**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ**

**Белорусский национальный технический университет**

Кафедра физики

# *ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСКОРЕНИЯ СВОБОДНОГО ПАДЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ УНИВЕРСАЛЬНОГО МАЯТНИКА*

Методические указания к лабораторной работе по физике
для студентов инженерно-технических специальностей

Учебное электронное издание

**Минск ◊ БНТУ ◊ 2011**

УДК 537.226 (076.5)

**А в т о р ы :**
*П.Г. Кужир, Н.П. Юркевич, Г.К. Савчук*

***Рецензенты:***

*И.А.Хорунжий*, к. ф.-м. н., доцент, заведующий кафедрой «Техническая физика» БНТУ;

*И.Ф. Медведева*, к. ф.-м. н., старший научный сотрудник лаборатории радиационных воздействий ГО НПЦ НАН Беларуси по материаловедению

В работе рассматриваются основные кинематические закономерности движения тел, определяемые с помощью универсального маятника. Рассмотрены гравитационное поле и его характеристики, вращение Земли и его влияние на движение тел. Представлены методы определения ускорения свободного падения.

Методические указания к лабораторной работе предназначены для студентов инженерно-технических специальностей всех форм обучения.

Белорусский национальный технический университет
пр-т Независимости, 65, г. Минск, Республика Беларусь
Тел.(017) 292-77-52 факс (017) 292-91-37
E-mail: NPYurkevich@mail.ru ;
Регистрационный № **БНТУ/ФЭС57–11.2011**

***Цель работы:*** определить ускорение свободного падения с помощью универсального маятника.

***Оборудование и материалы:*** электронный секундомер, блок питания электромагнита, пусковое устройство, управляющее электромагнитом и секундомером.

## Гравитационное взаимодействие и его свойства

***Гравитация*** — это фундаментальное взаимодействие в природе, которому подвержены все материальные объекты.

Гравитационное взаимодействие обладает следующими основными свойствами.

1) Действует на все материальные объекты. Все, что имеет массу, – а масса присуща любому виду материи – испытывает гравитационное взаимодействие.

2) Обладает бесконечным радиусом действия. Гравитационное взаимодействие простирается практически на неограниченное расстояние.

3) Обладает универсальностью действия, которое заключается в том, что гравитационные силы сообщают всем телам одинаковое ускорение не зависимо от их состава, строения и массы.

4) Гравитационное взаимодействие невозможно экранировать. Это взаимодействие свободно передается через любые тела и преграды и является всепроникающим.

5) Является самым слабым взаимодействием из всех известных взаимодействий в природе. Среди других типов взаимодействий – сильного, слабого и электромагнитного – гравитационное взаимодействие не играет практически никакой роли применительно к микрообъектам, таким как элементарные частицы. Например, электрическая сила взаимного отталкивания двух электронов превосходит силу их тяготения более чем в $10^{42}$ раз.

6) Обладает свойством притяжения.

Гравитационное взаимодействие было первым взаимодействием, описанным математической теорией. Общее поведение гравитации в классической механике описывается законом всемирного тяготения, открытым Исааком Ньютоном в 1687 году.

## Закон всемирного тяготения

Мерой гравитационного взаимодействия является ***сила тяготения*** или ***гравитационная сила,*** величина которой определяется законом всемирного тяготения.

***Закон всемирного тяготения И.Ньютона гласит***: сила притяжения двух тел прямо пропорциональна массам этих тел и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними.

$$F = G\frac{m_1 m_2}{R^2},$$

где $m_1$, $m_2$ – массы взаимодействующих тел;

$R$ – расстояние между центрами масс тел;

$G$ – гравитационная постоянная.

В векторном виде закон всемирного тяготения записывается как

$$\vec{F} = -G\frac{m_1 m_2}{r^3}\vec{r}, \qquad (1)$$

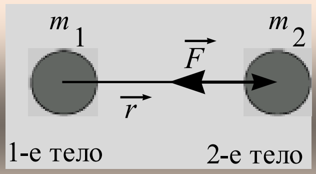


Рис. 1. Притяжение тел

где $\vec{r}$ – радиус-вектор, проведенный от одного тела к другому (рис.1);

$r$ – модуль радиус-вектора, который равен расстоянию $R$.

***Физический смысл гравитационной постоянной G*** заключается в следующем: ***гравитационная постоянная – это физическая величина, численно равная силе взаимного тяготения двух тел единичной массы, находящихся на единичном расстоянии друг от друга***.

Экспериментально получено, что

$$G = (6{,}6720 \pm 0{,}0041)\cdot 10^{-11}\ \text{Н}\cdot\text{м}^2/\text{кг}^2.$$

Закон всемирного тяготения выполняется для материальных точек и шарообразных тел.

Если взаимодействующие тела имеют произвольные форму и размеры, то сила их гравитационного взаимодействия определяется формулой

$$\vec{F} = -G\int_{V_1}\rho_1 dV_1 \int_{V_2}\frac{\rho_2}{r^3}\vec{r}\, dV_2,$$

где $dV_1$, $dV_2$ - элементы объемов первого и второго тела, соответственно;

$\rho_1$ и $\rho_2$ – плотности указанных элементов тел.

Интегрирование проводится по объемам взаимодействующих тел.

## Гравитационное поле и его характеристики

Гравитационное взаимодействие между телами осуществляется посредством создаваемого ими гравитационного поля, которое называется также полем тяготения. Гравитационное поле один из видов физического поля, посредством которого осуществляется гравитационное притяжение тел, например Солнца и планет Солнечной системы, планет и их спутников, Земли и находящихся на ней или вблизи нее тел.

Если в гравитационное поле поместить материальное тело, то на него будет действовать сила, пропорциональная массе этого тела.

Силовой характеристикой гравитационного поля является напряженность поля**.** ***Напряженность гравитационного поля*** **–** это векторная величина, численно равная отношению силы $\vec{F}$, действующей со стороны поля на помещенное в него тело, к массе $m$ этого тела

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m}.$$

Напряженность гравитационного поля не зависит от массы тела, а зависит от координат ($x$, $y$, $z$) точки поля, в которую помещено тело.

Гравитационное поле называется ***стационарным***, если создающие его тела неподвижны относительно системы отсчета, выбранной для описания поля. Напряженность стационарного гравитационного поля не зависит от времени и является функцией только координат.

Пусть тело массой $M$ создает гравитационное поле, в которое помещено тело массой $m$. Из второго закона Ньютона следует, что под действием сил гравитационного поля тело массой $m$ приобретает ускорение $\vec{a}$, равное напряженности этого поля

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \vec{g}. \tag{2}$$

Из закона всемирного тяготения (1) с учетом формулы (2) получаем, что напряженность гравитационного поля, создаваемого неподвижным телом массой $M$:

$$\vec{g} = -G\frac{M}{r^3}\vec{r},$$

где $\vec{r}$ — радиус-вектор рассматриваемой точки поля.

Поле сил называется ***центральным****,* если направление силы проходит через неподвижные центры взаимодействующих тел и величина силы зависит от расстояния между этими центрами. Сила всемирного тяготения и гравитационное поле являются центральными.

Поле называется ***однородным***, если напряженность во всех точках поля одинакова по величине и по направлению.

Поле называется ***потенциальным****,* если работа, совершаемая действующими силами поля при перемещении тела из одного положения в другое, не зависит от формы траектории.

Если тело массой $m$ перемещается в гравитационном поле из точки 1 в точку 2 (рис.2), то работа, совершенная силами гравитационного притяжения:

$$A = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F}\, d\vec{r} = GmM \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = -G\frac{mM}{r}\bigg|_{r_1}^{r_2} =$$

$$= -G\frac{mM}{r_2} + G\frac{mM}{r_1} = GmM\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right). \qquad (3)$$

Если тело в гравитационном поле движется по замкнутому контуру, то $r_1 = r_2$ и согласно (3) работа сил поля $A = 0$.

Поэтому из (3) вытекает ***критерий потенциальности гравитационного поля**: **чтобы поле было потенциальным необходимо и достаточно, чтобы работа сил поля по любому замкнутому контуру была равна нулю***.

Любое тело в гравитационном поле обладает ***потенциальной энергией***

$$W_{\text{п}} = \int_{r}^{\infty} \vec{F} d\vec{r} = -G\frac{mM}{r}.$$

Отсюда следует, что на бесконечности значение потенциальной энергии равно нулю.

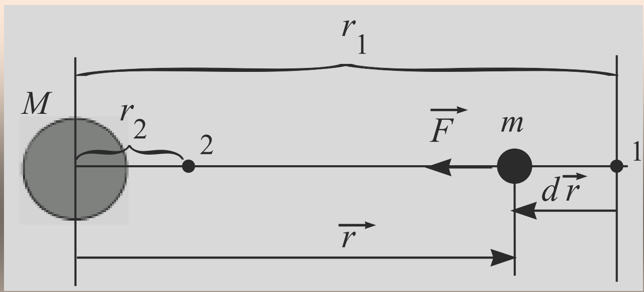


Рис. 2. К определению работы сил гравитационного поля

Гравитационные поля удовлетворяют ***принципу суперпозиции: результирующая напряженность гравитационного поля системы тел равна векторной сумме гравитационных полей каждого из тел в отдельности:***

$$\vec{g} = \sum_{i=1}^{n} \vec{g}_i,$$

где $\vec{g}_i$ — вектор напряженности $i$-го поля в рассматриваемой точке пространства.

В силу потенциальности гравитационного поля для его описания можно ввести энергетическую характеристику – потенциал.

***Потенциалом*** гравитационного поля называется скалярная величина φ, равная отношению потенциальной энергии $W_{\text{П}}$ тела, помещенного в данную точку поля, к его массе

$$\varphi = \frac{W_{\text{П}}}{m}.$$

Потенциал φ не зависит от массы тела, а является функцией координат точек гравитационного поля. Для потенциалов поля справедлив ***принцип суперпозиции: результирующий потенциал***

***гравитационного поля системы тел равен алгебраической сумме потенциалов гравитационных полей каждого из тел в отдельности***

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i .$$

Получим связь между потенциалом и вектором напряженности гравитационного поля.

Элементарная работа, совершаемая силами гравитационного поля при малом перемещении $d\vec{r}$ тела массой $m$ в этом поле:

$$\delta A = (\vec{F} d\vec{r}) = m(\vec{g} d\vec{r}) . \quad (4)$$

С другой стороны эта работа равна убыли потенциальной энергии тела в гравитационном поле

$$\delta A = -dW_{\text{П}} = -md\varphi . \quad (5)$$

Приравнивая правые части выражений (4) и (5), получаем связь потенциала и напряженности гравитационного поля

$$d\varphi = -(\vec{g} d\vec{r}) = -(g_x dx + g_y dy + g_z dz) , \quad (6)$$

где $\vec{g} = g_x \vec{i} + g_y \vec{j} + g_z \vec{k}$ ; $d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$ .

Из выражения (6) следует, что проекции вектора напряженности на координатные оси $x$, $y$, $z$, равны

$$g_x = -\frac{d\varphi}{dx} , \quad g_y = -\frac{d\varphi}{dy} , \quad g_z = -\frac{d\varphi}{dz} . \quad (7)$$

При этом вектор напряженности $\vec{g} = g_x \vec{i} + g_y \vec{j} + g_z \vec{k}$ примет вид

$$\vec{g} = -\frac{d\varphi}{dx}\vec{i} - \frac{d\varphi}{dy}\vec{j} - \frac{d\varphi}{dz}\vec{k} . \quad (8)$$

Если изменение потенциала происходит в результате малого перемещения только вдоль одного направления, например, вдоль оси $x$ или вдоль осей $y$ или $z$, то, обозначив это направление через $dr$, получим

$$g = -\frac{d\varphi}{dr} .$$

***Величина*** $\frac{d\varphi}{dr}$ ***называется градиентом потенциала и характеризует изменение потенциала на единицу длины в направлении перемещения в поле тяготения***.

В общем случае потенциал является функцией трех переменных $x$, $y$, $z$: $\varphi = f(x, y, z)$. Однако, при дифференцировании $\varphi$, например, по переменной $x$ переменные $y$ и $z$ считаются постоянными величинами, поэтому полные производные заменяются частными. Тогда для выражения (8) получаем

$$\vec{g} = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} - \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k} = -\mathrm{grad}\varphi,$$

где $\mathrm{grad}\varphi = -(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k})$ – ***градиент*** потенциала φ.

Знак минус в выражении показывает, что вектор ***напряженности*** $\vec{g}$ ***направлен в сторону убыли потенциала.***

Таким образом, ***напряженность гравитационного поля численно равна и противоположна по направлению градиенту потенциала этого поля.***

## Вращение Земли и его влияние на движение тел

При условии, что Земля имеет форму шара и ее масса распределена сферически симметрично, сила тяготения тела массой $m$ к Земле направлена к центру Земли, а ее модуль вычисляется как

$$F = G\frac{mM_з}{R^2}, \tag{9}$$

где $M_з$ – масса Земли;

$R$ – расстояние от тела до центра Земли.

Учтем, что размеры любого тела на Земле ничтожно малы по сравнению с радиусом Земли. Суточное вращение Земли вокруг своей оси приводит к тому, что тело на поверхности Земли получает центростремительное ускорение

$$a_ц = \omega^2 r, \tag{10}$$

вектор которого лежит в плоскости круга и направлен перпендикулярно оси вращения по радиусу $r$ круга (рис.3). Поскольку в формулу (10) для центробежного ускорения угловая скорость ω входит во второй степени, то ускорение $a_ц$ не зависит от направления вращения. Согласно формуле (10), ускорение достигает наибольшего значения на экваторе. На полюсах центростремительное ускорение равно нулю, так как полюса неподвижны.

Тело удерживается на поверхности Земли центростремительной силой

$$\vec{F}_ц = m\vec{a}_ц = \vec{F}_{гр} + \vec{N}, \tag{11}$$

где $\vec{N}$ - сила реакции земной поверхности или сила реакции опоры.

***Составляющую силы всемирного тяготения, действующую на тело со стороны Земли и сообщающую телу ускорение свободного падения называют силой тяжести.***

Из рис. 3 видно, что сила тяжести $F_{тяж}$ равна по модулю силе реакции опоры $N$. Согласно (11) сила тяжести на полюсах равна гравитационной силе $F_{гр}$, поскольку на полюсах Земли $F_ц = 0$.

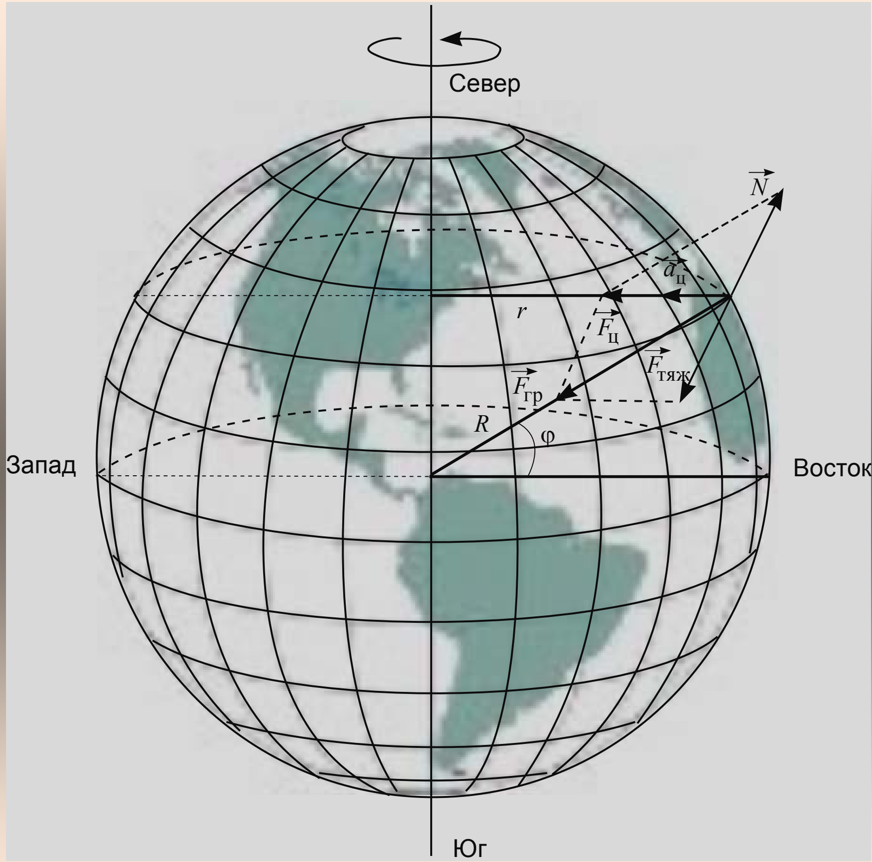


Рис. 3. Планета Земля и ее вращение

На широте местности φ силу тяжести можно определить по теореме косинусов

$$F_{тяж}^2 = F_{гр}^2 + F_ц^2 - 2F_{гр}F_ц \cos\varphi . \tag{12}$$

Центростремительная сила на широте $\varphi$

$$F_ц = m\omega^2 R\cos\varphi ,$$

где $R$ – расстояние от центра Земли до тела на ее поверхности. Величина силы $F_ц$ намного меньше гравитационной силы ($F_ц < 4\cdot 10^{-2}\, F_{гр}$), поэтому в (12) слагаемым $F_ц^2$ можно пренебречь.

Тогда

$$F_{тяж}^2 \approx F_{гр}^2 - 2F_{гр}F_ц \cos\varphi = F_{гр}^2 (1 - \frac{2F_ц \cos\varphi}{F_{гр}})$$

или

$$F_{\text{тяж}} \approx F_{\text{гр}}\sqrt{(1-\frac{2F_{\text{ц}}\cos\varphi}{F_{\text{гр}}})}\,. \tag{13}$$

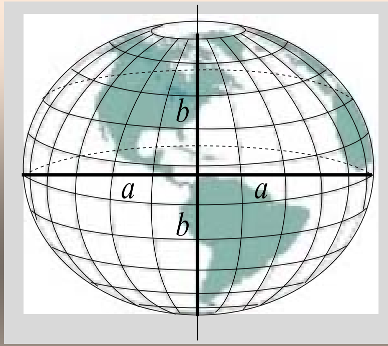


Рис. 4. Сжатие Земли у полюсов: *a* – экваториальная полуось; *b* – полярная полуось

Таким образом, из выражения (13) следует, что вращение Земли оказывает влияние на величину силы тяжести. При этом ***сила тяжести отличается от гравитационной силы по величине и направлению***, однако данное отличие является незначительным**.**

Фактически Земля имеет форму эллипсоида вращения, сплюснутого у полюсов. Меридианы Земли являются эллипсами, которые у полюсов вблизи малой оси 2*b* изогнуты слабее, чем у экватора вблизи большой оси 2*a* (рис. 4).

***Сжатие земного эллипсоида*** $\boldsymbol{\alpha}$ показывает, на какую долю малая (полярная) полуось *b* короче большой (экваториальной) полуоси *a*:

$$\alpha = 1 - \frac{b}{a}\,.$$

Значения полуосей *a* и *b* определены по результатам наблюдений искусственных спутников Земли и составляют: $a = 6378140$ м, $b = 6356755$ м. Тогда сжатие земного эллипсоида $\alpha \approx \frac{1}{298}$. По данным для величин полуосей можно определить объем Земли:

$$V = 4/3\pi a^2 b = 1{,}0832\cdot10^{21}\ \text{м}^3.$$

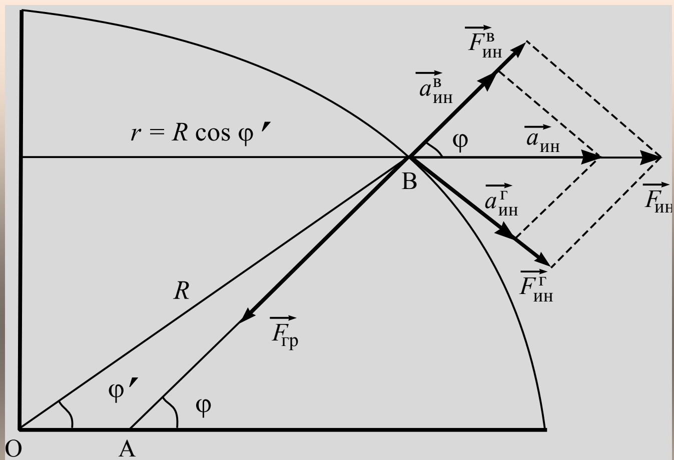


Рис. 5. Разложение центробежной силы инерции $\vec{F}_{\text{ин}}$ и центробежного ускорения $\vec{a}_{\text{ин}}$ на вертикальные и горизонтальные составляющие

Для эллипсоидной Земли сила гравитации во всех внешних точках и на поверхности Земли направлена по линии *AB*, называемой ***вертикальной линией*** (рис. 5). Сила гравитации направлена к центру только на полюсах и экваторе. В промежуточных широтах направление силы гравитации не проходит через центр (рис.5) и больше всего отклоняется в точках, лежащих на широте ±45$^{\text{o}}$. На данной широте направление гравитационной силы при сжатии эллипсоида $\alpha$ отклоняется от направления к центру на угол $\alpha/2$, что составляет 5,7 '.

***Геоцентрической широтой*** $\varphi'$ называется угол, который составляет направление от данной точки к центру Земли с плоскостью экватора.

***Географическая широта*** $\varphi$ — угол, который составляет с плоскостью экватора вертикальная линия, проходящая через данную точку.

Геоцентрическая широта отличается от географической широты на величину $\varphi' - \varphi$, зависящую от сжатия Земли $\alpha$. На экваторе и полюсах $\varphi' - \varphi = 0$. Различие между геоцентрической и географической широтами достигает наибольшего значения при $\varphi = \pm 45^\circ$ и составляет 11,6 '.

Поскольку Земля вращается вокруг своей оси, то система отсчета, связанная с ее поверхностью, является неинерциальной. Центробежная сила инерции $\vec{F}_{\text{ин}}$ и центробежное ускорение $\vec{a}_{\text{ин}}$ направлены от оси вращения (рис. 5).

Центробежную силу инерции $\vec{F}_{\text{ин}}$ разложим на вертикальную $\vec{F}_{\text{ин}}^{\text{в}}$ и горизонтальную $\vec{F}_{\text{ин}}^{\text{г}}$ составляющие:

$$\vec{F}_{\text{ин}} = \vec{F}_{\text{ин}}^{\text{в}} + \vec{F}_{\text{ин}}^{\text{г}}.$$

Из рис. 5 видно, что составляющая $\vec{F}_{\text{ин}}^{\text{в}}$ направлена против силы тяготения $\vec{F}_{\text{гр}}$.

Модуль центробежного ускорения

$$a_{\text{ин}} = \omega^2 r = \omega^2 R \cos\varphi',$$

где $r$ — радиус параллели.

Центробежное ускорение $\vec{a}_{\text{ин}}$ может быть разложено на вертикальную $\vec{a}_{\text{ин}}^{\text{в}}$ и горизонтальную $\vec{a}_{\text{ин}}^{\text{г}}$ составляющие:

$$\vec{a}_{\text{ин}} = \vec{a}_{\text{ин}}^{\text{в}} + \vec{a}_{\text{ин}}^{\text{г}}.$$

При этом

$$a_{\text{ин}}^{\text{в}} = a_{\text{ин}} \cos\varphi = \omega^2 R \cos\varphi' \cos\varphi;$$

$$a_{\text{ин}}^{\text{г}} = a_{\text{ин}} \sin\varphi = \omega^2 R \cos\varphi' \sin\varphi.$$

Учитывая, что разность $\varphi' - \varphi$ мала, полагаем $\varphi' \approx \varphi$ и направление вертикали заменяем направлением к центру земли. Тогда

$$a_{\text{ин}}^{\text{в}} = \omega^2 R \cos^2\varphi; \tag{14}$$

$$a_{\text{ин}}^{\text{г}} = \omega^2 R\cos\varphi\sin\varphi.$$

Из (14) следует, что вертикальная составляющая центробежного ускорения на экваторе $a_{\text{ин}}^{\text{в}} = \omega^2 a$, где $a$ – величина экваториальной полуоси; $a_{\text{ин}}^{\text{в}} = \frac{1}{2}\omega^2 R$ – на широте $\varphi = \pm 45^\circ$ и $a_{\text{ин}}^{\text{в}} = 0$ – на полюсах.

Таким образом, ***вертикальная составляющая центробежной силы инерции*** $\vec{F}_{\text{ин}}^{\text{в}}$ ***уменьшает силу тяготения Земли, а ее горизонтальная составляющая*** $\vec{F}_{\text{ин}}^{\text{г}}$ ***направлена по касательной к поверхности Земли вдоль меридиана к экватору*** (рис. 5)**.**

Уменьшение ***силы тяготения Земли*** на экваторе за счет силы инерции по отношению к полюсам составляет 1/288. Со своей стороны сплюснутость Земли приводит к уменьшению силы тяготения на $\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{298 \cdot 2} = \frac{1}{596}$. ***Эти два влияния в сумме составляют* ≈ 1/200**: на столько ускорение силы тяжести на экваторе меньше, чем на полюсе.

Вращение Земли приводит к тому, что на тела, движущиеся по ее поверхности, действует ***сила Кориолиса***

$$\vec{F}_{\text{к}} = 2m[\vec{v} \times \vec{\omega}],$$

где $m$ – масса тела;

$\vec{v}$ – вектор скорости тела относительно Земли;

$\vec{\omega}$ – вектор угловой скорости вращения Земли.

Вектор угловой скорости $\vec{\omega}$ направлен по оси вращения Земли (рис.6). Сила Кориолиса $\vec{F}_{к}$ перпендикулярна плоскости, в которой лежат вектора $\vec{v}$ и $\vec{\omega}$, и ее направление определяется по правилу буравчика. Модуль силы Кориолиса

$$F_{\text{к}} = 2mv\omega\sin\alpha,$$

где $\alpha$ – угол между векторами $\vec{v}$ и $\vec{\omega}$.

Предположим, что тело движется в северном полушарии вдоль меридиана с юга на север (рис. 6). В данном случае вектор скорости движения тела $\vec{v}$ составляет с вектором угловой скорости $\vec{\omega}$ угол $\alpha < 90°$. Сила Кориолиса направлена по касательной к поверхности Земли вправо относительно движения тела. В южном полушарии при движении тела на юг вектора $\vec{v}$ составляет тупой угол с вектором $\vec{\omega}$, и сила Кориолиса будет направлена влево относительно направления движения тела.

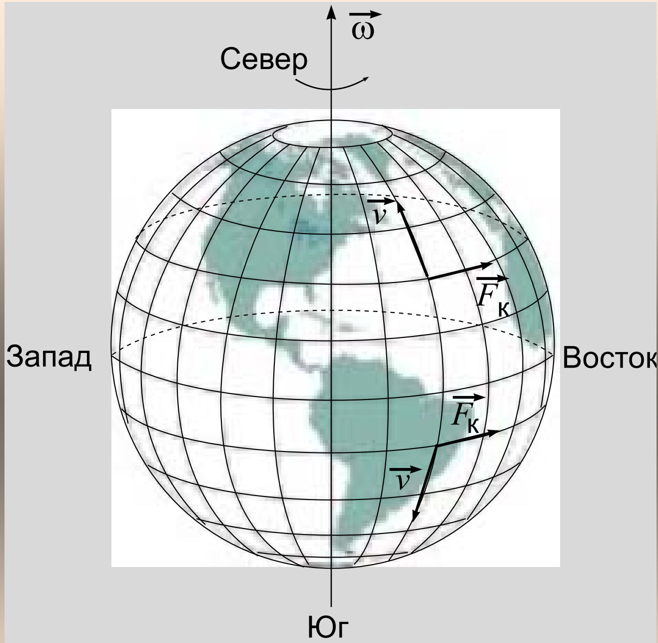


Рис. 6. Направление силы Кориолиса, действующей на тела, движущихся по поверхности Земли

Существование силы Кориолиса проявляется в ряде явлений. Реки, текущие в северном полушарии, стремясь отклониться в своем течении вправо, сильно подмывают правый берег, в южном полушарии – левый берег. Влияние силы Кориолиса проявляется и в движении воздушных масс, что приводит к образованию пассатных ветров и циклонов. Такое же отклонение происходит при полете артиллерийских снарядов и на железных дорогах. Если движение поезда происходит в одном направлении, то в северном полушарии сильнее изнашивается правый рельс, а в южном – левый.

Отклонение свободно падающих тел к востоку от вертикали и отклонение плоскости качаний маятника также происходит под действием силы Кориолиса. Наблюдение отклонения плоскости качаний маятника было впервые проведено Фуко в 1851 году и послужило прямым доказательством существования суточного вращения Земли.

Если на все части тела действуют одинаковые и параллельные силы со стороны однородного гравитационного поля, то под их влиянием тело приходит в движение как единое целое, не испытывая никаких деформаций. Если поле неоднородное, действующие силы неодинаковы и на одни части тела действуют сильнее, а на другие слабее и в строго параллельных направлениях, то помимо общего движения, тело будет испытывать деформацию. Таким образом, при движении в неоднородном поле тяготения в телах возникают силы, стремящиеся деформировать тела. Доказано, что неоднородное поле тяготения стремиться растянуть материальное тело в направлении неоднородности.

В частности, поле тяготения Солнца растягивает Землю вдоль линии, соединяющей их центры. Аналогичный эффект на Землю оказывает и Луна. Величина эффекта деформации зависит не от абсолютной величины силы тяготения, а от изменения силы тяготения в зависимости от расстояния между притягивающимися телами.

В поле шарообразного тела сила гравитации определяется по формуле (9), а модуль изменения силы гравитации в зависимости от расстояния будет

$$\frac{dF}{dR} = G\frac{mM}{R^3}. \tag{15}$$

Из (15) следует, что величина $\frac{dF}{dR}$ обратно пропорциональна кубу расстояния до притягивающего тела. Для полей тяготения Солнца и Луны в центре Земли получаются следующие значения изменения силы гравитации в зависимости от расстояния (величины отнесены к единице массы тела): $G\frac{M_с}{R_с^3} = 0{,}8{\cdot}10^{-13}$ 1/с$^2$ и $G\frac{M_л}{R_л^3} = 1{,}8{\cdot}10^{-13}$ 1/с$^2$, где $M_с$ – масса Солнца; $M_л$ – масса Луны; $R_с$, $R_л$ – расстояния между центрами масс Земли и Солнца, Земли и Луны, соответственно.

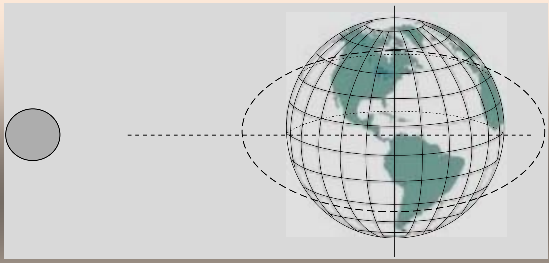

Рис.7. Приливы на Земле, обусловленные полем тяготения Луны

Приведенные числовые значения показывают, что деформирующая сила, действующая на Землю со стороны Луны, превышает действующую силу со стороны Солнца более чем в 2 раза.

Деформирующая сила не изменяет существенно форму твердой оболочки Земли, поскольку малые деформации, возникающие в оболочке, в состоянии компенсировать силу деформации.

Однако в океанах вдоль неоднородности гравитационного поля форма поверхности воды изменяется существенно. Вдоль неоднородности поля возникают горбы, а в перпендикулярном направлении уровень океана понижается, и возникают впадины (рис. 7).

Поскольку Земля совершает вращение, горбы и впадины перемещаются по поверхности Земли, и периодически повышается или понижается уровень воды в океане. У берегов это явление выражается в виде приливов и отливов. Проведенные расчеты при условии, что вся поверхность Земли покрыта водой, показали, что во время лунных приливов и отливов уровень воды может максимально изменяться на 0,56 м. Фактически, уровень приливов и отливов колеблется от 0 до 20 м. В течение суток в данном месте бывает 2 прилива и 2 отлива.

## Методы определения ускорения свободного падения

Сила тяжести, с которой тело притягивается к Земле под действием ее гравитационного поля, сообщает телу ускорение.

***Движение*,** которое совершает тело под действием силы тяжести без учета сил сопротивления, называется ***свободным падением*м.**

***Ускорение свободного падения*** – это ускорение, сообщаемое телу силой тяжести.

Наиболее точные измерения ускорения свободного падения выполняются с помощью косвенных методов. Многие из них основаны на использовании формул для периода колебаний математического и физического маятников.

***Математическим маятником*** называется материальная точка, подвешенная на невесомой, нерастяжимой нити и совершающая колебание в вертикальной плоскости под действием силы тяжести.

Период колебаний математического маятника

$$T = 2\pi\sqrt{l/g}\,, \tag{16}$$

где $l$ – длина маятника;

$g$ – ускорение свободного падения.

Ускорение $g$ можно вычислить, измерив $T$ и $l$. Погрешность определения $g$ в этом случае связана с тем, что реальный маятник, используемый в лабораторных условиях, может только с некоторым приближением рассматриваться как математический: чем больше $l$, тем точнее измерения.

***Физическим маятником*** называется абсолютно твердое тело, совершающее колебания под действием силы тяжести вокруг горизонтальной оси, не проходящей через его центр тяжести.

Период колебаний физического маятника

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgl}} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\,, \tag{17}$$

где $J$ – момент инерции маятника относительно оси (точки подвеса);

$m$ – его масса;

$l$ – расстояние от центра тяжести до оси качаний.

Величину $L = J/(ml)$ называют ***приведенной длиной физического маятника, которая равна длине такого математического маятника, период колебаний которого совпадает с периодом данного физического маятника.***

Зная $T$, $m$, и $J$ по формуле (17) можно найти ускорение свободного падения $g$. Массу маятника и период его колебаний можно измерить с очень высокой точностью, большие затруднения вызывает точность измерения момента инерции. Указанного ***недостатка лишен метод оборотного маятника***, который позволяет исключить момент инерции из расчетной формулы для $g$.

## Метод оборотного маятника

Метод оборотного маятника основан на том, что во всяком физическом маятнике можно найти такие две точки, что при последовательном подвешивании маятника за одну или другую, период колебаний его остается одним и тем же. Расстояние между этими точками представляет собой приведенную длину данного маятника.

Оборотный маятник (рис.8) состоит из металлического стержня $A$, по которому могут передвигаться и закрепляться в том или ином положении грузы $B_1$ и $B_2$ и опорные призмы $C_1$ и $C_2$. Центр масс маятника – точка $O$. Период колебаний маятника можно менять, перемещая грузы или опорные призмы. Маятник подвешивают вначале на призме $C_1$ и измеряют период его колебаний $T_1$.

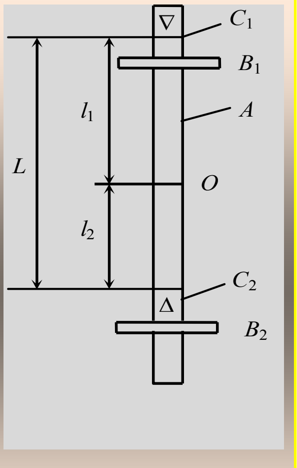


Рис. 8. Оборотный маятник

Затем маятник подвешивают на призме $C_2$ и измеряют период колебаний $T_2$.

Допустим, имеется такое положение грузов, при котором периоды колебаний маятников $T_1$ и $T_2$ около призм $C_1$ и $C_2$ совпадают, т.е.

$$T_1 = T_2 = T = 2\pi\sqrt{\frac{J_1}{mgl_1}} = 2\pi\sqrt{\frac{J_2}{mgl_2}}. \qquad (18)$$

Из (18) следует

$$J_1 = mgl_1\frac{T^2}{4\pi^2}; \quad J_2 = mgl_2\frac{T^2}{4\pi^2}. \qquad (19)$$

По теореме Штейнера

$$J_1 = J_0 + ml_1^2; \quad J_2 = J_0 + ml_2^2, \qquad (20)$$

где $J_0$ – момент инерции маятника относительно оси, проходящей через его центр масс.

С учетом формул (19) и (20) можно записать

$$J_1 - J_2 = m\left(l_1^2 - l_2^2\right)$$

или

$$\frac{T^2mgl_1}{4\pi^2} - \frac{T^2mgl_2}{4\pi^2} = m\left(l_1^2 - l_2^2\right).$$

Тогда

$$\frac{T^2g}{4\pi^2} = l_1 + l_2;$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l_1 + l_2}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}. \tag{21}$$

Формула (21) аналогична формуле (17) для математического маятника. Следовательно, $L = l_1 + l_2$ – приведенная длина физического маятника, которая, как видно из рис.7, равна расстоянию между призмами $C_1$ и $C_2$, когда $T_1 = T_2$. Это расстояние легко может быть измерено с большой точностью.

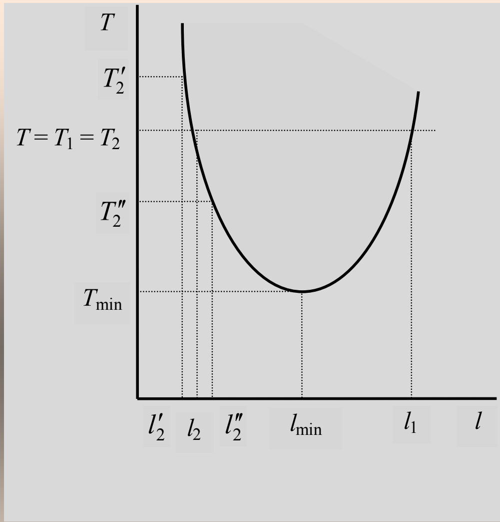


Рис. 9. Зависимость периода $T$ от расстояния $l$ между центром масс и осью качаний маятника

Итак, измерение ускорения свободного падения $g$ с помощью оборотного маятника сводится к измерению периодов $T_1$ и $T_2$ относительно призм $C_1$ и $C_2$, достижению их равенства (с помощью перемещения призм), измерению расстояния $L = l_1 + l_2$ между призмами, затем $g$ вычисляется по формуле

$$g = 4\pi^2 L / T^2.$$

Чтобы пояснить, как достичь равенства периодов $T_1$ и $T_2$, исследуем, как зависит период колебаний от расстояния $l$ между центром масс и осью качаний маятника. Согласно формулам (17) и (20), имеем

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgl}} = 2\pi\sqrt{\frac{J_0 + ml^2}{mgl}}.$$

Для того, чтобы определить при каком значении $l$ период $T$ будет минимальным, необходимо найти производную и приравнять ее к нулю: $\frac{dT}{dl} = 0$. Имеем

$$\frac{\dfrac{2ml \cdot mgl - mg(J_0 + ml^2)}{(mgl)^2}}{4\pi\sqrt{\dfrac{J_0 + ml^2}{mgl}}} = \frac{m^2l^2g - mgJ_0}{4\pi(mgl)^2\sqrt{\dfrac{J_0 + ml^2}{mgl}}} =$$

$$= \frac{mg(ml^2 - J_0)}{4\pi(mgl)^{3/2}\sqrt{J_0 + ml^2}} = 0,$$

;

или

$$mg(ml^2 - J_0) = 0. \tag{22}$$

Из (22) следует, что период $T$ минимален при $l_{min} = \sqrt{J_0 / m}$ (рис. 9). При $T > T_{min}$ одно и то же значение $T$ достигается при двух разных значениях $l$, одно из них больше, а другое меньше $l_{min}$. Эти значения $l_1$ и $l_2$ и входят в формулу (21).

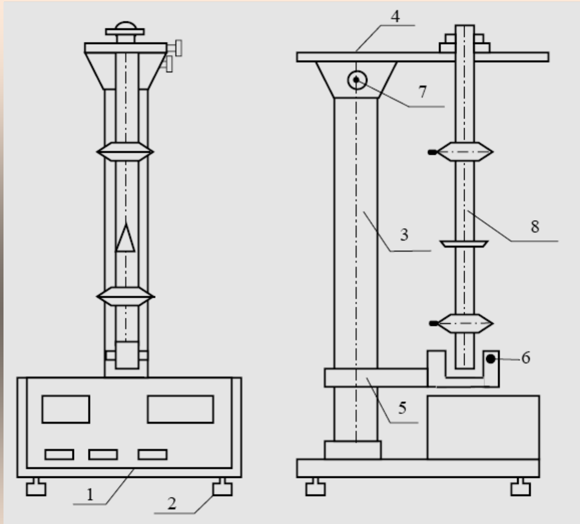


Рис.10. Вид экспериментальной установки

Вначале измеряется период колебаний маятника $T_1$ относительно призмы $C_1$. Затем маятник переворачивается и измеряется период колебаний $T_2$ относительно призмы $C_2$. Если при этом получится $T_2' > T_1$, то этому будет соответствовать $l_2' < l_2$. Для того, чтобы приблизить $T_2''$ и $T_1$, надо увеличить $l_2'$. Для этого надо призму $C_2$ передвинуть от середины стержня к краю. Если получится $T_2'' < T_1$, то призму $C_2$ надо будет передвинуть к середине стержня.

Анализ точности измерения $g$ методом оборотного маятника показывает, что погрешность измерения слабо зависит от точности, с которой выполняется равенство $T_1 = T_2$. Достаточно добиться того, чтобы периоды оказались равны друг другу с точностью 0,5 %.

Кроме того, для получения достаточной точности измерения отношение $l_1/l_2$ не должно быть ни слишком малым, ни слишком большим, желательно, чтобы выполнялось условие $1{,}5 < l_1 / l_2 < 3$.

Экспериментальная установка представлена на рис.10. Оборотный маятник выполнен в виде стального стержня 8, на котором крепятся две призмы и два диска. Нижний кронштейн 5 вместе с фотометрическим датчиком 6 можно перемещать вдоль стержня. Фотоэлектрический датчик соединен с универсальным электронным секундомером 1, который измеряет число колебаний $n$ и общее время этих колебаний $t$. Период колебаний $T = t/n$.

Отвинчивая винт 7, верхний кронштейн 4 можно поворачивать вокруг колонки 3. Положение установки регулируется с помощью ножек 2.

## Порядок выполнения работы

Измерения с оборотным маятником проводятся в следующем порядке:

1) поместить над датчиком оборотный маятник, повернув верхний кронштейн на 180°;

2) зафиксировать диски на стержне, чтобы один из них находился вблизи конца стержня, а другой вблизи его середины;

3) закрепить маятник на верхнем кронштейне на призме, находящейся вблизи конца стержня, так чтобы конец стержня пересекал оптическую ось фотоэлектрического датчика;

4) отклонить маятник примерно на 5° от положения равновесия и придерживать его рукой;

5) отпустить маятник (маятник придет в движение);

6) измерить время 10 колебаний маятника $t$;

7) определить период колебаний оборотного маятника $T_1 = t/n$;

8) снять маятник и закрепить его на второй призме;

9) измерить период $T_2$, повторив пп.4-7;

10) сравнить периоды $T_2$ и $T_1$; если $T_2 > T_1$, вторую призму переместить в направлении диска, находящегося в конце стержня; если $T_2 < T_1$, переместить ее в направлении середины стержня (положение дисков и первой призмы не менять);

11) снова измерить период $T_2$ и сравнить его с величиной $T_1$; менять положение второй призмы до тех пор, пока значение периода $T_2$ не станет равным значению периода $T_1$ с точностью до 0,5 %;

12) определить приведенную длину оборотного маятника $L$, измеряя расстояние между призмами (по числу нарезок, которые нанесены через каждые 10 мм).

13) вычислить ускорение свободного падения по формуле

$$g = 4\pi^2 L / T^2;$$

14) вычислить абсолютные погрешности для периода $\Delta T = \Delta_t / n$ (здесь $\Delta_t$ – погрешность измерения времени, оцениваемая исходя из точности прибора) и ускорения

$$\Delta_g = g\left(\frac{\Delta L}{L} + 2\frac{\Delta T}{T}\right),$$

где $\Delta_L$ – погрешность измерения длины, оцениваемая по цене деления измерительной линейки.

15) записать окончательный результат в виде $g \pm \Delta_g$.

## Контрольные вопросы

1. Назовите свойства гравитационного взаимодействия.
2. Сформулируйте закон всемирного тяготения. Каков физический смысл гравитационной постоянной?
3. Какое гравитационное поле называется стационарным, центральным, потенциальным, однородным?
4. Дайте определения основным характеристикам гравитационного поля: потенциалу и напряженности. Какова связь напряженности и потенциала поля тяготения?

5. Докажите, что гравитационное поле потенциально. Сформулируйте критерий потенциальности гравитационного поля.

6. Сформулируйте принципы суперпозиции для напряженности и потенциала гравитационного поля?

7. Какое влияние оказывают на гравитационную силу вращение Земли и эллипсоидность ее формы?

8. Как вычисляется сила Кориолиса, в каких природных явлениях проявляется ее действие?

9. С чем связано явление приливов и отливов на Земле?

10. Что такое математический маятник, чему равен его период?

11. Дайте определение физического маятника. Что называют приведенной длиной физического маятника?

12. Как с помощью маятников можно измерить ускорение свободного падения?

13. С чем связана погрешность определения $g$ с помощью математического и физического маятников?

14. В чем заключается метод оборотного маятника для определения ускорения свободного падения?

## Литература


1. Детлаф, А.А. Курс физики / А.А. Детлаф, Б.М. Яворский. – М., 1979.

2. Савельев, И.В. Курс общей физики. Механика. Молекулярная физика и термодинамика / И.В. Савельев. – М., 2003.

3. Михайлов, А.А. Земля и ее вращение / А.А. Михайлов. – М., 1984.