Министерство образования Республики Беларусь
БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра физики

МАЯТНИК МАКСВЕЛЛА

Методические указания
к лабораторной работе
для студентов строительных специальностей

М и н с к 2 0 0 4

УДК 531.38

В работе излагаются основы динамики поступательного и вращательного движения маятника Максвелла. Приведена методика экспериментального определения динамических характеристик.

Составители:

А.А.Баранов, А.П.Каравай, П.Г.Кужир

Рецензенты:

И.А.Сатиков, В.И.Кудин

Цель работы:

1) Изучить динамику поступательного и вращательного движения маятника Максвелла.

2) Определить момент инерции маятника, силу натяжения нитей, линейное и угловое ускорения маятника.

3) Проверить закон сохранения энергии в механике при движении маятника Максвелла.

Момент силы

Следует различать момент вектора силы относительно точки и относительно оси. Момент вектора силы относительно точки есть вектор. Момент того же вектора относительно оси есть проекция на эту ось его момента относительно любой точки, лежащей на той же оси. Таким образом, момент вектора силы относительно оси уже не является вектором.

Пусть O – какая-либо точка, относительно которой рассматривается момент вектора силы (рис. 1). Обозначим буквой $\vec{r}$ радиус-вектор, проведенный из этой точки к точке A приложения силы $\vec{F}$.

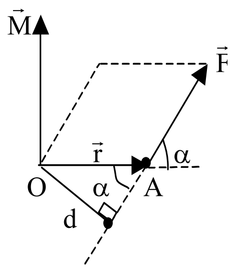


Рис. 1

Моментом $\vec{M}$ ***силы*** $\vec{F}$ ***относительно точки O*** называется векторное произведение радиуса-вектора $\vec{r}$ и силы $\vec{F}$:

$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}].$$

Момент силы есть вектор, направление которого определяется правилом правого винта: если винт вращать по кратчайшему пути от $\vec{r}$ к $\vec{F}$, то направление поступательного движения винта совпадает с направлением вектора момента силы $\vec{M}$. Вектор $\vec{M}$ всегда перпендикулярен к плоскости векторов $\vec{r}$ и $\vec{F}$.

Модуль вектора M, согласно определению векторного произведения, равен

$$M = r \cdot F \cdot \sin(\vec{r}\,,\ \vec{F}\,) = r \cdot F \cdot \sin\alpha = F \cdot d.$$

Из рис. 1 видно, что $r \cdot \sin\alpha = d$. Кратчайшее расстояние d от точки, относительно которой определяется момент силы, до линии действия силы называется ***плечом силы***. Следовательно, модуль момента силы равен произведению силы на плечо.

Полный момент сил, действующих на систему материальных точек (частиц) равен векторной сумме моментов отдельных сил:

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i = \sum_{i=1}^{n} \left[\vec{r}_i, \vec{F}_i\right].$$

Способность силы вращать тело вокруг оси определяется моментом силы относительно данной оси.

Моментом силы относительно оси, проходящей через точку A, называется проекция момента $\vec{M}$ относительно этой точки на данную ось.

Пусть внешняя сила $\vec{F}$ приложена к внешней точке тела C, находящейся на расстоянии R от оси вращения (рис. 2).

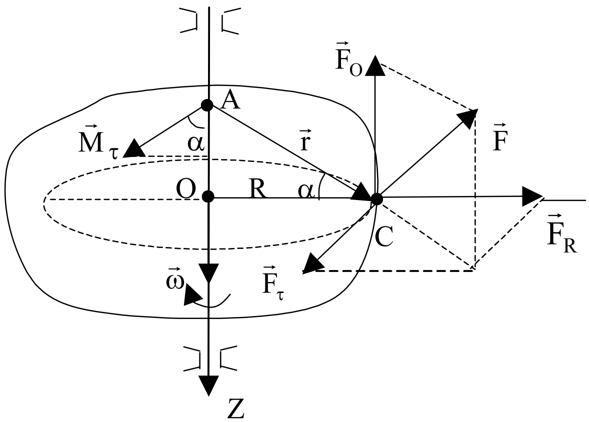


Рис. 2

Пусть ось вращения закреплена. Определим момент силы $\vec{F}$ относительно данной оси. Разложим вектор силы $\vec{F}$ на три взаимно перпендикулярные составляющие: $\vec{F}_O$, $\vec{F}_R$ и $\vec{F}_\tau$. Сила $\vec{F}_\tau$ направлена по касательной к окружности, по которой движется рассматриваемая точка *C*. Момент $\vec{M}$ силы $\vec{F}$ относительно точки *A*, лежащей на оси вращения, равен векторной сумме моментов составляющих сил:

$$\vec{M} = \vec{M}_O + \vec{M}_R + \vec{M}_\tau .$$

Векторы $\vec{M}_O$ и $\vec{M}_R$ перпендикулярны к оси *Z*, поэтому их проекции на оси *Z* равны нулю. Момент силы $\vec{M}_\tau = \left[\vec{r}, \vec{F}_\tau\right]$ и образует с осью *Z* угол α, а модуль $\vec{M}_\tau$ имеет значение:

$$M_\tau = r \cdot F_\tau \cdot \sin 90° = r \cdot F_\tau .$$

Проекция вектора $\vec{M}_\tau$ на ось *Z* равна моменту силы $\vec{F}_\tau$ относительно оси *Z*:

$$M_Z = M_\tau \cdot \cos\alpha = r \cdot F_\tau \cdot \cos\alpha = F_\tau \cdot R,$$

так как, согласно рис. 2,

$$R = r \cdot \cos\alpha .$$

Следовательно, только составляющая $\vec{F}_\tau$, лежащая в плоскости, перпендикулярной к оси вращения и перпендикулярной к радиусу *R* точки *C* приложения внешней силы, приводит к изменению вращательного движения тела.

Основное уравнение динамики вращательного движения

Выведем уравнение движения тела, имеющего закрепленную в пространстве ось вращения Z. Для этого мысленно разобьем тело на совокупность материальных точек (частиц) с массами $m_1, m_2, \ldots, m_i, \ldots, m_n$. На i-ю точку действует в данный момент некоторая сила $\vec{F}_i$, которая представляет собой равнодействующую всех приложенных к этой частице сил. При вращении тела частица с массой m_i движется по окружности радиуса R_i (рис. 3). Моментом относительно оси вращения обладает только составляющая $\vec{F}_{\tau i}$ силы $\vec{F}_i$, лежащая в плоскости, перпендикулярной оси вращения. По второму закону Ньютона ее численное значение равно

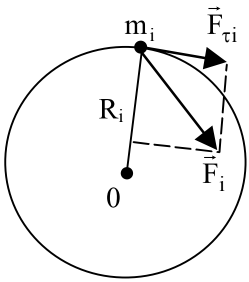


Рис. 3

$$\vec{F}_{\tau i} = M_i \; \vec{a}_{\tau\, i}, \qquad (1)$$

где $\vec{a}_{\tau\, i}$ – тангенциальная (касательная) составляющая ускорения частицы.

Умножим обе части равенства (1) на R_i и выразим $a_{\tau\, i}$ через угловое ускорение β ($a_{\tau\, i} = \beta R_i$), тогда получим

$$F_{\tau i} R_i = m_i R_i^2 \beta$$

или

$$M_i = m_i R_i^2 \beta = J_i \; \beta, \qquad (2)$$

где M_i – момент, действующий на данную частицу тела, силы $\vec{F}_i$ относительно оси вращения, а произведение массы частицы на квадрат расстояния от нее до оси, т.е.

$$J_i = m_i R_i^2 ,$$

называют ***моментом инерции частицы (материальной точки) относительно оси Z.***

Просуммируем выражение (2) по всем частицам:

$$\sum_{i=1}^{n} M_i = \sum_{i=1}^{n} J_i \beta .$$

Так как угловое ускорение β одинаково для всех частиц данного тела, его можно вынести за знак суммы

$$\sum_{i=1}^{n} M_i = \beta \sum_{i=1}^{n} J_i . \qquad (3)$$

Алгебраическую сумму моментов всех внешних сил $\sum_{i=1}^{n} M_i = M$, действующих на тело, называют ***полным моментом внешних сил***. Сумма моментов инерции отдельных частиц, составляющих тело, $\sum_{i=1}^{n} J_i = J$ называется ***моментом инерции тела относительно заданной оси вращения***.

Следовательно, уравнение (3) примет вид:

$$M = J\beta. \qquad (4)$$

Уравнение (4) называют ***основным уравнением динамики вращательного движения***: момент вращающей силы, приложенной к телу, равен произведению момента инерции тела на угловое ускорение.

Момент инерции. Кинетическая энергия вращательного движения

Момент инерции – это физическая величина, которая существует независимо от того, вращается тело или нет. Величина момента инерции тела относительно данной оси зависит от размеров тела, его формы, плотности.

Для неоднородных тел и тел неправильной геометрической формы момент инерции определяется экспериментально, а для однородных тел геометрически правильной формы – посредством интегрирования:

$$I = \int R^2 \, dm = \int \rho R^2 \, dV , \qquad (5)$$

где $\rho = \dfrac{dm}{dV}$ – плотность тела;

V – его объем.

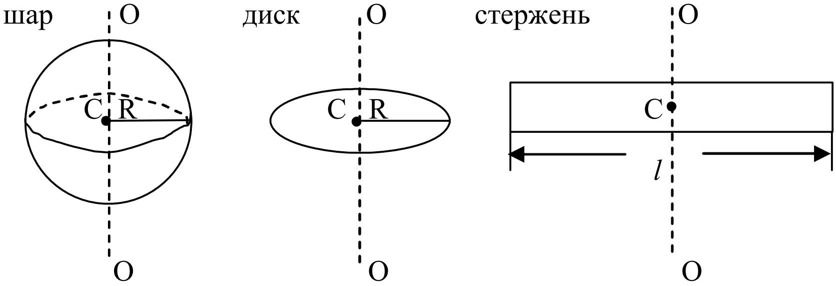
В системе СИ момент инерции J измеряется в кг · м^2.

Уравнение (4) аналогично второму закону Ньютона ($\vec{F} = m \cdot \vec{a}$). Роль массы в уравнении (4) играет момент инерции, чем больше момент инерции, тем меньше (при прочих равных условиях) угловое ускорение, т.е. имеет место аналогия момента инерции с массой. ***Момент инерции тела есть мера инертности тела во вращательном движении***.

Центр инерции (центр масс, центр тяжести) тела есть точка с координатами

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}, \; y_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot y_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}, \; z_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot z_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}.$$

Расчет интеграла (5) для некоторых однородных тел относительно оси, проходящей через их центр инерции, дает следующие результаты (рис. 4).



$$J_C = \frac{2}{5}mR^2 \qquad J_C = \frac{1}{2}mR^2 \qquad J_C = \frac{1}{12}ml^2$$

Рис. 4

Здесь центр инерции C совпадает с геометрическим центром приведенных фигур.

Если ось вращения не проходит через центр инерции тела, то можно воспользоваться ***теоремой Штейнера***: момент инерции тела относительно произвольной оси равен сумме момента инерции относительно оси, параллельной данной и проходящей через центр инерции тела (J_c), и произведения массы тела на квадрат расстояния d между осями:

$$J = J_c + md^2.$$

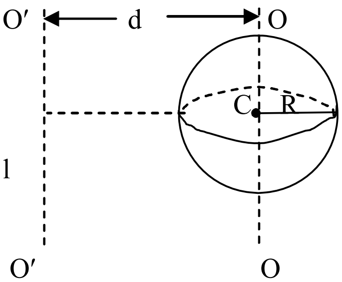


Рис. 5

На рис. 5 показан шар. Требуется определить его момент инерции относительно оси O′O′, находящейся на расстоянии $d = 4R$ от центра инерции шара:

$$J = \frac{2}{5}mR^2 + m(4R)^2 = \\ = mR^2\left(\frac{2}{5} + 16\right) = \frac{82}{5}mR^2.$$

Получим выражение для кинетической энергии тела во вращательном движении. Кинетическая энергия тела, разбитого на частицы с массами m_i, равна

$$E_к = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \mathrm{v}_i^2 .$$

Так как линейная скорость v_i частицы связана с угловой скоростью частицы ω и расстоянием до оси вращения R_i соотношением $\mathrm{v}_i = \omega R_i$, то

$$E_к = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \omega^2 \; R_i^2 \; m_i = \frac{\omega^2}{2}\sum_{i=1}^{n} \; R_i^2 \; m_i = \frac{J\;\omega^2}{2} .$$

Описание маятника Максвелла и вывод рабочих формул

Маятник Максвелла представляет собой небольшой диск, насаженный туго на ось и опускающийся под действием силы тяжести на двух нитях, предварительно намотанных на ось диска. Нити во время движения вниз разматываются до полной длины, раскрутившийся диск продолжает вращательное движение в том же направлении и наматывает нити на ось, вследствие чего он поднимается вверх, замедляя при этом свое вращение. Дойдя до верхней точки диск опять будет опускаться вниз и т.д. (рис. 6).

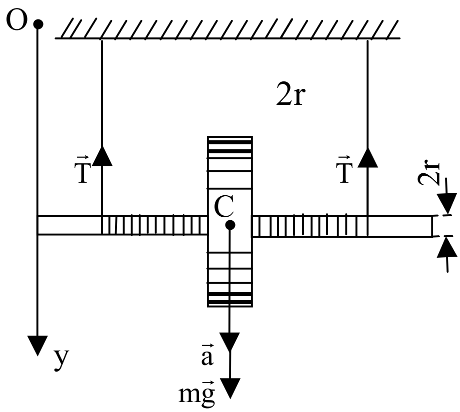


Рис. 6

Поступательное движение центра масс маятника C в проекции на ось y определяется вторым законом Ньютона:

$$ma = mg - 2T. \tag{6}$$

Здесь m – масса маятника;

$2T$ – сила натяжения нитей;

a – ускорение центра масс;

g – ускорение свободного падения.

Уравнение вращательного движения маятника вокруг его оси имеет вид

$$J\beta = 2\,T\,r, \tag{7}$$

где J – момент инерции маятника относительно оси вращения;

β – угловое ускорение маятника;

$2Tr$ – вращательный момент (момент силы).

Связь линейного и углового ускорения имеет вид

$$a = \beta\, r, \tag{8}$$

где r – радиус стержня (см. рис. 6).

Ускорение a определяется известным кинематическим соотношением

$$a = \frac{2s}{t^2}, \tag{9}$$

где s – длина нити от крайних верхнего и нижнего положений маятника;

t – время движения маятника между его крайними положениями.

Сначала измеряют время движения маятника t. Потом по формуле (9) определяют линейное ускорение маятника.

Далее из формулы (6) вытекает выражение для вычисления силы натяжения нитей

$$T = \frac{m(g-a)}{2}.$$

Из соотношения (8) вытекает формула для определения углового ускорения во вращательном движении маятника

$$\beta = \frac{a}{r}.$$

Момент инерции маятника, как следует из (7) определяется соотношением

$$J = \frac{2Tr}{\beta}.$$

Если пренебречь силами трения, сопротивления, то закон сохранения механической энергии маятника дает равенство потенциальной энергии маятника в верхнем положении и кинетической энергии вращения маятника в нижнем положении, т.е.

$$E_p = E_к.$$

Потенциальная энергия маятника в верхнем положении

$$E_p = m g s.$$

Кинетическая энергия вращения маятника в нижнем положении

$$E_к = \frac{J \omega^2}{2}.$$

А так как

$$\omega = \beta t,$$

то

$$E_к = \frac{J \beta^2 t^2}{2}.$$

Контрольные вопросы

1. Вывести основное уравнение динамики вращательного движения твердого тела.
2. Что такое момент силы относительно точки, оси? Пояснить рисунками.
3. Дайте определение центра масс тела.
4. Что такое момент инерции тела относительно некоторой оси?
5. Сформулировать теорему Штейнера.
6. Вывести кинетическую энергию вращательного движения.

Л и т е р а т у р а

1. Хайкин С.Э. Физические основы механики. – М.: Физматгиз, 1963. – С. 412-422.

2. Стрелков С.П. Механика. – М.: Наука, 1965. – С. 199-200.

3. Сивухин Д.В. Общий курс физики: В 5 т. – М.: Наука, 1974. – Т. 1.

4. Матвеев А.Н. Механика и теория относительности. – М.: Высшая школа, 1986. – С. 181.

5. Николаев В.И. О маятнике Максвелла // Физическое образование в вузах. – 2001. – Т. 7. – № 2. – С. 5-14.

Учебное издание

МАЯТНИК МАКСВЕЛЛА

Методические указания
к лабораторной работе
для студентов строительных специальностей

Составители: БАРАНОВ Артур Александрович
КАРАВАЙ Алексей Павлович
КУЖИР Павел Григорьевич

Редактор А.М.Кондратович. Корректор М.П.Антонова
Компьютерная верстка Л.М.Чернышевич

Подписано в печать 25.03.2004.
Формат 60x84 1/16. Бумага типографская № 2.
Печать офсетная. Гарнитура Таймс.
Усл. печ. л. 0,9. Уч.-изд. л. 0,6. Тираж 100. Заказ 37.

Издатель и полиграфическое исполнение:
Белорусский национальный технический университет.
Лицензия ЛВ №155 от 30.01.2003. 220013, Минск, проспект Ф.Скорины, 65.