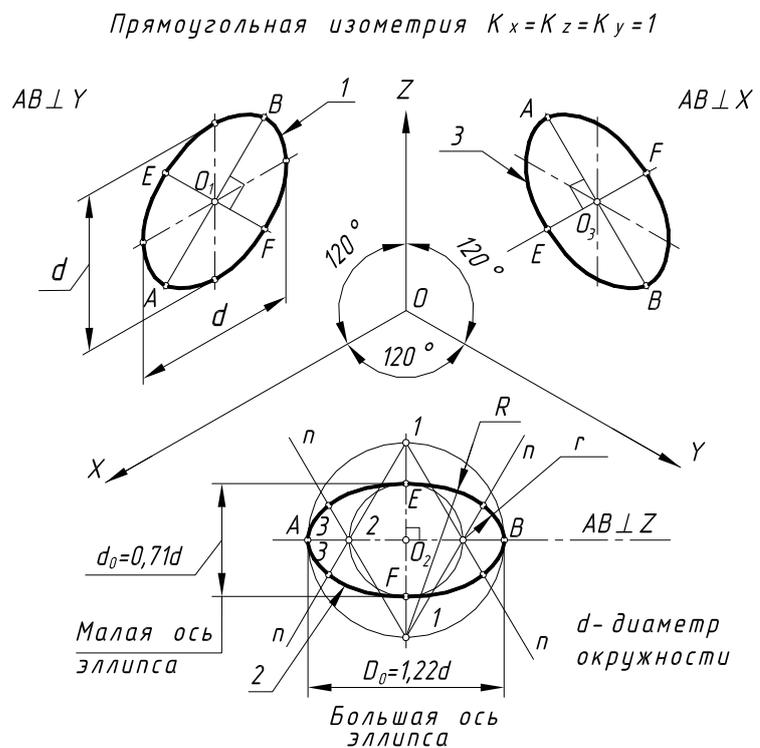
– эллипс 2: аксонометрическая проекция окружности, лежащей на проекциях предмета в плоскости, параллельной плоскости проекций H : большая ось эллипса перпендикулярна аксонометрической оси Z , а малая ось совпадает с осью Z ;

– эллипс 3: аксонометрическая проекция окружности, лежащей на проекциях предмета в плоскости, параллельной плоскости проекций W : большая ось эллипса перпендикулярна аксонометрической оси X , а малая ось совпадает с осью X .

На рис. 10.3 показан один из способов построения четырехцентровых овалов, которыми на чертежах заменяют эллипсы в прямоугольной изометрии.

Графические действия для построения овалов следующие:

- провести две концентрические окружности, диаметры которых равны размерам большой и малой оси эллипса с центром в точке O_2 ;
- из двух центров в точках 1, лежащих на окружности большой оси, провести две большие дуги радиусами $R = 1E$ и $R = 1F$;
- из точек 1 провести прямые n через точки 2, лежащие на окружности малой оси;
- на пересечении проведенных дуг и прямых n получить точки 3, которые определяют окончание больших дуг;



– из двух центров в точках 2 провести две малые дуги радиусами $r = 2A$ и $r = 2B$ до точек 3.

Прямоугольная диметрия

В прямоугольной диметрии коэффициенты искажения по аксонометрическим осям X и Z равны между собой, а коэффициент искажения по оси Y принят равным их половине. Отсюда по приведенной формуле (1) получены следующие величины коэффициентов искажения по аксонометрическим осям: $K_x = K_z = 0,94$, а $K_y = 0,47$. Для построения прямоугольной диметрии пользуются приведенными коэффициентами искажения, округленными и равными: $K_x = K_z = 1$, а $K_y = 0,5$.

Аксонометрические оси по математическим расчетам располагаются относительно горизонтальной линии следующим образом: ось Z расположена вертикально, ось X – под углом $7^\circ 10'$, ось Y – под углом $41^\circ 25'$.

Прямоугольная диметрия: $K_x = K_z = 1$; $K_y = 0,5$

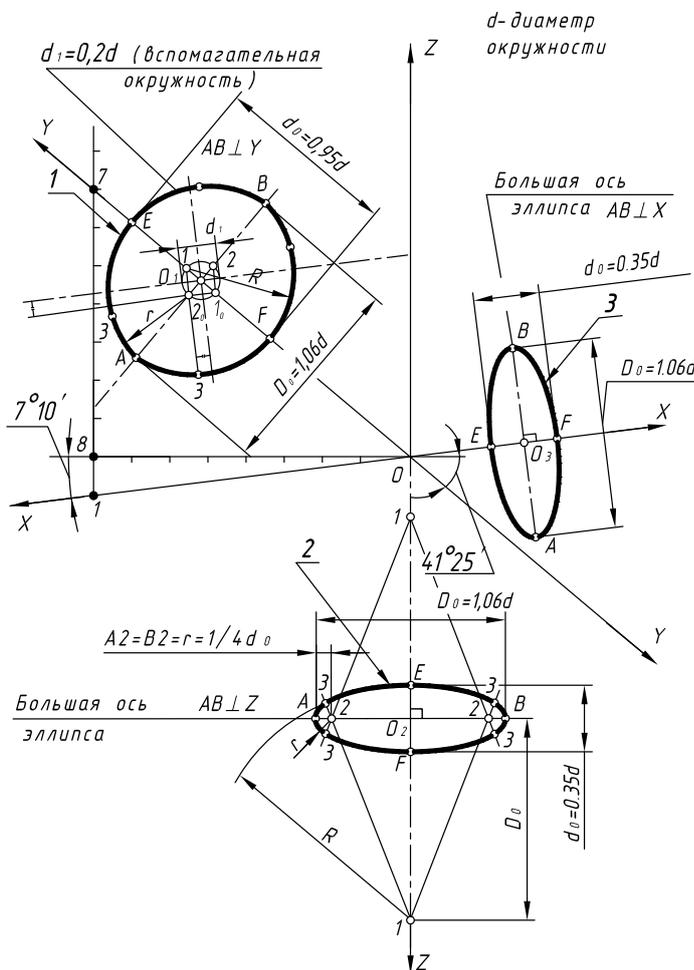


Рис. 10.4

На рис. 10.4 показано расположение аксонометрических осей и способ графического построения углов между осями, размеры и расположение больших и малых осей эллипсов и способы построения четырехцентровых овалов, заменяющих эллипсы на чертеже.

1. Графический способ построения аксонометрических осей на чертеже:

– провести горизонтальную линию и вертикальную ось Z и отметить на их пересечении точку O начала координат;

– отложить на горизонтальной линии от точки O влево (или вправо) 8 размерных единиц (8 раз по 10 мм) и провести вертикальную линию;

– от конечной точки отложить вниз 1 размерную единицу, а вверх 7 размерных единиц;

– через конечные точки вертикальных отрезков и точку O провести аксонометрические оси X и Y .

2. Большие оси AB всех трех эллипсов равны $1,06d$, а величины малых осей EF эллипсов следующие:

- малая ось эллипса 1 равна $0,95d$;
- малые оси эллипсов 2 и 3 равны $0,35d$.

Ориентация больших и малых осей эллипсов относительно аксонометрических осей:

– э л л и п с 1 : аксонометрическая проекция окружности, лежащей на проекциях предмета в плоскости, параллельной плоскости проекций V : большая ось эллипса перпендикулярна оси $у$, а малая ось эллипса совпадает с осью $у$;

– э л л и п с 2 : проекция окружности, лежащей в плоскости, параллельной плоскости проекций H : большая ось эллипса перпендикулярна оси Z , а малая ось совпадает с осью Z ;

– э л л и п с 3 : проекция окружности, лежащей в плоскости, параллельной плоскости проекций W : большая ось эллипса перпендикулярна оси X , а малая ось совпадает с осью X .

Графические действия для построения овала 1 с центром в точке O_1 :

– отложить на прямой, перпендикулярной оси $у$, отрезок AB , равный размеру большой оси эллипса $D_o = 1,06d$;

– отложить на оси $у$ отрезок EF , равный размеру малой оси эллипса $d_o = 0,95d$;

– из точки O_1 провести окружность $d_1=0,2d$, которая пересечет малую ось эллипса в точках 1 и 1_o , а большую ось в точках 2 и 2_o ;

– из полученных точек 1 и 1_o провести дуги радиусами R от точки 1 до точки F и от точки 1_o до точки E ; из точек 2 и 2_o провести дуги радиусами r от точки 2_o до точки A и от точки 2 до точки B ;

– дуги проводить до точек сопряжения 3 (построение показано).

Графические действия для построения овала 2 с центром в точке O_2 :

– отложить на горизонтальной прямой, перпендикулярной оси Z , отрезок AB , равный размеру большой оси эллипса $1,06d$;

– отложить на продолжении оси Z отрезок EF , равный размеру малой оси $0,35d$;

– отложить на оси $у$ отрезок EF , равный размеру малой оси эллипса $d_o=0,95d$;

– построить точки 1, отложив от точки O_2 вверх и вниз по оси Z отрезки O_2-1 , равные большой оси эллипса $D_o = 1,06d$;

– построить точки 2 на большой оси, отложив от точек A и B отрезки $A-2$ и $B-2$, равные $1/4$ малой оси эллипса d_o ;

– из полученных точек 1 провести две большие дуги радиусом $R = D_o + 1/2d_o$, а из точек 2 провести две малые дуги радиусом $r = 1/4d_o$;

– дуги проводить до точек сопряжения "3" (построение показано).

Построение овала 3 выполняется аналогично (большая ось $AB \perp x$).

К о с о у г о л ь н а я (ф р о н т а л ь н а я) д и м е т р и я

В качестве аксонометрической плоскости проекций здесь взята плоскость, параллельная плоскости проекций V . Поэтому на аксонометрии со-

храняется угол 90° между аксонометрическими осями X и Z , а ось Y располагают под углом 45° к горизонтальной прямой.

Приведенные коэффициенты искажения по аксонометрическим осям: по осям X и Z : $K_x = K_z = 1$, а по оси Y : $K_y = 0,5$.

*Косоугольная диметрия: $K_x = K_z = 1$;
 $K_y = 0,5$ (фронтальная диметрия)*

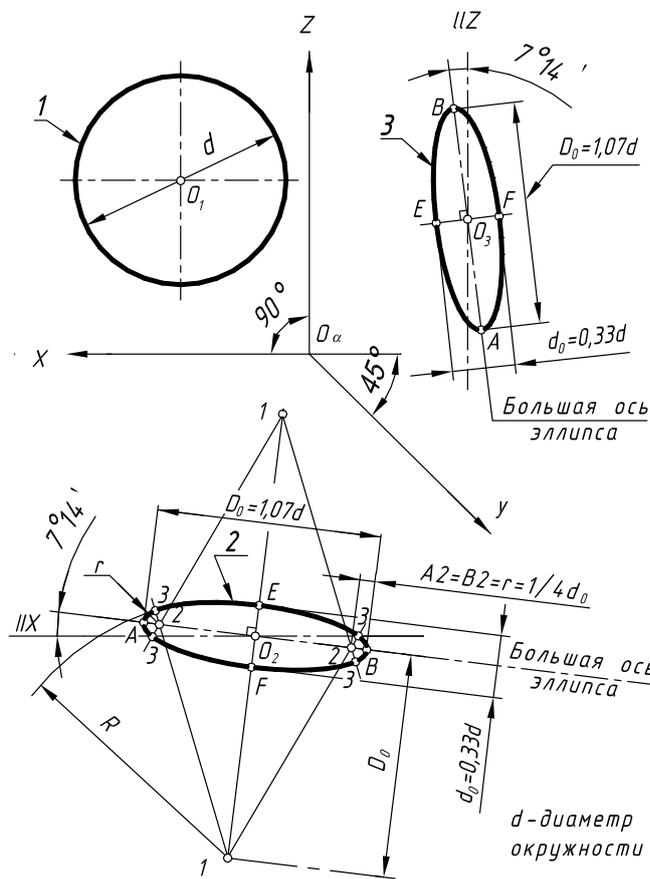


Рис. 10.5

– эллипс 2: большая ось AB расположена под углом $7^\circ 14'$ к горизонтальной линии и наклонена в сторону аксонометрической оси Y ; малая ось EF перпендикулярна большой оси эллипса;

– эллипс 3: большая ось AB расположена под углом $7^\circ 14'$ к вертикальной линии и наклонена в сторону аксонометрической оси Y ; малая ось EF перпендикулярна большой оси эллипса.

Графическое построение двух одинаковых овалов 2 и 3, заменяющих эллипсы на чертежах, аналогичны построениям овалов для прямоугольной диметрии.

Примеры построения аксонометрических проекций

На рис. 10.6 показан пример построения аксонометрической проекции правильной треугольной пирамиды со срезом фронтально-проецирующей плоскостью $\beta(\beta_V)$ в прямоугольной диметрии.

На рис. 10.5 показано расположение аксонометрических осей в косоугольной диметрии, размеры и расположение больших и малых осей эллипсов и графический способ построения овалов.

Окружности на проекциях предмета, лежащие в плоскостях, параллельных плоскости проекций V , проецируются на аксонометрическое изображение в виде окружностей, т. е. не искажаются, так как параллельны плоскости аксонометрических проекций.

Окружности, лежащие в плоскостях, параллельных плоскостям проекций H и W , проецируются на аксонометрическое изображение в виде эллипсов, большие оси AB которых равны $1,07d$, а малые оси EF равны $0,33d$.

Расположение больших и малых осей эллипсов относительно аксонометрических осей:

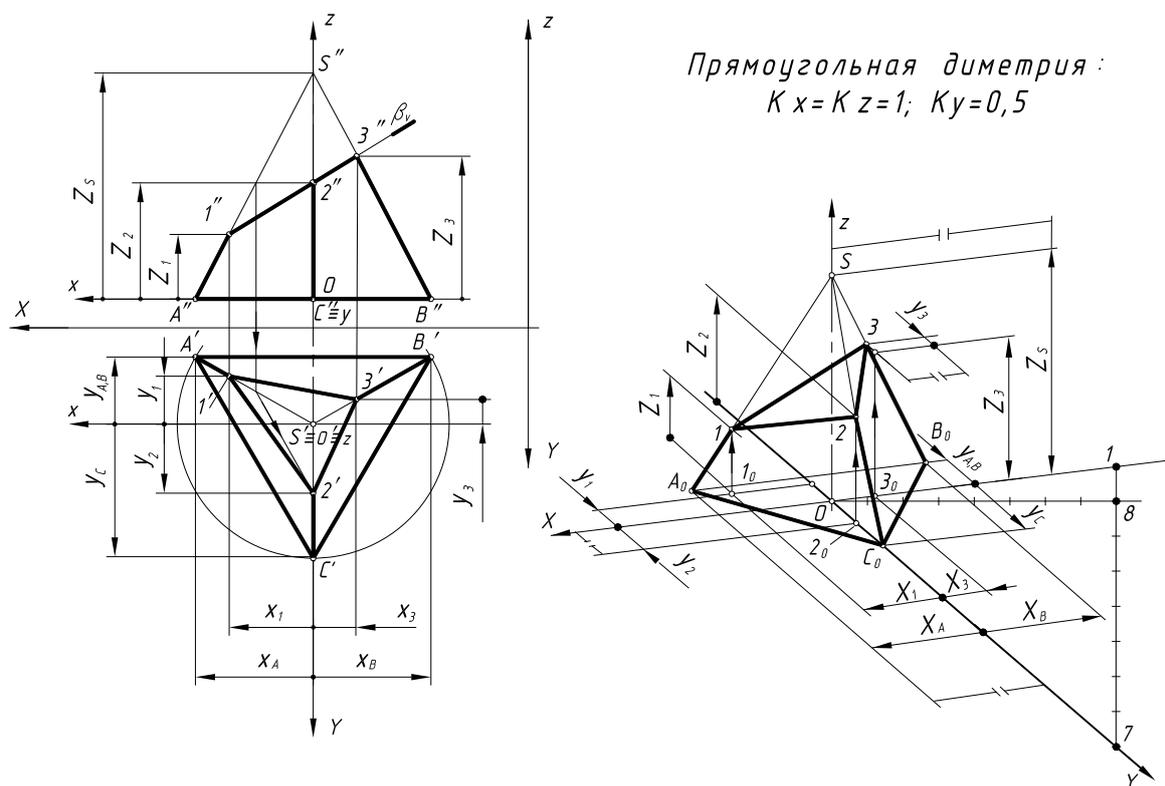


Рис. 10.6

Построение аксонометрии пирамиды выполняется по предлагаемому графическому алгоритму.

1-е действие. Отнести пирамиду к системе прямоугольных координат x , y и z , оси которой параллельны осям натуральной системы координат, но проходят через высоту пирамиды (ось z) и ее основание (оси x и y).

2-е действие. Определить в принятой системе координат на проекциях пирамиды координаты x , y и z отмеченных точек $1, 2, 3$, лежащих на ребрах пирамиды, и точек ABC – вершин основания пирамиды.

3-е действие. На свободном поле чертежа провести аксонометрические оси прямоугольной диметрии из произвольной точки O : ось z – вертикально, ось x – под углом $7^\circ 10'$, а ось y – под углом $41^\circ 25'$ к горизонтальной линии (использовать графический способ построения аксонометрических осей).

4-е действие. Построить тонкими линиями аксонометрическую проекцию пирамиды без среза.

4.1. Построить аксонометрическое изображение основания пирамиды $A_0B_0C_0$ по координатным ломаным этих точек (основание лежит в системе осей xOy и называется вторичной проекцией):

- точка A_0 : координатная ломаная $x_A - y_A$;
- точка B_0 : координатная ломаная $x_B - y_B$;
- точка C_0 : y_C .

!!! Координатные отрезки параллельны соответствующим аксонометрическим осям.

4.2. Построить по координате Z_S на аксонометрической оси Z проекцию вершины пирамиды и соединить вершину S с точками основания $A_0B_0C_0$ ребрами, то есть построить аксонометрию пирамиды.

5-е действие. Достроить срез на аксонометрии пирамиды, построив на ребрах пирамиды по координатам x , y и z аксонометрические проекции отмеченных точек 1, 2 и 3 по соответствующим плоским координатным ломанным:

- точка 1 на ребре SA_0 : координатная ломаная – $x_1-y_1-z_1$;
- точка 2 на ребре SC_0 : y_2-z_2 ;
- точка 3 на ребре SB_0 : $x_3-z_3-y_3$.

6-е действие. Оформить аксонометрию пирамиды, выполнив толстыми линиями ее видимый контур (оставить тонкими линиями полную проекцию пирамиды, невидимые линии и линии построения).

На рис. 10.7 показан пример построения аксонометрической проекции конуса со срезами двумя фронтально-проецирующими плоскостями (в сечении плоскостью α – треугольник со сторонами-образующими, в сечении плоскостью β – эллипс) в прямоугольной изометрии.

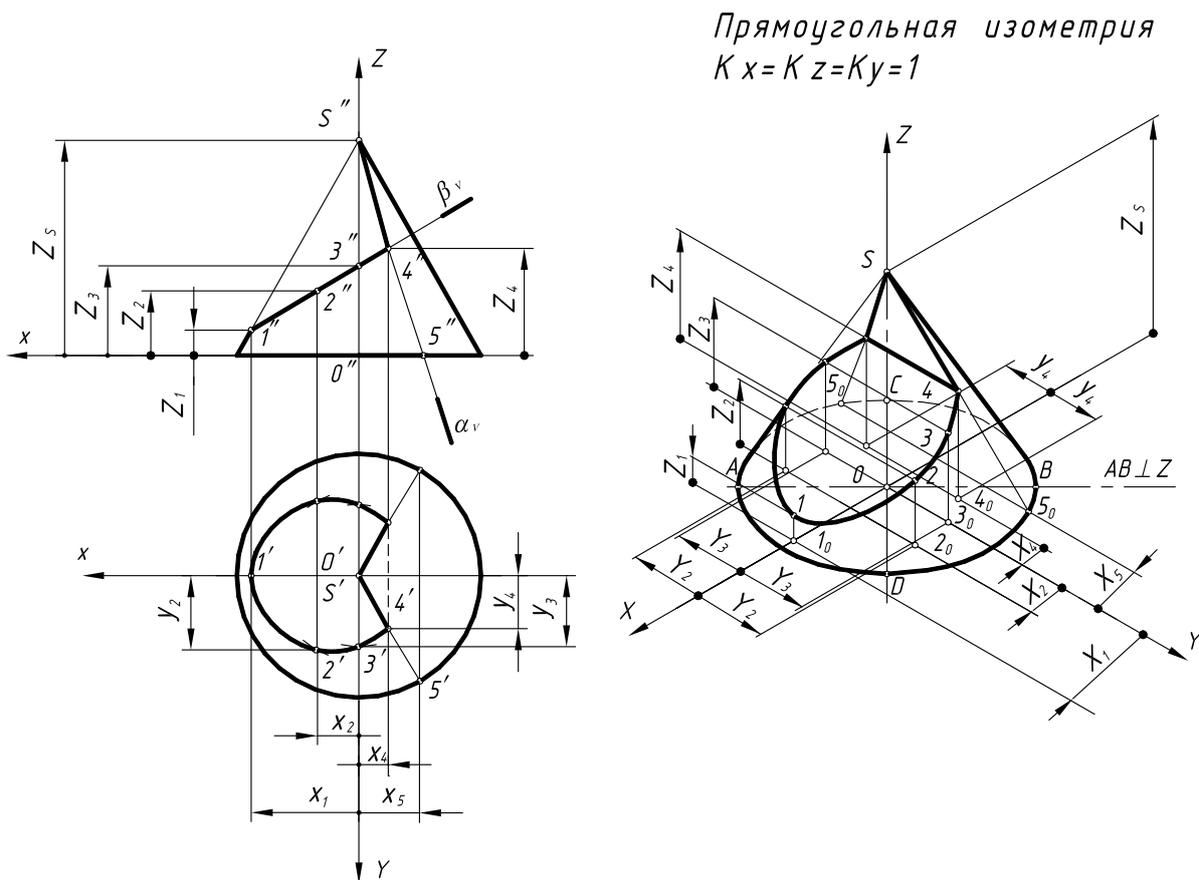


Рис. 10.7

Графические действия для построения аксонометрии конуса соответствуют предложенному алгоритму для построения аксонометрии пирамиды:

1-е действие. Отнести конус к такой же системе прямоугольных координат x , y и z (ось z совпадает с высотой конуса, оси x и y проходят по основанию конуса).

2-е действие. Определить координаты x , y и z для точек 1, 2, 3 и 4 на поверхности конуса для построения сечений на его аксонометрии.

3-е действие. На свободном поле чертежа отметить точку O начала аксонометрических координат и провести оси прямоугольной изометрии под углами 120° с вертикальной осью z .

4-е действие. Построить аксонометрическую проекцию конуса без срезов:

4.1. Построить эллипс основания конуса с центром в точке O , большая ось которого перпендикулярна аксонометрической оси Z , так как окружность основания конуса лежит в горизонтальной плоскости (см. графическое построение овала 2 на рис. 10.3).

4.2. Построить вершину конуса точку S на оси z по ее координате z_s и провести две касательные к эллипсу через вершину S .

5-е действие. Достроить срезы на аксонометрии конуса, построив аксонометрические проекции отмеченных точек 1, 2, 3 и 4 по соответствующим плоским координатным ломаным:

- точка 1: координатная ломаная x_1-z_1 ;
- точки 2: координатная ломаная $x_2-y_2-z_2$;
- точки 3: координатная ломаная y_3-z_3 ;
- точки 4: координатная ломаная $x_4-y_4-z_4$ (лежат на образующих $S-5_0$).

Соединить построенные точки соответствующими линиям (участок эллипса и треугольник).

6-е действие. Оформить чертеж аксонометрии конуса, выполнив толстыми линиями ее видимый контур (оставить тонкими линиями полный контур пирамиды, невидимые линии и линии построения).

На рис. 10.8 показано построение аксонометрической проекции цилиндра с полуцилиндрическим вырезом (их радиусы равны) в прямоугольной изометрии.

В этом частном случае пересечения поверхностей для построения линии пересечения на профильной проекции следует применить теорему Г. Монжа, так как эти две цилиндрические поверхности 2-го порядка равных диаметров описаны вокруг сферы.

Построение аксонометрии выполняется по аналогичному графическому алгоритму:

1-е действие. Отнести цилиндр к системе координатных осей x , y и z : оси x и y провести по нижнему основанию, а ось z – по оси вращения цилиндра.

2-е действие. Обозначить характерные и промежуточные точки 1, 2, 3 и 4 на поверхности цилиндра и определить координаты x , y , z обозначенных точек для построения линии пересечения полуцилиндрического выре-

за с поверхностью заданного цилиндра (симметричные точки обозначены на одной половине окружности).

3-е действие. На свободном поле чертежа отметить точку O начала аксонометрических координат и провести аксонометрические оси прямоугольной изометрии: ось Z – вертикально, а оси X и Y – под углами 120° к оси Z .

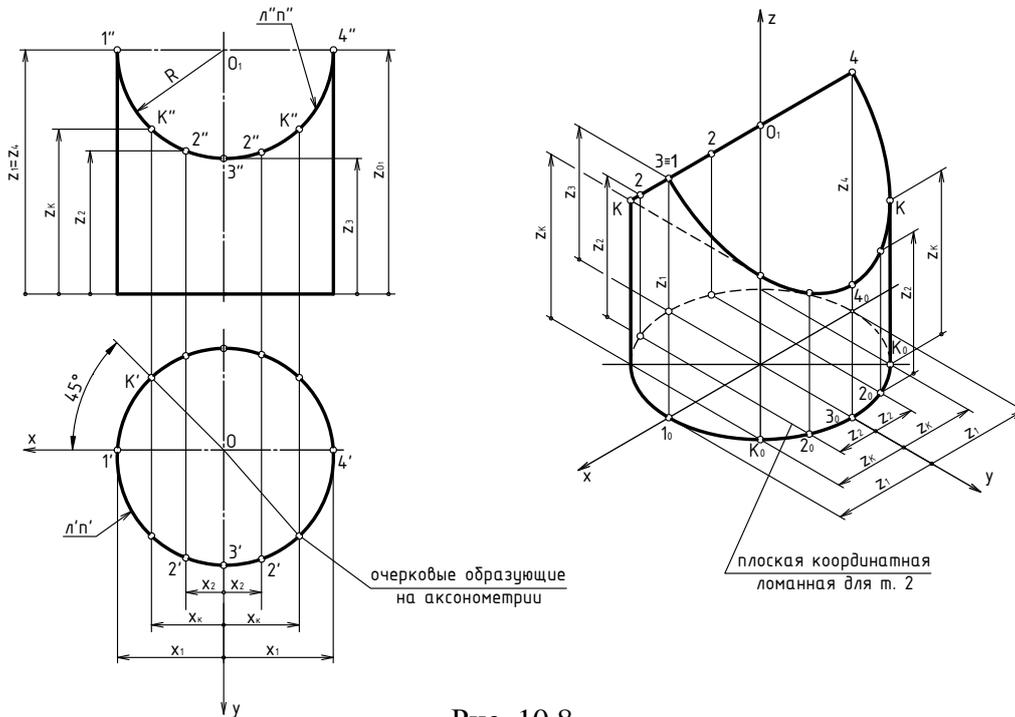


Рис. 10.8

4-е действие. Построить аксонометрию цилиндра без выреза.

4.1. Построить эллипс нижнего основания цилиндра в точке O , большая ось которого перпендикулярна оси Z , так как окружность основания лежит в горизонтальной плоскости.

4.2. Построить точку O_1 верхнего основания по координате Z_{O_1} и эллипса верхнего основания; соединить эллипсы двумя очерковыми образующими по конечным точкам больших осей эллипсов.

5-е действие. Достроить вырез на аксонометрии цилиндра, построив проекции обозначенных точек $1, 2, 3$ и 4 по координатным ломаным (снизу вверх) $X - Z$:

- точки 1 и $4 \rightarrow X_1(X_4) - Z_1(Z_4)$;
- точки $2 \rightarrow X_2 - Z_2$ (четыре точки);
- точки $3 \rightarrow Z_3$ (две точки);
- точки K (на очерковых образующих; см. построения на горизонтальных проекциях) $\rightarrow X_K - Z_K$;
- построенные точки соединить:
 - одна плоская кривая проецируется на аксонометрию в виде эллипса;
 - вторая плоская кривая проецируется в прямую линию (запомните!).

6-е действие. Соедините построенные точки соответствующими линиями – отрезками образующих и участками эллипсов.

7-е действие. Оформить аксонометрию цилиндра, выполнив толстыми линиями ее видимый контур (оставить тонкими линиями полный контур цилиндра, невидимые линии и линии построения).

На рис. 10.9 показан пример построения шара со срезами в прямоугольной изометрии.

Напомним, что сечением поверхности шара любой плоскостью является окружность. Но на чертеже окружности проецируются в эллипсы. В примере срезы выполнены профильной плоскостью $\alpha(\alpha_V)$, горизонтальной плоскостью $\beta(\beta_V)$ и фронтально-проецирующей плоскостью $\gamma(\gamma_V)$. Следовательно, на аксонометрическом изображении шара:

- эллипс окружности \varnothing_α , лежащий в профильной плоскости;
- эллипс окружности \varnothing_β , лежащий в горизонтальной плоскости;
- эллипс как проекцию окружности, лежащий в плоскости γ , по обозначенным точкам.

Аксонометрическим изображением шара в прямоугольной изометрии является окружность с диаметром, равным $1,22d$, где d – диаметр шара.

Графический алгоритм для построения аксонометрии шара следующий:

1-е действие. Отнести шар к системе координат x, y, z , проходящих через его центр (точка O).

2-е действие. Обозначить характерные точки 1, 2, 3, 4, 5 и 6 на поверхности шара и определить координаты обозначенных точек для построения срезов на аксонометрии.

3-е действие. На свободном поле чертежа отметить точку O начала аксонометрических координат и провести аксонометрические оси прямоугольной изометрии.

4-е действие. Построить аксонометрию шара без срезов – провести окружность диаметром $1,22d$.

5-е действие. Достроить срезы на аксонометрии шара:

- построить эллипс диаметром \varnothing_α , большая ось которого перпендикулярна аксонометрической оси x , с центром в точке O_1 с координатой x_{O_1} ;

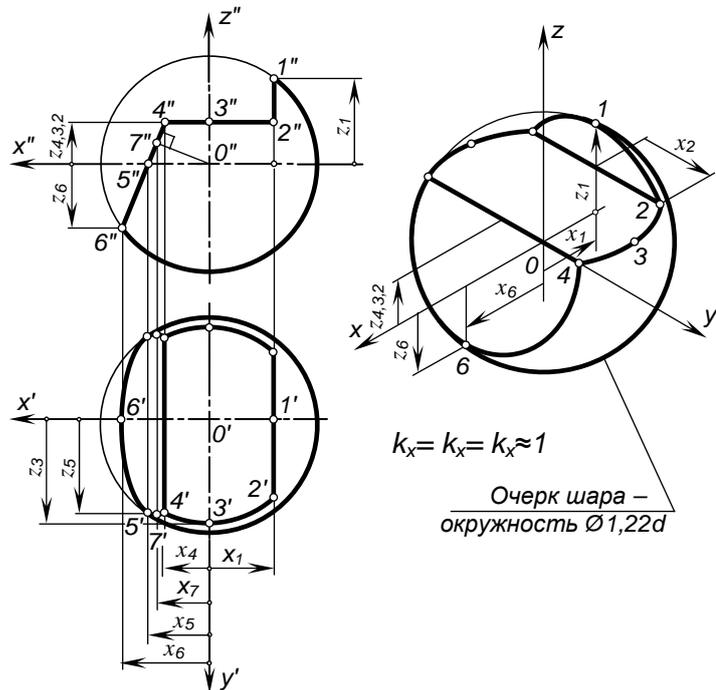


Рис. 10.9

- построить эллипс диаметром \varnothing_{β} , большая ось которого перпендикулярна аксонометрической оси Z , с центром в точке O_2 с координатой X_{O_2} (построенные эллипсы пересекаются по линии 2-2);

- построить по координате X_4 линию 4-4 на построенном горизонтальном эллипсе;

- построить по координатам точки 5 и 6: точку 5 – по ломаной X_5-Y_5 , а точку 6 – по координате Z_6 .

6-е действие. Соединить построенные точки 4-5-6 эллиптической кривой.

7-е действие. Оформить аксонометрию шара, выполнив толстыми линиями его видимый контур, оставив тонкими линиями полный очерк шара, невидимые линии и линии построения.

На рис. 10.10 показан пример построения половины открытого тора в прямоугольной изометрии.

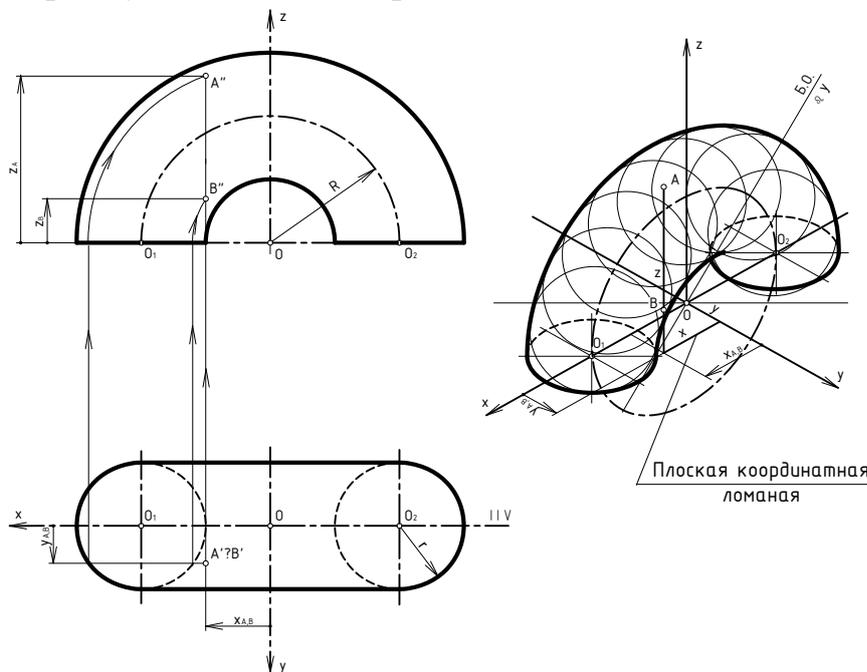


Рис. 10.10

Построение аксонометрии выполняется по следующему графическому алгоритму:

1-е действие. Отнести тор к системе координат x, y, z .

2-е действие. Если тор со срезом, обозначить характерные точки и определить их координаты: например, координаты точек A и B .

3-е действие. На свободном поле

чертежа отметить точку O начала аксонометрических координат и провести аксонометрические оси прямоугольной изометрии.

4-е действие. Построить эллипс направляющей окружности радиусом R с центром в точке O , большая ось которого перпендикулярна оси y .

5-е действие. В полученных на оси x точках O_1 и O_2 построить два эллипса образующих окружностей радиусом r , большие оси которых перпендикулярны оси Z .

6-е действие. Построить аксонометрию тора:

- провести достаточное количество образующих окружностей диаметрами, равными $1,22 r$ с центрами на эллипсе направляющей окружности тора;

- провести две лекальные огибающие касательные кривые.

7-е действие. Достроить аксонометрические проекции заданных точек **A** и **B** по их координатным ломаным:

- точка **A** → x_A - y_A - z_A ;
- точка **B** → x_B - y_B - z_B .

8-е действие. Оформить аксонометрию открытого тора.

На рис. 10.11 показан пример построения тороида (самопересекающегося тора) в прямоугольной изометрии.

Построение аксонометрии выполняется по следующему графическому алгоритму:

1-е действие. Отнести тор к системе координат x, y, z , проходящей по его основанию и ось вращения.

2-е действие. Рассечь тороид достаточным количеством плоскостей, перпендикулярных оси его вращения и определить радиус окружности каждого сечения (измерить линейкой) с центрами в точках O_1, O_2, O_3 и т. д.

3-е действие. Обозначить характерные точки **1, 2, 3** и **4** среза и определить их координаты.

4-е действие. На свободном поле чертежа отметить точку **O** начала аксонометрических координат и провести аксонометрические оси прямоугольной изометрии.

5-е действие. Построить аксонометрию тороида:

- построить семейство эллипсов в точках O, O_1, \dots, O_4 соответствующих радиусов R, R_1, R_2, \dots, R_4 с координатами $z(z_1, z_2, \dots, z_4)$, большие оси которых перпендикулярны оси Z , так как лежат в горизонтальных плоскостях;

- построить точку **S**;
- провести две касательные огибающие кривые к эллипсам.

6-е действие. Достроить срез на аксонометрии тороида по координатам отмеченных точек (построения см. рис. 10.11).

7-е действие. Оформить аксонометрию тороида.

!!! Аксонометрическая проекция глобоида в прямоугольной изометрии строится аналогично тем же способом «сечений».

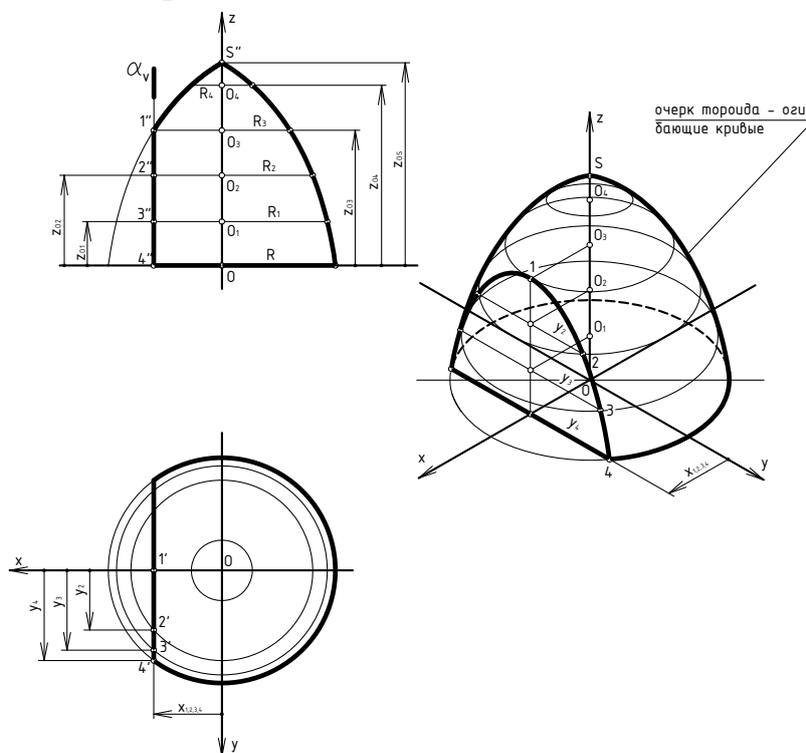


Рис. 10.11

На рис. 10.12 показан пример построения аксонометрической проекции правильной четырехгранной призмы со сквозным пазом, выполненным двумя профильными $\alpha_1(\alpha_{V1})$ и $\alpha_2(\alpha_{V2})$ фронтально-проецирующими плоскостями $\beta(\beta_V)$ в косоугольной диметрии (коэффициенты искажения $k_x = k_z = 1, k_y = 0,5$).

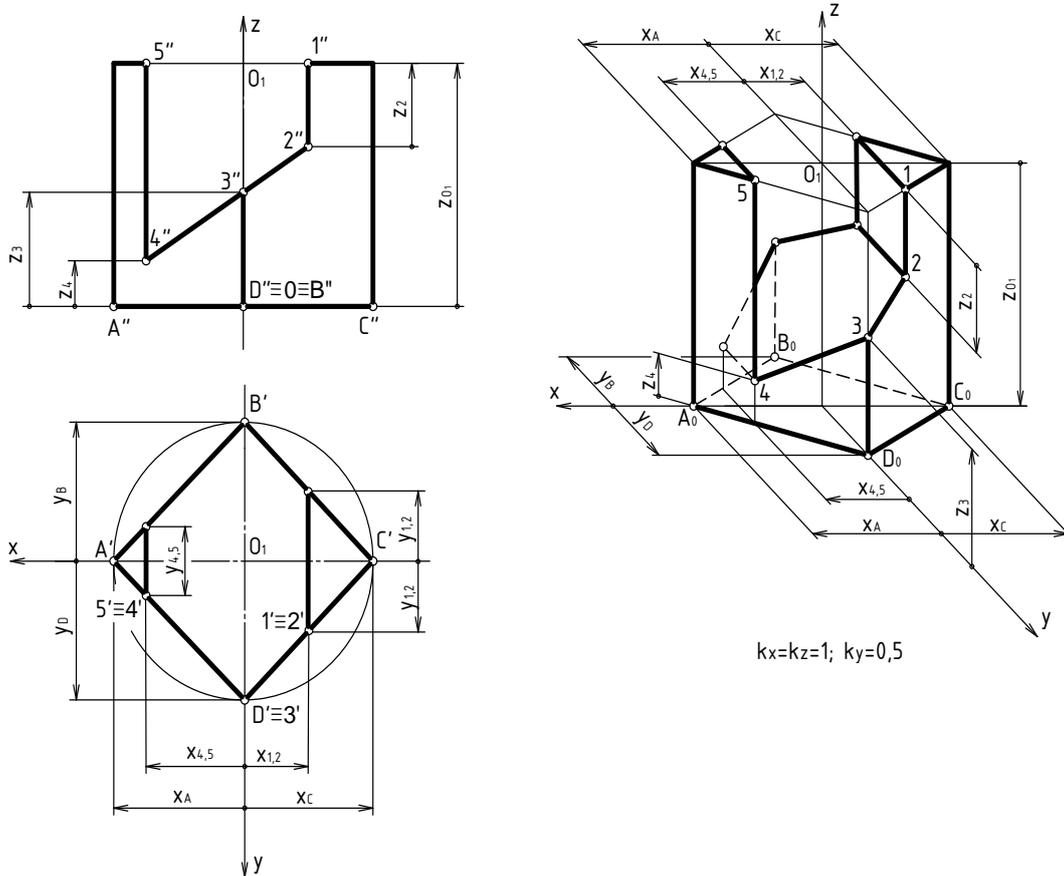


Рис. 10.12

Построение аксонометрии призмы выполняется по следующему графическому алгоритму:

1-е действие. Отнести («привязать») призму к системе прямоугольных координат x, y, z , оси которой параллельны осям натуральной системы координат, относительно которой построены проекции призмы, но проходят через высоту призмы (ось z) и через центр нижнего основания призмы (оси x и y).

2-е действие. Обозначить характерные точки $1, 2, \dots, 5$ на поверхности призмы.

3-е действие. Определить в отнесенной к призме системе координат на ее проекциях координаты x, y и z обозначенных точек:

- точки 1 и 5 , лежащих на верхнем основании и ребрах призмы;
- точек 2 и 4 , лежащих на линиях пересечения плоскостей пазы, а также обозначенных буквами A, B, C и D вершин нижнего основания призмы.

4-е действие. На свободном поле чертежа отметить точку O начала аксонометрических координат и провести аксонометрические оси косоугольной диметрии: ось Z – вертикально; ось X – горизонтально; ось Y – под углом 45° к горизонтальной линии (оси X).

5-е действие. Построить тонкими линиями аксонометрическую проекцию призмы без выреза:

5.1. Построить нижнее основание призмы $A_0B_0C_0D_0$ по координатам x и y этих точек (основание лежит в горизонтальной плоскости с осями xOy и называется вторичной проекцией):

- точки A_0 и C_0 – симметрично по равным координатам x_A и y_A на оси x ;
- точки B_0 и D_0 – по координатам y_B и y_D на оси y (координаты уменьшить в 2 раза!);
- соединить построенные вершины отрезками прямых линий.

5.2. Построить верхнее основание призмы:

- отложить от точки O вверх координату z_{O1} , равную высоте призмы, и через полученную проекцию точки O_1 провести аксонометрические оси;
- из точек A_0 , B_0 , C_0 и D_0 нижнего основания провести вертикально ребра призмы параллельно оси Z до пересечения с аксонометрическими верхнего основания и достроить верхнее основание призмы.

6-е действие. Достроить на аксонометрии призмы вырез по координатам обозначенных точек (сверху вниз):

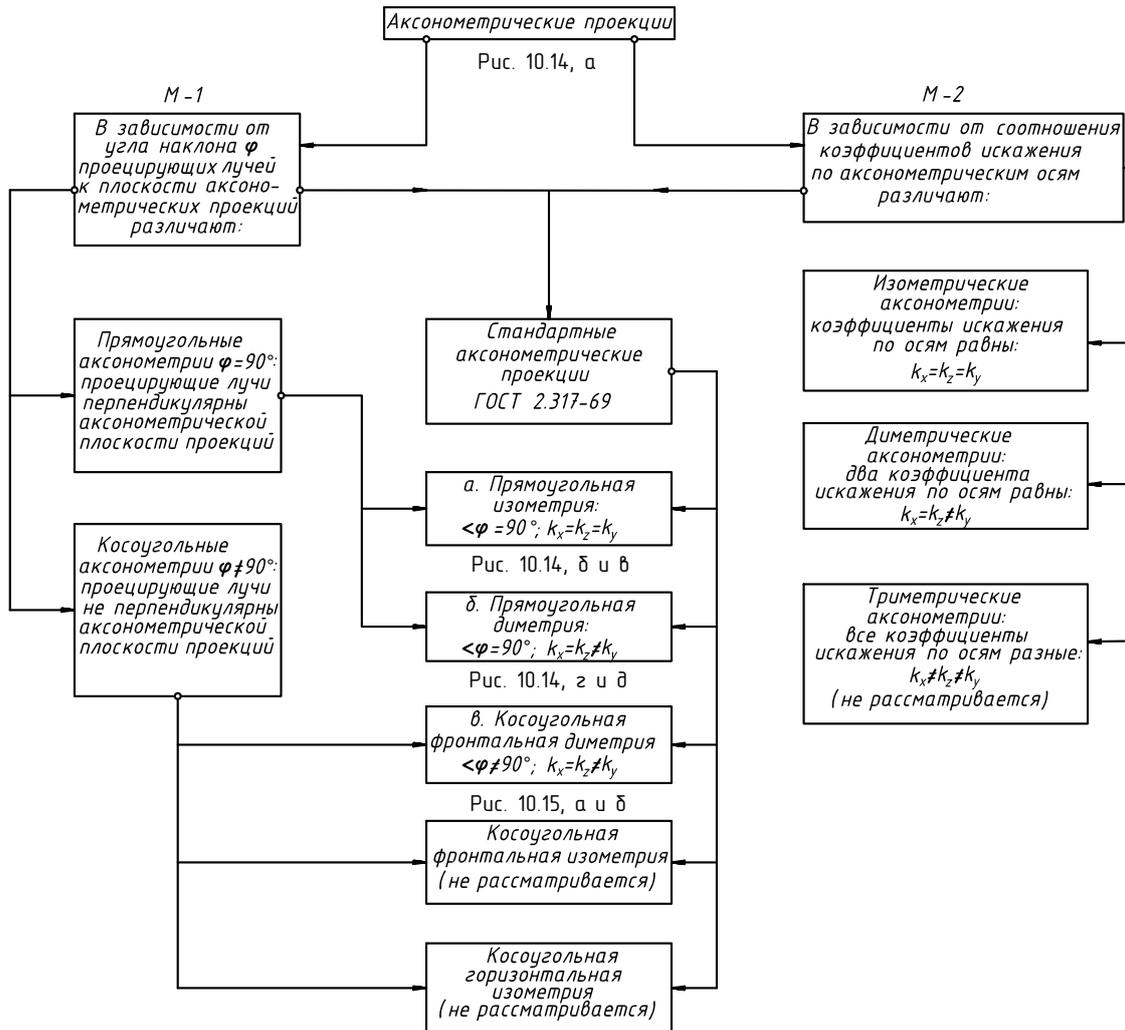
- точки 1 и 5 на верхнем основании по координатам x_1 и x_2 ;
- точки 2 и 4 – на вертикальных линиях, параллельных оси Z , по координатам z_2 и z_4 ;
- точки 3 – на ребрах B_0 и D_0 по координате z_3 ;

7-е действие. Соединить построенные точки отрезками прямых линий.

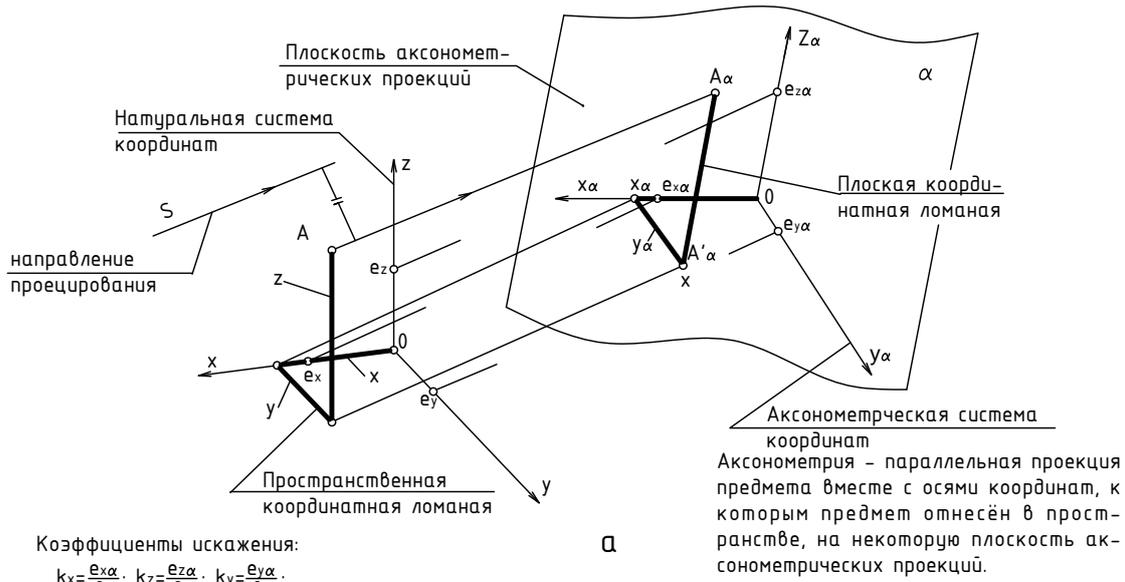
8-е действие. Оформить аксонометрию призмы, выполнив толстыми линиями ее видимый контур; оставить тонкими линиями полную проекцию призмы, невидимые линии и линии построения.

Структуризация материала десятой лекции в рассмотренном объеме схематически представлена на рис. 10.13 (лист 1). На последующих листах 2 и 3 компактно приведены иллюстрации к этой схеме для визуального закрепления основной части изученного материала при повторении (рис. 10.14 и 10.15).

АксонOMETрические проекции



АксонOMETрия – это проекция предмета вместе с осями координат, к которым этот предмет следует отнести в пространстве первого октанта, на некоторую плоскость (плоскость аксонометрических проекций). Направление проецирования на эту плоскость не должно совпадать с направлением натуральных координатных осей первого октанта.



Коэффициенты искажения:
 $k_x = \frac{e_{x\alpha}}{e_x}$; $k_z = \frac{e_{z\alpha}}{e_z}$; $k_y = \frac{e_{y\alpha}}{e_y}$;

Прямоугольные аксонометрии

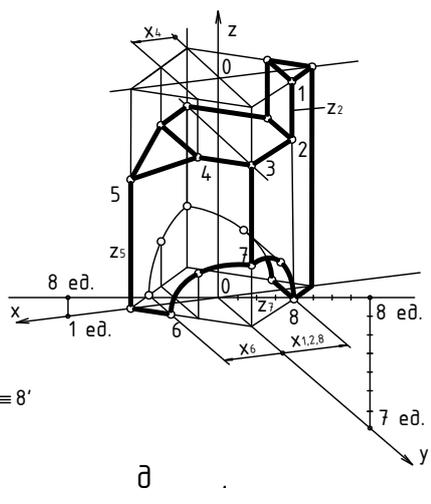
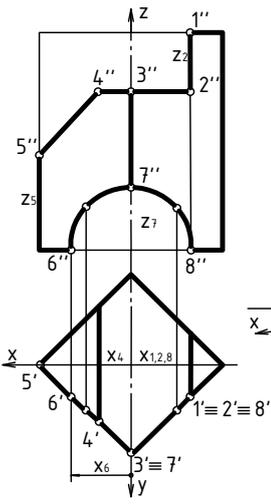
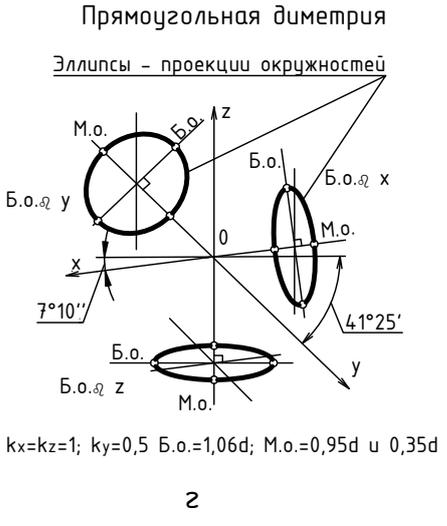
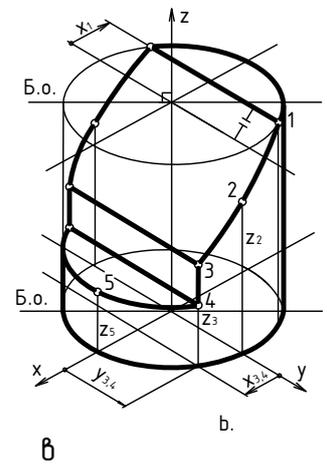
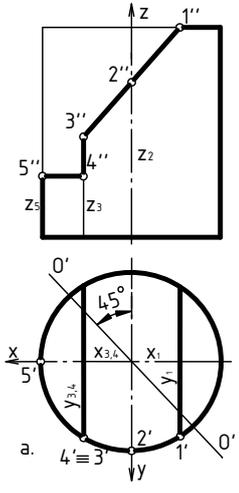
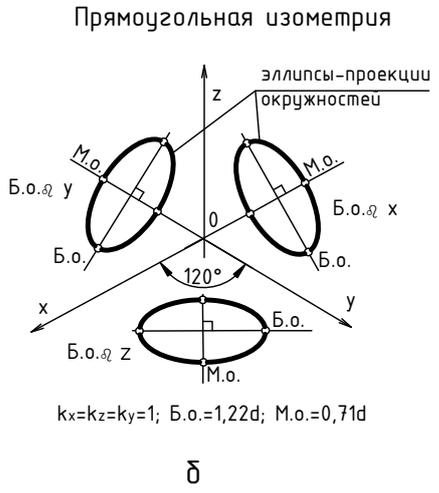
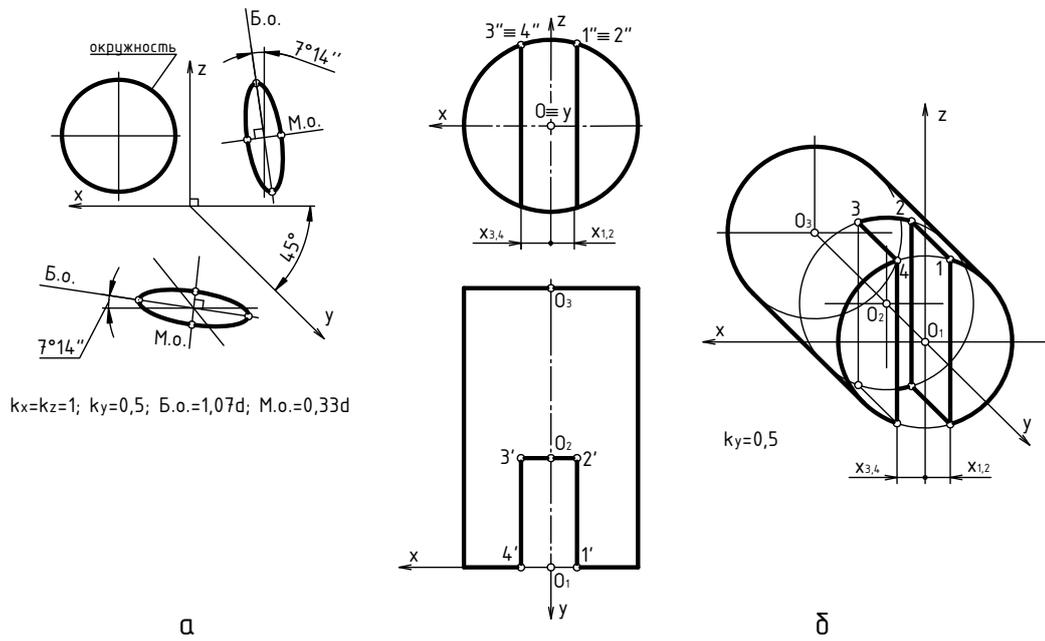


Рис. 10.14

Косоугольная фронтальная диметрия



Построение эллипсов на аксонометрических проекциях смотрите также в учебных пособиях [2, 6] или в учебных изданиях по инженерной графике других авторов.

Лекция 11 КРИВЫЕ ЛИНИИ И ПОВЕРХНОСТИ

КРИВЫЕ ЛИНИИ. ВИНТОВЫЕ ПОВЕРХНОСТИ

Общие сведения о кривых линиях: определения, классификация, термины

Кривую линию можно представить как траекторию движущейся точки в пространстве [12]. Примером служат, например, *спираль Архимеда, цилиндрическая или коническая винтовая линия* (рис. 11.7, а и б и рис. 11.8, а).

Кривая линия может быть получена в результате пересечения поверхностей между собой или пересечения кривой поверхности плоскостью. На поверхности конуса в зависимости от положения секущей плоскости образуется ряд кривых линий – *эллипс, гипербола, парабола, окружность* (см. рис. 7.11–7.15). Эллипс или окружность получают также в сечениях плоскостью цилиндра (см. рис. 7.7 и 7.8) и кругового однополостного гиперболоида. Осевыми сечениями однополостного гиперболоида являются гиперболы (см. рис. 7.29, а), а параболоида – параболы (см. рис. 7.29, а).

Кривые линии могут быть *плоскими* и *пространственными* (линиями двойкой кривизны). Примерами плоских кривых линий являются окружность, эллипс, парабола, спираль Архимеда, пространственных – винтовые линии, линии пересечения кривых поверхностей.

Пространственная линия всегда проецируется в виде кривой, а плоская – только при условии, что ее плоскость не перпендикулярна плоскости проекций (если перпендикулярна – проецируются в виде прямой).

Линия считается *закономерной*, если в своем образовании она подчинена какому-либо геометрическому закону, а если при этом она определяется в декартовых координатах алгебраическим уравнением, ее называют *алгебраической*. Степень уравнения определяет «*порядок*» кривой. Так, например, эллипс – кривая второго порядка. Проекция кривой сохраняет ее порядок или оказывается кривой более низкого порядка.

Если кривая не определяется алгебраическим уравнением, то она относится к числу *трансцендентных*.

Касательная прямая к кривой линии в общем случае проецируется в виде касательной к проекции этой кривой. Так, например, касательная к окружности в некоторой точке проецируется в касательную к эллипсу, являющемуся проекцией этой окружности.

Если в каждой точке кривой можно построить только одну касательную прямую линию, то кривая называется *плавной* или *монотонной*.

Такая плоская кривая в каждой ее точке имеет только одну *нормаль* – прямую, перпендикулярную к соответствующей касательной в каждой точке кривой и принадлежащую плоскости.

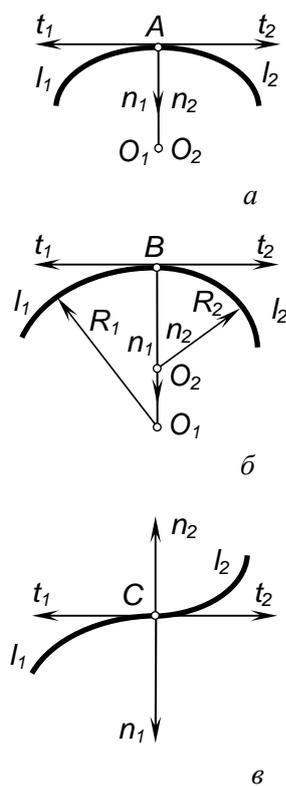


Рис. 11.1

Из всего многообразия точек стыка следует уделить внимание и так называемым точкам *возврата* 1-го и 2-го рода и точке *излома* (рис. 11.2) [23].

На рис. 11.2, *а* изображена точка *D* возврата 1-го рода, в которой касательные t_1 и t_2 к каждой кривой совпадают по направлению, а нормали n_1 и n_2 имеют противоположные направления.

На рис. 11.2, *б* изображена точка *E* возврата 2-го рода, в которой и касательные t_1 и t_2 к каждой кривой, и нормали n_1 и n_2 попарно совпадают по направлению.

На рис. 11.2, *в* и *г* изображены точки *K* и *L* излома, в которых касательные t_1 и t_2 не принадлежат одной прямой.

Плоские и пространственные кривые линии

Для построения ортогональных проекций кривой необходимо построить проекции ряда точек, принадлежащих этой кривой, и через них провести под лекала плавные кривые. Следует иметь в виду, что по двум проекциям нельзя без дополнительных построений определить, является линия пространственной или плоской кривой.

Составные кривые линии – классификация точек стыка

Кривая линия может быть *составной*, если на ней есть точка стыка, называемая *вершиной*, в которой соединяются две кривые линии (рис. 11.1 и 11.2) [23]. Существует понятие *обыкновенная* вершина кривой. Это точка *A* на рис. 11.1. В ней соединяются (соприкасаются) две монотонные плоские кривые линии l_1 и l_2 , касательные t_1 и t_2 , к которым в этой точке противоположно направлены по одной линии, а нормали n_1 и n_2 и центры кривизны O_1 и O_2 совпадают (рис. 11.1, *а*).

Если хотя бы одно из указанных условий не выполняется, то речь ведут об *особой* точке на составной кривой. *Двойной* называют особую точку *B* стыка (вершину) составной кривой, если касательные направлены в разные стороны, нормали совпадают по направлению, а вот центры кривизны различны (рис. 11.1, *б*). Точка *перегиба* получается в том случае, когда в ней противоположные направления имеют и касательные, и нормали к составной кривой. Это особая точка стыка *C* (рис. 11.1, *в*).

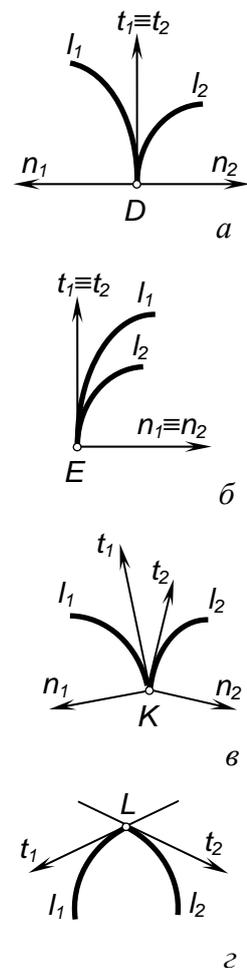


Рис. 11.2

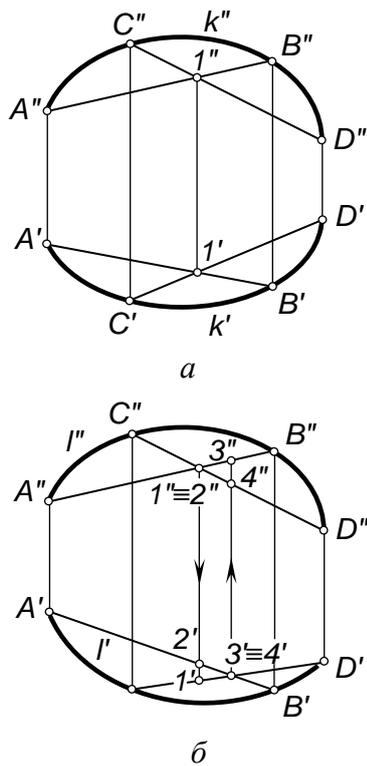


Рис. 11.3

На рис. 11.3 показаны эти дополнительные построения, которые позволяют сказать: сверху приведен чертеж плоской кривой $k(k', k'')$, а под ним – пространственной $l(l', l'')$. Суть дополнительных построений сводится к соединению попарно четырех точек $A(A', A'')$ и $B(B', B'')$, $C(C', C'')$ и $D(D', D'')$, произвольно взятых на кривой, прямыми линиями.

Поскольку на рис. 11.3, *а* эти прямые являются пересекающимися, о чем свидетельствует расположение проекций $1'$ и $1''$ точки их пересечения на одной линии связи, то все указанные точки $A(A', A'')$, $B(B', B'')$, $C(C', C'')$ и $D(D', D'')$ лежат в одной плоскости. В силу этого линия $k(k', k'')$, которой принадлежат эти точки, является плоской кривой (у плоской кривой все принадлежащие ей точки должны лежать в одной плоскости).

Внизу на рис. 11.3, *б* отмеченное условие не выполняется – точки пересечения проекций прямых, попарно соединяющих проекции четырех точек $A(A', A'')$ и $B(B', B'')$, $C(C', C'')$ и $D(D', D'')$, при-

надлежащих кривой $l(l', l'')$, лежат на разных линиях связи. Следовательно, эти прямые не лежат в одной плоскости, являясь скрещивающимися. Поэтому не лежат в ней и соединяемые ими точки кривой, свидетельствуя о том, что эта линия – пространственная кривая.

Цилиндрические и конические винтовые линии

Из пространственных кривых в технике находят широкое применение *винтовые линии* и поверхности. Винтовую линию можно рассматривать как результат перемещения точки по поверхности вращения.

Гелисой называют винтовую линию, которая образуется в результате равномерного вращения точки вокруг оси и одновременного перемещения с постоянной скоростью вдоль нее.

Величину P перемещения точки вдоль направления оси, соответствующем одному ее обороту вокруг оси, называют *шагом* винтовой линии.

Для построения проекции винтовой линии, в частности гелисы, предварительно строят проекции прямого кругового цилиндра (рис. 11.7, *б*).

Окружность основания цилиндра (горизонтальная проекция гелисы) делят на равное количество равных частей (например, на 12, так как это можно сделать тем же раствором циркуля, которым была вычерчена окружность). На такое же количество частей делят цилиндр по высоте, равной шагу винтовой линии, на фронтальной проекции. Из точек, отмеченных на окружности, проводят вертикальные линии связи до их пересечения с горизонтальными линиями, проведенными из соответствующих точек деления шага. Соединив полученные точки плавной кривой линией, получают фронт-

тальную проекцию винтовой линии (линия изображена с учетом ее видимости на поверхности цилиндра, рис. 11.7, б).

Различают *правые* и *левые* винтовые линии. Изображенная на рис. 11.7, б цилиндрическая винтовая линия является правой. Она характеризуется тем, что при вращении по часовой стрелке точка удаляется от наблюдателя, а при вращении против часовой стрелки – приближается. Если эти условия не соблюдаются, винтовая линия называется левой.

На рис. 11.7, б справа показано построение развертки винтовой линии. Там же приведена формула для определения крутизны винтовой линии.

На рис. 11.8, а приведена коническая винтовая линия, которая образуется в результате движения точки по поверхности конуса при условии, что она равномерно вращается вокруг оси конуса и движется вдоль нее с постоянной скоростью. Судя по направлениям этих ее движений – это также правая винтовая линия. Для построения ее проекций горизонтальные проекции окружностей оснований приведенного усеченного конуса делят на 12 равных частей и, соединяя их, строят горизонтальные проекции образующих конуса. Определив фронтальные проекции полученных точек посредством линий связей, строят фронтальные проекции образующих. Затем делят конус по высоте (равна шагу винтовой линии) на то же количество частей горизонтальными линиями и отмечают точки их пересечения с фронтальными проекциями образующих. Соединив найденные точки плавной кривой линией, получают фронтальную проекцию конической винтовой линии (линия изображена с учетом видимости ее на поверхности конуса, рис. 11.8, а). Далее, опуская из этих точек линии связи, отмечают на пересечениях с горизонтальными проекциями соответствующих образующих точки, через которые пройдет горизонтальная проекция конической винтовой линии. По форме она представляет собой спираль Архимеда. Там же, на рис. 11.8, а, показаны дополнительные построения по определению горизонтальных проекций $3'$ и $9'$ точек винтовой линии на образующих, не пересекаемых линиями связи, а сливающихся с ними. Графически показано, как поделены горизонтальные проекции этих образующих на отрезки в том же отношении, в котором поделены их фронтальные проекции винтовой линией (для уменьшения количества построений указанное деление обоих отрезков совмещено в одном построении).

Винтовые поверхности – прямой и косо́й геликоиды

При винтовом движении отрезка линии образуются *винтовые поверхности*. В зависимости от формы образующей линии, винтовые поверхности могут быть линейчатыми и нелinearчатыми. Они находят большое применение в технике, особенно в машиностроении и поэтому заслуживают отдельного внимания.

Все точки образующей при винтовом движении описывают винтовые линии (за исключением точки, находящейся на оси вращения поверхности), каждая из которых может служить направляющей поверхности. Линейчатые винтовые поверхности называют *геликоидами*. В зависимости от положения

образующей относительно оси вращения геликоиды могут быть *прямыми* (образующая перпендикулярна оси) и *косыми* (образующая наклонена к оси).

Чертеж прямого геликоида приведен на рис. 11.8, б. Построение его проекций вначале повторяет построения цилиндрической винтовой линии, приведенные на рис. 11.7, б. Но вместо фронтального очерка цилиндра необходимо показать фронтальные проекции образующих винтовой поверхности. Эти проекции представляют собой горизонтальные отрезки, расположенные между осью вращения поверхности и фронтальной проекцией винтовой линии. Фронтальный очерк прямого геликоида образуют указанная винтовая линия, являющаяся проекцией траектории движения внешнего конца образующей, и проекция траектории движения ее внутреннего конца, совпадающая с фронтальной проекцией оси вращения образующей. Направление геликоида определяют так же, как и винтовой линии.

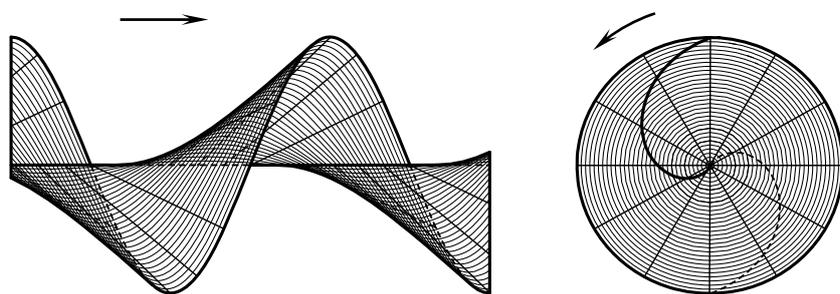


Рис. 11.4

При построении проекций косого геликоида необходимо знать угол наклона его образующей к оси вращения. Эта поверхность имеет более сложный очерк (рис. 11.4).

Чертеж косого геликоида, образованного наклонной прямолинейной образующей за 1,5 оборота винтового движения, приведен на рис. 11.5 и повторен на рис. 11.8, в.

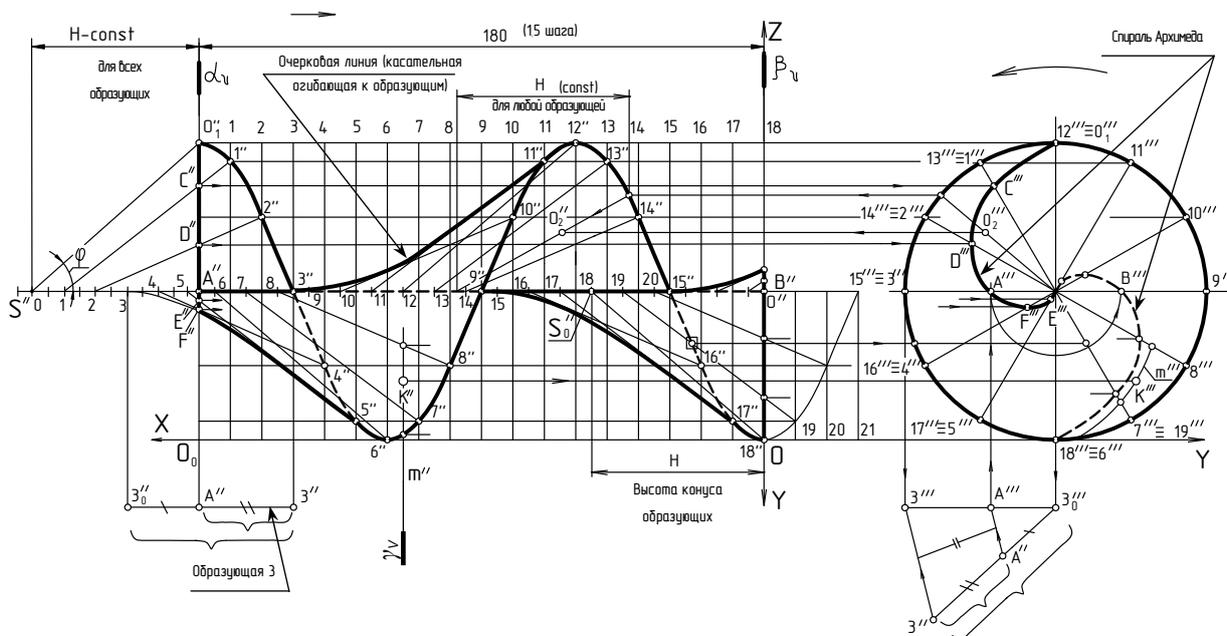


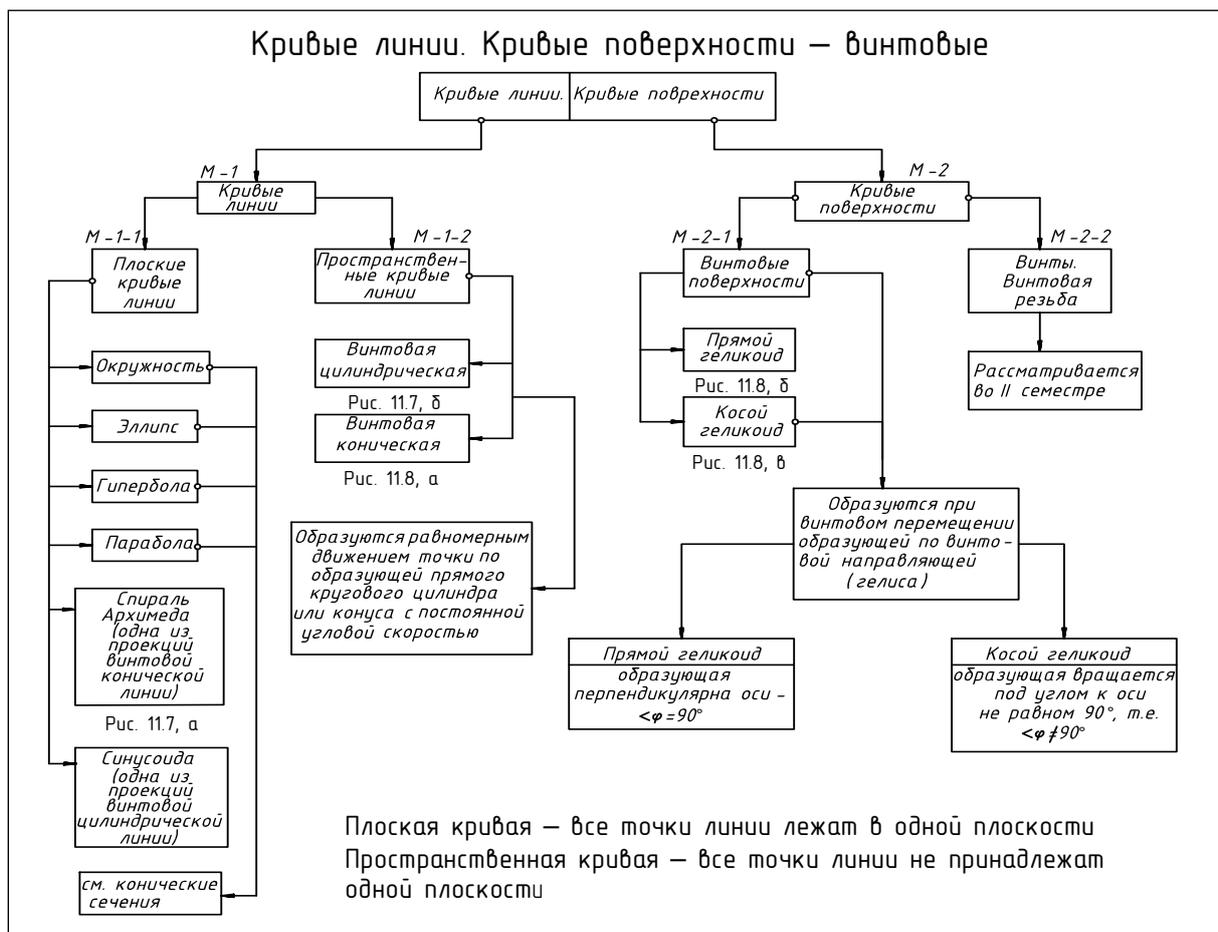
Рис. 11.5

Исходным условием для построений его чертежа является шаг винтового движения образующей и ее начальное положение под углом φ к оси вращения (рис. 11.5). В процессе движения образующая должна оставаться па-

параллельной поверхности направляющего конуса высотой H . Для построения 18 фронтальных проекций образующей, равномерно расположенных на протяжении 1,5 шага поверхности, используют вспомогательную сетку. При этом расстояние H между концами каждой образующей, измеренное вдоль оси вращения, должно быть постоянным. Затем проводят огибающие кривые очерковые линии, касательные к проекциям образующих, и строят торцевые срезы рассматриваемого участка косоугольного геликоида профильными плоскостями. Профильные проекции этих срезов представляют собой спирали Архимеда. Проекции A''' и B''' точек, принадлежащих образующей в ее третьем и девятом положениях, могут быть определены путем дополнительных построений, основанных на графическом делении отрезков в заданном отношении.

Построение недостающей профильной проекции K''' и недостающей фронтальной проекции O_2'' точек $K''(K''')$ и $O(O_2''')$, принадлежащих винтовой поверхности, показано на том же чертеже (рис. 11.5). В первом случае использовалась линия m сечения поверхности профильной плоскостью $\gamma(\gamma_V)$, во втором – промежуточная образующая.

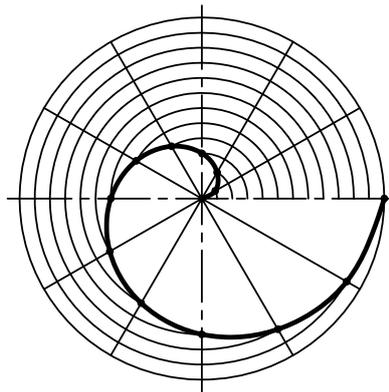
Структуризация материала данной лекции схематически представлена на рис. 11.6 (лист 1). На последующих листах 2 и 3 (рис. 11.7 и 11.8) компактно приведены иллюстрации к этой схеме для визуального закрепления основной части изученного материала при повторении.



Лист 1

Рис. 11.6

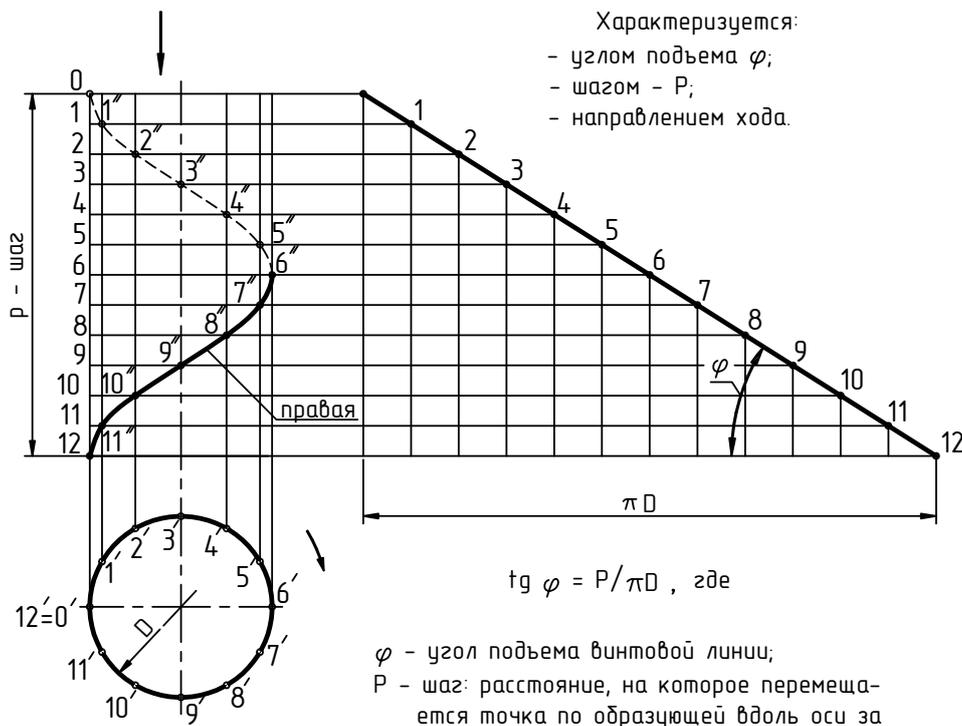
Плоские кривые. Спираль Архимеда



а

Пространственные кривые

Цилиндрическая винтовая пространственная линия.



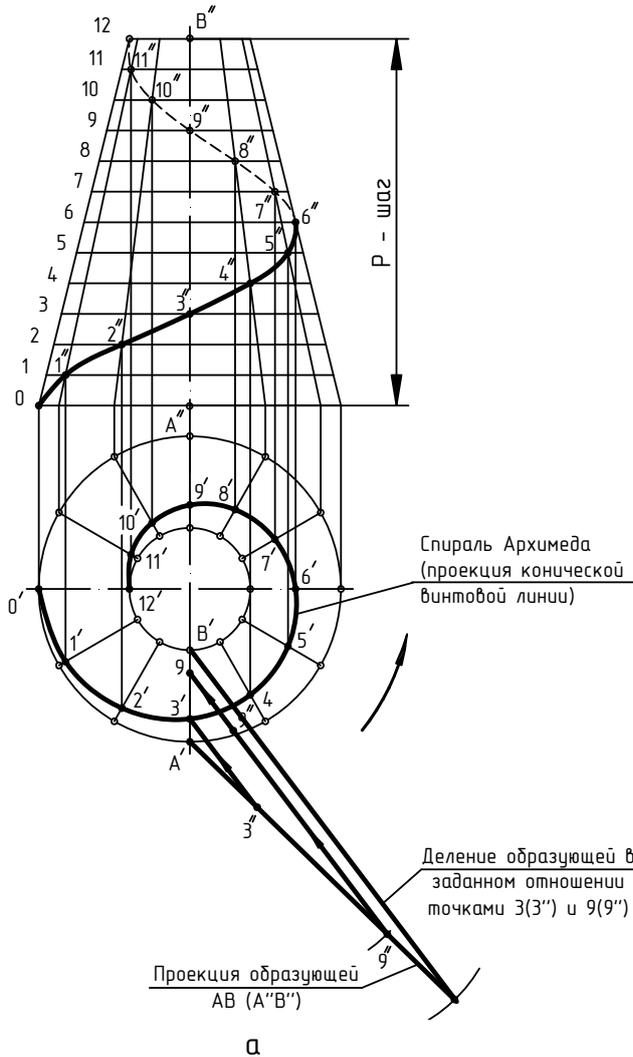
Правая винтовая линия - точка удаляется от наблюдателя, вращаясь по часовой стрелке.

Левая винтовая линия - точка удаляется от наблюдателя, вращаясь против часовой стрелки.

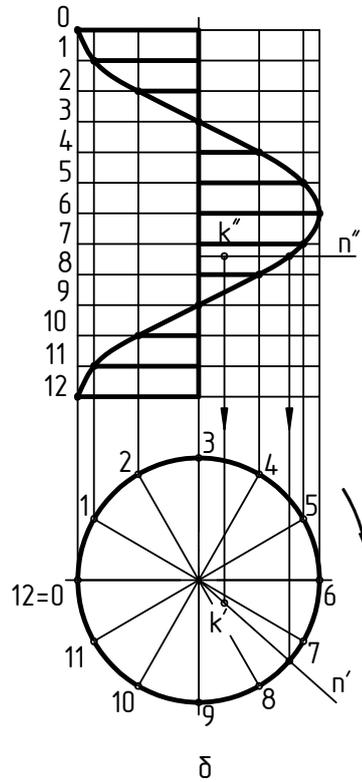
б

Рис. 11.7

Коническая пространственная винтовая линия



Винтовая поверхность –
прямой геликоид
(образующие перпендикулярны оси)



Винтовая поверхность – косо́й геликоид

(образующие не перпендикулярны оси, $\varphi \neq 90^\circ$)

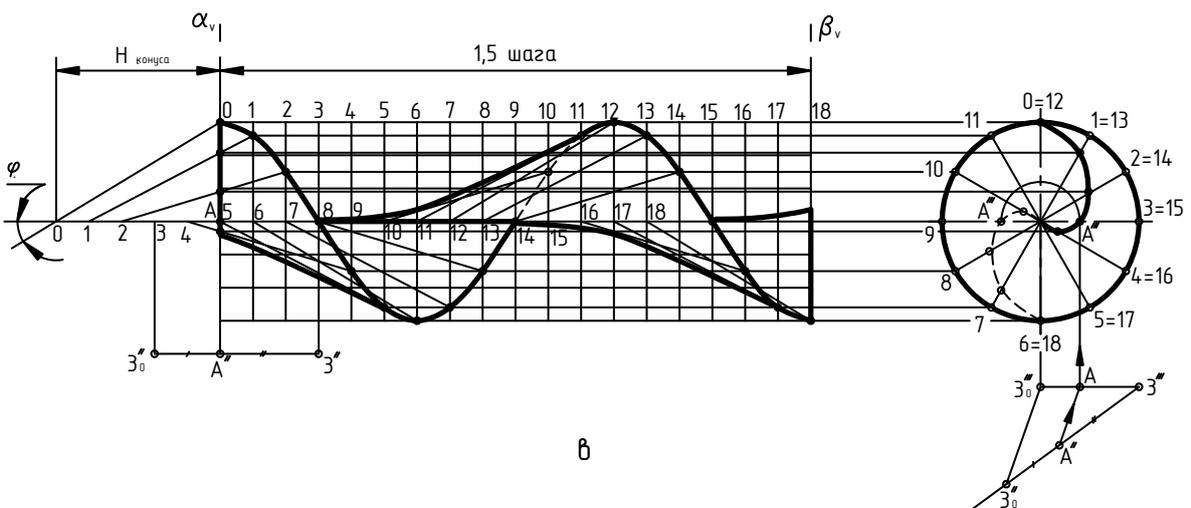


Рис. 11.8

КРИВЫЕ ПОВЕРХНОСТИ

Общие сведения: определения, классификация, термины

В начертательной геометрии поверхность определяется как *след* движущейся в пространстве линии, называемой образующей [12]. Такое представление об образовании поверхности удобно для графических построений.

Представление об образовании поверхности непрерывным движением линии позволяет такие поверхности называть *кинематическими*. При этом линия, образующая поверхность, может во время движения деформироваться. Тогда говорят о поверхности с «переменной образующей».

Образующая линия может быть *прямой* или *кривой*.

Закон движения образующей может быть задан другими линиями, называемыми *направляющими* поверхности. По ним образующая в процессе своего движения скользит.

Поверхность, которая образована движением прямой линии, называют *линейчатой* поверхностью. Таким образом, линейчатая поверхность представляет собой геометрическое место прямых линий.

Поверхность, которая образована движением кривой линии, называют *нелинейчатой* поверхностью. Примерами такой поверхности является сфера, тор и др.

Одна и та же поверхность может быть образована перемещением различных линий и согласно различным условиям движения, то есть законы образования поверхности в ряде случаев могут быть разнообразными. Для решения геометрических задач, как правило, используют наиболее простой или удобный закон задания поверхности.

Некоторые кривые поверхности могут быть развернуты так, что совместятся все своими точками с плоскостью без разрывов, складок, или растяжений. Такие поверхности называют *развертываемыми*. К ним относятся только линейчатые поверхности, причем такие, у которых смежные прямолинейные образующие параллельны, или пересекаются между собой, или являются касательными к некоторой пространственной кривой.

Все кривые нелинейчатые поверхности и те линейчатые, которые не могут быть развернуты в плоскость, называются *неразвертывающимися* (или *косыми*).

Задать поверхность на чертеже – значит указать условия, позволяющие построить каждую точку этой поверхности. Для задания поверхности достаточно иметь проекции направляющих линий (одной или нескольких) и указать, как строится образующая линия. Для придания же изображениям поверхности наглядности вычерчивают еще и ее очерк, показывают несколько промежуточных положений образующих поверхности, отображая, таким образом, поверхность в виде *каркаса*.

Обзор некоторых кривых поверхностей, их изображение на чертеже

1. Поверхности линейчатые развертываемые.

1.1. *Цилиндрическая поверхность.* Образуется движением прямой линии l по криволинейной направляющей n и остающейся во всех своих положениях параллельной некоторой заданной прямой линии S (рис. 11.9).

1.2. *Коническая поверхность.* Образуется движением прямой линии l по криволинейной направляющей и проходящей во всех своих положениях через некоторую неподвижную точку S , называемую *вершиной* конической поверхности (рис. 11.10).

Линия, получаемая при пересечении цилиндрической или конической поверхностей с плоскостью, называется *следом* поверхности.

На рис. 11.9, *a* и рис. 11.10, *a* показаны следы этих поверхностей в пространстве.

На рис. 11.9, *б* показано построение на чертеже горизонтального следа n_H цилиндрической поверхности посредством семейства произвольно задаваемых образующих l , параллельных прямой S , определяющей их направление. След n_H построен по точкам $l_{H1}, l_{H2}, l_{H3}, \dots, l_{H8}$, являющимся горизонтальными следами образующих.

Для построения недостающих проекций точек, принадлежащих цилиндрической или конической поверхности, также используют их образующие.

На рис. 11.10, *б* показано построение недостающей фронтальной A'' проекции точки $A(A')$ посредством промежуточной образующей $l(l', l'')$. Вначале строят ту проекцию образующей l , на которой находится заданная проекция A' точки, то есть в данном случае – горизонтальную проекцию l' . Затем, используя точку пересечения $1(1', 1'')$ этой образующей с направляющей кривой линией $n(n', n'')$, строят фронталь-

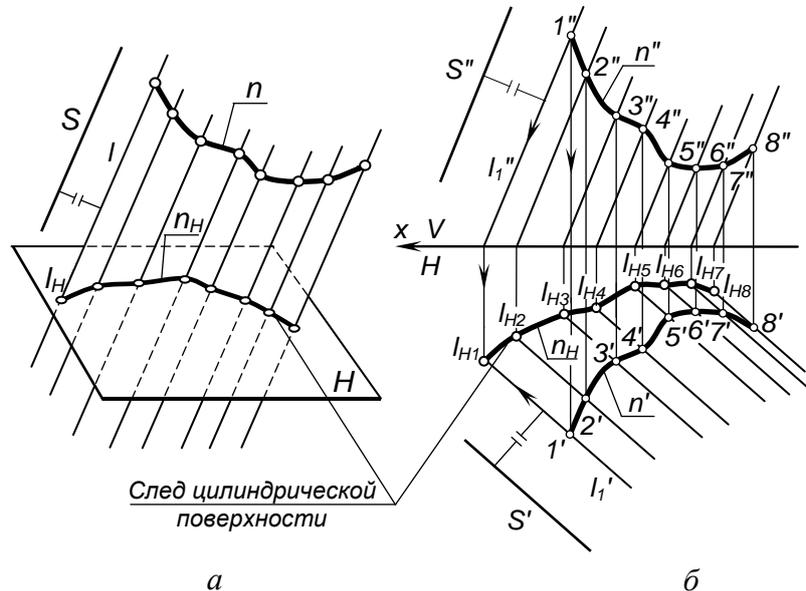


Рис. 11.9

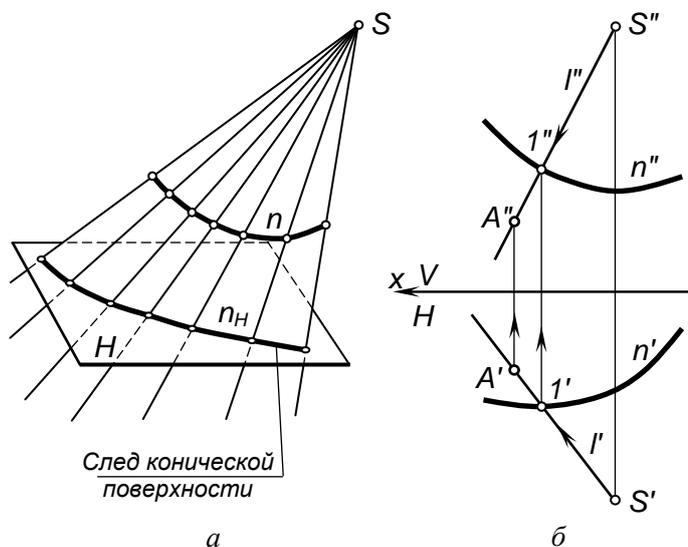


Рис. 11.10

ную проекцию l'' образующей, и посредством линии связи находят искомую недостающую проекцию точки A'' .

1.3. *Поверхность с ребром возврата* (торсовая). Образуется непрерывным движением прямолинейной образующей l , во всех своих положениях касающихся некоторой пространственной кривой n . Эта пространственная кривая является для данного типа поверхностей направляющей. Ее называют *ребром возврата*.

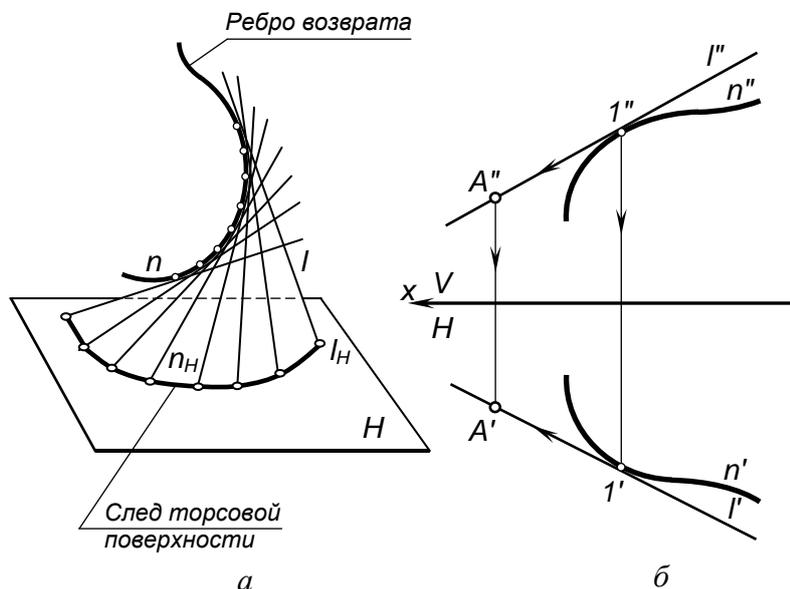


Рис. 11.11

стающей горизонтальной проекции A' принадлежащей ей точки $A(A'')$. Для построения использовалась образующая $l(l', l'')$, задаваемая через заданную проекцию точки A'' касательно к ребру возврата поверхности в точке $1(1', 1'')$.

2. Поверхности линейчатые неразвертываемые.

2.1. Поверхности с плоскостью параллелизма.

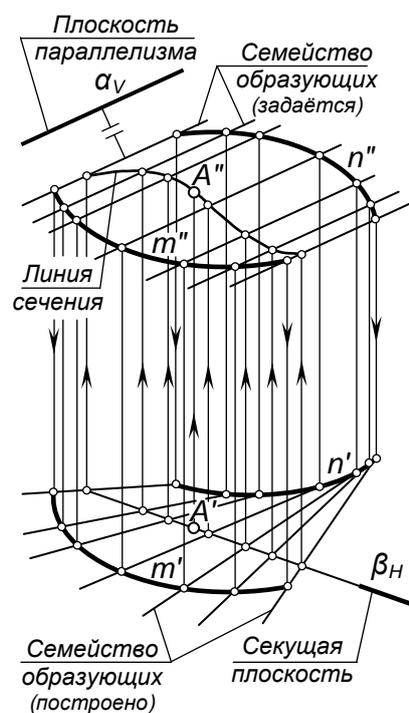


Рис. 11.12

Цилиндроид и коноид – это поверхности, образованные движением прямолинейной образующей по двум направляющим, и остающейся во всех своих положениях параллельной некоторой заданной плоскости, называемой *плоскостью параллелизма*. В качестве плоскости параллелизма может задаваться некоторая проецирующая плоскость (ее след указывается на чертеже, рис. 11.12) или оговаривается, что плоскостью параллелизма является одна из плоскостей проекций (рис. 11.13).

Всякая плоскость, параллельная плоскости параллелизма, пересекает цилиндроид или коноид по прямой линии – по образующей. Это свойство используется при решении задач.

На рис. 11.12 показано построение недостающей фронтальной проекции точки $A(A')$ на поверхности цилиндриоида, заданного двумя направляющими $n(n', n'')$ и фронтально-проецирующей плоскостью α_V в качестве плоскости

параллелизма. Поскольку применить вышерассмотренный алгоритм, когда было достаточно воспользоваться одной из образующих, в данном случае не представляется возможным (не известно, как будет направлена образующая через заданную проекцию A' точки), необходимо вначале построить семейство образующих, задавая их фронтальные проекции параллельно следу плоскости параллелизма α_V (согласно закону образования поверхности цилиндроида). Построив обе проекции каркаса цилиндроида из образующих, выполняют его сечение произвольной горизонтально-проецирующей плоскостью, проходящей через заданную проекцию A' точки. Затем строят фронтальную проекцию линии сечения и на ней посредством линии связи находят искомую проекцию A'' точки.

На рис. 11.13 показано построение недостающей горизонтальной проекции точки A , принадлежащей поверхности коноида, заданного кривой $n(n',n'')$ и прямой $m(m',m'')$ направляющими и плоскостью параллелизма, в качестве которой служит горизонтальная плоскость проекций H . Для этого через ее заданную проекцию A'' построена фронтальная проекция образующей $l(l'')$ коноида, занимающая горизонтальное положение. Затем по точкам пересечения $1(1')$ и $2(2')$ образующей с направляющими $n(n',n'')$ и $m(m',m'')$ построена горизонтальная проекция l' образующей и на ней посредством линии связи найдена искомая горизонтальная проекция A' точки.

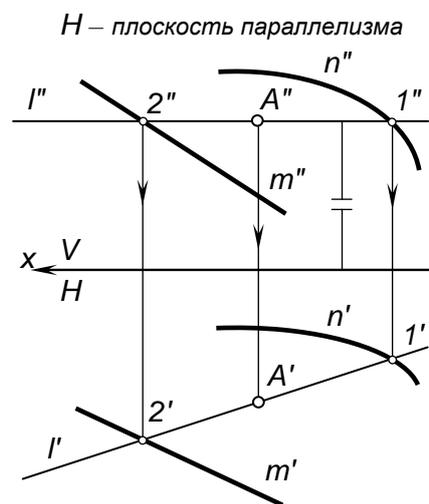


Рис. 11.13

Гиперболический параболоид (косая плоскость) образуется движением прямолинейной образующей по двум скрещивающимся прямым направляющим параллельно некоторой плоскости параллелизма. Эту поверхность называют также *линейчатым параболоидом*.

На рис. 11.14 приведен чертеж рассматриваемой поверхности в виде каркаса из образующих. Поверхность задана двумя скрещивающимися в параллельных плоскостях прямыми направляющими $n(n',n'')$ и $m(m',m'')$ и горизонтально проецирующей плоскостью параллелизма α_H . Там же показано построение недостающей фронтальной проекции A'' точки $A(A')$, принадлежащей поверхности. Построение выполнено посредством образующей $l(l')$, для чего через заданную проекцию A' вначале построена горизонтальная проекция l' обра-

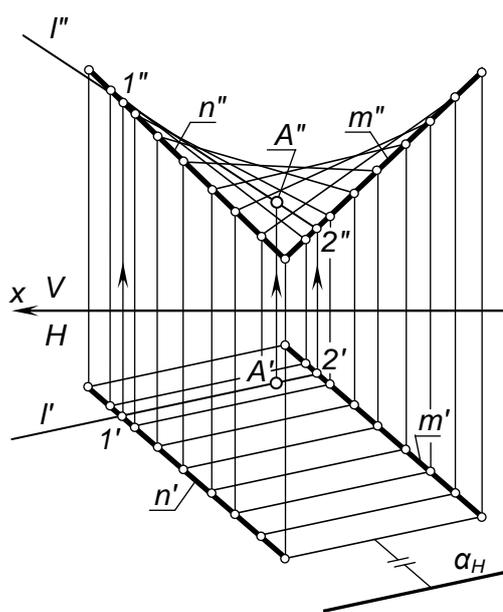


Рис. 11.14

зующей. Затем по точкам $1(1')$ и $2(2')$ ее пересечения с направляющими строят фронтальную проекцию образующей и отмечают на ней посредством линии связи искомую проекцию A'' точки.

Название рассмотренной поверхности «гиперболический параболоид» связано с тем, что ее фронтальный очерк (касательная к фронтальным проекциям образующих) представляет собой параболу (рис. 11.6). Такую же форму имеет и профильный очерк данной поверхности. Кроме того, линия сечения данной поверхности горизонтальной плоскостью имеет форму гиперболы (форму гиперболы имеет также горизонтальный след поверхности, который можно построить, если найти горизонтальные следы ее образующих).

2.2. Поверхность с тремя направляющими – *однополостный гиперболоид*.

Эта линейчатая поверхность образуется при перемещении прямой образующей по трем скрещивающимся прямым направляющим, не параллельным одной плоскости. В частном случае линейчатая поверхность с тремя направляющими пересекается плоскостью по гиперболе; отсюда и произошло ее название – однополостный гиперболоид [23] (однополостный гиперболоид вращения, как частный случай поверхности, может быть получен вращением гиперболы вокруг ее мнимой оси или вращением прямой линии вокруг скрещивающей с ней оси).

На рис. 11.15 приведен чертеж фрагмента линейчатой поверхности с тремя направляющими $n(n',n'')$, $k(k',k'')$ и $m(m',m'')$. Там же показаны построения для определения положения недостающей проекции A' точки $A(A'')$.

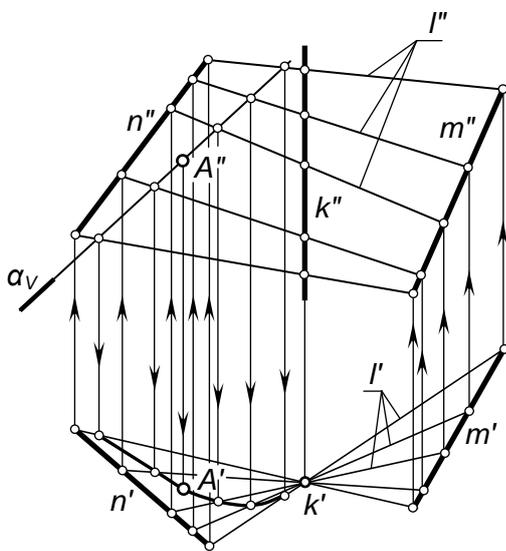


Рис. 11.15

Воспользоваться для этого одной из образующих в данном примере не представляется возможным, так как неизвестно положение ее фронтальной проекции, проходящей через заданную проекцию A'' точки. Зато благодаря проецирующему положению направляющей $k(k',k'')$ можно задать горизонтальные проекции любых образующих. Воспользуемся этим и построим горизонтальную проекцию каркаса поверхности из семейства образующих $l(l')$. Затем по точкам их пересечения с горизонтальными проекциями n' и m' направляющих построим фронтальные проекции l'' этих образующих. Далее выполним сечение поверхности фронтально-проецирующей плоскостью

α_v . По фронтальным проекциям точек ее пересечения с образующими построим горизонтальную проекцию кривой линии этого сечения и на ней посредством линии связи определим положение искомой проекции A' точки.

Структуризация материала одиннадцатой лекции в рассмотренном объеме схематически представлена на рис. 11.16 (лист 1). На последующих листах 2 и 3 приведены иллюстрации к этой схеме, компактно приведены иллюстрации к этой схеме для визуального закрепления основной части изученного материала при повторении (рис. 11.17 и 11.18).

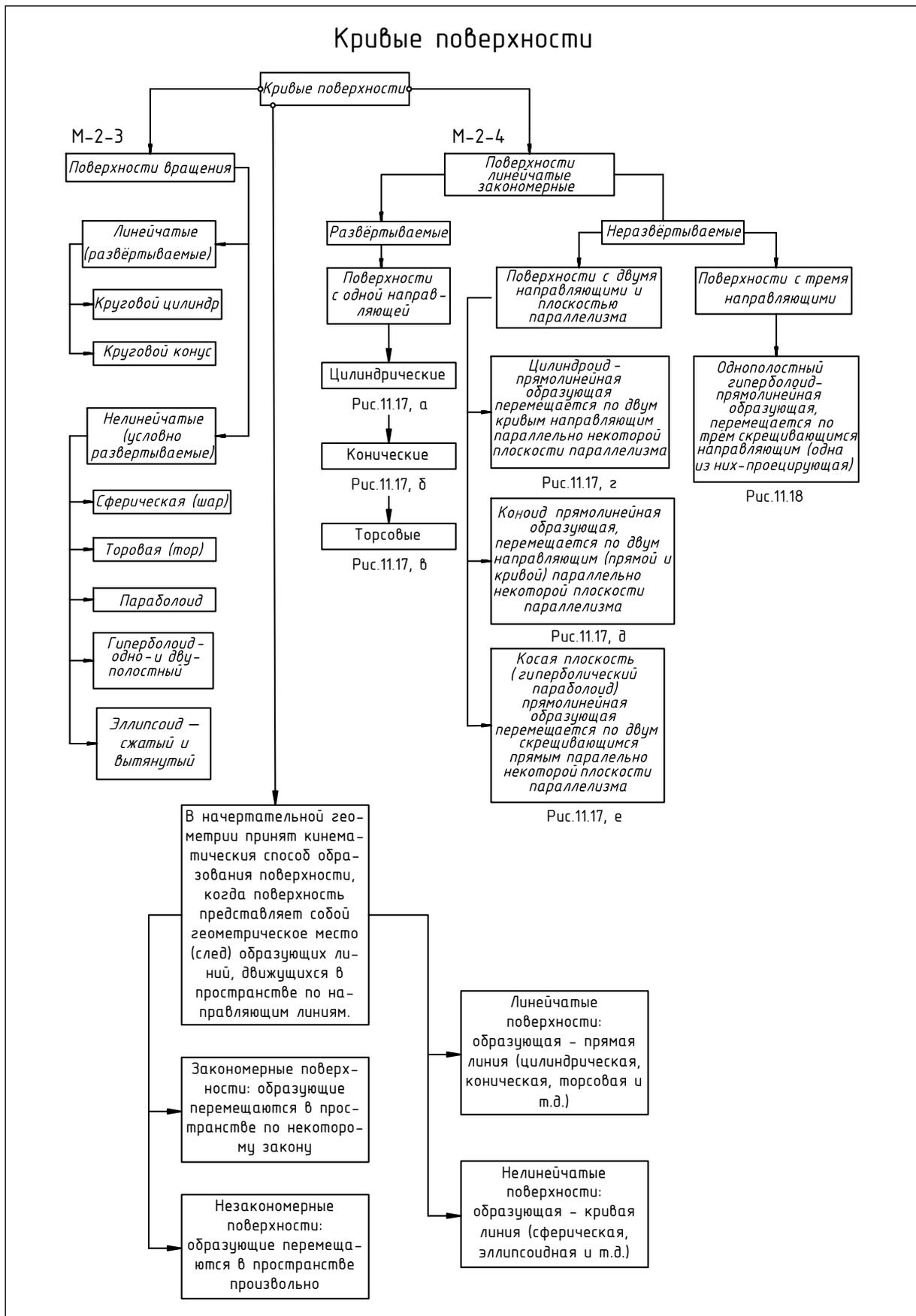
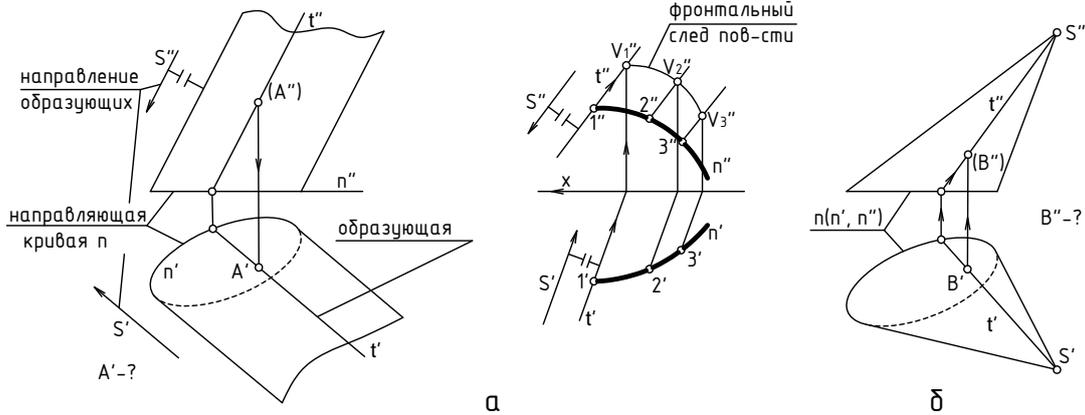


Рис. 11.16

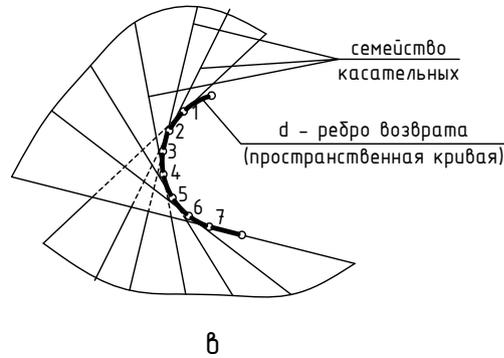
Поверхности с одной направляющей (закономерные, развертываемые)

Цилиндрические

Конические



Торс – поверхность с ребром возврата



Поверхности с двумя направляющими и плоскостью параллелизма (закономерные, развертываемые)

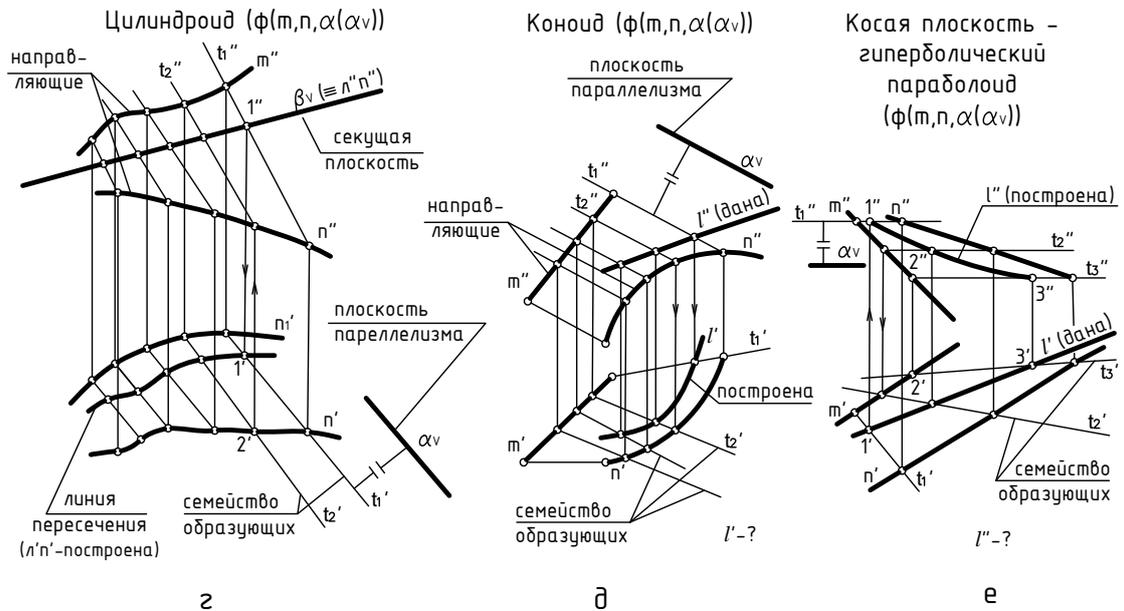
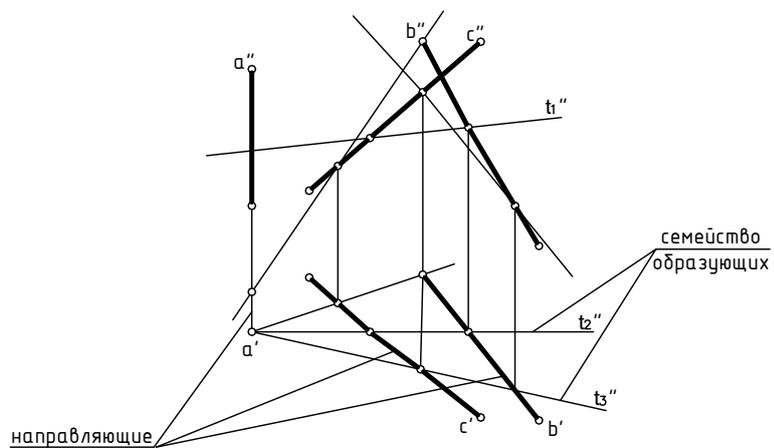


Рис. 11.17

Поверхности с тремя скрещивающимися направляющими —
однополостный гиперболоид ($\Phi(a, b, c)$)



Лекция 12

ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ЛИНИИ С ПОВЕРХНОСТЬЮ. КАСАТЕЛЬНЫЕ ПЛОСКОСТИ И НОРМАЛЬ К ПОВЕРХНОСТИ

ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ЛИНИИ С ПОВЕРХНОСТЬЮ

В общем случае для графического определения положения точек пересечения линии с поверхностью необходимо выполнить ряд геометрических построений в следующей последовательности: заключить линию во вспомогательную поверхность; определить линию пересечения этой поверхности с заданной поверхностью; отметить точки пересечения построенной линии с заданной.

Этот алгоритм является универсальным, пригодным для решения любых задач. Ранее (лекция 4, рис. 4.5 и 4.6) он применялся для построения проекций точки пересечения прямой с плоскостью, где в качестве вспомогательной секущей поверхности использовалась плоскость и строилась прямая линии пересечения ее с заданной плоскостью, а искомая проекция точки пересечения определялась как место пересечения этой линии с заданной прямой.

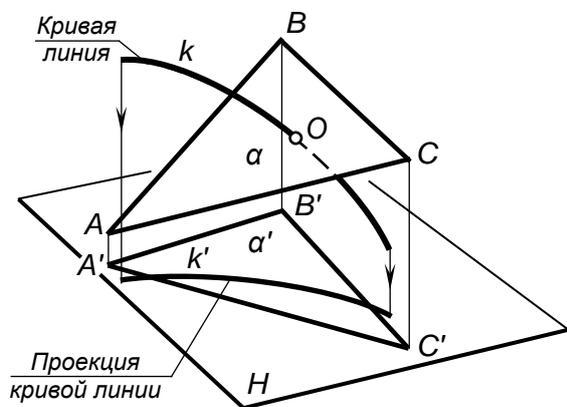


Рис. 12.1

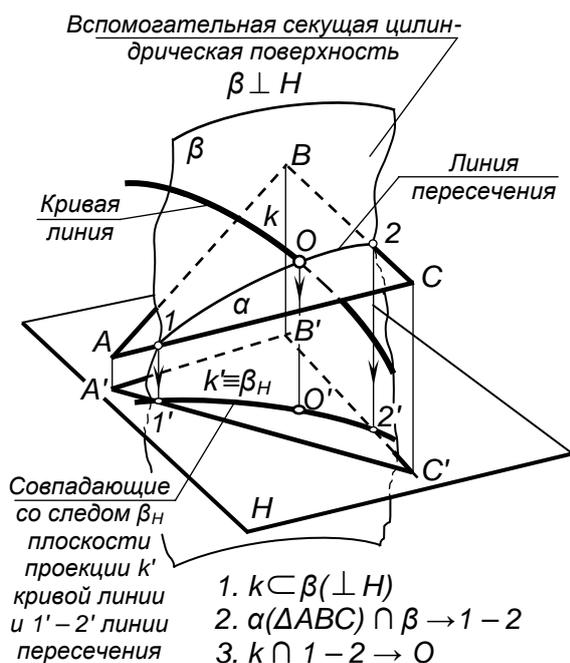


Рис. 12.2

На рис. 12.1–12.3 проиллюстрирован тот же алгоритм применительно к построению точки пересечения кривой линии k с плоскостью $\alpha(\triangle ABC)$. В качестве секущей поверхности в данном случае следует использовать проецирующую цилиндрическую поверхность, в частности, горизонтально-проецирующую $\beta(\beta_H) \perp H$, в которую должна быть заключена кривая $k(k'', k')$. Для этого на чертеже (рис. 13.3) обозначаем горизонтальный след этой поверхности β_H . Горизонтальная проекция линии ее пересечения с заданной плоскостью $\alpha(\triangle ABC)$ совпадает с ним, располагаясь между точками $1'-2'$. Для построения ее фронтальной проекции воспользуемся произвольными вспомогательными прямыми линиями, принадлежащими плоскости. Вначале задаем их горизонтальные проекции, например, через вершину C . Затем по

198

точкам их пересечения со стороной AB находим фронтальные проекции вспомогательных прямых и определяем на них фронтальные проекции точек пересечения с ними заданной кривой. Проводим через найденные точки плавную кривую линию, являющуюся, таким образом, фронтальной проекцией линии пересечения, и отмечаем на ней место пересечения с фронтальной проекцией заданной кривой $k(k'',k')$ – точку O'' . Это и будет фронтальная проекция искомой точки пересечения заданной кривой $k(k'',k')$ с плоскостью $\alpha(\Delta ABC)$. Затем, воспользовавшись линией связи, находим горизонтальную проекцию O' точки пересечения.

Этот алгоритм применен и для построения точек пересечения прямой линии с поверхностями геометрических тел – призмы, пирамиды и самопересекающегося тора (рис. 12.8, $a, б, в$). Поскольку поверхности этих тел являются замкнутыми, то необходимо найти по две точки пересечения на каждой из них.

При пересечении с призмой (рис. 12.8, a) в качестве секущей плоскости для заключения в нее заданной прямой $m(m'',m')$ использовалась фронтально-проецирующая плоскость α_V . При пересечении с пирамидой (рис. 12.8, $б$) в качестве секущей плоскости для заключения в нее заданной прямой $n(n'',n')$ использовалась горизонтально-проецирующая плоскость α_H . При пересечении с самопересекающимся тором (рис. 12.8, $в$) в качестве секущей плоскости для заключения в нее заданной прямой $l(l'',l')$ использовалась фронтальная плоскость β_H . Далее все действия аналогичны рассмотренным. В каждом случае вначале строилась линия пересечения поверхности плоскостью, исходя из ее проецирующего положения, определялись на ней точки пересечения с заданной прямой, а при окончательном оформлении – видимость на чертеже.

В качестве секущей плоскости при определении точек пересечения прямой с поверхностью могут использоваться также плоскости общего положения, пересекающие поверхность вдоль ее образующих (рис. 12.8, $з, д$). Так, для построения точек пересечения прямой $a(a'',a')$ общего положения с поверхностью прямого кругового конуса (рис. 12.8, $з$) показано использование плоскости общего положения α , проходящей через вершину конуса и заданную прямую. Плоскость задана двумя пересекающимися прямыми. Одна из них – это заданная прямая $a(a'',a')$, вторая – пересекающаяся с ней произвольная прямая $b(b'',b')$, проходящая через вершину конуса. Для построения проекций образующих, вдоль которых плоскость пересекает поверхность конуса, найден ее горизонтальный след, затем проекции C' и D' точек его

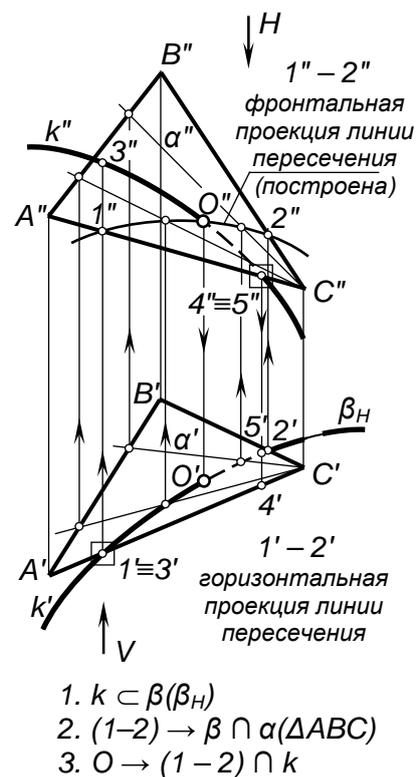


Рис. 12.3

пересечения с горизонтальным следом основания конуса и фронтальные проекции C'' и D'' этих точек. Искомые проекции точек $M(M'',M')$ и $N(N'',N')$ пересечения заданной прямой общего положения с поверхностью конуса находятся в местах пересечения с ней построенных образующих.

Аналогичные действия выполнены и для построения проекций M'',M' и N'',N' точек пересечения прямой общего положения $k(k'',k')$ с поверхностью наклонного эллиптического цилиндра (рис. 12.8, д). Для этого использовалось задание плоскости общего положения $\alpha(k \cap l)$ также двумя пересекающимися прямыми, одна из которых, как и в предыдущем случае, – это заданная прямая $k(k'',k')$, а пересекающаяся с ней в произвольной точке $1(1'',1')$ вторая прямая линия – это прямая $l(l'',l')$, параллельная образующим цилиндра. Строился горизонтальный след этой плоскости и по точкам пересечения его с горизонтальным следом заданного цилиндра находились образующие, по которым вспомогательная плоскость общего положения $\alpha(k \cap l)$ пересекает цилиндр. В местах пересечения с проекциями этих образующих проекций прямой общего положения $k(k'',k')$ находятся искомые проекции M'',M' и N'',N' точек пересечения заданной прямой с поверхностью цилиндра.

КАСАТЕЛЬНЫЕ ПЛОСКОСТИ И НОРМАЛЬ К ПОВЕРХНОСТИ

Плоскостью, касательной к поверхности в некоторой ее точке, называют плоскость, в которой можно провести две прямые линии, пересекающиеся в точке касания, касательные к двум пересекающимся в этой же точке линиям, принадлежащим поверхности.

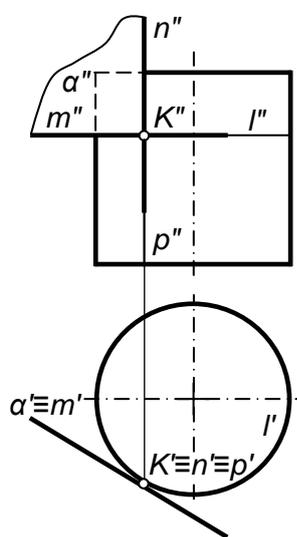


Рис. 12.4

На чертеже касательную плоскость $\alpha(\alpha'',\alpha')$ однозначно можно задать проекциями двух пересекающихся прямых $m(m'',m')$ и $n(n'',n')$. Эти линии строят касательно к проекциям двух пересекающихся в точке касания линий, принадлежащих поверхности. На рис. 12.4 линия $m(m'',m')$ является касательной к линии окружности $l(l'',l')$, проходящей через точку касания $K(K'',K')$ по поверхности цилиндра, а пересекающаяся с ней в этой точке линия $n(n'',n')$ сливается с линией $p(p'',p')$ – образующей цилиндра.

Аналогичные действия (рис. 12.8, е, ж, з) выполнены и при построении касательных плоскостей к поверхностям прямого кругового конуса, самопересекающегося тора и сферы, касающихся этих поверхностей в некоторой точке $A(A'',A')$. Пересекающиеся прямые $m(m'',m')$ и $n(n'',n')$, задающие касательные плоскости $\alpha(\alpha'',\alpha')$ к ним, являются касательными к окружностям, построенным на этих поверхностях вращения и пересекающимися в точке касания $A(A'',A')$. Следует отметить одну особенность при построении прямой $n(n'',n')$, касательной к линии меридионального сечения поверхности самопересекающегося тора (рис. 12.8, ж).

Для упрощения построений вначале строят касательную к этой линии, параллельной фронтальной плоскости проекций, определяют на оси вращения тора точку S , через которую проходят касательные ко всем точкам, расположенным на той же параллели поверхности, что и заданная точка касания $A(A'',A')$, а затем строят необходимую касательную $n(n'',n')$.

Эти построения использовались также для определения точки касания $K(K'',K')$ на поверхности самопересекающегося тора в задаче на рис. 12.5, где необходимо было задать общую касательную плоскость к поверхностям самопересекающегося тора и прямого кругового конуса. Ключом к решению задачи явилось заключение самопересекающегося тора в коническую поверхность с тем же углом наклона образующих, что и у заданного конуса (справа). Общая касательная плоскость задана пересекающимися прямыми, из которых $m_1(m_1'',m_1')$, являющаяся горизонтальным следом плоскости, построена, как касательная к следам указанных конических поверхностей, а прямая $m_2(m_2'',m_2')$, сливается с одной из образующих заданного конуса. Эта образующая является и геометрическим элементом касания построенной плоскости $\alpha(m_1 \cap m_2)$ с поверхностью заданного конуса. Поверхности самопересекающегося тора эта плоскость касается в точке $K(K'',K')$, которая найдена благодаря вышерассмотренным построениям и образующей второго конуса, охватывающего тор.

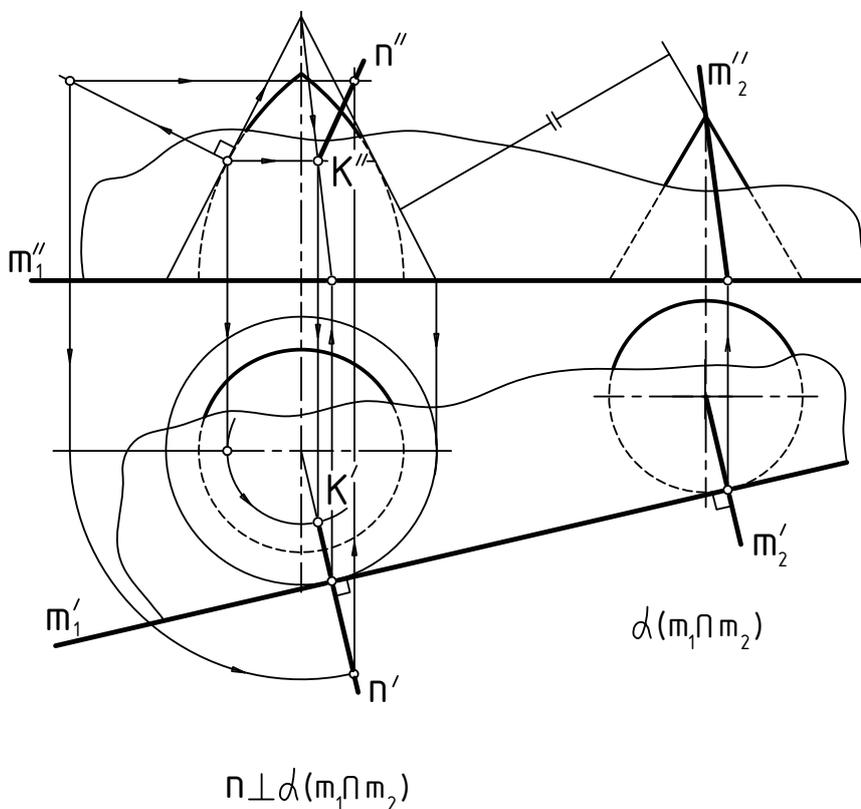


Рис. 12.5

На рассматриваемом чертеже показано также построение нормали $n(n'',n')$, к поверхности самопересекающегося тора в точке $K(K'',K')$. Условием для построения нормали является ее перпендикулярность к плоскости, касательной к поверхности в той же точке. Вначале нормаль построена к очерковой образующей тора, затем на ней взята произвольная точка и выполнен ее поворот вокруг оси тора в положение, в котором она окажется расположенной в плоскости, перпендикулярной построенной касательной плоскости (направления указанных перемещений показаны стрелками).

На рис. 12.6 показано построение точек пересечения $P(P'',P')$ и $T(T'',T')$ фронтальной прямой $MN(M''N'',M'N')$ с поверхностью $\frac{1}{4}$ кольцевого тора и построение касательной плоскости к этой поверхности в одной из построенных точек, например, $T(T'',T')$.

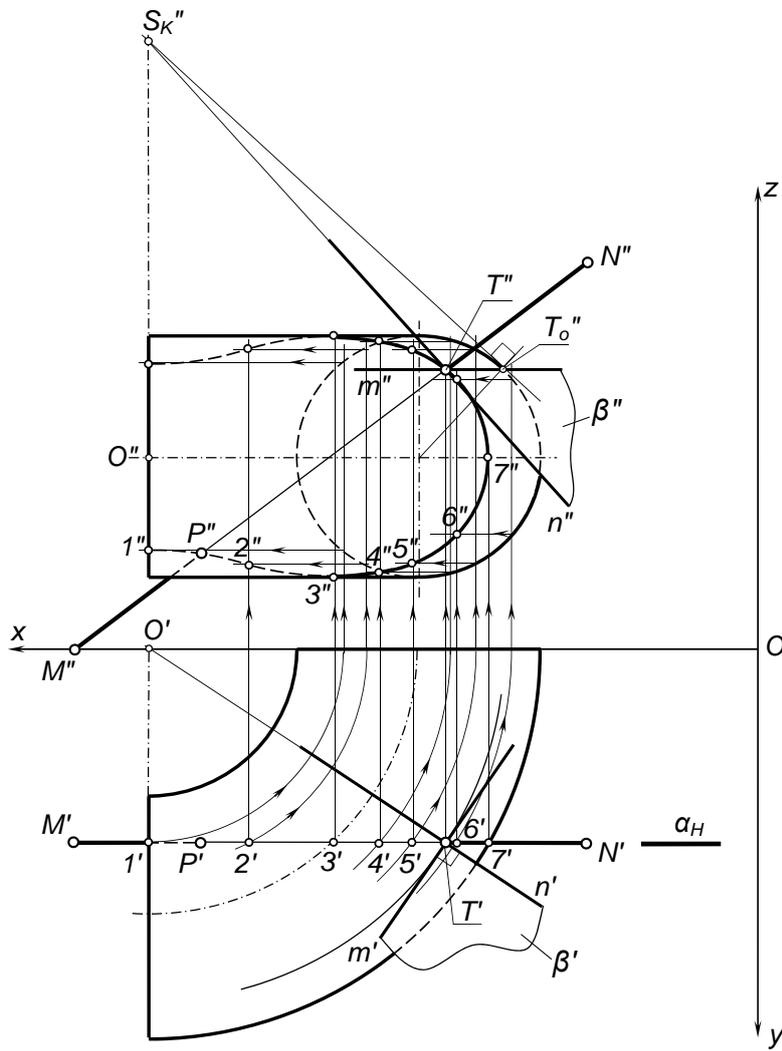


Рис. 12.6

Точки $P(P'',P')$ и $T(T'',T')$ найдены благодаря заключению заданной прямой MN во фронтальную плоскость $\alpha(\alpha_H)$ и построению проекций линии пересечения по точкам $1', 2', 3', \dots, 7'$, крайние из которых $1'$ и $7'$ взяты в местах пересечения горизонтального очерка плоскостью тора, а остальные – произвольно на горизонтальном следе α_H секущей плоскости. Для дальнейших построений использовались горизонтальные сечения поверхности тора плоскостями.

Для задания касательной плоскости $\beta(m \cap n)$ одна из задающих ее пересекающихся прямых $m(m'',m')$ построена как касательная к линии кольцевого сечения поверхности тора в точке $T(T'',T')$, а вторая – как касательная прямая $n(n'',n')$ к линии окружности осевого сечения поверхности тора.

Для более точного построения второй прямой была найдена проекция S_K'' точки на оси вращения тора, в которой сходятся все касательные прямые к поверхности тора во всех точках, находящихся на той же параллели, что и точка $T(T'',T')$.

Структуризация материала двенадцатой лекции в рассмотренном объеме схематически представлена на рис. 12.7 (лист 1). На последующем листе 2 компактно приведены иллюстрации к этой схеме для визуального закрепления изученного материала при повторении (рис. 12.8).

Пересечение линии с поверхностью. Касательные плоскости и нормаль к поверхности

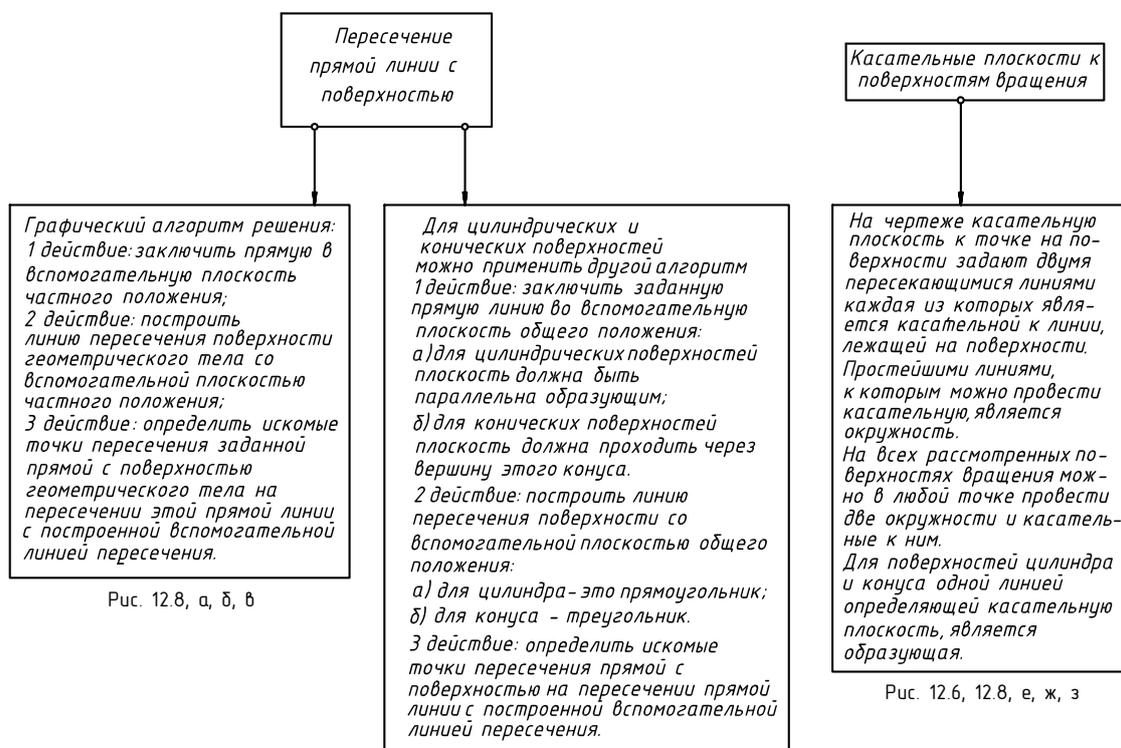


Рис. 12.8, а, б, в

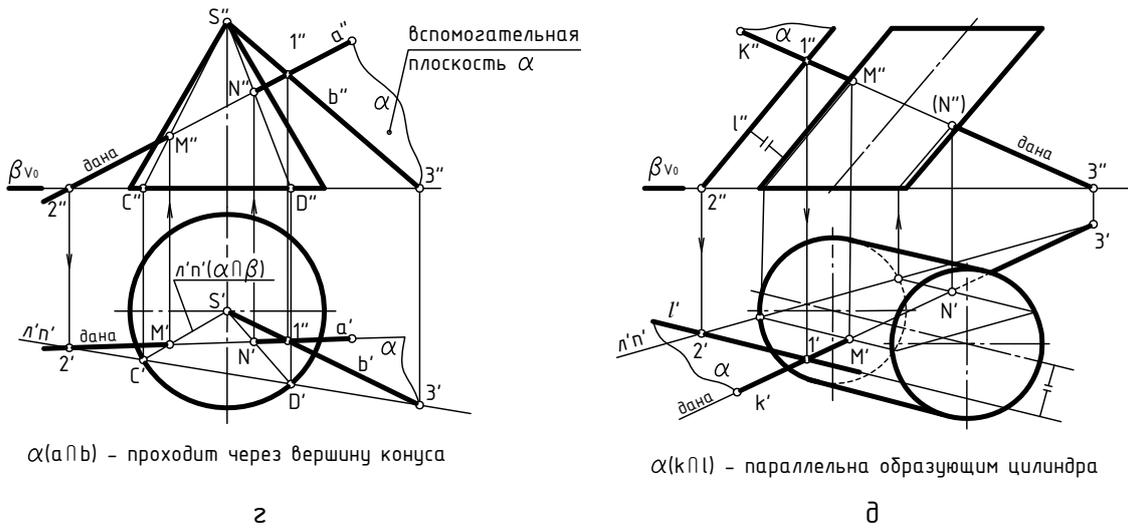
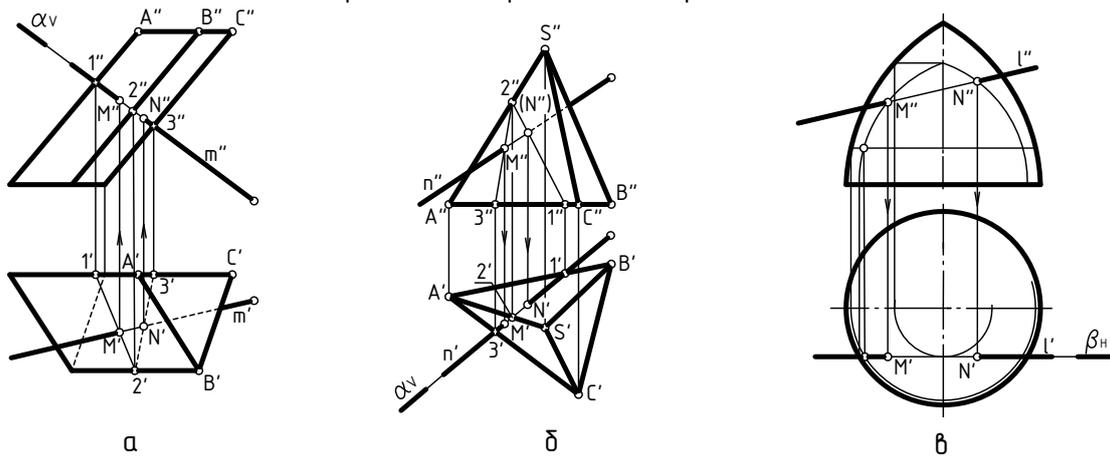
Рис. 12.8, з, д

Рис. 12.6, 12.8, е, ж, з

Касательная плоскость к кривой поверхности в некоторой точке – это плоскость, в которой лежат все касательные прямые ко всем кривым, которые можно провести на поверхности через ту же точку.

Нормалью к поверхности в данной точке называется прямая, перпендикулярная к касательной плоскости и проходящая через точку касания.

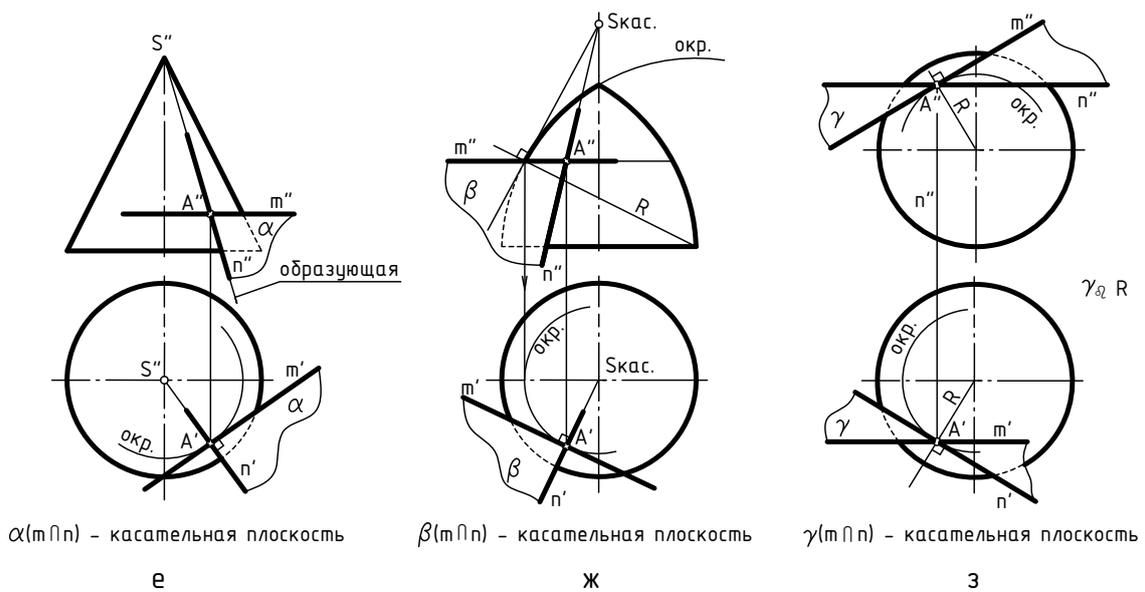
12.1. Пересечение прямой с поверхностью



$\alpha(a \cap b)$ - проходит через вершину конуса

$\alpha(k \cap l)$ - параллельна образующим цилиндра

12.2. Касательные плоскости



$\alpha(m \cap n)$ - касательная плоскость

$\beta(m \cap n)$ - касательная плоскость

$\gamma(m \cap n)$ - касательная плоскость

Рис. 12.8

Лекция 13

МЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ И ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ ВОПРОСЫ

Метрические задачи

Определение натуральных величин геометрических элементов

1. Определить натуральную величину отрезка общего положения:

- способом прямоугольного треугольника;
- способом замены плоскостей проекций преобразовать в прямую уровня;

- способом вращения вокруг проецирующей оси преобразовать в прямую уровня.

2. Определить натуральную величину плоскости общего положения (замкнутого отсека):

- способом замены плоскостей проекций преобразовать в плоскость уровня;

- способом вращения вокруг линии уровня преобразовать в плоскость уровня;

- способом плоскопараллельного перемещения преобразовать в плоскость уровня.

Определение расстояния между геометрическими элементами (образами)

1. Определить расстояние от точки до прямой общего положения:

- способом замены плоскостей проекций преобразовать плоскость, заданную прямой и точкой, в плоскость уровня (задачи 3 и 4 преобразования; прямую и точку рассматривать как плоскость);

- способом замены плоскостей проекций преобразовать прямую общего положения в проецирующую прямую (задачи 1 и 2 преобразования);

- способом вращения вокруг линии уровня преобразовать плоскость, заданную прямой и точкой, в плоскость уровня;

- способом плоскопараллельного перемещения преобразовать плоскость, заданную прямой и точкой, в плоскость уровня;

- способом задания плоскости, перпендикулярной к прямой (3-й тип задач), построить через заданную точку плоскость, перпендикулярную к прямой, и определить точку пересечения последней с плоскостью.

2. Определить расстояние между параллельными прямыми:

- способом замены плоскостей проекций преобразовать плоскость, заданную параллельными прямыми, в плоскость уровня (задачи 3 и 4 преобразования);

- способом замены плоскостей проекций преобразовать две параллельные общего положения в проецирующие прямые (задачи 1 и 2 преобразования);

- способом вращения вокруг линии уровня преобразовать плоскость, заданную параллельными прямыми, в плоскость уровня, ограничив ее замкнутым отсеком;

- способом плоскопараллельного перемещения преобразовать плоскость, заданную параллельными прямыми, в плоскость уровня;

- способом задания плоскости, перпендикулярной к прямой (3-й тип задач), построить плоскость через любую точку, принадлежащую одной из прямых, перпендикулярную ко второй прямой, и определить точку пересечения этой плоскости со второй прямой.

3. Определить расстояние между скрещивающимися прямыми, преобразовав одну из прямых в проецирующую (задачи 1 и 2 преобразования).

4. Определить расстояние от точки до плоскости:

- по теме «Перпендикулярность» – провести перпендикуляр к плоскости, построить точку пересечения этого перпендикуляра с заданной плоскостью и найти любым способом натуральную величину построенного отрезка (см. пункт 1);

- способом замены плоскостей проекций преобразовать плоскость общего положения в плоскость проецирующую.

5. Определить расстояние от точки до поверхности вращения:

- способом замены плоскостей проекций преобразовать плоскость, проведенную через точку и ось вращения поверхности, в плоскость уровня (задача 4 преобразования);

- способом вращения вокруг проецирующей оси повернуть плоскость, проведенную через точку и ось вращения поверхности, в плоскость уровня.

Определение углов наклона геометрических элементов к плоскостям проекций H и V

1. Определить углы наклона прямой общего положения к плоскостям проекций H и V :

- способом прямоугольного треугольника построить на двух проекциях натуральные величины отрезка и определить углы наклона прямой;

- способом замены плоскостей проекций преобразовать прямую общего положения в горизонтальную, а затем во фронтальную прямую (задача 1 преобразования);

- способом вращения вокруг соответствующей проецирующей оси преобразовать прямую общего положения в горизонтальную и во фронтальную прямые.

2. Определить угол наклона прямой к заданной плоскости общего положения:

- из любой точки прямой опустить перпендикуляр к плоскости;

- способом вращения вокруг линии уровня преобразовать построенную плоскость, заданную прямой и перпендикуляром, в плоскость уровня;

- искомый угол будет дополнять построенный угол до 90° .

3. Определить величину двухгранного угла, если на чертеже есть линии пересечения плоскостей, образующих двухгранный угол (ребро):

- способом замены плоскостей проекций преобразовать ребро двухгранного угла в проецирующую прямую (задачи 1 и 2 преобразования).

4. Определить угол между двумя плоскостями общего положения, если на чертеже нет линии пересечения заданных плоскостей (ребра):

- задача решается косвенным путем, для чего из любой точки пространства следует опустить перпендикуляры к заданным плоскостям, которые, в свою очередь, задают вспомогательную плоскость, перпендикулярную к этим плоскостям;

- эту вспомогательную плоскость способом вращения вокруг линии уровня следует преобразовать в плоскость уровня, определив угол между перпендикулярами (преобразование вспомогательной плоскости в плоскость уровня возможно и другими способами – ее плоскопараллельным перемещением или заменой плоскостей проекций);

- искомый угол будет дополнять построенный угол до 180° (*углом между плоскостями считают угол острый*).

Структуризация материала тринадцатой лекции в рассмотренном объеме схематически представлена на рис. 13.1 (лист 1). На последующих листах 2–7 компактно приведены иллюстрации к этой схеме для визуального повторения изученного материала при его повторении (рис. 13.2–13.7).

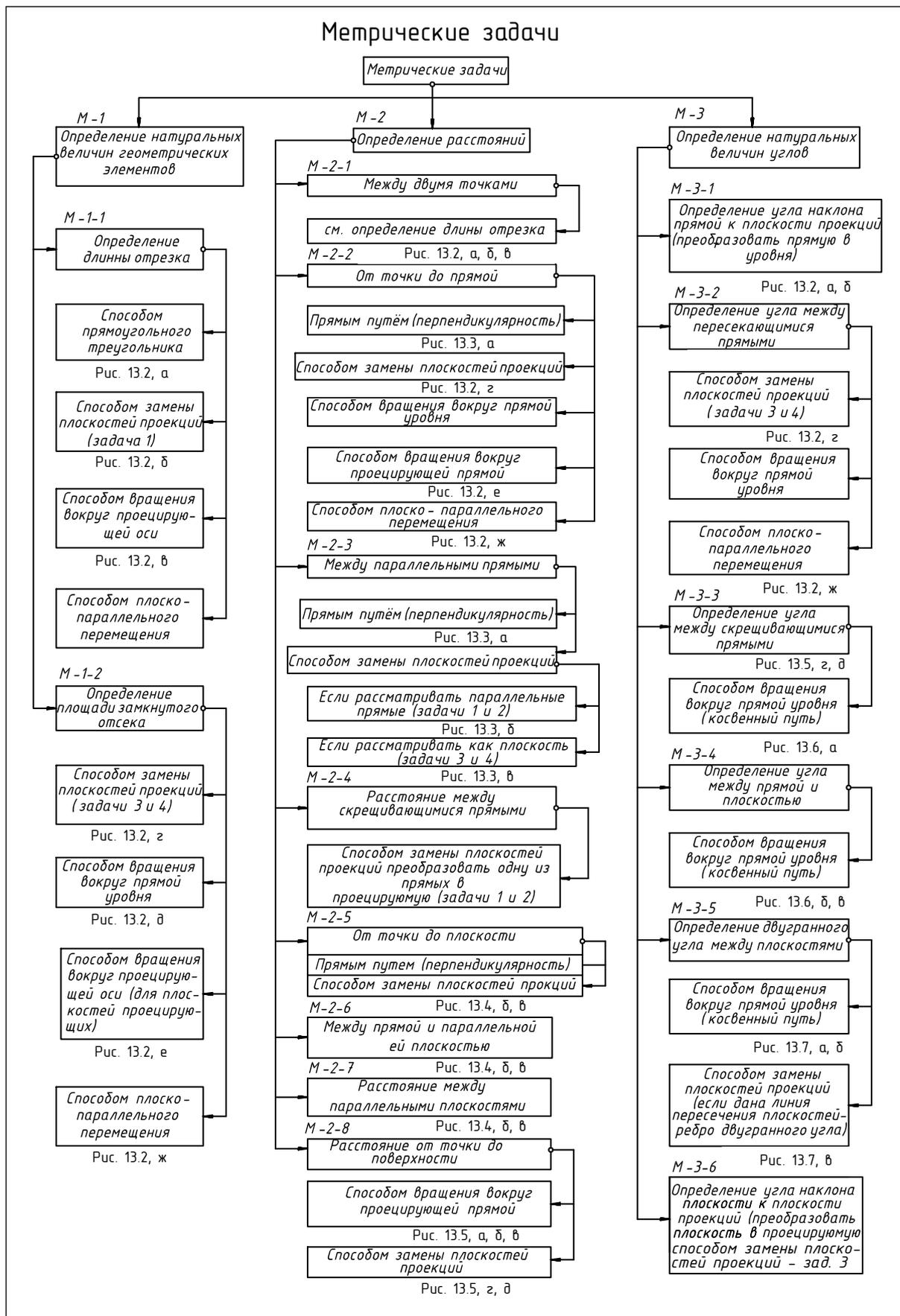
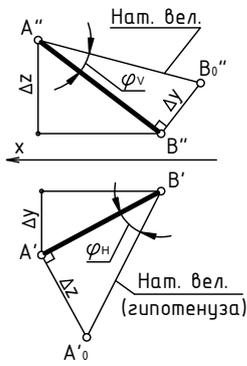


Рис. 13.1

13.1. Определение натуральной величины геометрических элементов

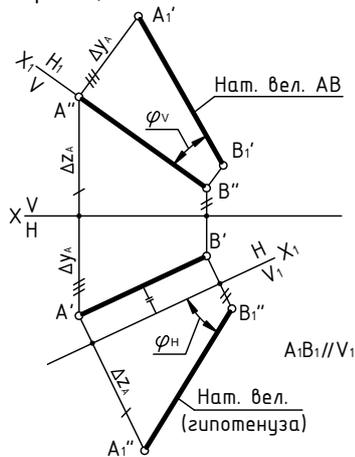
1. Определение длины отрезка

Способ прямоугольного треугольника



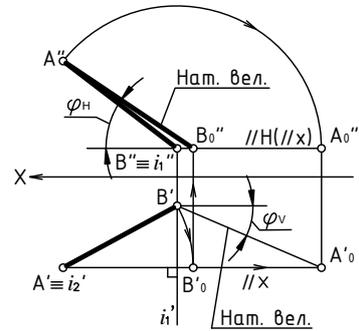
а

Способ замены плоскостей проекций (задача 1)



б

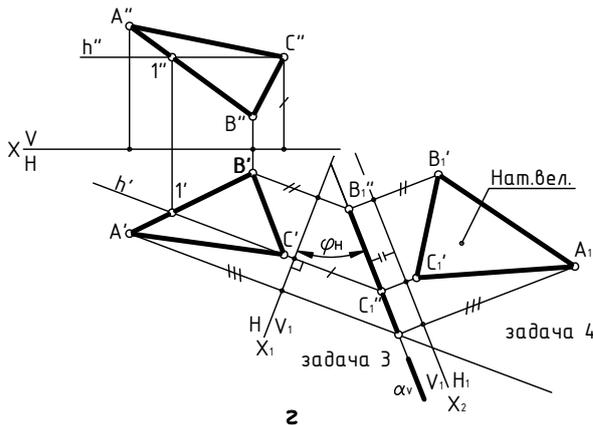
Способ вращения вокруг проецирующей оси



в

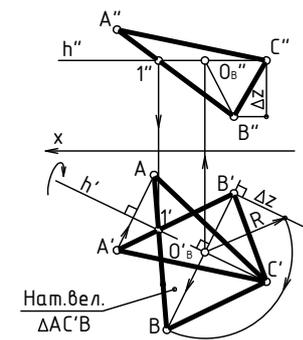
2. Определение площади замкнутого отсека

Способ замены плоскостей проекций (задачи 3 и 4)



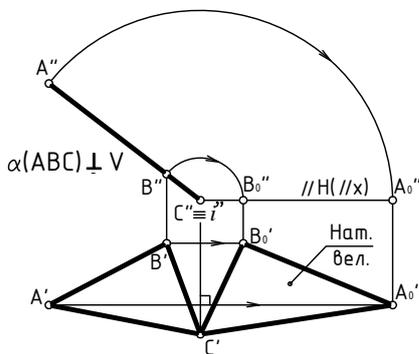
з

Способ вращения вокруг прямой уровня (горизонтали)



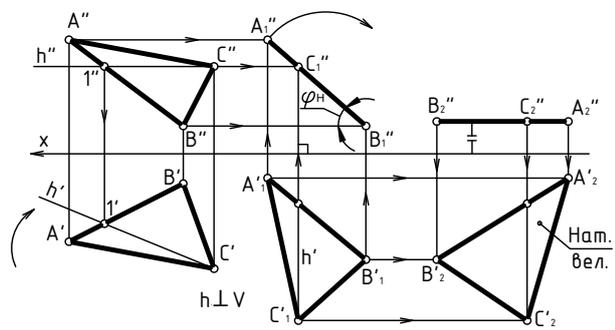
д

Способ вращения вокруг проецирующей оси ($i \perp V$)



е

Способ плоско-параллельного перемещения (переноса)



ж

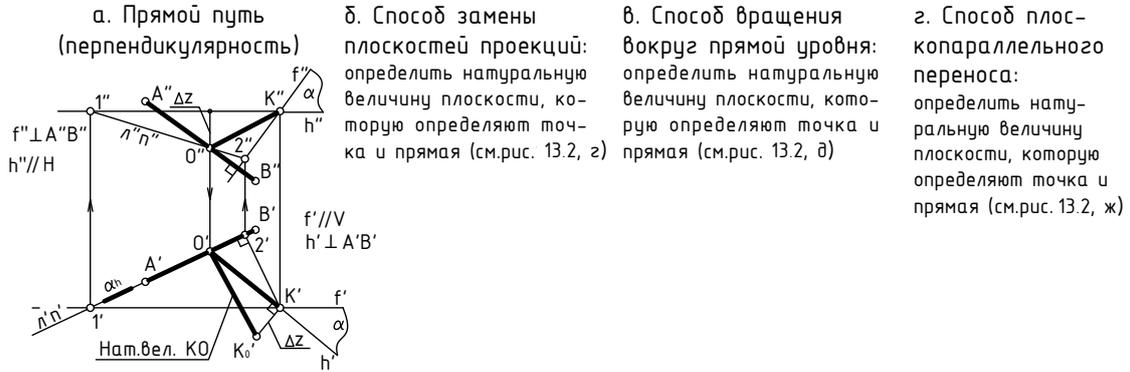
Рис. 13.2

13.2. Определение расстояний

1. Расстояние между точками – определяется величиной отрезка, соединяющего эти точки

См. рис. 13.2, а, б, в

2. Расстояние от точки до прямой – определяется величиной перпендикуляра, опущенного из точки к прямой

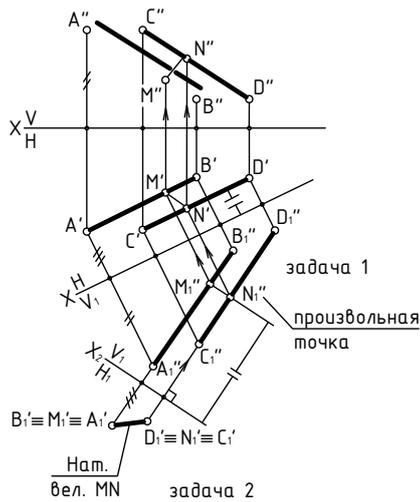


- Действия:
1. $\alpha (h \cap f) \perp AB$;
 2. $m.O \in \alpha (h \cap f) \cap AB$;
 3. Нат. вел. KO – способом прямоугольного треугольника

а

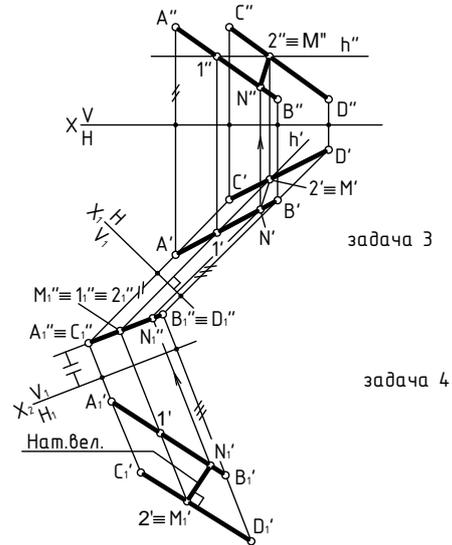
3. Расстояние между параллельными прямыми – определяется величиной перпендикуляра, проведённого из произвольной точки одной прямой к другой прямой

а. Способ замены плоскостей проекции (рассматриваем две прямые) – задачи 1 и 2 (преобразовать прямые общего положения AB и CD в проецирующие)



б

б. Способ замены плоскостей проекции (рассматриваем плоскость, которую определяют параллельные прямые) – задачи 3 и 4 (определить натуральную величину плоскости ? (AB//CB))

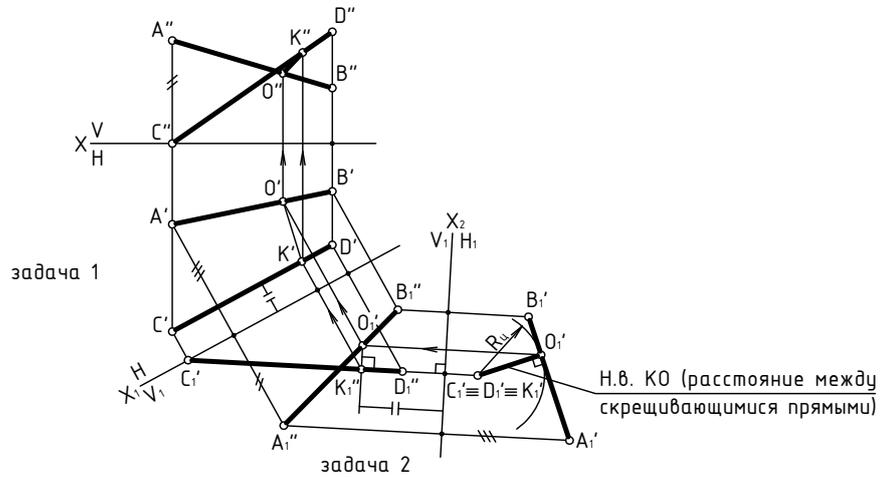


в

Рис. 13.3

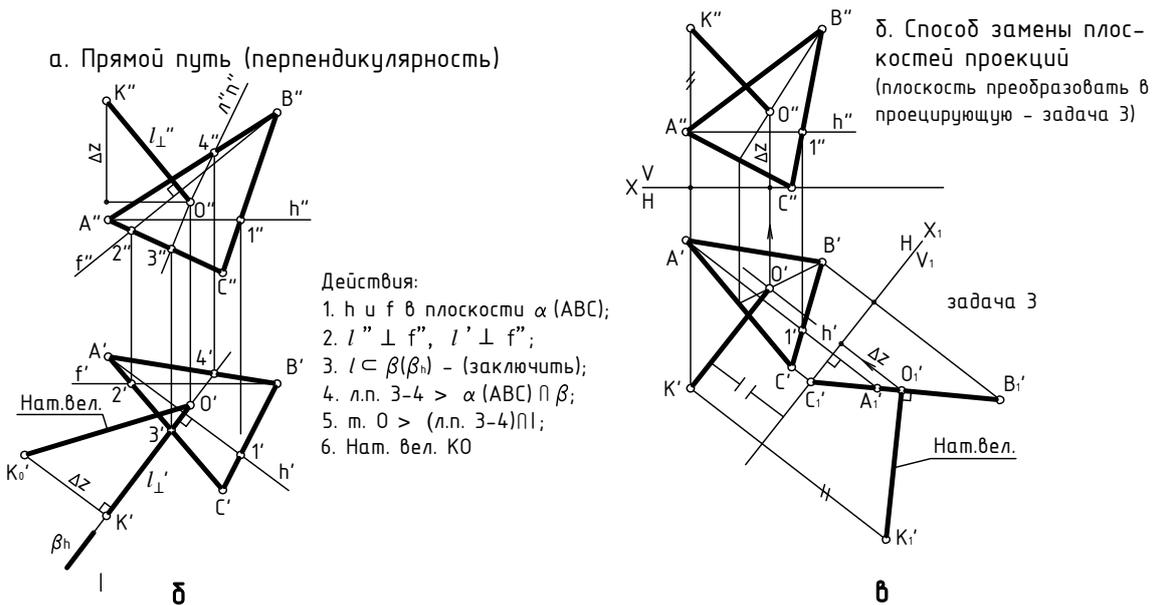
4. Расстояние между скрещивающимися прямыми – определяется величиной перпендикуляра, проведённого от одной из прямых, преобразованной в точку, к другой прямой (задачи 1 и 2 замены плоскостей проекции).

Способ замены плоскостей проекций – задачи 1 и 2



а

5. Расстояние от точки до плоскости – определяется величиной перпендикуляра, проведённого из точки на плоскость до точки его пересечения с этой плоскостью.



6. Расстояние между прямой и параллельной ей плоскостью – определяется величиной перпендикуляра, проведённого из произвольной точки на прямой к плоскости.

См. рис. 13.4, б, в

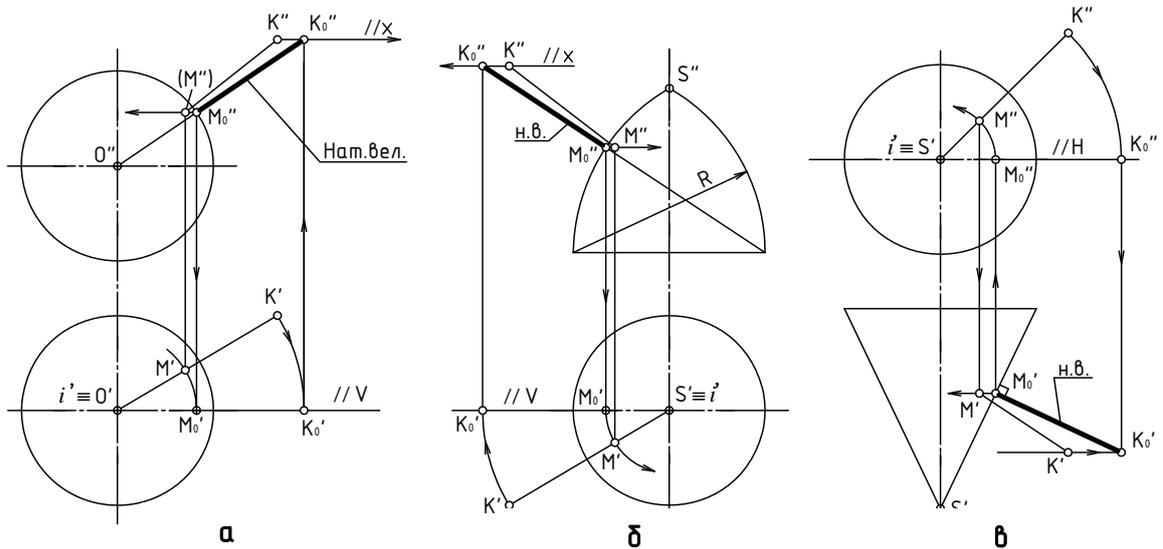
Рис. 13.4

7. Расстояние между параллельными плоскостями - определяется величиной отрезка перпендикуляра, опущенного из точки одной плоскости на другую плоскость (до точки пересечения с другой плоскостью).

См. рис. 13,4, б, в

8. Расстояние от точки до поверхности.

а. Способ вращения вокруг проецирующей оси



б. Способ замены плоскостей проекции

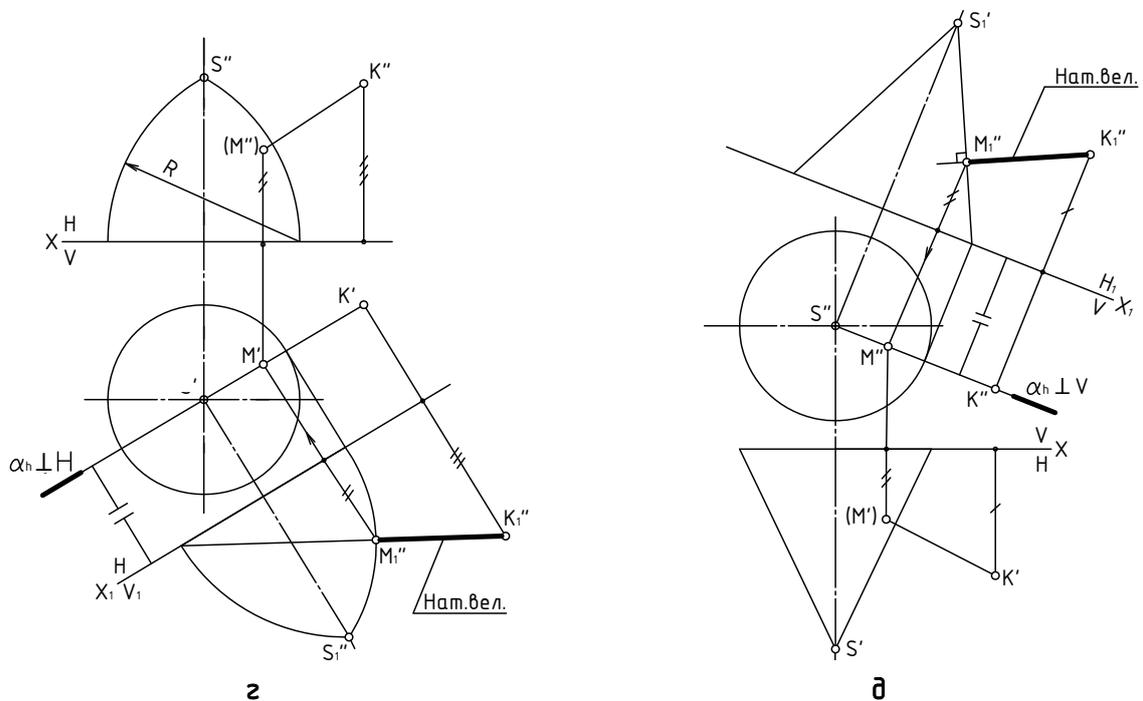
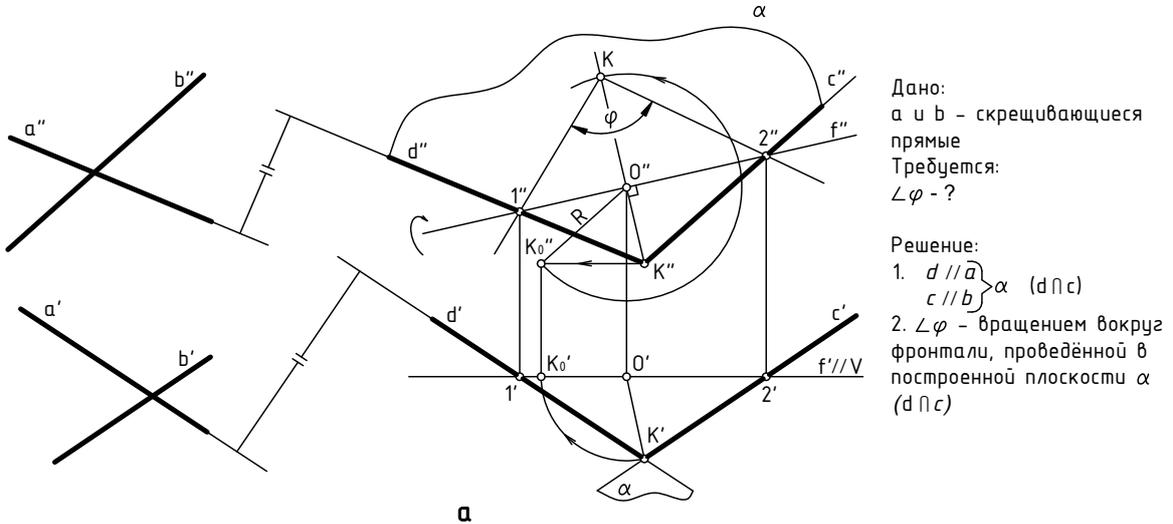


Рис. 13.5

13.3. Определение величин углов

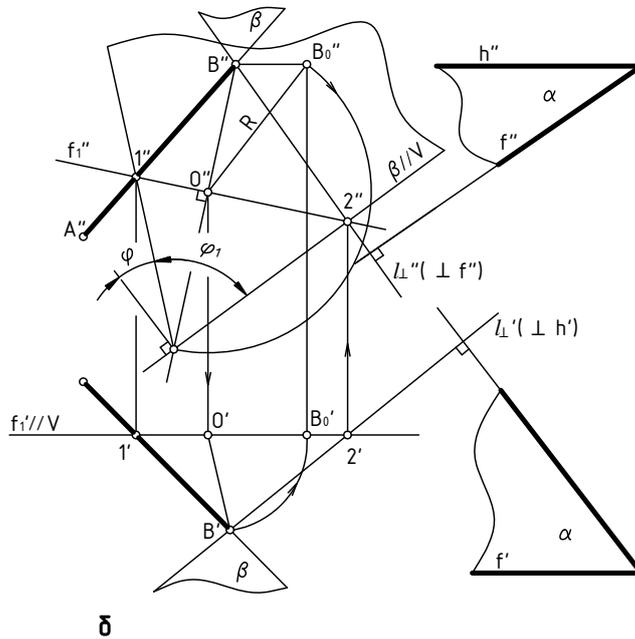
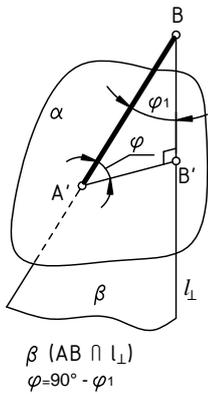
1. Угол φ между скрещивающимися прямыми – определяется плоским углом, образованным двумя пересекающимися прямыми, проведёнными из произвольной точки пространства параллельно скрещивающимся прямым (рис. 13.6, а)

Способ вращения вокруг линии уровня



2. Угол φ между прямой и плоскостью – определяется углом между прямой и её проекцией на эту плоскость.

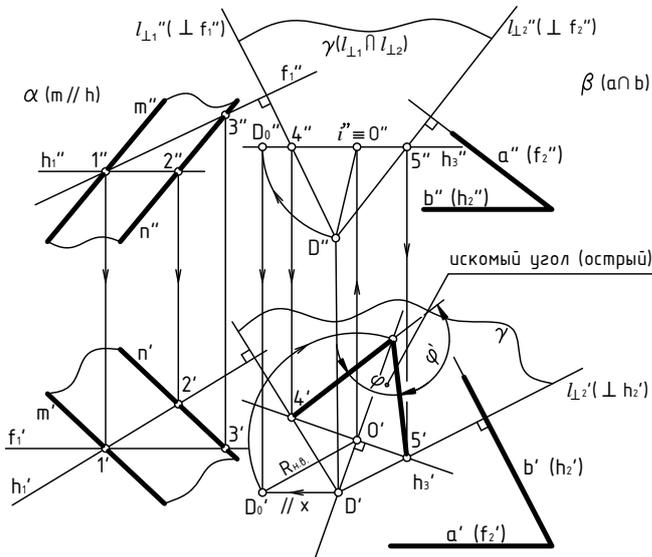
Дано:
 α ($h \cap f$);
 AB – прямая общего положения
 Требуется:
 $\angle \varphi - ?$



Решение:
 1. $l \perp \alpha$ ($h \cap f$);
 $l_{\perp}'' \perp f''$;
 $l_{\perp}' \perp h'$;
 2. $\angle \varphi$ – вращением вокруг фронтали, проведённой в построенной плоскости β ($AB \cap l$)

3. Угол φ между плоскостями α и β - определяется линейным углом, образованным двумя прямыми, по которым некоторая плоскость γ , перпендикулярная плоскостям (или их ребру), пересекает эти плоскости (углом между плоскостями считают острый угол).

а. Если на чертеже нет ребра (линии пересечения заданных плоскостей) - угол φ определяется способом вращения вокруг линии уровня (рис. 13.7, а)

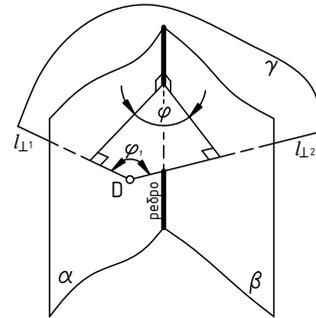


а

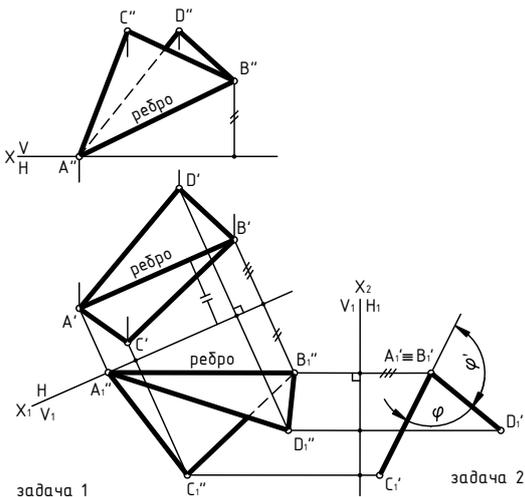
Дано:
 α ($m // h$); β ($a // b$).
 Требуется:
 $\angle \varphi$ - ?

Решение:

1. провести в заданной плоскости фронталы и горизонталы;
2. из произвольной точки пространства D (D' , D'') провести перпендикуляры l_1 и l_2 к заданным плоскостям, которые определяют плоскость γ ($l_1 \perp l_2$);
3. $\angle \varphi$ - вращением вокруг горизонтали h_3 , проведённой в построенной плоскости γ ($l_1 \perp l_2$).



б. Если на чертеже есть ребро (линия пересечения заданных плоскостей) - угол φ определяется способом замены плоскостей проекций (задачи 1 и 2, рис. 13.7, б)



б

Решение:
 ребро AB двугранного угла преобразовать двумя заменами в проецирующую прямую

Рис. 13.7

Перечень вопросов, выносимых на экзамен по начертательной геометрии

1. Метод проекций. Центральные и параллельные проекции. Свойства параллельных проекций. Косоугольные и прямоугольные (ортогональные) проекции.

2. Метод Г. Монжа. Четверти и октанты пространства. Образование проекционного комплексного чертежа.

3. Точка в системе трех плоскостей проекций H , V и W . Проекция точки в системе прямоугольных координат. Европейская и американская системы расположения изображений на чертежах.

4. Прямая линия. Прямые общего и частного положений относительно плоскостей проекций. Характерные признаки этих прямых на чертеже. Теорема о принадлежности точки прямой.

5. Деления отрезка прямой на чертеже в заданном отношении (свойство параллельных проекций). Построение на чертеже натуральной величины отрезка прямой общего положения и углов его наклона к плоскостям проекций H и V способом прямоугольного треугольника. Построение на прямой проекций отрезка заданной величины.

6. Следы прямой. Построение на чертеже проекций фронтального и горизонтального следов прямой общего положения.

7. Взаимное положение прямых. Прямые параллельные, пересекающиеся и скрещивающиеся. Характерные признаки на чертеже параллельных, пересекающихся и скрещивающихся прямых. Конкурирующие точки на скрещивающихся прямых.

8. О проекциях плоских углов. Теорема о проецировании прямого угла (прямая и обратная). Привести наглядный рисунок с доказательствами (согласно прямой и обратной теоремам о трех перпендикулярах). Теорема о делении пополам проекций острого или тупого углов.

9. Плоскость. Способы задания плоскости на чертеже. Следы плоскости. Теоремы о принадлежности прямой и точки плоскости. Прямые особого положения в плоскости (фронталь, горизонталь, линия наибольшего ската) и их построение на чертеже.

10. Характерные положения плоскости относительно плоскостей проекций. Плоскости общего и частного положений. Характерные признаки этих плоскостей на чертеже. Проведение через прямую общего положения проецирующей плоскости (заключение прямой в плоскость) и обозначение этого действия на чертеже.

11. Взаимное положение прямой и плоскости, двух плоскостей. Признаки параллельности прямой и плоскости, двух плоскостей. Построение на чертеже плоскости, параллельной заданной.

12. Пересечение прямой и плоскости, двух плоскостей. Частные случаи пересечения и общий случай пересечения. Графический алгоритм построения точки пересечения прямой общего положения с плоскостью общего положения. Построение линии пересечения плоскостей общего положения по точ-

кам пересечения прямых общего положения с плоскостью общего положения (случай, когда проекции плоскостей на чертеже накладываются).

13. Перпендикулярность (частный случай взаимного положения прямой и плоскости двух плоскостей). Теоремы о перпендикулярности прямой и плоскости, двух плоскостей. Теорема о проецировании прямого угла. Проведение на чертеже проекций перпендикуляра к плоскости и плоскости, перпендикулярной к заданной прямой.

14. Задачи трех типов о перпендикулярности прямой и плоскости и характерные графические действия для каждого типа задач:

а) провести проекции перпендикуляра из точки на плоскости в пространстве; требуется построить на проекциях перпендикуляра проекции отрезка заданной величины;

б) провести проекции перпендикуляра из точки в пространстве к плоскости; требуется построить проекции точки пересечения перпендикуляра с плоскостью;

в) построить плоскость, перпендикулярную к заданной прямой (требуется построить точку пересечения построенной плоскости с заданной или другой прямой).

15. Преобразование чертежа. Способы преобразования и их сущность:

- способ замены плоскостей проекций; четыре задачи преобразования прямой и плоскости этим способом;

- способ вращения вокруг проецирующей прямой;

- плоскопараллельное перемещение (частный случай способа вращения вокруг проецирующей прямой);

- способ вращения вокруг прямой уровня (фронтали или горизонтали).

16. Определение угла между прямой и плоскостью и между двумя плоскостями.

17. Поверхности. Способ образования поверхностей (кинематический). Образующая и направляющая линии, каркас поверхности, определитель поверхности; очерк поверхности на чертеже; каркас поверхности.

18. Гранные поверхности. Образование. Геометрические тела – призма и пирамида. Построение проекций точек на поверхности, построение сечений плоскостями частного положения.

19. Кривые линии. Плоские и пространственные кривые линии. Винтовые линии. Построение пространственной конической и цилиндрической винтовых линий. Характеристики винтовых пространственных линий.

20. Кривые линейчатые поверхности (с прямолинейной образующей). Цилиндрическая и коническая поверхности. Эллиптические поверхности. Линейчатые поверхности вращения. Образование. Порядок поверхности. Геометрические тела – круговой цилиндр и круговой конус. Построение проекций точек на поверхностях цилиндра и конуса. Сечение поверхностей цилиндра и конуса плоскостями частного положения.

21. Нелинейчатые поверхности вращения (с криволинейной образующей). Образование. Порядок поверхностей. Характерные линии на поверх-

ности вращения. Геометрические тела – шар и тор (открытый, замкнутый, самопересекающийся – тороид и глобоид). Сечения поверхностей шара и тора (кривые Персея) плоскостями частного положения.

22. Прочие линейчатые и нелнейчатые поверхности вращения – эллипсоид (сжатый и вытянутый), параболоид, одно- и двуполостный гиперболоид. Образование. Показать образования однополостного гиперболоида вращением отрезка прямой линии вокруг оси (отрезок и ось – скрещивающиеся прямые).

23. Некоторые кривые поверхности. Поверхности с одной прямолинейной направляющей – цилиндрические, конические и торсы. Поверхности с двумя прямолинейными направляющими и плоскостью параллелизма – коноид, цилиндроид, косая плоскость. Поверхности с тремя прямолинейными скрещивающимися направляющими – однополостный гиперболоид.

24. Кривые нелнейчатые поверхности (не вращения). Поверхности циклические. Поверхности, задаваемые каркасом (графические и топографические поверхности).

25. Винтовые линейчатые поверхности. Образование. Прямой и косою геликоиды. Построение проекций точек на поверхности геликоида. Сечение поверхности геликоида плоскостью, перпендикулярной оси (спираль Архимеда).

26. Касательные плоскости. Задание на чертеже. Проведение касательных плоскостей к поверхностям цилиндра, конуса, шара и тора в заданной точке поверхности. Нормаль к поверхности.

27. Пересечение поверхностей геометрических тел с прямой линией. Графический алгоритм построения проекций точек пересечения прямой с поверхностью. Пересечение поверхностей геометрических тел плоскостью общего положения. Графический алгоритм построения линии пересечения плоскости общего положения с поверхностью.

28. Пересечение двух поверхностей. Понятие о линии пересечения. Частные случаи пересечения поверхностей геометрических тел:

- боковые поверхности двух тел занимают проецирующее положение относительно плоскости проекций (призма и цилиндр);
- боковая поверхность одного тела занимает проецирующее положение относительно плоскости проекций;
- пересечение поверхностей геометрических тел вращения (кроме открытого тора), расположенных соосно (поверхности имеют общую ось вращения);
- пересечение поверхностей геометрических тел вращения второго порядка, имеющих двойное соприкосновение и описанных вокруг сферы (построение проекций линии пересечения по теореме Г. Монжа).

29. Пересечение поверхностей. Общие случаи пересечения. Способы посредников. Сущность способа посредников. Графический алгоритм построения проекций линии пересечения поверхностей способом посредников.

Рассмотренные способы посредников:

- способ вспомогательных секущих плоскостей;

- способ вспомогательных концентрических сфер;
- способ вспомогательных эксцентрических сфер.

30. Пересечение поверхностей многогранников. Графический алгоритм построения пространственной ломаной линии пересечения гранных поверхностей.

31. Развертывание поверхностей. Поверхности развертываемые и неразвертываемые. Понятие развертки поверхности. Точные и приближенные развертки.

32. Развертка боковой поверхности призмы:

- способом триангуляции (способом треугольников);
- способом нормального сечения;
- способом раскатки.

Условия применения каждого способа.

33. Развертка боковой поверхности пирамиды способом треугольников.

34. Развертка цилиндра:

- способом нормального сечения;
- способом раскатки.

Аппроксимация (замена) цилиндрической поверхности призматической для построения приближенной развертки.

35. Развертывание поверхности кругового конуса. Формула угла развертки. Приближенная развертка аппроксимацией (заменой) конической поверхности пирамидальной.

36. Приближенные развертки сферической и торовой поверхностей.

37. Аксонометрические поверхности. Определение. Прямоугольные и косоугольные проекции. Коэффициенты искажения по аксонометрическим осям и приведенные коэффициенты искажения. Изометрические, диметрические и триметрические проекции. Теорема К. Польке – Г. Шварца «Основное предложение аксонометрии».

38. Стандартные аксонометрии по ГОСТ 2.317–2011.

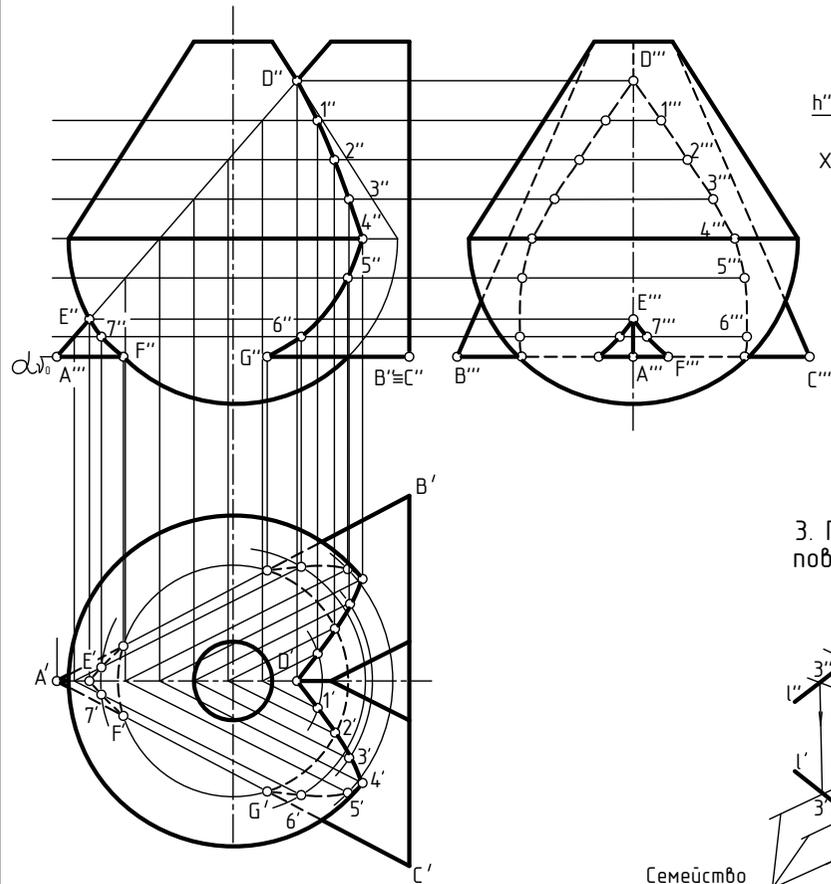
39. Прямоугольная изометрия. Расположение аксонометрических осей, расположение больших и малых осей и величины эллипсов, коэффициенты искажения. Привести способ построения эллипсов (четырёхцентровых овалов) в прямоугольной изометрии.

40. Прямоугольная диметрия. Расположение аксонометрических осей, расположение и величины больших и малых осей эллипсов, коэффициенты искажения. Привести способ построения эллипсов (четырёхцентровых овалов) в прямоугольной диметрии.

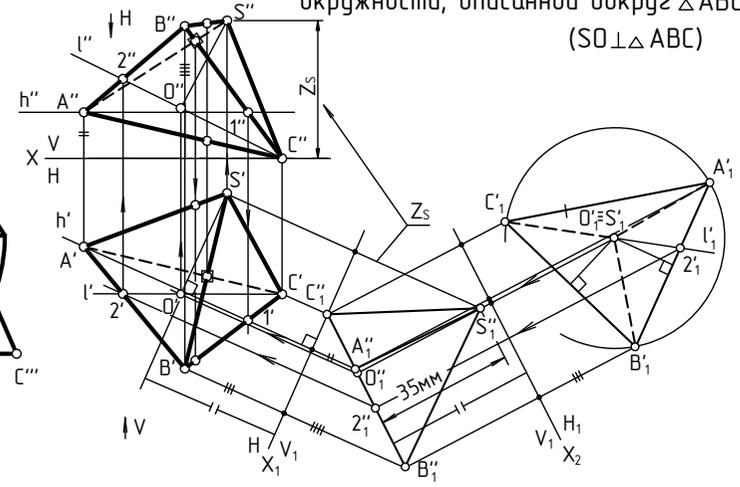
41. Косоугольная диметрия. Расположение аксонометрических осей, расположение и величины больших и малых осей эллипсов, коэффициенты искажения. Привести способ построения эллипсов (четырёхцентровых овалов) в косоугольной диметрии.

На рис. 13.8 приведен образец оформления графической части ответов на экзаменационный билет (допускается их размещение и с двух сторон листа).

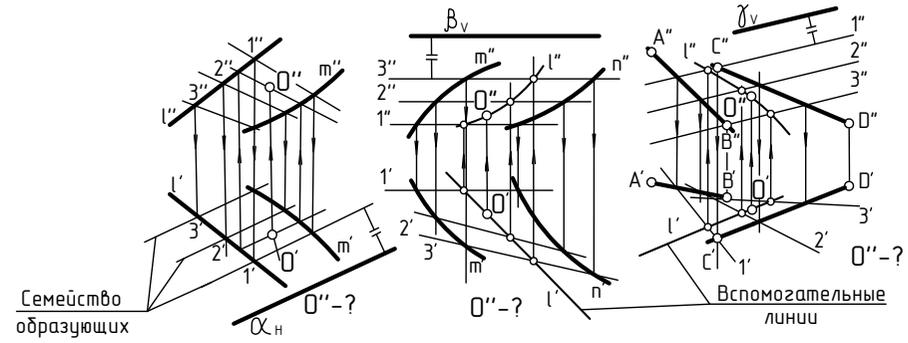
1. Построить три проекции сложного геометрического тела с линиями пересечения поверхностей.



2. Построить проекции пирамиды $SABC$ высотой 35мм с основанием ABC . Основание высоты O лежит в центре окружности, описанной вокруг $\triangle ABC$ ($SO \perp \triangle ABC$)



3. Построить проекции точки $O(O, O''-?)$ на поверхности коноида, цилиндрида и косої плоскости



Семейство образующих

α_H, β_V и γ_V - плоскости параллелизма

БНТУ		Экзаменационная работа	
Разработал			Билет №
Проверил			Гр.

Рис. 13.8

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Учебники и учебные пособия по начертательной геометрии

1. Белякова, Е. И. Начертательная геометрия : учебное пособие / Е. И. Белякова, П. В. Зелёный ; под ред. П. В. Зелёного. – 4-е изд. – Минск : Новое знание, 2013. – 264 с. : ил. – (Высшее образование).
2. Белякова, Е. И. Начертательная геометрия : учебное пособие / Е. И. Белякова, П. В. Зелёный ; под ред. П. В. Зелёного. – 3-е изд. испр. – Минск : Новое знание ; М. : ИНФРА-М, 2013. – 265 с. : ил. – (Высшее образование).
3. Белякова, Е. И. Начертательная геометрия : учебное пособие / Е. И. Белякова, П. В. Зелёный ; под ред. П. В. Зелёного. – 3-е изд. испр. – Минск : Новое знание ; М. : ИНФРА-М, 2011. – 265 с. : ил. – (Высшее образование).
4. Белякова, Е. И. Начертательная геометрия : учебное пособие / Е. И. Белякова, П. В. Зелёный ; под ред. П. В. Зелёного. – 2-е изд. испр. – Минск : Новое знание, 2010. – 248 с.
5. Белякова, Е. И. Начертательная геометрия : учебное пособие / Е. И. Белякова, П. В. Зелёный ; под ред. П. В. Зелёного. – М. : Новое знание ; Минск : Новое знание, 2010. – 248 с.
6. Белякова, Е. И. Начертательная геометрия. Краткий курс по темам графических работ : учебное пособие / Е. И. Белякова, П. В. Зелёный ; под ред. П. В. Зелёного. – Минск : БНТУ, 2009. – 229 с.
7. Бубенников, А. В. Начертательная геометрия / А. В. Бубенников. – М. : Высшая школа, 1985. – 288 с.
8. Бударин, О. С. Начертательная геометрия. Краткий курс : учебное пособие / О. С. Бударин. – 2-е изд. испр. – СПб. : Издательство «Лань», 2009. – 68. : ил. – (Учебник для вузов. Специальная литература).
9. Виноградов, В. Н. Начертательная геометрия : учебник / В. Н. Виноградов. – Минск : Амалфея, 2001.
10. Волошин-Челпак, Э. К. Начертательная геометрия. Инженерная графика : учебник для химико-технологических специальностей вузов / Э. К. Волошин-Челпак. – М. : Академический Проект, 2009. – 183 с. – (Фундаментальный учебник).
11. Георгиевский, О. В. Конспект лекций по начертательной геометрии : методическое пособие / О. В. Георгиевский ; под общ. ред. Т. М. Кондратьевой. – М. : Издательство ассоциации строительных вузов, 2009. – 80 с. : ил.
12. Гордон, В. О. Курс начертательной геометрии : учебное пособие для втузов / В. О. Гордон, М. А. Семенцов-Огиевский ; под ред. В. О. Гордона. – М. : Высшая школа, 2004.
13. Нартова, Л. Г. Современный курс начертательной геометрии / Л. Г. Нартова. – М. : МАИ, 1996.
14. Начертательная геометрия : учебник для вузов / Н. Н. Крылов [и др.] ; под ред. Н. Н. Крылова. – М. : Высшая школа, 2002.

15. Королёв, Ю. И. Начертательная геометрия : учебник для вузов / Ю. И. Королёв. – 2-изд. – СПб. : Питер, 2010. – 256 с. : ил.
16. Инженерная графика / А. И. Лагеръ [и др.]. – М. : Высшая школа, 2007. – 270 с. : ил.
17. Локтев, О. В. Краткий курс начертательной геометрии / О. В. Локтев. – 3-е изд., исправл. – М. : Высшая школа, 1999.
18. Начертательная геометрия / под ред. Н. Н. Крылова. – М. : Высшая школа, 1990. – 240 с.
19. Нартова, Л. Г. Начертательная геометрия : учеб. пособие для студентов техн. специальностей вузов / Л. Г. Нартова, В. И. Якунин. – 2-е изд., стер. – М. : Издательский центр «Академия», 2010. – 288 с. : ил.
20. Павлова, А. А. Начертательная геометрия / А. А. Павлова. – М. : Гуманитарный издательский центр ВЛАДОС, 1999. – 301 с. : ил.
21. Тарасов, Б. Ф. Начертательная геометрия / Б. Ф. Тарасов, Л. А. Дудкина, С. О. Немолотов. – СПб. : Издательство «Лань», 2001. – 256 с. : ил.
22. Уласевич, З. Н. Начертательная геометрия : учеб. пособие для студентов строительных специальностей вузов: приложение: компакт-диск / З. Н. Уласевич, В. П. Уласевич, О. А. Якубовская. – Минск : Белорус. энцык. імя П. Броўкі, 2009. – 197 с. : ил.
23. Фролов, С. А. Начертательная геометрия : учебник / С. А. Фролов. – 3-е изд. перераб. и доп. – М. : ИНФРА-М, 2012. – 285 с. : ил. – (Высшее образование. Бакалавриат).
24. Чекмарев, А. А. Начертательная геометрия и черчение : учеб. пособие для студ. высш. учеб. заведений / А. А. Чекмарев. – М. : Высшее образование, 2009.
25. Яговдик, К. П. Начертательная геометрия. Практикум : учебное пособие / К. П. Яговдик. – Минск : Издательство Гревцова, 2012. – 80 с. : ил.

Сборники задач по начертательной геометрии

26. Белякова, Е. И. Начертательная геометрия. Практикум, сборник задач : учебное пособие для студентов высших учебных заведений по техническим специальностям / Е. И. Белякова, П. В. Зелёный ; под ред. П. В. Зелёного. – Минск : БНТУ, 2010. – 163 с.
27. Белякова, Е. И. Начертательная геометрия. Практикум : учебное пособие / Е. И. Белякова, П. В. Зелёный ; под ред. П. В. Зелёного. – 2-е изд. испр. – Минск : Новое знание ; М. : ИНФРА-М, 2011. – 214 с. : ил. – (Высшее образование).
28. Белякова, Е. И. Начертательная геометрия. Практикум : учебное пособие / Е. И. Белякова, П. В. Зелёный ; под ред. П. В. Зелёного. – Минск : Новое знание, 2010. – 204 с. : ил.
29. Белякова, Е. И. Начертательная геометрия : рабочая тетрадь / Е. И. Белякова, П. В. Зелёный ; под ред. П. В. Зелёного. – 4-е изд. – Минск : Новое знание, 2013. – 56 с. : ил.

30. Белякова, Е. И. Начертательная геометрия : рабочая тетрадь / Е. И. Белякова, П. В. Зелёный ; под ред. П. В. Зелёного. – 3-е изд. испр. и доп. – Минск : Новое знание, 2012. – 52 с. : ил.

31. Белякова, Е. И. Начертательная геометрия : рабочая тетрадь / Е. И. Белякова, П. В. Зелёный ; под ред. П. В. Зелёного. – 2-е изд. стер. – Минск : Новое знание, 2010. – 48 с. : ил.

32. Белякова, Е. И. Начертательная геометрия : рабочая тетрадь (практикум) : учебно-методическое пособие для студентов технических специальностей высших учебных заведений / Е. И. Белякова, П. В. Зелёный ; под ред. П. В. Зелёного. – Минск : БНТУ, 2010. – 47 с.

33. Белякова, Е. И. Начертательная геометрия : рабочая тетрадь / Е. И. Белякова, П. В. Зелёный ; под ред. П. В. Зелёного. – М. : Новое знание ; Минск : Новое знание, 2009. – 48 с.

34. Георгиевский, О. В. Начертательная геометрия : сборник задач с решением типовых примеров / О. В. Георгиевский. – М. : АСТ ; Астрель, 2006.

35. Гордон, В. О. Сборник задач по курсу начертательной геометрии / В. О. Гордон, Ю. Б. Иванов, Т. Е. Солнцева. – М. : Машиностроение, 1998.

36. Зелёный, П. В. Инженерная графика. Практикум : учебное пособие / П. В. Зелёный, Е. И. Белякова ; под ред. П. В. Зелёного. – 2-е изд. – Минск : Новое знание, 2013. – 304 с. : ил. – (Высшее образование).

37. Зелёный, П. В. Инженерная графика. Практикум : учебное пособие / П. В. Зелёный, Е. И. Белякова ; под ред. П. В. Зелёного. – Минск : Новое знание ; М. : ИНФРА-М, 2012. – 303 с. : ил. – (Высшее образование).

38. Зелёный, П. В. Инженерная графика. Практикум : учебное пособие / П. В. Зелёный, Е. И. Белякова ; под ред. П. В. Зелёного. – Минск : БНТУ, 2011. – 258 с. : ил.

39. Зелёный, П. В. Инженерная графика. Практикум : учебное пособие / П. В. Зелёный, Е. И. Белякова ; под ред. П. В. Зелёного. – Минск : Новое знание, 2011. – 302 с. : ил.

40. Зелёный, П. В. Начертательная геометрия. Индивидуальные графические работы : учебно-методическое пособие для студентов заочной формы обучения высших технических учебных заведений / П. В. Зелёный, Е. И. Белякова ; под ред. П. В. Зелёного. – Минск : БНТУ, 2008. – 110 с.

41. Локтев, О. В. Задачник по начертательной геометрии / О. В. Локтев, П. А. Числов. – М. : Высшая школа, 1997.

42. Королёв, Ю. И. Сборник задач по начертательной геометрии : учеб. пособие / Ю. И. Королёв. – СПб. : Питер, 2008.

43. Фролов, С. А. Начертательная геометрия, сборник задач : учебное пособие для студентов машиностроительных и приборостроительных специальностей вузов. – 3-е изд. испр. / С. А. Фролов. – М. : ИНФРА-М, 2008. – 172 с. : ил. – (Высшее образование).

44. Чекмарев, А. Л. Задачи и задания по инженерной графике : учеб. пособие для вузов / А. А. Чекмарев. – М. : Академия, 2007.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение.	3
Перечень изучаемых тем.	7
Лекция 1. Метод проекций. Образование чертежа по Г. Монжу.	
Проекция точки.	10
Лекция 2. Проекция прямой. Положение прямой относительно плоскостей проекций. Взаимное положение прямых. Способ прямоугольного треугольника. Теорема о проекции прямого угла.	17
Лекция 3. Проекция плоскости. Задание плоскости на чертеже. Следы плоскости. Положение плоскости относительно плоскостей проекций.	33
Лекция 4. Взаимное положение двух плоскостей, прямой линии и плоскости.	44
Лекция 5. Перпендикулярность.	55
Лекция 6. Преобразование чертежа.	61
Лекция 7. Поверхности. Частные случаи гранных и кривых поверхностей. Геометрические тела.	74
Лекция 8. Пересечение поверхностей.	119
Лекция 9. Развертки поверхностей.	141
Лекция 10. Аксонометрические проекции.	162
Лекция 11. Кривые линии и поверхности.	182
Лекция 12. Пересечение линии с поверхностью. Касательные плоскости и нормаль к поверхности.	198
Лекция 13. Метрические задачи и экзаменационные вопросы.	205
Список рекомендуемой литературы.	220

Учебное издание

ЗЕЛЁНЫЙ Пётр Васильевич
БЕЛЯКОВА Евгения Ивановна

НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Учебное пособие

Редактор *Л. Н. Шалаева*
Компьютерная верстка *Н. А. Школьниковой*

Подписано в печать 12.03.2014. Формат 60×84 ¹/₈. Бумага офсетная. Ризография.

Усл. печ. л. 26,04. Уч.-изд. л. 10,18. Тираж 900. Заказ 1010.

Издатель и полиграфическое исполнение: Белорусский национальный технический университет.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя
печатных изданий № 1/173 от 12.02.2014. Пр. Независимости, 65. 220013, г. Минск.