МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ
РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Белорусский национальный
технический университет

Кафедра «Высшая математика № 1»

МАТЕМАТИКА

Практикум

Часть 2

Минск
БНТУ
2015

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
Белорусский национальный технический университет

Кафедра «Высшая математика № 1»

МАТЕМАТИКА

Практикум для студентов
инженерно-технических специальностей

В 4 частях

Часть 2

*Рекомендовано учебно-методическим объединением
в области автоматизации технологических процессов,
производств и управления*

Минск
БНТУ
2015

УДК 519.2(075.8)
ББК 22.1я7
М34

Составители части:
Е. А. Бричикова, *Г. К. Воронович*, *И. Н. Катковская*,
Г. И. Лебедева, *И. М. Мартыненко*, *Е. А. Федосик*,
Н. И. Чепелев, *Т. И. Чепелева*

Рецензенты:
кандидат физико-математических наук, доцент *А. Н. Исаченко* (БГУ);
доцент *Л. А. Хвощинская* (БГАТУ)

Математика : практикум для студентов инженерно-технических
М34 специальностей : в 4 ч. / сост.: Е. А. Бричикова [и др.]. – Минск : БНТУ, 2014– . – Ч. 2. – 2015. – 138 с.
ISBN 978-985-550-509-0 (Ч. 1).

Практикум подготовлен в соответствии с действующей программой дисциплины «Математика» для студентов инженерно-технических специальностей БНТУ.

Практикум состоит из 28 занятий по разделам «Неопределенный и определенный интеграл», «Интеграл по фигуре», «Элементы теории поля» и «Дифференциальные уравнения». Каждое занятие содержит задания для аудиторной и самостоятельной работы студентов. Задания снабжены ответами, что позволит студентам проконтролировать правильность решений задач. Издание содержит также типовые расчеты по указанным разделам, которые могут быть использованы и для индивидуальных заданий студентов, и для проведения текущего контроля знаний.

Часть 1 вышла в 2014 г.

УДК 519.2(075.8)
ББК 22.1я7

ISBN 978-985-550-509-0 (Ч. 2)
ISBN 978-985-550-341-6

ОГЛАВЛЕНИЕ

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Занятие 1. Неопределенный интеграл. Метод непосредственного интегрирования

Аудиторные задания

1.1. Пользуясь свойствами неопределенного интеграла и таблицей основных неопределенных интегралов, найти следующие интегралы:

1) $\int\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-1\right)\mathrm{d}x$; **2)** $\int\dfrac{\left(1+4\sqrt[3]{x}\right)^2}{x}\mathrm{d}x$; **3)** $\int\dfrac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x\cos^2 x}$;

4) $\int\dfrac{1+3x^2}{x^2\left(1+2x^2\right)}\mathrm{d}x$; **5)** $\int\sin^2\dfrac{x}{2}\mathrm{d}x$; **6)** $\int\dfrac{4x^2+2x-3}{x^2}\mathrm{d}x$;

7) $\int\sin 3x\cos x\mathrm{d}x$; **8)** $\int\left(2x+3\right)^3\mathrm{d}x$; **9)** $\int\cos 4x\cos 8x\mathrm{d}x$;

10) $\int\dfrac{1+\cos^2 x}{1-\cos 2x}\mathrm{d}x$; **11)** $\int 2^x\left(1+\dfrac{2^{-x}}{\sqrt[4]{x^3}}\right)\mathrm{d}x$; **12)** $\int\dfrac{5-\sin^3 x}{\sin^2 x}\mathrm{d}x$;

13) $\int\left(\dfrac{3}{1+x^2}-\dfrac{7}{\sqrt{1-x^2}}\right)\mathrm{d}x$; **14)** $\int\dfrac{x^2}{x^2-1}\mathrm{d}x$;

15) $\int\left(\cos\dfrac{x}{2}-\sin\dfrac{x}{2}\right)^2\mathrm{d}x$; **16)** $\int\dfrac{x^4}{x^2+1}\mathrm{d}x$; **17)** $\int e^x\left(5-\dfrac{3e^{-x}}{x^4}\right)\mathrm{d}x$;

18) $\int\left(1-\sqrt{x}\right)^3\mathrm{d}x$; **19)** $\int\left(\sqrt{x}-\dfrac{3}{\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x$;

20) $\int\dfrac{6x^4-8x^3-4x^2+3x-5}{x^2}\mathrm{d}x$; **21)** $\int\left(\sqrt{x^5}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)\mathrm{d}x$;

22) $\int\mathrm{e}^{-x}\left(1+\dfrac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{1-x^2}}\right)\mathrm{d}x$; **23)** $\int 3^x\left(2-\dfrac{3^{-x}}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x$;

24) $\int\left(\dfrac{3}{\sqrt{1-x^2}}-\dfrac{5}{\cos^2 x}\right)\mathrm{d}x$; **25)** $\int\dfrac{3\sqrt{1-x^2}+2\cos^2 x}{\sqrt{1-x^2}\cos^2 x}\mathrm{d}x$;

26) $\int\dfrac{6x+7+7x^2}{x^3+x}\mathrm{d}x$; **27)** $\int(\operatorname{ch}x+\operatorname{sh}x)\,\mathrm{d}x$; **28)** $\int\dfrac{2+7\operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{sh}^2 x}\mathrm{d}x$.

Домашние задания

1.2. Пользуясь таблицей основных неопределенных интегралов и свойствами неопределенного интеграла, найти следующие интегралы:

1) $\int\left(x^2-4\right)(x+2)\,\mathrm{d}x$; **2)** $\int\dfrac{9x^5+12x^4-6x^3+7x^2-4x+2}{x^3}\mathrm{d}x$;

3) $\int\operatorname{tg}^2 x\mathrm{d}x$; **4)** $\int\mathrm{e}^x\left(3+5\mathrm{e}^{-x}\operatorname{ctg}^2 x\right)\mathrm{d}x$;

5) $\int\cos^2\dfrac{x}{2}\mathrm{d}x$; **6)** $\int\left(\dfrac{2}{x^3}-\dfrac{4}{x^5}+\dfrac{6}{x^7}\right)\mathrm{d}x$;

7) $\int\dfrac{\left(1-\sqrt{x}\right)^3}{x}\mathrm{d}x$; **8)** $\int\dfrac{7+3\cos^2 x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$;

9) $\int\dfrac{x^2}{x^2+1}\mathrm{d}x$; **10)** $\int\dfrac{x^4}{x^2-1}\mathrm{d}x$.

Ответы:

1.1. 1) $\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{2}{3}\sqrt{x^3}-2x+C$; **2)** $\ln|x|+24\sqrt[3]{x}+24\sqrt[3]{x^2}+C$;

3) $\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x+C$; **4)** $-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\sqrt{2}x+C$; **5)** $\dfrac{x}{2}-\dfrac{\sin x}{2}+C$;

6) $4x+2\ln|x|+\dfrac{3}{x}+C$; **7)** $-\dfrac{1}{4}\cos 2x-\dfrac{1}{8}\cos 4x+C$;

8) $2x^4+12x^3+27x^2+27x+C$; **9)** $\dfrac{1}{8}\sin 4x+\dfrac{1}{24}\sin 12x+C$;

10) $-\operatorname{ctg} x-\frac{1}{2}x+C$; **11)** $\frac{2^x}{\ln 2}+4\sqrt[4]{x}+C$;

12) $-5\operatorname{ctg} x+4\cos x+C$; **13)** $3\operatorname{arctg} x-7\arcsin x+C$;

14) $x+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$; **15)** $x+\cos x+C$; **16)** $\frac{x^3}{3}-x+\operatorname{arctg} x+C$;

17) $5e^x+\frac{1}{x^3}+C$; **18)** $x-2x^{3/2}+\frac{3}{2}x^2-\frac{2}{5}x^{5/2}+C$;

19) $\frac{2}{3}\sqrt{x^3}-6\sqrt{x}+C$; **20)** $2x^3-4x^2-4x+3\ln|x|+\frac{5}{x}+C$;

21) $\frac{2}{7}\sqrt{x^7}+3\sqrt[3]{x}+C$; **22)** $-e^{-x}+\arcsin x+C$;

23) $\frac{2\cdot 3^x}{\ln 3}-\operatorname{arctg} x+C$; **24)** $3\arcsin x-5\operatorname{tg} x+C$;

25) $3\operatorname{tg} x+2\arcsin x+C$; **26)** $6\operatorname{arctg} x+7\ln|x|+C$;

27) $\operatorname{ch} x+\operatorname{sh} x+C$ **;** **28)** $-2\operatorname{cth} x+7x+C$ **.**

1.2. 1) $\frac{x^4}{4}+\frac{2}{3}x^3-2x^2-8x+C$;

2) $3x^3+6x^2-6x+7\ln|x|+\frac{4}{x}-\frac{1}{x^2}+C$; **3)** $\operatorname{tg} x-x+C$;

4) $3e^x-5\operatorname{ctg} x-5x+C$; **5)** $\frac{x}{2}+\frac{\sin x}{2}+C$; **6)** $-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}-\frac{1}{x^6}+C$;

7) $\ln|x|-6\sqrt{x}+3x-\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+C$; **8)** $7\operatorname{tg} x+3x+C$;

9) $x-\operatorname{arctg} x+C$; **10)** $\frac{x^3}{3}+x+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C.$

Занятие 2. Интегрирование с помощью замены переменной. Метод подстановки

Аудиторные задания

2.1. Найти неопределенные интегралы подведением (поднесением) под знак дифференциала:

1) $\int \cos x 2^{\sin x}\mathrm{d}x$; **2)** $\int \frac{\mathrm{d}x}{x(1+2\ln x)^4}$; **3)** $\int \frac{2x+3}{x^2+3x+2}\mathrm{d}x$;

4) $\int \frac{4x+4}{x^2+2x}\mathrm{d}x$; **5)** $\int \frac{\mathrm{tg}\, x\mathrm{d}x}{\cos^2 x}$; **6)** $\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)\mathrm{arctg}\, x}$;

7) $\int x\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$; **8)** $\int \frac{\sin^3 2x}{\cos^4 2x}\mathrm{d}x$; **9)** $\int \frac{dx}{x\ln 4x}$**;** **10)** $\int \frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^4}}$.

2.2. Найти интегралы, применив метод подстановки:

1) $\int x(3x+4)^5\mathrm{d}x$; **2)** $\int x\sqrt{2x+3}\mathrm{d}x$; **3)** $\int \frac{\ln x\sqrt{2+\ln^2 x}}{x}\mathrm{d}x$;

4) $\int \frac{\sin 2x}{4+\sin^2 x}\mathrm{d}x$; **5)** $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x-1}}$; **6)** $\int \frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{x-1}}$;

7) $\int \frac{\sin x\mathrm{d}x}{\sqrt{1+2\cos x}}$; **8)** $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-a^2}}$; **9)** $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}}$;

10) $\int \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$; **11)** $\int \frac{2^{\frac{1}{x}}}{x^2}\mathrm{d}x$; **12)** $\int \frac{\cos(\ln x)}{x}\mathrm{d}x$;

13) $\int \frac{\cos\frac{x}{\sqrt{2}}}{2-\sin\frac{x}{\sqrt{2}}}\mathrm{d}x$; **14)** $\int \frac{\mathrm{d}x}{3^x+1}$; **15)** $\int \frac{(2x+1)\mathrm{d}x}{\sqrt{x+1}}$;

16) $\int \frac{\ln x+1}{x\ln x}\mathrm{d}x$; **17)** $\int \frac{\sin x + x\cos x}{x^2\sin^2 x}\mathrm{d}x$; **18)** $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+x^2}}$;

19) $\int 4^{x\ln x}(1+\ln x)\mathrm{d}x$; **20)** $\int \frac{2x-\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$.

Домашние задания

2.3. Найти неопределенные интегралы подведением (поднесением) под дифференциал:

1) $\int e^{4x-3}dx$; **2)** $\int \frac{\cos 2x}{1+\sin^2 2x}dx$; **3)** $\int x^2 e^{-x^3}dx$; **4)** $\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln 2x}}$;

5) $\int x\sqrt{x^2-4}\,dx$; **6)** $\int \frac{xdx}{x^2+7}$; **7)** $\int \frac{3^x dx}{1+9^x}$; **8)** $\int x^2\cos(3x^3+1)dx$.

2.4. Найти неопределенные интегралы методом подстановки:

1) $\int \frac{4\sin 2x\,dx}{4+\sin^2 x}$; **2)** $\int \frac{\ln x+1}{1+x\ln x}dx$; **3)** $\int \frac{dx}{1+e^x}$;

4) $\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}}dx$; **5)** $\int \frac{x(2\ln x+1)}{4+x^2\ln x}dx$; **6)** $\int \frac{2^{\frac{1}{x^2}}}{x^3}dx$;

7) $\int x(4x+5)^3\,dx$; **8)** $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-4\ln^2 x}}$.

Ответы:

2.1. 1) $\frac{2^{\sin x}}{\ln 2}+C$; **2)** $-\frac{1}{6(1+2\ln x)^3}+C$; **3)** $\ln\left|x^2+3x+2\right|+C$;

4) $2\ln\left|x^2+2x\right|+C$; **5)** $\frac{\mathrm{tg}^2 x}{2}+C$; **6)** $\ln\left|\mathrm{arctg}\,x\right|+C$;

7) $-\frac{1}{2}e^{-x^2}+C$; **8)** $\frac{1}{6\cos^3 2x}-\frac{1}{2\cos 2x}+C$; **9)** $\ln\left|\ln 4x\right|+C$;

10) $\frac{1}{2}\arcsin x^2+C$.

2.2. 1) $\frac{(3x+4)^7}{63}-\frac{2(3x+4)^6}{27}+C$; **2)** $\frac{(2x+3)^{5/2}}{10}-\frac{(2x+3)^{3/2}}{2}+C$;

3) $\frac{1}{3}(2+\ln^2 x)^{\frac{3}{2}}+C$; **4)** $\ln\left|4+\sin^2 x\right|+C$; **5)** $2\,\mathrm{arctg}\sqrt{x-1}+C$;

6) $\frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3}+2\sqrt{x-1}+C$; **7)** $-\sqrt{1+2\cos x}+C$;

8) $-\frac{1}{a}\arcsin\frac{a}{x}+C$; **9)** $\ln\left|\frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1}\right|+C$; **10)** $2e^{\sqrt{x}}+C$;

11) $-\frac{2^{\frac{1}{x}}}{\ln 2}+C$; **12)** $\sin(\ln x)+C$; **13)** $-\sqrt{2}\ln\left|2-\sin\frac{x}{\sqrt{2}}\right|+C$;

14) $\frac{1}{\ln 3}\ln\left|\frac{3^x}{3^x+1}\right|+C$; **15)** $\frac{4}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}-2(x+1)^{\frac{1}{2}}+C$;

16) $\ln\left|x\ln x\right|+C$; **17)** $-\frac{1}{x\sin x}+C$; **18)** $-\ln\left|\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\right|+C$;

19) $\frac{4^{x\ln x}}{\ln 4}+C$; **20)** $-2\sqrt{1-x^2}+\arccos^2 x+C$.

2.3. 1) $\frac{1}{4}e^{4x-3}+C$; **2)** $\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\sin 2x+C$; **3)** $-\frac{1}{3}e^{-x^3}+C$;

4) $2\sqrt{\ln 2x}+C$; **5)** $\frac{1}{3}(x^2-4)^{\frac{3}{2}}+C$; **6)** $\frac{1}{2}\ln\left|x^2+7\right|+C$;

7) $\frac{1}{\ln 3}\mathrm{arctg}\,3^x+C$; **8)** $\frac{1}{9}\sin(3x^3+1)+C$.

2.4. 1) $4\ln\left|4+\sin^2 x\right|+C$; **2)** $\ln\left|1+x\ln x\right|+C$; **3)** $x-\ln\left|1+e^x\right|+C$;

4) $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-x+4\sqrt{x}-4\ln\left|\sqrt{x}+1\right|+C$; **5)** $\ln\left|4+x^2\ln x\right|+C$;

6) $-\frac{1}{2\ln 2}2^{\frac{1}{x^2}}+C$; **7)** $\frac{(4x+5)^5}{80}-\frac{5(4x+5)^4}{64}+C$;

8) $\frac{1}{2}\arcsin 2\ln x+C$.

Занятие 3. Интегрирование по частям в неопределенном интеграле

Аудиторные задания

3.1. Методом интегрирования по частям найти следующие неопределенные интегралы:

1) $\int(2x+3)\mathrm{e}^{4x}\mathrm{d}x$; **2)** $\int\sqrt{x}\ln 4x\mathrm{d}x$; **3)** $\int x\,\mathrm{arctg}\,2x\mathrm{d}x$;

4) $\int\left(x^2+1\right)\cos(3x+1)\mathrm{d}x$; **5)** $\int\mathrm{e}^{-x}\cos 2x\mathrm{d}x$; **6)** $\int\ln^2 x\mathrm{d}x$;

7) $\int\sin(\ln x)\mathrm{d}x$; **8)** $\int\frac{\ln x}{x^3}\mathrm{d}x$; **9)** $\int\frac{\arcsin x\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x}}$; **10)** $\int x^2 3^x\mathrm{d}x$;

11) $\int\frac{\arcsin\sqrt{x}\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x}}$; **12)** $\int(3x+1)\cos^2 4x\mathrm{d}x$; **13)** $\int x^2\ln(1+x)\,dx$ **;**

14) $\int\sqrt{a^2+x^2}\mathrm{d}x$; **15)** $\int\cos\sqrt{x}\mathrm{d}x$; **16)** $\int x^3\sin x^2\mathrm{d}x$;

17) $\int\frac{x\sin x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$; **18)** $\int x\,\mathrm{arcctg}\sqrt{x}\mathrm{d}x$; **19)** $\int\frac{x\mathrm{d}x}{\cos^2 x}$.

Домашние задания

3.2. Найти следующие неопределенные интегралы методом интегрирования по частям:

1) $\int\left(x^2+2x\right)\cos 2x\mathrm{d}x$; **2)** $\int\mathrm{e}^{2x}\sin x\mathrm{d}x$; **3)** $\int\frac{x\cos x}{\sin^2 x}\mathrm{d}x$;

4) $\int\arccos x\mathrm{d}x$; **5)** $\int\mathrm{e}^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$; **6)** $\int x\sin x\cos x\mathrm{d}x$;

7) $\int\frac{x\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$; **8)** $\int x^3\cos 3x\mathrm{d}x$.

Ответы:

3.1. 1) $\frac{1}{4}(2x+3)\mathrm{e}^{4x}-\frac{1}{8}\mathrm{e}^{4x}+C$; **2)** $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\ln 4x-\frac{4}{9}x^{\frac{3}{2}}+C$;

3) $\frac{x^2}{2}\mathrm{arctg}\,2x-\frac{1}{4}x+\frac{1}{8}\mathrm{arctg}\,2x+C$;

4) $\frac{1}{3}\left(x^2+1\right)\sin(3x+1)+\frac{2}{9}x\cos(3x+1)-\frac{2}{27}\sin(3x+1)+C$;

5) $\frac{\mathrm{e}^{-x}}{5}(2\sin 2x-\cos 2x)+C$; **6)** $x\ln^2 x-x\ln x+x+C$;

7) $\frac{x}{2}(\sin\ln x-\cos\ln x)+C;$ **8)** $-\frac{\ln x}{2x^2}-\frac{1}{4x^2}+C;$

9) $2\sqrt{x+1}\arcsin x+4\sqrt{1-x}+C;$ **10)** $3^x\left(\frac{x^2}{\ln 3}-\frac{2x}{\ln^2 3}+\frac{2}{\ln^3 3}\right)+C;$

11) $-2\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x}+2\sqrt{x}+C;$

12) $\frac{3}{4}x^2+\frac{x}{2}+\frac{3x+1}{16}\sin 8x+\frac{3}{128}\cos 8x+C;$

13) $\frac{x^3}{3}\ln(1+x)-\frac{x^3}{9}+\frac{x^2}{6}-\frac{x}{3}+\frac{1}{3}\ln(1+x)+C;$

14) $\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|+C;$

15) $2\sqrt{x}\sin\sqrt{x}+\cos\sqrt{x}+C;$ **16)** $-\frac{x^2}{2}\cos x^2+\frac{1}{2}\sin x^2+C;$

17) $\frac{x}{\cos x}-\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C;$

18) $\frac{x^2}{2}\operatorname{arcctg}\sqrt{x}+\frac{1}{6}\sqrt{x^3}-\frac{1}{2}\sqrt{x}-\frac{1}{2}\operatorname{arcctg}\sqrt{x}+C;$

19) $x\operatorname{tg}x+\ln|\cos x|+C.$

3.2. 1) $\frac{1}{2}(x^2+2x)\sin 2x+\frac{1}{2}(x+1)\cos 2x-\frac{1}{4}\sin 2x+C;$

2) $\frac{e^{2x}}{5}(2\sin x-\cos x)+C;$ **3)** $-\frac{x}{\sin x}+\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C;$

4) $x\arccos x-\sqrt{1-x^2}+C;$ **5)** $2e^{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}-1\right)+C;$

6) $-\frac{x}{4}\cos 2x+\frac{1}{8}\sin 2x+C;$ **7)** $-\sqrt{1-x^2}\arccos x-x+C;$

8) $\frac{x^3}{3}\sin 3x+\frac{x^2}{3}\cos 3x-\frac{2}{9}x\sin 3x-\frac{2}{27}\cos 3x+C.$

Занятие 4. Интегрирование выражений, содержащих квадратный трехчлен в знаменателе

Аудиторные задания

4.1. Найти неопределенные интегралы:

1) $\int \frac{\mathrm{d}x}{4x^2+13}$; **2)** $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-81}$; **3)** $\int \frac{\mathrm{d}x}{5x^2-18}$; **4)** $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-10x+41}$;

5) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+12x+50}$; **6)** $\int \frac{\mathrm{d}x}{2x^2-4x+3}$; **7)** $\int \frac{\mathrm{d}x}{3x^2+6x+5}$;

8) $\int \frac{\mathrm{d}x}{4x^2+8x-3}$; **9)** $\int \frac{x+2}{3x^2+4x-7}\,\mathrm{d}x$; **10)** $\int \frac{6x+5}{3x^2+5x-9}\,\mathrm{d}x$;

11) $\int \frac{x+3}{x^2+2x+5}\,\mathrm{d}x$; **12)** $\int \frac{x-5}{x^2-4x}\,\mathrm{d}x$; **13)** $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+16x+5}}$;

14) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{12+4x+x^2}}$; **15)** $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+5x}}$; **16)** $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{7+4x-2x^2}}$;

17) $\int \frac{(x-6)\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+8x+17}}$; **18)** $\int \frac{(x+7)\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+4x-7}}$; **19)** $\int \frac{(x+3)\mathrm{d}x}{\sqrt{6-3x-x^2}}$;

20) $\int \frac{(4x+5)\mathrm{d}x}{\sqrt{7-4x-2x^2}}$; **21)** $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)\sqrt{x^2-x+2}}$;

22) $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+2)\sqrt{x^2+x+1}}$.

Домашние задания

4.2. Найти неопределенные интегралы:

1) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+64}$; **2)** $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-64}$; **3)** $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-2x-4}$; **4)** $\int \frac{\mathrm{d}x}{3x^2-12x-14}$;

5) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+x+3}$; **6)** $\int \frac{(x+2)\mathrm{d}x}{x^2+2x-3}$; **7)** $\int \frac{(x+3)\mathrm{d}x}{x^2+8x+25}$;

8) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{10-6x-3x^2}}$; 9) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-6x}}$; 10) $\int \frac{(x-3)\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-2x-9}}$;

11) $\int \frac{(x+1)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{10-2x-x^2}}$; 12) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2x^2-4x+5}}$.

Ответы:

4.1. 1) $\frac{1}{2\sqrt{13}}\operatorname{arctg}\frac{2x}{\sqrt{13}}+C$; **2)** $\frac{1}{18}\ln\left|\frac{x-9}{x+9}\right|+C$;

3) $\frac{1}{2\sqrt{90}}\ln\left|\frac{\sqrt{5}x-\sqrt{18}}{\sqrt{5}x+\sqrt{18}}\right|+C$; **4)** $\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x-5}{4}+C$;

5) $\frac{1}{\sqrt{14}}\operatorname{arctg}\frac{x+6}{\sqrt{14}}+C$; **6)** $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\sqrt{2}(x-1)+C$;

7) $\frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}(x+1)}{\sqrt{2}}+C$; **8)** $\frac{1}{4\sqrt{7}}\ln\left|\frac{2(x+1)-\sqrt{7}}{2(x+1)+\sqrt{7}}\right|+C$;

9) $\frac{1}{2}\ln\left|x^2+4x-7\right|+C$; **10)** $\ln\left|3x^2+5x-9\right|+C$;

11) $\frac{1}{2}\ln\left|x^2+2x+5\right|+\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}+C$;

12) $\frac{1}{2}\ln\left|x^2-4x\right|-\frac{3}{4}\ln\left|\frac{x-4}{x}\right|+C$;

13) $\ln\left|x+8+\sqrt{x^2+16x+5}\right|+C$; **14)** $\arcsin\frac{x-2}{4}+C$;

15) $\ln\left|x+\frac{5}{2}+\sqrt{x^2+5x}\right|+C$; **16)** $\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{\sqrt{2}(x-1)}{3}+C$;

17) $\sqrt{x^2+8x+17}-10\ln\left|x+4+\sqrt{x^2+8x+17}\right|+C$;

18) $\sqrt{x^2+4x-7}+5\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x-7}\right|+C$;

19) $-\sqrt{6-3x-x^2}+\frac{3}{2}\arcsin\frac{2x+3}{\sqrt{33}}+C$;

20) $-2\sqrt{7-4x-2x^2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{\sqrt{2}(x+1)}{3}+C$;

21) $-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x+3}{4(x-1)}+\frac{\sqrt{x^2-x+2}}{2(x-1)^2}\right|+C$;

22) $-\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{-x}{2(x+2)}+\sqrt{\frac{x^2+x+1}{3(x+2)^2}}\right|+C$.

4.2. 1) $\frac{1}{8}\operatorname{arctg}\frac{x}{8}+C$; **2)** $\frac{1}{16}\ln\left|\frac{x-8}{x+8}\right|+C$;

3) $\frac{1}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{x-1-\sqrt{5}}{x-1+\sqrt{5}}\right|+C$; **4)** $\frac{\sqrt{3}}{6\sqrt{26}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}(x-2)-\sqrt{26}}{\sqrt{3}(x-2)+\sqrt{26}}\right|+C$;

5) $\frac{2}{\sqrt{11}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{11}}+C$; **6)** $\frac{1}{2}\ln\left|x^2+2x-3\right|+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+3}\right|+C$;

7) $\frac{1}{2}\ln\left|x^2+8x+25\right|-\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x+4}{3}+C$;

8) $\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{\sqrt{3}(x-1)}{\sqrt{13}}+C$; **9)** $\ln\left|x-3+\sqrt{x^2-6x}\right|+C$;

10) $\sqrt{x^2-2x-9}-2\ln\left|x-1+\sqrt{x^2-2x-9}\right|+C$;

11) $-\sqrt{10-2x-x^2}+C$; **12)** $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|x-1+\sqrt{x^2-2x+\frac{5}{2}}\right|+C$.

Занятие 5. Интегрирование рациональных функций

Аудиторные задания

5.1. Записать разложение рациональной дроби на простейшие в неопределенных коэффициентах:

1) $\frac{3x-2}{x^3-2x^2}$; **2)** $\frac{4x+5}{\left(x^2+1\right)^2(x-3)^2}$; **3)** $\frac{x^2+2x+2}{\left(x^2+x+1\right)(x-2)^2}$.

5.2. Найти неопределенные интегралы:

1) $\int \frac{x^3-1}{4x^3-x}\,\mathrm{d}x$; **2)** $\int \frac{x^2-x+4}{(x+1)(x-2)(x-3)}\,\mathrm{d}x$; **3)** $\int \frac{2x^2+3}{x^4-5x^2+6}\,\mathrm{d}x$;

4) $\int \frac{x^6-2x^4+3x^3-9x^2+4}{x^5-5x^3+4x}\,\mathrm{d}x$; **5)** $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3+2x^2+2x}$;

6) $\int \frac{x^3+3}{x^3-8}\,\mathrm{d}x$; **7)** $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\left(x^2+1\right)\left(x^2+4\right)}$; **8)** $\int \frac{x^4+3x+1}{x^4-1}\,\mathrm{d}x$;

9) $\int \frac{6x^4-3x^2+30}{\left(x^2-1\right)(x+2)}\,\mathrm{d}x$; **10)** $\int \left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2 \frac{\mathrm{d}x}{x}$;

11) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\left(x^2+4\right)^2}$; **12)** $\int \frac{(x+3)\,\mathrm{d}x}{\left(x^2+2\right)^2}$.

Домашние задания

5.3. Найти неопределенные интегралы:

1) $\int \frac{6x^4-21x^2+3x+24}{\left(x^2+x-2\right)(x+1)}\,\mathrm{d}x$; **2)** $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3+x^2}$;

3) $\int \frac{x^2-6x+8}{x^3+8}\,\mathrm{d}x$; **4)** $\int \frac{(9x-9)\,\mathrm{d}x}{(x+1)\left(x^2-4x+13\right)}$;

5) $\int \frac{5x\,\mathrm{d}x}{x^4+3x^2-4}$; **6)** $\int \frac{2x^4-3x^3-21x^2-26}{(x+3)\left(x^2-5x+4\right)}\,\mathrm{d}x$.

Ответы:

5.1. 1) $\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x-2}$; **2)** $\frac{A}{x-3}+\frac{B}{(x-3)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+1}+\frac{Ex+F}{\left(x^2+1\right)^2}$;

3) $\frac{A}{x-2}+\frac{B}{(x-2)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+x+1}$.

5.2. 1) $\frac{1}{4}x+\ln|x|-\frac{7}{16}\ln|2x-1|-\frac{9}{16}\ln|2x+1|+C$;

2) $\frac{1}{2}\ln|x+1|-2\ln|x-2|+\frac{5}{2}\ln|x-3|+C$;

3) $\frac{3\sqrt{3}}{2}\ln\left|\frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}\right|-\frac{7}{2\sqrt{2}}\left|\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right|+C$;

4) $\frac{x^2}{2}+\ln|x|+\frac{3}{2}\ln|x-1|+\frac{1}{2}\ln|x+1|-\ln|x-2|+\ln|x+2|+C$;

5) $\frac{1}{2}\ln|x|-\frac{1}{4}\ln\left|x^2+2x+2\right|-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x+1)+C$;

6) $x+\frac{11}{12}\ln|x-2|-\frac{11}{24}\ln\left|x^2+2x+4\right|-\frac{11}{4\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{3}}+C$;

7) $\frac{1}{4}\ln|x|-\frac{1}{6}\ln\left|x^2+1\right|+\frac{1}{24}\ln\left|x^2+4\right|+C$;

8) $x+\frac{5}{4}\ln|x-1|+\frac{1}{4}\ln|x+1|-\frac{3}{4}\ln\left|x^2+1\right|-\operatorname{arctg}x+C$;

9) $3x^2-12x+\ln|x-1|-3\ln|x+1|+2\ln|x+2|+C$;

10) $4\ln|x|-3\ln|x-1|-\frac{9}{x-1}+C$; **11)** $\frac{1}{16}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+\frac{x}{8(x^2+4)}+C$;

12) $\frac{3x-2}{4(x^2+2)}+\frac{3}{4\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}+C$.

5.3. 1) $3x^2-12x+2\ln|x-1|-3\ln|x+1|+10\ln|x+2|+C$;

2) $\ln|x+1|-\ln|x|-\frac{1}{x}+C$;

3) $2\ln|x+2|-\frac{1}{2}\ln\left|x^2-2x+4\right|-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{\sqrt{3}}+C$;

4) $-\ln|x+1|+\frac{1}{2}\ln\left|x^2-4x+13\right|+2\operatorname{arctg}\frac{x-2}{3}+C$;

5) $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x^2-1}{x^2+4}\right|+C$; **6)** $x^2+x+4\ln|x-1|+\ln|x+3|-2\ln|x-4|+C$.

Занятие 6. Интегрирование тригонометрических выражений

Аудиторные задания

6.1. Найти неопределенные интегралы:

1) $\int \sin 5x \sin 3x \mathrm{d}x$; **2)** $\int \cos 8x \cos 3x \mathrm{d}x$; **3)** $\int \sin 6x \cos 4x \mathrm{d}x$;

4) $\int \cos^2 5x \mathrm{d}x$; **5)** $\int \cos^5 3x \mathrm{d}x$; **6)** $\int \sin^4 2x \mathrm{d}x$;

7) $\int \sin^3 2x \cos^5 2x \mathrm{d}x$; **8)** $\int \sin^3 3x \cos^3 3x \mathrm{d}x$; **9)** $\int \cos^2 x \sin^4 x \mathrm{d}x$;

10) $\int \mathrm{tg}^3 2x \mathrm{d}x$; **11)** $\int \mathrm{ctg}^4 x \mathrm{d}x$; **12)** $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} \mathrm{d}x$;

13) $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin^2 x}$; **14)** $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\mathrm{tg}\, x}$; **15)** $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x + 8\sin x \cos x + 12\cos^2 x}$;

16) $\int \frac{\mathrm{d}x}{5+4\sin x}$; **17)** $\int \frac{\mathrm{d}x}{16\sin^2 x + 25\cos^2 x}$; **18)** $\int \frac{\mathrm{d}x}{2+3\sin x + 2\cos x}$;

19) $\int \frac{\sin^3 x \mathrm{d}x}{\cos^{\frac{3}{2}} x}$; **20)** $\int \sqrt{\sin x} \cos^5 x \mathrm{d}x$.

Домашние задания

6.2. Найти неопределенные интегралы:

1) $\int \sin^3 x \cos^8 x \mathrm{d}x$; **2)** $\int \sin^4 3x \cos^2 3x \mathrm{d}x$; **3)** $\int \cos^5 x \sin x \mathrm{d}x$;

4) $\int \sqrt[5]{\sin^3 2x} \cos^3 2x \mathrm{d}x$; **5)** $\int \frac{\mathrm{d}x}{3\cos x - 4\sin x}$;

6) $\int \frac{\mathrm{d}x}{16\sin^2 x - 8\sin x \cos x}$; **7)** $\int \frac{\mathrm{d}x}{2-5\sin x}$; **8)** $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+3\sin^2 x}$;

9) $\int \cos\frac{x}{6} \cos\frac{5x}{6} \mathrm{d}x$; **10)** $\int \mathrm{tg}^4 x \mathrm{d}x$.

Ответы:

6.1. 1) $\frac{\sin 2x}{4}-\frac{\sin 8x}{16}+C;$ **2)** $\frac{\sin 5x}{10}+\frac{\sin 11x}{22}+C;$

3) $-\frac{\cos 2x}{4}-\frac{\cos 10x}{20}+C;$ **4)** $\frac{x}{2}+\frac{\sin 10x}{20}+C;$

5) $\frac{\sin 3x}{3}-\frac{2\sin^3 3x}{9}+\frac{\sin^5 3x}{15}+C;$ **6)** $\frac{3x}{8}-\frac{\sin 4x}{8}+\frac{\sin 8x}{64}+C;$

7) $-\frac{\cos^6 2x}{12}+\frac{\cos^8 2x}{16}+C;$ **8)** $-\frac{\cos 6x}{48}+\frac{\cos^3 6x}{144}+C;$

9) $\frac{x}{16}-\frac{\sin 4x}{64}-\frac{\sin^3 2x}{48}+C;$ **10)** $\frac{1}{4}\operatorname{tg}^2 2x+\frac{1}{2}\ln\left|\cos 2x\right|+C;$

11) $-\frac{\operatorname{ctg}^3 x}{3}+\operatorname{ctg} x+x+C;$ **12)** $\frac{\operatorname{tg}^3 x}{3}+C;$ **13)** $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\sqrt{2}x+C;$

14) $\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg} x+1\right|-\frac{1}{4}\ln\left|\operatorname{tg}^2 x+1\right|+\frac{1}{2}x+C;$ **15)** $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\operatorname{tg} x+2}{\operatorname{tg} x+6}\right|+C;$

16) $\frac{2}{3}\operatorname{arctg}\frac{5\operatorname{tg}\frac{x}{2}+4}{3}+C;$ **17)** $\frac{1}{20}\operatorname{arctg}\frac{4\operatorname{tg}x}{5}+C;$

18) $\frac{1}{3}\ln\left|3\operatorname{tg}\frac{x}{2}+2\right|+C;$ **19)** $\frac{2}{\sqrt{\cos x}}+\frac{2}{3}\sqrt{\cos^3 x}+C;$

20) $\frac{2}{3}\sin^{\frac{3}{2}} x-\frac{4}{7}\sin^{\frac{7}{2}} x+\frac{2}{11}\sin^{\frac{11}{2}} x+C.$

6.2. 1) $-\frac{\cos^9 x}{9}+\frac{\cos^{11} x}{11}+C;$ **2)** $\frac{x}{16}-\frac{\sin 12x}{192}-\frac{\sin^3 6x}{144}+C;$

3) $-\frac{\cos^6 x}{6}+C;$ **4)** $\frac{5}{16}\sqrt[5]{\sin^8 2x}-\frac{5}{36}\sqrt[5]{\sin^{18} 2x}+C;$

5) $\frac{1}{5}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+3}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\frac{1}{3}}\right|+C;$ **6)** $\frac{1}{8}\ln\left|\frac{2\operatorname{tg}x-1}{2\operatorname{tg}x}\right|+C;$

7) $\frac{1}{\sqrt{21}}\ln\left|\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}-5-\sqrt{21}}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}-5+\sqrt{21}}\right|+C$; 8) $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}2\operatorname{tg}x+C$;

9) $\frac{1}{2}\sin x+\frac{3}{4}\sin\frac{2}{3}x+C$; 10) $\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x+x-\operatorname{tg}x+C$.

Занятие 7. Интегрирование иррациональных выражений

Аудиторные задания

7.1. Найти неопределенные интегралы:

1) $\int\frac{\mathrm{d}x}{(5+x)\sqrt{3+x}}$; 2) $\int\frac{1}{x}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\mathrm{d}x$; 3) $\int\frac{\mathrm{d}x}{\left(\sqrt[3]{x}+4\right)\sqrt{x}}$;

4) $\int\frac{\mathrm{d}x}{x\left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}\right)}$; 5) $\int\frac{x^2+\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}}\mathrm{d}x$; 6) $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2x+1}+\sqrt[3]{2x+1}}$;

7) $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2x+3}+5}$; 8) $\int\frac{\left(1-\sqrt[6]{x}\right)^3}{\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x$.

7.2. С помощью соответствующих подстановок найти неопределенные интегралы:

1) $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^{11}\sqrt{1+x^4}}$; 2) $\int\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$; 3) $\int\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}}{x}\mathrm{d}x$.

7.3. С помощью тригонометрических подстановок найти неопределенные интегралы:

1) $\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1-x^2}}$; 2) $\int\frac{\sqrt{x^2+4}}{x}\mathrm{d}x$; 3) $\int\frac{\sqrt{x^2-1}\,\mathrm{d}x}{x}$;

4) $\int\frac{x^2\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-4}}$; 5) $\int x^3\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$; 6) $\int\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^4}\mathrm{d}x$.

Домашние задания

7.4. С помощью соответствующих постановок найти неопределенные интегралы:

1) $\int \frac{x+1}{x\sqrt{x+2}}\,\mathrm{d}x$; **2)** $\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{\left(1+\sqrt[3]{x+1}\right)\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x$; **3)** $\int \frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}\,\mathrm{d}x$;

4) $\int \frac{x+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}}{x\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}\,\mathrm{d}x$; **5)** $\int \frac{\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x}{x^6}$; **6)** $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}$;

7) $\int \frac{x^3\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}}$; **8)** $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

Ответы:

7.1. 1) $\sqrt{2}\,\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{3+x}{2}}+C$;

2) $\ln\left|\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\right|-2\,\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+C$;

3) $6\sqrt[6]{x}-6\,\mathrm{arctg}\sqrt[6]{x}+C$; **4)** $6\ln\left|\frac{\sqrt[6]{x}+1}{\sqrt[6]{x}}\right|-\frac{6}{\sqrt[6]{x}}+\frac{3}{\sqrt[3]{x}}-\frac{2}{\sqrt{x}}+C$;

5) $\frac{3}{8}(1+x)^{\frac{8}{3}}-\frac{6}{5}(1+x)^{\frac{5}{3}}+\frac{3}{2}(1+x)^{\frac{2}{3}}+\frac{6}{7}(1+x)^{\frac{7}{6}}+C$;

6) $\sqrt{2x+1}-\frac{3}{2}\sqrt[3]{2x+1}+3\sqrt[6]{2x+1}-3\ln\left|\sqrt[6]{2x+1}+1\right|+C$;

7) $\sqrt{2x+3}-5\ln\left|\sqrt{2x+3}+5\right|+C$;

8) $\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}-\frac{18}{5}x^{\frac{5}{6}}+3x-\frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}}+C$.

7.2. 1) $-\frac{1}{10}\sqrt{\left(\frac{1}{x^4}+1\right)^5}+\frac{1}{3}\sqrt{\left(\frac{1}{x^4}+1\right)^3}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{x^4}+1}+C;$

2) $\frac{12}{7}\left(1+x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{7}{3}}-3\left(1+x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{4}{3}}+C;$

3) $6\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}+2\ln\left|\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}-1\right|-\ln\left|\sqrt[3]{\left(1+\sqrt{x}\right)^2}+\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}+1\right|-$

$-2\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}+1}{\sqrt{3}}+C.$

7.3. 1) $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{\sqrt{1-x^2}+1}\right|+C;$ **2)** $\sqrt{x^2+4}+\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt{x^2+4}+2}\right|+C;$

3) $\sqrt{x^2-1}-\operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1}+C;$ **4)** $\ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2-4}}{x-\sqrt{x^2-4}}\right|+\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-4}+C;$

5) $\frac{\left(1-x^2\right)^{\frac{5}{2}}}{5}-\frac{\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}{3}+C;$ **6)** $-\frac{1}{3}\left(\frac{1-x^2}{x^2}\right)^{\frac{3}{2}}+C.$

7.4. 1) $2\sqrt{x+2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{2}}\right|+C;$

2) $-\frac{3}{2}\sqrt[3]{(x+1)^2}+3\sqrt[3]{x+1}+6\sqrt[6]{x+1}-3\ln\left|\sqrt[3]{x+1}+1\right|-6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x+1}+C;$

3) $\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}+6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}+C;$ **4)** $\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+6\sqrt[6]{x}-6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}+C;$

5) $-\frac{1}{5}\sqrt{\left(\frac{1}{x^2}+1\right)^5}+\frac{1}{3}\sqrt{\left(\frac{1}{x^2}+1\right)^3}+C;$ **6)** $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+C;$

7) $\frac{1}{3}\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}-\sqrt{1+x^2}+C;$ **8)** $-\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}+\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}+C.$

ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Занятие 8. Вычисление определенных интегралов

Аудиторные задания

8.1. Вычислить определенные интегралы:

1) $\int\limits_2^9 \sqrt[3]{x-1}\,\mathrm{d}x$; **2)** $\int\limits_0^3 \dfrac{x^2\mathrm{d}x}{4+x^3}$; **3)** $\int\limits_1^2 \dfrac{1}{x^3}\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}}\mathrm{d}x$; **4)** $\int\limits_1^{\mathrm{e}} \dfrac{\mathrm{d}x}{x(1+\ln^2 x)}$;

5) $\int\limits_1^{\mathrm{e}} \dfrac{\cos\ln x}{x}\mathrm{d}x$; **6)** $\int\limits_0^{\pi/4} \sqrt{\cos x-\cos^3 x}\,\mathrm{d}x$; **7)** $\int\limits_0^2 \sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x$;

8) $\int\limits_0^5 \dfrac{\mathrm{d}x}{2x+\sqrt{3x+1}}$; **9)** $\int\limits_4^9 \dfrac{y-1}{\sqrt{y}+2}\mathrm{d}y$; **10)** $\int\limits_0^9 \dfrac{\sqrt{x}\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}}$; **11)** $\int\limits_1^{\mathrm{e}} \ln x\,\mathrm{d}x$;

12) $\int\limits_0^1 \dfrac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+5}$; **13)** $\int\limits_0^{\pi} (2x+1)\cos x\,\mathrm{d}x$; **14)** $\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \dfrac{\mathrm{d}x}{1+\cos x}$;

15) $\int\limits_0^{\pi/2} \cos^5 x\sin 2x\,\mathrm{d}x$; **16)** $\int\limits_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{2x}\cos x\,\mathrm{d}x$; **17)** $\int\limits_0^1 \mathrm{arctg}x\,\mathrm{d}x$;

18) $\int\limits_2^3 \dfrac{7x-15}{x^3-2x^2+5x}\mathrm{d}x$; **19)** $\int\limits_0^1 \dfrac{t^5+1}{16-t^4}\mathrm{d}t$; **20)** $\int\limits_0^2 \dfrac{2x-1}{2x+1}\mathrm{d}x$.

Домашние задания

8.2. Вычислить определенные интегралы:

1) $\int\limits_0^{\pi/2} x\cos x\,\mathrm{d}x$; **2)** $\int\limits_1^{\mathrm{e}} x\ln^2 x\,\mathrm{d}x$; **3)** $\int\limits_3^8 \dfrac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x}}$; **4)** $\int\limits_1^{\mathrm{e}^3} \dfrac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+\ln x}}$;

5) $\int\limits_0^5 \dfrac{\mathrm{d}x}{2x+\sqrt{3x+1}}$; **6)** $\int\limits_1^{\mathrm{e}} \ln^3 x\,\mathrm{d}x$; **7)** $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3} \dfrac{x\mathrm{d}x}{\sin^2 x}$;

8) $\int\limits_{-2}^2 \dfrac{3x^7-2x^5+x^3-x}{x^4+3x^2+1}\mathrm{d}x$; **9)** $\int\limits_0^{\pi/2} \dfrac{\mathrm{d}x}{3+2\cos x}$; **10)** $\int\limits_0^{\pi/4} \dfrac{\mathrm{d}x}{1+2\sin^2 x}$.

Ответы:

8.1. 1) $\frac{45}{4}$; **2)** $\frac{1}{3}\ln\frac{31}{4}$; **3)** $\frac{\mathrm{e}-\mathrm{e}^{\frac{1}{4}}}{2}$; **4)** $\frac{\pi}{4}$; **5)** $\sin 1$; **6)** $-\frac{2}{3}\frac{\sqrt[4]{2}}{2}+1$;

7) π; **8)** $\frac{4}{3}\ln\left(2/\sqrt[4]{7}\right)$; **9)** $2\left(\frac{13}{3}-6\ln\frac{5}{3}\right)$; **10)** $\int\limits_0^9 2\left(\frac{3}{2}+\ln 4\right)$;

11) 1; **12)** $\operatorname{arctg}3-\operatorname{arctg}2$; **13)** – 4; **14)** 2; **15)** $\frac{2}{7}$; **16)** $\frac{\mathrm{e}^{\pi}-2}{5}$;

17) $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2$; **18)** $\int\limits_2^3 -3\ln 3+\frac{3}{2}\ln 8-\frac{7\pi}{16}+6\ln 2-\frac{3}{2}\ln 5+\frac{7}{4}\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$;

19) $-\frac{1}{32}\left(31\ln 3-64\ln 2\right)-\ln\frac{4}{5}-\frac{1}{2}$; **20)** $2-\ln 5$.

8.2. 1) $\frac{\pi}{2}-1$; **2)** $\frac{1}{4}(\mathrm{e}^2-1)$; **3)** $\frac{32}{3}$; **4)** 2; **5)** $\frac{1}{5}\ln 112$; **6)** $6-2\mathrm{e}$;

7) $\frac{\pi(9-4\sqrt{3})}{36}+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$; **8) 0; 9)** $\frac{2}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{5}}$; **10)** $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

Занятие 9. Приложения определенных интегралов

Аудиторные задания

9.1. Найти площади криволинейных фигур, ограниченных линиями:

1) $y=\ln x,\quad x=\mathrm{e};\quad x=\mathrm{e}^3;\quad y=0;$ **2)** $y=x^2+2x,\quad y=x+2$;

3) $y^2=x^3,\quad y=1,\quad x=0;$ **4)** $y=x^2-64x,\quad y=0$;

5) $y^2=2px;\quad x^2=2py;$ **6)** $x=a\cos^3 t;\quad y=a\sin^3 t;$

7) $x=2\cos t;\quad y=2\sin t;$ **8)** $r=a\varphi;\quad 0\le\varphi\le 2\pi;$

9) $r=a\cos\varphi;$ **10)** $x^3+y^3-3axy=0.$

9.2. Найти длину дуги кривой:

1) $y^2=x^3;\quad x=5;$ **2)** $y=\ln x;\quad \sqrt{3}\le x\le\sqrt{8};$

3) $y=\ln\cos x;\quad 0\le x\le\frac{\pi}{4};$ **4)** $x=R\cos t;\quad y=R\sin t;$

5) $x = a\left(2\cos t - \cos 2t\right); \quad y = a\left(2\sin t - \sin 2t\right);$

6) $x = a\cos^3 t; \quad y = a\sin^3 t;$ **7)** $r = a(1+\cos\varphi);$

8) $\rho = ae^{\varphi}$ в круге радиуса $r = a;$ **9)** $x = t^2; \quad y = t - \dfrac{1}{3}t^3.$

9.3. Найти объем тела, полученного вращением криволинейной трапеции, ограниченной кривыми, около указанной оси:

1) $y^2 = 4x, \quad x = 1, \quad Ox;$ **2)** $y = \mathrm{e}^x, \quad x = 0, \quad x = 1, \quad y = x; \quad Ox;$

3) $y = x^2, \quad y^2 = x; \quad Oy;$ **4)** $y = 2x - x^2; \quad y = 0, \quad Oy;$

5) $x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t), \quad Oy.$

Домашние задания

9.4. Найти площади криволинейных фигур, ограниченных линиями:

1) $y = \sin x, \quad y = \cos x, \quad y = 0, \quad x \in \left[0, \ \dfrac{\pi}{2}\right];$

2) $y = (x^2 + 2x)\mathrm{e}^{-x}, \quad y = 0;$

3) $x = 3t^2, \quad y = 3t - t^3;$ **4)** $x = t^2 - 1; \quad y = t^3 - 1;$ **5)** $r = a\sin 2\varphi.$

9.5. Найти длину дуги кривой:

1) $y = \ln(1 - x^2), \quad x \in \left[0; \ \dfrac{1}{2}\right];$

2) $x = R(\cos t + t\sin t), \quad y = R(\sin t - t\cos t), \quad t \in [0, \pi];$

3) $\rho = \dfrac{1}{\varphi}; \quad \varphi \in \left[\dfrac{3}{4}; \ \dfrac{4}{3}\right].$

9.6. Найти объем тела вращения:

1) $x^2 - y^2 = a^2; \quad x = a + h \quad (h > 0), \quad Ox;$

2) $y = \arcsin x, \quad x \in [0, 1], \quad Ox;$ **3)** $x = a\cos t, \quad y = a\sin 2t, \quad Ox.$

Ответы:

9.1. 1) $2e^3$; **2)** 4,5; **3)** $\frac{3}{5}$; **4)** $\frac{4}{3}$; **5)** $\frac{4}{3}p^2$; **6)** $\frac{3\pi a^2}{8}$; **7)** 6π;

8) $\frac{4}{3}\pi^3 a^2$; **9)** $\frac{\pi a^2}{8}$; **10)** $\frac{3a^2}{2}$.

9.2. 1) $24\frac{27}{27}$; **2)** $1+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$; **3)** $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}\right)$; **4)** $2\pi R$; **5)** $16a$; **6)** 8a;

7) $4\sqrt{2}a$; **8)** $a\sqrt{2}$; **9)** $4\sqrt{3}$.

9.3. 1) 2π; **2)** $\frac{\pi}{2}\left(e^2-1\right)$; **3)** $0{,}3\pi$; **4)** $\frac{16\pi}{15}$; **5)** $6\pi^3 a^3$.

9.4. 1) $2-\sqrt{2}$; **2)** $\frac{72\sqrt{3}}{5}$; **3)** $\frac{8}{15}$; **4)** $\frac{\pi a^2}{4}$; **5)** $\frac{\pi a^2}{4}$.

9.5. 1) $\ln 3-\frac{1}{2}$; **2)** $\frac{\pi^2 R}{2}$; **3)** $\ln\frac{3}{2}+\frac{5}{12}$.

9.6. 1) $\frac{\pi h^2}{3}\left(3a+h\right)$; **2)** $\pi\left(\frac{\pi^2}{4}-2\right)$; **3)** $\frac{8}{15}\pi a^3$.

Занятие 10. Несобственные интегралы

Аудиторные задания

10.1. Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

1) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2}dx$; **2)** $\int\limits_{e}^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x}$; **3)** $\int\limits_{e}^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^3 x}$; **4)** $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+6x+11}$;

5) $\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{4+x}}$; **6)** $\int\limits_{0}^{+\infty} x\cos x dx$; **7)** $\int\limits_{1}^{3}\frac{dx}{(x-1)^2}$; **8)** $\int\limits_{-2}^{0}\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$;

9) $\int\limits_{0}^{\pi/2}\frac{2x+1}{\sin^2 x}dx$; **10)** $\int\limits_{1}^{2}\frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$; **11)** $\int\limits_{0}^{2/\pi}\frac{\cos 1/x}{x^2}dx$; **12)** $\int\limits_{0}^{2}\frac{x^3dx}{\sqrt{4-x^2}}$.

10.2. Исследовать на сходимость интегралы:

1) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{5x^2+4x+3}$; **2)** $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{4+\sin x}{\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x$; **3)** $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}+\sin^2 x}$;

4 $\int\limits_{0}^{3} \frac{\cos\frac{1}{x}}{\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x$; **5)** $\int\limits_{0}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{tg} x - x}$; **6)** $\int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{\ln\sin x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

Домашние задания

10.3. Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

1) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{x\mathrm{d}x}{x^2+1}$; **2)** $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\mathrm{d}x$; **3)** $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{x\mathrm{d}x}{(1+x)^2}$; **4)** $\int\limits_{1}^{2} \frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{x-1}}$;

5) $\int\limits_{0}^{1} x\ln x\mathrm{d}x$; **6)** $\int\limits_{0}^{2} \frac{\mathrm{d}x}{x^2-4x+3}$; **7)** $\int\limits_{-1}^{0} \frac{\mathrm{e}^{-1/x}}{x^2}$.

Ответы:

10.1. 1) 0; **2)** расходится; **3)** $\frac{1}{2}$; **4)** $\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$; **5)** расходится; **6)** расходится; **7)** расходится; **8)** $\frac{\pi}{2}$; **9)** расходится; **10)** $2\sqrt{\ln 2}$; **11)** расходится; **12)** $\frac{16}{3}$.

10.2. 1) сходится; **2)** расходится; **3)** расходится; **4)** сходится; **5)** сходится; **6)** сходится.

10.3. 1) расходится; **2)** $\frac{3\pi^2}{32}$; **3)** расходится; **4)** $\frac{8}{3}$; **5)** $-\frac{1}{4}$; **6)** расходится; **7)** – e.

ИНТЕГРАЛ ПО ФИГУРЕ

Занятие 11. Двойной интеграл. Его вычисление в декартовой системе координат

Аудиторные задания

11.1. Расставить пределы интегрирования в повторных интегралах по указанным областям D:

1) D: $y = x,\ y = 0,\ x = 2;$ **2)** D: $y = 1,\ y = 4,\ y = 2x,\ y = 5 - 3x;$

3) D: $y = \dfrac{1}{x},\ y = 4,\ x = 5.$

11.2. Изменить порядок интегрирования в повторных интегралах:

1) $\int\limits_1^4 dy \int\limits_{y-1}^{3y-3} f(x, y)\,dx;$ **;** **2)** $\int\limits_{-1}^{2} dx \int\limits_{2+x}^{5-(x-1)^2} f(x, y)\,dy;$

3) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2/9}^{x} f(x, y)\,dy + \int\limits_1^3 dx \int\limits_{x^2/9}^{1} f(x, y)\,dy.$

11.3. Вычислить повторные интегралы:

1) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_x^3 (x + y)\,dy;$ **2)** $\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \cos(x + y)\,dy;$ **3)** $\int\limits_0^1 dy \int\limits_y^{5-y} (x + 3y)\,dx.$

11.4. Вычислить двойной интеграл по областям, ограниченным указанными линиями:

1) $\iint\limits_{(D)} x^4 y\,dx dy,\quad D\colon xy = 1,\ y - x = 0,\ x = 2;$

2) $\iint\limits_{(D)} x\,dx dy,\quad D\colon x = \dfrac{6}{y},\ y = 7 - x;$

3) $\iint\limits_{(D)} (x + 2y)\,dx dy,\quad D\colon y - 4x - 6 = 0,\ x - 2y - 2 = 0,\ x = -1;$

4) $\iint\limits_{(D)} (x+2y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, D – треугольник ABC, $A(3,4), B(6,2)$, $C\left(3, \dfrac{1}{2}\right)$;

5) $\iint\limits_{(D)} \left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, D – треугольник ABC, $A(0,0), B\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$, $C\left(\sqrt{2}, \sqrt{6}\right)$;

6) $\iint\limits_{(D)} (2y+x)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, D – параллелограмм $ABCD$, $A(-1,2), B(3,4)$, $C\left(3, \dfrac{1}{2}\right)$, $D\left(-1, -\dfrac{3}{2}\right)$;

7) $\iint\limits_{(D)} \left(xy^2+1\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, D: $0 \le x \le 2$, $\dfrac{x}{2} \le y \le \sqrt{\dfrac{x}{2}}$;

8) $\iint\limits_{(D)} (\sin x - 2y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, D: $y = x^2$, $y = 2 + x^2$, $x = 0$, $x = \dfrac{\pi}{2}$;

9) $\iint\limits_{(D)} \left(x^3+y^3\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, D: $y = \dfrac{x}{2}$, $y = x$, $x = 4$;

10) $\iint\limits_{(D)} e^{x+y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, D – треугольник ABC, $A(-7,-6)$, $B(5,3)$, $C(0,0)$;

11) $\iint\limits_{(D)} xy^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, D: $x^2+y^2 \le 4$, $x+y \ge 2$;

12) $\iint\limits_{(D)} \left(4y^2\sqrt[3]{x} + \cos y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, D: $-2 \le x \le 1$, $-1 \le y \le 2$.

Домашние задания

11.5. Изменить порядок интегрирования в повторных интегралах:

1) $\int\limits_0^4 \mathrm{d}x \int\limits_{4-x/2}^{-x/4+4} f(x,y)\,\mathrm{d}y + \int\limits_4^6 \mathrm{d}x \int\limits_{4-x/2}^{7-x} f(x,y)\,\mathrm{d}y$; **2)** $\int\limits_0^2 \mathrm{d}x \int\limits_{2x}^{6-x} f(x,y)\,\mathrm{d}y$.

11.6. Вычислить двойные интегралы по заданным областям:

1) $\iint\limits_D \left(x^2 + y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\ D\colon \Delta ABC,\ A(1,1),\ B(3,4),\ C(5,2);$

2) $\iint\limits_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\ D\colon y^2 = 4x,\ y = x - 1;$

3) $\iint\limits_D \frac{x^2}{y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\ D\colon y = \frac{5}{x},\ y = 4 - x;$

4) $\iint\limits_D \left(x^2 + 5xy - 6\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\ D\colon y = x,\ y = 0,\ y = 4;$

5) $\iint\limits_D \sin(2x + y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\ D\colon x = 0,\ y = \frac{\pi}{2},\ y = x;$

6) $\iint\limits_D (x + 2y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\ D\colon x = -1,\ x = 3,\ y = \frac{1}{2}x - 1,\ y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2};$

7) $\iint\limits_D (4 - y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\ D\colon y = \frac{x^2}{4},\ y = 1,\ x = 0;$

8) $\iint\limits_D y\ln x\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\ D\colon y = \frac{1}{x},\ y = \sqrt{x},\ x = 2.$

Ответы:

11.3. 1) $\frac{11}{2}$; **2)** -2; **3)** $-\frac{25}{6}$.

11.4. 1) $7\frac{19}{21}$; **2)** $20\frac{5}{6}$; **3)** $-4\frac{1}{12}$; **4)** $43\frac{3}{4}$; **5)** $2\sqrt{3} - \frac{4}{3}$; **6)** $45\frac{1}{2}$; **7)** $\frac{47}{105}$; **8)** $2 - 2\pi - \frac{\pi^3}{6}$; **9)** $\frac{752}{5}$; **10)** $\frac{3e^8}{56} + \frac{3}{e^{13}\cdot 91} - \frac{9}{104}$; **11)** $\frac{8}{5}$; **12)** $9 - 18\sqrt[3]{2} + 3\sin 2 + 3\sin 1$.

11.6. 1) ≈ 123; **2)** 48; **3)** $-6\ln 3$; **4)** 848; **5)** $\frac{2}{3}$; **6)** 49; **7)** $\frac{68}{15}$; **8)** $\frac{5\ln 2}{4} - \frac{5}{8}$.

Занятие 12. Замена переменных в двойном интеграле

Аудиторные задания

12.1. С помощью надлежащей замены переменных вычислить двойные интегралы:

1) $\iint\limits_{(D)} \dfrac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x+y+1)^2}$, $\quad D\colon x+y=1,\, x-y=-1,\, x+y=5,\, x-y=4;$

2) $\iint\limits_{(D)} \dfrac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x+y)^3}$, $\quad D$ – трапеция $ABCD$, $\quad A(1,3), B(2,6), C(6,2),$ $D(3,1);$

3) $\iint\limits_{(D)} x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $\quad D\colon x^2+y^2=4,\, x\ge 0,\, y\ge 0;$

4) $\iint\limits_{(D)} \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $\quad D\colon \dfrac{\pi^2}{4}\le x^2+y^2\le 4\pi^2;$

5) $\iint\limits_{(D)} \dfrac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{25-x^2-y^2}}$, $\quad D\colon x^2+y^2\le 16;$

6) $\iint\limits_{(D)} \left(x^4+y^4+2x^2y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $\quad D\colon 1\le x^2+y^2\le 4;$

7) $\iint\limits_{(D)} \sin\pi\left(\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $\quad D\colon \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1,\, \dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{36}=1;$

8) $\iint\limits_{(D)} y^2\sqrt{R^2-x^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $\quad D\colon x^2+y^2=R^2;$

9) $\iint\limits_{(D)} \left(x^2+y^2\right)\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $\quad D\colon x^2+y^2=6;$

10) $\iint\limits_{(D)} \dfrac{x^2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $\quad D\colon 1\le x^2+y^2\le 2.$

Домашние задания

12.2. С помощью замены переменных вычислить двойные интегралы:

1) $\iint\limits_D \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x+y)^3}$, где область D ограничена линиями: $y=3x$, $y=\frac{1}{3}x$, $y=8-x$, $y=4-x$;

2) $\iint\limits_D (x+y)^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, где область D ограничена линиями: $x+y=1$, $x+y=5$, $y=2x$, $y=4x$;

3) $\iint\limits_D \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x+y)^4}$; где область D ограничена линиями: $x+y=2$, $x+y=1$, $y-3x=0$, $y-4x=0$;

4) $\iint\limits_D (x^2-y^2)\sin\pi(x-y)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, где область D ограничена линиями: $x+y=2$, $x+y=4$, $x-y=-1$, $x-y=2$;

5) $\iint\limits_D e^{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, где область D ограничена линиями: $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2=4$;

6) $\iint\limits_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, где область D ограничена линиями: $y=-x$, $y=\sqrt{3}x$, $x^2+y^2=4x$, $x^2+y^2=9x$;

7) $\iint\limits_D \sin\pi\left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, где область D ограничена эллипсами: $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$, $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{36}=1$;

8) $\iint\limits_D (x^2-y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, где область D ограничена лемнискатой $\left(x^2+y^2\right)^2=4\left(x^2-y^2\right)$.

Ответы:

12.1. 1) $\frac{5}{6}$; **2)** $\frac{1}{16}$; **3)** π; **4)** $2\pi-\pi^2$; **5)** 4π; **6)** 21π; **7)** -12;
8) $\frac{32R^5}{45}$; **9)** $18\pi^2$; **10)** $\frac{\pi}{8}$.

12.2. 1) $\frac{1}{16}$; **2)** $83\frac{23}{75}$; **3)** $\frac{3}{160}$; **4)** $-\frac{3}{\pi}$; **5)** $\pi e(e^3-1)$; **6)** $28{,}73$;
7) -12; **8)** $\frac{16}{3}$.

Занятие 13. Приложения двойного интеграла

Аудиторные задания

13.1. Вычислить с помощью двойного интеграла площадь фигуры, ограниченной линиями:

1) $y^2=4x, \quad y=x-3$; **2)** $x+y-7=0, \quad xy=6$;

3) $xy=4, \quad xy=6, \quad y=2x^2, \quad y=3x^2$;

4) $x^2+y^2=2Rx, \quad x^2+y^2=Rx$;

5) $x^2+y^2=-2y, \quad y=-x, \quad y=-1$; **6)** $\left(x^2+y^2\right)^2=8\left(x^2-y^2\right)$;

7) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1, \quad \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$.

13.2. Вычислить с помощью двойного интеграла объем тела, ограниченного указанными поверхностями:

1) $z=x^2+y^2+4$;

2) $z=xy, \quad y^2=2x, \quad y^2=4x, \quad y=\frac{1}{2}x, \quad y=x$;

3) $x+2y-z=0, x-2y-2=0, x-2y+5=0, x=-1, x=3, z=0$;

4) $z=25-x^2-y^2, \quad x=\pm 2, \quad y=\pm 3, \quad z=0$;

5) $x^2+y^2-z=0, \quad x=2, \quad y=3, \quad x=0, \quad y=0$;

6) $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$;

7) $x^2 + y^2 - az = 0, \quad \left(x^2 + y^2\right)^3 = a^2\left(x^2 + y^2\right), \quad z = 0, \quad a > 0$;

8) $z = x^2 + y^2, x = y, \sqrt{3}x = y, x^2 + y^2 = 8$; **9)** $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$.

13.3. Найти массу пластинки, имеющей плотность $\gamma = \gamma\left(x, y\right)$ и ограниченной линиями:

1) $x^2 + y^2 = 4, x^2 + y^2 = 16, x \ge 0, y \ge 0, \gamma\left(x, y\right) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$;

2) $\left(x^2 + y^2\right)^2 = 9\left(x^2 - y^2\right), \quad x \ge 0, \quad y \ge 0, \quad \gamma\left(x, y\right) = x^2 + y^2$;

3) $x + y = 1, \quad x + y = 2, \quad y = 2x, \quad y = 4x, \quad \gamma\left(x, y\right) = \left(x + y\right)^2$;

4) $\left(x^2 + y^2\right)^2 = 8xy$, если поверхностная плотность пластинки в каждой точке равна квадрату расстояния от этой точки до начала координат.

13.4. Найти статические моменты относительно осей координат, центр тяжести и моменты инерции однородной пластинки, ограниченной указанными линиями:

1) $x - 3y = 0, \quad x + y = 8, \quad x = 3$;

2) $x + y = 4, \quad x - 3y = 0, \quad x + 5y - 16 = 0$;

3) $y^3 = x^2, \quad y = 2 - x^2$; **4)** $x^2 + y^2 \le x$; **5)** $r = 1 + \cos\varphi$.

Домашние задания

13.5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

1) $y^2 = 4ax, \quad y = 3a - x, \quad (a > 0, \quad y \ge 0)$;

2) $x + y = 4, \quad x - 3y = 0, \quad x + y = 8, \quad 3x - y = 0$;

3) $4y = x^2 - 4, \quad 2y = 4 - x^2\, 4$;

4) $\left(x^2 + y^2\right)^2 = 2a^2xy, \quad x^2 + y^2 = a^2$..

13.6. С помощью двойного интеграла вычислить объем тела, ограниченного указанными поверхностями:

1) $x^2+y^2+z^2=16;$ **2)** $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}+\dfrac{z^2}{16}=1.$

13.7. Найти массу пластинки, ограниченной линиями:

$x+y=1,\ x+y=3,\ 2x-y=0,\ 5x-y=0,\ \gamma(x,y)=\dfrac{1}{(x+y)^3}.$

Ответы:

13.1. 1) $\dfrac{63}{4}$; **2)** $17{,}5-6\ln 6$; **3)** $-\dfrac{2}{3}\ln\dfrac{3}{2}$; **4)** $\dfrac{3\pi R^2}{4}$; **5)** $\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{2}$; **6)** 8; **7)** 6π.

13.2. 1) $4{,}5\pi$; **2)** 630; **3)** 49; **4)** 496; **5)** 26; **6)** $\dfrac{4\pi R^3}{3}$; **7)** $\dfrac{a}{2}$; **8)** $\dfrac{4\pi}{3}$; **9)** $\dfrac{4\pi abc}{3}$.

13.3. 1) 6; **2)** $\dfrac{81\pi}{32}$; **3)** $\dfrac{1}{2}$; **4)** 2π.

13.4. 1) $c\left(4,\dfrac{8}{3}\right)$ – центр тяжести; **2)** $c\left(\dfrac{10}{3},2\right)$; **3)** $c\left(0,\dfrac{8}{7}\right)$; **4)** $J_x=\dfrac{\pi}{64}$; **5)** $c\left(\dfrac{5}{6},0\right)$.

13.5. 1) $\dfrac{10a^2}{3}$; **2)** 12; **3)** 8; **4)** $\dfrac{a^2}{\pi-1}$.

13.6. 1) $\dfrac{256\pi}{3}$; **2)** $\dfrac{96\pi}{3}$.

13.7. $\dfrac{1}{9}$.

Занятие 14. Тройной интеграл и его вычисление в декартовой системе координат

Аудиторные задания

14.1. Расставить пределы интегрирования в тройном интеграле по указанной области:

1) V: $2x+3y+4z-24=0,\ x=0,\ y=0,\ z=0;$

2) V: $x+y+z=4,\ x=0,\ y=0,\ z=0;$

3) V: $x^2+z^2=4,\ y=0,\ y=2;$

4) V: $x^2+z^2=z^2,\ z=4;$

5) V: $x=c-y^2-z^2,\ x=a,\ c>a>0;$

6) V: $x^2+z^2+z^2\le 4x.$

14.2. Вычислить повторные интегралы:

1) $\int\limits_0^1 \mathrm{d}x\int\limits_2^0 \mathrm{d}y\int\limits_0^3 \left(x^2+y^2+z\right)\mathrm{d}z;$ **2)** $\int\limits_{-1}^0 \mathrm{d}x \int\limits_{-1-x}^0 \mathrm{d}y \int\limits_{1-x-y}^0 \frac{\mathrm{d}z}{\left(4x+3y+z+2\right)^5};$

3) $\int\limits_0^3 \mathrm{d}z \int\limits_{-\sqrt{2-\frac{z}{3}}}^{\sqrt{2-\frac{z}{3}}} \mathrm{d}x \int\limits_{2x^2}^{4-\frac{2z}{3}} \mathrm{d}y;$ **4)** $\int\limits_0^1 \mathrm{d}x\int\limits_0^2 \mathrm{d}y \int\limits_{2x^2}^{3-x^2} xy^2\mathrm{d}z.$

14.3. Вычислить тройные интегралы:

1) $\iiint\limits_V \left(z^2+x^2+y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ V: $0\le x\le a,\ 0\le y\le b,\ 0\le z\le c;$

2) $\iiint\limits_V \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\left(1+x+y+z\right)^3}$ V: $x+y+z=1,\ x=0,\ y=0,\ z=0;$

3) $\iiint\limits_V z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ V: $0\le x\le \frac{1}{2},\ x\le y\le 2x,\ 0\le z\le \sqrt{1-x^2-y^2};$

4) $\iiint\limits_V z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ V: $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}+z^2\le 1,\ z\ge 0;$

5) $\iiint\limits_V (6x+8y+4z+5)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \quad V:\quad 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1,\ 0\le z\le 1;$

6) $\iiint\limits_V \left(x^2+y^2+z^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \quad V:\quad y^2+z^2=b^2,\ x=0,\ x=a;$

7) $\iiint\limits_V \left(x^2+y^2+z^2\right)^3 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \quad V:\quad x^2+z^2=1,\ y=0,\ y=1;$

8) $\iiint\limits_V (1-2y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y dz \quad V:\quad z=y^2,\ z+2x=6,\ x=0,\ z=4;$

9) $\iiint\limits_V (4x-y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \quad V\!: z=2-x^2,\ x+y=1,\ x=0,\ y=0,\ z=0;$

10) $\iiint\limits_V \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \quad V:\quad y=2x^2,\ z=0,\ z=3,\ 3y+2z=12;$

11) $\iiint\limits_V xz^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \quad V:\quad y=0,\ y=2,\ x=2,\ x=\sqrt{2y-y^2},\ z=0,\ z=3.$

Домашние задания

14.4. Вычислить повторные интегралы:

1) $\int\limits_0^1 \mathrm{d}x \int\limits_0^{\sqrt{x}} \mathrm{d}y \int\limits_{1-x}^{2-2x} y\mathrm{d}z;$ **2)** $\int\limits_0^1 \mathrm{d}z\int\limits_0^2 \mathrm{d}y\int\limits_0^4 \left(x^2+y^2+z^2\right)\mathrm{d}x.$

14.5. Вычислить тройные интегралы по областям, ограниченным указанными поверхностями:

1) $\iiint\limits_V xy^2z^3\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \quad V:\quad z=xy,\ y=x,\ x=1,\ z=0;$

2) $\iiint\limits_V x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \quad V:\quad x+z=a,\ y=h,\ x=0,\ y=0,\ z=0;$

3) $\iiint\limits_V xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \quad V\!: x^2+y^2=1,\ z=0,\ z=1,\ x=0,\ y=0\,(x\ge 0,\ y\ge);$

4) $\iiint\limits_V yz\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \quad V:\quad x^2+y^2+z^2=1,\ z=0;$

5) $\iiint\limits_V x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \quad V:\quad z=x^2+y^2,\ x+y=a,\ x=0,\ y=0,\ z=0;$

6) $\iiint\limits_V xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \quad V:\quad z=xy,\ x+y=1,\ z=0\,(z\ge 0);$

7) $\iiint\limits_V y\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \quad V: \quad x+2z=3,\ y=1,\ y=3,\ x=0,\ z=0;$

8) $\iiint\limits_V z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \quad V: \quad x+2z=3,\ x=0,\ z=0;$

9) $\iiint\limits_V \dfrac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{(4x+3y+z-2)^3} \quad V: \quad x+y+z=4,\ x=0,\ y=0,\ z=0.$

Ответы:

14.2. 1) 18,5; **2)** 0; **3)** $\dfrac{16\left(4\sqrt{2}-1\right)}{5}$; **4)** $\dfrac{16}{5}$.

14.3. 1) $abc(a+b+c)$; **2)** $\dfrac{1}{2}\left(\ln 2-\dfrac{5}{8}\right)$; **3)** $\dfrac{7}{192}$; **4)** 3π; **5)** 11;

6) $\pi ab^2\left(\dfrac{a^2}{3}+\dfrac{b^2}{2}\right)$; **7)** $\dfrac{431\pi}{420}$; **8)** $\dfrac{64}{5}$; **9)** $\dfrac{6}{35}$; **10)** $\dfrac{16\left(4\sqrt{2}-1\right)}{5}$; **11)** 30.

14.4. 1) $\dfrac{1}{12}$; **2)** 56.

14.5. 1) $\dfrac{1}{364}$; **2)** $\dfrac{a^3h}{b}$; **3)** $\dfrac{1}{8}$; **4)** 0; **5)** $\dfrac{a^5}{15}$; **6)** $\dfrac{1}{180}$; **7)** 9; **8)** $\dfrac{9}{4}$;

9) $\dfrac{1}{24}\ln 14-\dfrac{1}{12}\ln 10+\dfrac{1}{24}\ln 2$.

Занятие 15. Замена переменных в тройном интеграле

Аудиторные задания

15.1. Вычислить тройной интеграл, переходя к цилиндрическим координатам:

1) $\iiint\limits_V \left(x^2+y^2+z\right)^4\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \quad V: \quad z=x^2+y^2,\ z=c\ (c>0);$

2) $\iiint\limits_V x^2y^2(1-2z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \quad V: \quad x^2+y^2=1,\ z=x^2+y^2,\ z=0;$

3) $\iiint\limits_V (5x-3z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \quad V: \quad x^2+y^2=1,\ 2x-3y+z=0,\ z=4;$

4) $\iiint\limits_V \left(R^2 - x^2 - y^2\right)^4 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \quad V\colon \quad x^2 + y^2 = 2Ry,\ x^2 + y^2 = 4Ry,\ z = 0,\ z = 4;$

5) $\iiint\limits_V \left(x^2 + z^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z; \quad V\colon \quad 2y = x^2 + z^2,\ y = 2;$

6) $\iiint\limits_V (x + y + z)^2\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \quad V\colon \quad 2Rz = x^2 + y^2,\ z = \sqrt{3R^2 - x^2 - y^2};$

7) $\iiint\limits_V z\sqrt{x^2 + y^2}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \quad V\colon \quad x^2 + y^2 = 2x,\ y = 0,\ z = 0,\ z = a;$

8) $\iiint\limits_V x^2 y^2\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \quad V\colon \quad x^2 + y^2 \le 1,\ z \le x^2 + y^2,\ z \ge 0;$

9) $\iiint\limits_V \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^3 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \quad V\colon \quad x^2 + y^2 = 1,\ y = 0,\ y = 1.$

15.2. Вычислить тройной интеграл, переходя к сферическим координатам:

1) $\iiint\limits_V \left(\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2}\right)^3 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \quad V\colon \quad \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1;$

2) $\iiint\limits_V \sqrt{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^3}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \quad V\colon \quad x^2 + y^2 + z^2 \le R^2,\ z \ge 0;$

3) $\iiint\limits_V \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^n \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \quad V\colon \quad x^2 + y^2 + z^2 \le R^2;$

4) $\iiint\limits_V \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^3 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \quad V\colon \quad x^2 + y^2 + z^2 \le 1;$

5) $\iiint\limits_V \left(\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2}\right)^n \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \quad V\colon \quad \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1;$

6) $\iiint\limits_V \left(3z^2 - x^2 - y^2\right)^3 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \quad V\colon \quad x^2 + y^2 + z^2 = 4;$

7) $\iiint\limits_V \left(3z^2 - x^2 - y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \quad V\colon \quad x^2 + y^2 + z^2 = 2Rz;$

8) $\iiint\limits_V \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \quad V\colon \quad x^2 + y^2 + 4z^2 = 1.$

Домашние задания

15.3. Вычислить тройной интеграл, переходя к цилиндрическим координатам:

1) $\iiint\limits_V z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \quad V:\quad z^2 = x^2 + y^2,\ z = 0;$

2) $\iiint\limits_V \dfrac{xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\sqrt{\left(x^2 + y^2\right)^3}} \quad V:\quad z = x^2 + y^2,\ y \ge 0,\ x \ge y,\ z = 4;$

3) $\iiint\limits_V \left(x^2 + y^2 + z^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \quad V:\quad x^2 + y^2 = 4,\ x = 0,\ x = 3.$

15.4. Вычислить тройной интеграл, переходя к сферическим координатам:

1) $\iiint\limits_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \quad V:\quad x^2 + y^2 + z^2 \le 9;$

2) $\iiint\limits_V \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \quad V:\quad x^2 + y^2 + z^2 \le 10,\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0;$

3) $\iiint\limits_V xyz^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \quad V:\quad x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0;;$

4) $\iiint\limits_V \dfrac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{x^2 + y^2 + z^2 + 1} \quad V:\quad x^2 + y^2 + z^2 \le R^2,\ y = 0\ (y \ge 0).$

Ответы:

15.1. 1) $\dfrac{31}{30}\pi c^6$; **2)** $\dfrac{\pi}{160}$; **3)** $\dfrac{-133\pi}{8}$; **4)** $-78R^4$; **5)** $\dfrac{16\pi}{3}$;
6) $\dfrac{\pi R^5\left(108\sqrt{3} - 97\right)}{30}$; **7)** $\dfrac{8a^2}{9}$; **8)** $\dfrac{\pi}{32}$; **9)** $\dfrac{431\pi}{420}$.

15.2. 1) $\dfrac{4\pi}{9}abc$; **2)** $\dfrac{\pi R^6}{3}$; **3)** $\dfrac{4\pi}{2n+3}R^{2n+3}$; **4)** $\dfrac{928\pi}{315}$;
5) $\dfrac{4\pi abc}{2n+3}$; **6)** $\dfrac{128\pi}{15}$; **7)** $\dfrac{64\pi R^5}{15}$; **8)** $\dfrac{2\pi}{3}$.

15.3. 1) $\frac{a}{4\pi}$; **2)** $\frac{4}{3}$; **3)** 60π.

15.4. 1) 81π; **2)** $\frac{5000\sqrt{10}\pi}{9}$; **3)** $\frac{1}{105}$; **4)** $2\pi\left(R - \operatorname{arctg} R + 1\right)$.

Занятие 16. Приложения тройного интеграла

Аудиторные задания

16.1. Вычислить с помощью тройного интеграла объем тела, ограниченного поверхностями:

1) $z = x^2 + y^2, \quad z = 2x^2 + 2y^2, \quad y = x^2, \quad y = x;$

2) $z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad z + x^2 + y^2 = 2;$

3) $x^2 + y^2 = 2z, \quad z = \sqrt{8 - x^2 - y^2};$

4) $x^2 + y^2 \ge 4, \quad 4z \le 16 - x^2 - y^2, \quad z \ge 0;$

5) $x^2 + y^2 + z^2 \le R^2, \quad x^2 + y^2 \le \frac{z^2}{3};$

6) $\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^3 = \left(x^2 + y^2\right)^2;$ **7)** $\left(\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{5}\right)^2 = xyz;$

8) $z = y^2 - x^2, \ z = 0, \ y = 0, \ y = 2;$ 9) $y = x^2 + z^2, \ y = 2.$

16.2. Вычислить массу тела с плотностью γ, ограниченного поверхностями:

1) $x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad x + y + z - 2 = 0, \quad \gamma = x^2 yz;$

2) $x^2 + y^2 + z^2 \le r^2, \quad z \ge 0, \quad \gamma = x^2 + y^2;$

3) $9x^2 + 2y^2 + 18z^2 = 18, \quad \gamma = \left(x^2 + y^2\right)\sqrt{\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{9} + z^2};$

4) $z = x^2 + 10y^2, \quad z = 20 - x^2 - 10y^2,$ γ в каждой точке равна квадрату расстояния от точки до оси OZ;

5) $by = x^2 + z^2, \quad y = b, \quad \gamma = x^2 + z^2;$

6) $x^2 + z^2 = 1, \quad z = 0, \quad z = 2, \quad \gamma = \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^2;$

7) $x^2 + z^2 = z, \quad z = 4, \quad \gamma = x^2 + y^2 + z;$

8) $x^2 + y^2 + z^2 = 9, \quad \gamma = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2};$

9) $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} + \dfrac{z^2}{4} = 1, \quad \gamma = \sqrt{\left(\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} + \dfrac{z^2}{4}\right)^3}.$

16.3. Определить координаты центра масс тела, если:

1) $\gamma = C - \text{const}, \quad z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2};$

2) $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}, \quad 4 - 4z = x^2 + y^2, \quad \gamma = 1;$

3) $4y = x^2 + z^2, \quad y = 4;$

4) $x + y + z = 4, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad \gamma = x + y + z;$

5) $x^2 + y^2 = 9, \quad z = 0, \quad z = 3, \quad \gamma = x^2 + y^2;$

6) $x^2 + y^2 = 4z, \quad z = 0, \quad z = 4, \quad \gamma = z + x^2 + y^2;$

7) $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} + \dfrac{z^2}{1} = 1, \quad z = 0, \quad \gamma = \text{const};$

8) $z^2 - x^2 - y^2 = 0, \quad z = 2, \quad \gamma = \text{const}.$

16.4. Вычислить момент инерции:

1) прямого кругового цилиндра высотой $2h$ радиуса R относительно диаметра среднего сечения, $\gamma = \gamma_0$;

2) однородного тела относительно координатных плоскостей, координатных осей и начала координат, если

V: $z^2 + y^2 = 4, \ x = 0, \ x = 2;$

3) V: $x^2 + y^2 = z^2 \ (z \geq 0), \ z = C \ (C > 0).$

Домашние задания

16.5. С помощью тройного интеграла найти объем тела, ограниченного поверхностями:

1) $x^2+y^2+z^2=4, \quad x^2+y^2+z^2=9, \quad x^2+z^2=y^2\ (y\ge 0);$

2) $x^2+y^2=10x,\ x^2+y^2=13x,\ z=\sqrt{x^2+y^2},\ z=0,\ y\ge 0;$

3) $x^2+y^2=2x,\ z=x^2+y^2,\ =0.$

16.6. Найти массу тела, ограниченного заданными поверхностями (плоскостями) с плотностью γ:

1) $x^2+y^2+z^2=16, \quad \gamma=k\sqrt{x^2+y^2+z^2};$

2) $z=2-x^2-y^2, \quad z^2=x^2+y^2, \quad z\ge 0, \quad \gamma=1.$

16.7. Вычислить момент инерции:

1) круглого конуса относительно диаметра основания;

2) однородного тела, ограниченного указанными поверхностями, относительно координатных плоскостей, координатных осей и начала координат

V: $\quad 2x+3y=6, \quad x=0, \quad y=0, \quad z=0, \quad z=4;$

3) V: $\quad x+y+z=a\ (a>0), \quad x=0, \quad y=0, \quad z=0;$

4) V: $\quad ax=y^2+z^2, \quad x=a.$

16.8. Вычислить координаты центра масс тела, ограниченного сферой радиуса a и конической поверхностью с углом при вершине 2α, если вершина конуса совпадает с центром сферы (ось конуса принята за ось Oz, вершина помещена в начале координат).

Ответы:

16.1. 1) $\frac{3}{35}$; **2)** $\frac{5\pi}{6}$; **3)** $\frac{4}{3}\pi\left(8\sqrt{2}-7\right)$; **4)** 18π; **5)** $\frac{2}{3}\pi R^3\sqrt{3}$; **6)** $\frac{64\pi}{105}$; **7)** **10**; **8)** $\frac{16}{3}$; **9)** 256π.

16.2. 1) $\frac{16}{315}$; **2)** $\frac{4}{15}\pi r^2$; **3)** $\frac{22\sqrt{2}}{3}\pi$; **4)** $\frac{55\pi}{3}$; **5)** $\frac{\pi b^5}{6}$; **6)** $\frac{16\pi}{3}$;
7) 32π; **8)** 81π; **9)** 16π.

16.3. 1) $\left(0;\,0;\,\frac{3}{8}R\right)$; **2)** $\left(0;\,0;\,\frac{2}{5}\right)$; **3)** $(0;\,3;\,0)$; **4)** $\left(\frac{16}{5};\,\frac{16}{5};\,\frac{16}{5}\right)$;
5) $\left(0;\,0;\,\frac{3}{2}\right)$; **6)** $(0;\,0;\,3)$; **7)** $\left(0;\,0;\,\frac{3}{8}\right)$; **8)** $\left(0;\,0;\,\frac{3}{2}\right)$.

16.4. 1) $I_{ox} = \gamma_0 \pi h R^2 \left(\frac{2}{3}h^2 + \frac{R^2}{2}\right)$;

2) $I_{xy} = I_{xz} = \frac{8\pi}{3},\ I_{yz} = \frac{32\pi}{3},\ I_{ox} = 32\pi,\ I_{oy} = I_{oz} = 34\pi$;

3) $I_{xy} = \frac{\pi c^5}{5},\ I_{xz} = I_{yz} = \frac{\pi c^5}{20},\ I_{ox} = I_{oy} = \frac{\pi c^5}{4},\ I_{oz} = \frac{\pi c^5}{10},\ I_o = \frac{3\pi c^5}{10}$.

16.5. 1) $\frac{19\sqrt{2}\pi}{6}$; **2)** 266; **3)** $\frac{3\pi}{2}$.

16.6. 1) $256k\pi$; **2)** $\frac{5\pi}{6}$.

16.7. 1) $\frac{\pi h r^2}{60}\left(2h^2 + 3r^2\right)$;
2) $I_{xy} = 64,\ I_{xz} = 8;\ I_{yz} = 18,\ I_x = 72,\ I_y = 82,\ I_z = 26,\ I_o = 90$;
3) $I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = \frac{a^5}{60},\ I_x = I_y = I_z = \frac{a^5}{30},\ I_o = \frac{a^5}{20}$;
4) $I_{xy} = I_{xz} = \frac{\pi a^5}{12},\ I_{yz} = \frac{\pi a^5}{4},\ I_x = \frac{\pi a^5}{6},\ I_y = I_z = \frac{\pi a^5}{3}$.

16.8. $x_c = 0,\ y_c = 0,\ z_c = \frac{3}{8}a(1 + \cos\alpha)$.

Занятие 17. Криволинейные интегралы I рода

Аудиторные задания

17.1. Вычислить криволинейные интегралы по указанным кривым:

1) $\int\limits_L x\mathrm{d}l,$ где L – парабола $y = x^2$ $(1 \le x \le 2)$;

2) $\int\limits_L \frac{\mathrm{d}l}{x-y},$ где L – отрезок прямой $y = \frac{1}{2}x - 2,$ заключенный между точками $A(0; -2)$ и $B(4; 0)$;

3) $\int\limits_L \frac{\sin^3 x}{1+\sin^2 x}\mathrm{d}l,$ где L – дуга косинусоиды $y = \cos x$ $\left(0 \le x \le \frac{\pi}{2}\right)$;

4) $\int\limits_L \sqrt{2y}\mathrm{d}l,$ где L – первая арка циклоиды $x = a(t - \sin t),$ $y = a(1-\cos t),$ $a > 0;$

5) $\int\limits_L x^2 y\mathrm{d}l,$ где L – часть окружности, лежащей в первом квадранте;

6) $\int\limits_L xyz\mathrm{d}l,$ где L – отрезок прямой между точками $A(1; 0; 1)$ и $B(2; 2; 3)$;

7) $\int\limits_L \frac{y}{x+3z}\mathrm{d}l,$ где L – дуга линии $x = t,$ $y = \frac{t^2}{\sqrt{2}},$ $z = \frac{t^3}{3}$ от $O(0; 0; 0)$ до $B\left(\sqrt{2}; \sqrt{2}; \frac{2\sqrt{2}}{3}\right).$

8) $\int\limits_L \mathrm{d}l,$ где L – кардиоида $\rho = a(1-\cos\varphi)$;

9) $\int\limits_L (x+y)\mathrm{d}l,$ где L – дуга лемнискаты Бернулли $\rho^2 = \cos\varphi,$ $-\frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{4};$

10) $\int\limits_L \sqrt{x^2+y^2}\left(\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}\right)^2 \mathrm{d}l$, где L – дуга кривой $\rho = a\sqrt{\sin 2\varphi}$, $0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$.

Домашние задания

17.2. Вычислить следующие криволинейные интегралы:

1) $\int\limits_L \dfrac{\mathrm{d}l}{x+2y+5}$, где L – отрезок прямой $y = 2x-2$, заключенный между точками $A(0;\,-2)$ и $B(1;\,0)$;

2) $\int\limits_L \dfrac{\cos^2 x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}\mathrm{d}l$, где L – дуга синусоиды $y = \sin x\ (0 \le x \le \pi)$;

3) $\int\limits_L \dfrac{\mathrm{d}l}{\sqrt{x^2+y^2+4}}$, где L – отрезок прямой, соединяющий точки $O(0;\,0)$ и $A(1;\,2)$;

4) $\int\limits_L \dfrac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$, где L – окружность $x = a\cos t$, $y = a\sin t$ (в положительном направлении);

5) $\int\limits_L \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}l$, где L – кривая $\begin{cases} x = a(\cos t + t\sin t), \\ y = a(\sin t - t\cos t), \end{cases}$ $(0 \le t \le 2\pi)$;

6) $\int\limits_L \left(2z - \sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}l$, где L – первый виток конической винтовой линии $x = t\cos t$, $y = t\sin t$, $z = t$, $0 \le t \le 2\pi$;

7) $\int\limits_L xyz\mathrm{d}l$, где L – дуга кривой: $x = \dfrac{1}{2}t^2$, $y = t$, $z = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}\sqrt{t^3}$, $(0 \le t \le 1)$.

8) $\int\limits_L xy^2\mathrm{d}l$, где L – отрезок прямой между точками $O(0;\,0)$ и $A(4;\,3)$;

9) $\int\limits_L \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}l,$ где L – верхняя половина кардиоиды $\rho = a(1+\cos\varphi);$

10) $\int\limits_L (x+y)\,\mathrm{d}l,$ где L – лепесток лемнискаты $\rho = \sqrt{\sin 2\varphi},$ расположенной в I координатном углу.

Ответы:

17.1. 1) $\frac{1}{24}\left(17\sqrt{17}-5\sqrt{5}\right);$ **2)** $\sqrt{5}\ln 2;$ **3)** $\frac{2}{3};$ **4)** $4\pi a\sqrt{a};$

5) 27; **6)** 12; **7)** $\frac{1}{\sqrt{2}};$ **8)** $8a;$ **9)** $\sqrt{2};$ **10)** $\frac{a^2\pi^3}{24}.$

17.2. 1) $\frac{\sqrt{5}}{5}\ln 6;$ **2)** $\frac{\pi}{2};$ **3)** $\ln\frac{3+\sqrt{5}}{2};$ **4)** $-2\pi;$

5) $\frac{a^2}{3}\left(\left(1+4\pi^2\right)^{\frac{3}{2}}-1\right);$ **6)** $\frac{2\sqrt{2}}{3}\left(\left(1+2\pi^2\right)^{\frac{3}{2}}-1\right);$ **7)** $\frac{16\sqrt{2}}{143};$

8) 45; **9)** $\frac{16a^2}{3};$ **10)** 2.

Занятие 18. Криволинейные интегралы II рода

Аудиторные задания

18.1. Вычислить криволинейные интегралы по указанным кривым:

1) $\int\limits_L (xy-1)\,\mathrm{d}x + x^2y\,\mathrm{d}y$ от точки $A(1;\,0)$ до точки $B(0;\,2)$ по прямой $2x+y=2;$

2) $\int\limits_L x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y + (x+y-1)\,\mathrm{d}z,$ где L – отрезок прямой, соединяющий точки $A(1;\,1;\,1)$ и $B(2;\,3;\,4);$

3) $\int\limits_L (xy-1)\,\mathrm{d}x + x^2y\,\mathrm{d}y,$ где L – дуга эллипса $x=\cos t,\ y=2\sin t$ от точки $A(1;\,0)$ до точки $B(0;\,2);$

4) $\int\limits_L 2xy\mathrm{d}x + y^2\mathrm{d}y + z^2\mathrm{d}z,$ где L – дуга одного витка винтовой линии $x = \cos t,\ y = \sin t,\ z = 2t;\ A(1;\ 0;\ 0);\ B(1;\ 0;\ 4\pi).$

18.2. Применяя формулу Грина, вычислить криволинейные интегралы:

1) $\oint\limits_L 2\left(x^2 + y^2\right)\mathrm{d}x + \left(x + y\right)^2\mathrm{d}y,$ где L – контур треугольника с вершинами в точках $A(1;\ 1), B(2;\ 2), C(1;\ 3),$ пробегаемый против часовой стрелки;

2) $\oint\limits_L \frac{y}{x}\mathrm{d}x + 2\ln x\mathrm{d}y,$ где L – треугольник, сторонами которого являются прямые $y = 4 - 2x;\ \ x = 1;\ \ y = 0;$

3) $\oint\limits_L -x^2y\mathrm{d}x + xy^2\mathrm{d}y,$ где L – окружность $x^2 + y^2 = a^2$ (в положительном направлении).

18.3. Проверить зависимость интегралов от пути интегрирования:

1) $\int\limits_L \left(x + 2x^3y^2 - y^4\right)\mathrm{d}x + \left(y^2 - 3x^2y^3 + 4xy\right);$

2) $\int\limits_L \left(4x^3 - 12x^2y\right)\mathrm{d}x + \left(5y^4 - 4x^3\right)\mathrm{d}y;$

3) $\int\limits_L \left(xy^3 + x^2 - 2y^2\right)\mathrm{d}x + \left(y^5 - 3x^3y^2 + x^4\right)\mathrm{d}y.$

Домашние задания

18.4. Вычислить следующие криволинейные интегралы по указанным кривым:

1) $\int\limits_L \left(x^2 + y^2\right)\mathrm{d}x + 2xy\mathrm{d}y,$ где L – дуга кубической параболы $y = x^3,$ от точки $O(0;\ 0)$ до точки $A(1;\ 1)$.

2) $\int\limits_L \left(x + y\right)\mathrm{d}x + \left(x - y\right)\mathrm{d}y,$ где L – дуга параболы $y = x^2,$ лежащая между точками $A(-1;\ 1)$ и $B(1;\ 1).$

3) $\int\limits_L xy^2\mathrm{d}x + yz^2\mathrm{d}y - x^2z\mathrm{d}z$, где L – отрезок прямой OB, $O(0;\ 0;\ 0)$, $B(-2;\ 4;\ 5)$.

4) $\int\limits_L y^2\mathrm{d}x + x^2\mathrm{d}y$, где L – верхняя половина эллипса, пробегаемая по ходу часовой стрелки $x = a\cos t$, $y = b\sin t$.

18.5. Применяя формулу Грина, вычислить следующие криволинейные интегралы:

1) $\oint\limits_L \frac{1}{x}\mathrm{d}x\,\mathrm{arctg}\frac{y}{x} + \frac{2}{y}\mathrm{d}x\,\mathrm{arctg}\frac{x}{y}\mathrm{d}y$, где L – замкнутый контур, составленный дугами двух окружностей $x^2 + y^2 = 1$; $x^2 + y^2 = 4\ (y > 0)$ и отрезками прямых $y = x$ и $y = \sqrt{3}x\ (y > 0)$, заключенных между этими окружностями.

2) $\oint\limits_L y^2\mathrm{d}x + (x + y)^2\mathrm{d}y$, где L – контур треугольника ABC с вершинами $A(a;\ 0)$, $B(a;\ a)$, $C(0;\ a)$.

3) $\oint\limits_L y(1 - x)^2\mathrm{d}x + \left(1 + y^2\right)x\mathrm{d}y$, где L – окружность $x^2 + y^2 = 4$, пробегаемая в положительном направлении обхода.

18.6. Найти функцию z по ее полному дифференциалу:

1) $\mathrm{d}z = \left(\frac{1}{y} - \frac{y}{x^2}\right)\mathrm{d}x + \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{y^2}\right)\mathrm{d}y$;

2) $\mathrm{d}z = \sin(x + y)(\mathrm{d}x + \mathrm{d}y)$;

3) $\mathrm{e}^{xy}\left((1 + xy)\mathrm{d}x + x^2\mathrm{d}y\right)$.

Ответы:

18.1. 1) 1; **2)** 13; **3)** $\frac{4}{3}$; **4)** $\frac{64\pi^3}{3}$.

18.2. 1) $-\frac{4}{3}$; **2)** $4\ln 2 - 2$; **3)** $\frac{\pi a^4}{2}$.

18.3. **1)** зависит; **2)** не зависит; **3)** зависит.

18.4. **1)** $\frac{4}{3}$; **2)** 2; **3)** 91; **4)** $\frac{4}{3}ab^2$.

18.5. **1)** $\frac{\pi}{12}\ln 2$; **2)** $\frac{2}{3}a^3$; **3)** 8π.

18.6. **1)** $z = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + C$; **2)** $z = -\cos(x+y) + C$; **3)** $z = xe^{xy} + C$.

Занятие 19. Приложения криволинейных интегралов

Аудиторные задания

19.1. Найти длины дуг кривых:

1) $y^2 = x^3$ от точки $O(0;\,0)$ до $A(4;\,8)$.

2) первого витка винтовой линии $x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = bt$.

3) $\rho = a(1-\cos t)$.

19.2. Найти площади фигур, ограниченных линиями:

1) $x = a\cos t,\ y = a\sin t$;

2) $x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t$ (астроида).

19.3. Найти массы следующих кривых:

1) $y = \ln x$, заключенной между точками с абсциссами $x = \sqrt{3}$ и $x = \sqrt{8}$, если плотность дуги в каждой точке равна квадрату абсциссы этой точки.

2) четверти эллипса $x = 2\cos t, y = \sin t$, лежащей в первой четверти, если линейная плотность в каждой ее точке равна произведению координат этой точки.

19.4. Найти работу переменной силы $\vec{F}$ вдоль пути $\overset{\smile}{AB}$:

1) $\vec{F} = y\vec{i} + (x+y)\vec{j}$ при перемещении материальной точки из начала координат в точку $(1;\,1)$ по параболе $y = x^2$;

2) $\vec{F} = (x+y)\vec{i} - x\vec{j}$ при перемещении материальной точки вдоль окружности $x = 2\cos t,\ y = 2\sin t$ по ходу часовой стрелки.

19.5. Найти координаты центра тяжести дуги линии:

1) однородной дуги первого витка винтовой линии $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = 2t$.

2) однородной дуги окружности $x^2 + y^2 = R^2$, расположенной в первом квадранте.

Домашние задания

19.6. Найти длины дуг кривых:

1) $y = \frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3}$ от точки с абсциссой $x_1 = 1$ до точки с абсциссой $x_2 = 9$;

2) $x = \left(t^2 - 2\right)\sin t + 2t\cos t$, $y = \left(2 - t^2\right)\cos t + 2t\sin t \ (0 \le t \le \pi)$;

3) $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ (астроида).

19.7. Найти площади фигур, ограниченных линиями:

1) $x = a\cos t$, $y = b\sin t$ (эллипс).

2) первой арки циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ и осью Ox.

19.8. Найти массы следующих кривых:

1) одной арки циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, если плотность в каждой точке кривой равна ординате точки;

2) $x = \frac{t^2}{2}$, $y = t$, $z = \frac{t^3}{3}$, $0 \le t \le 2$, если плотность в каждой ее точке $\gamma = \sqrt{1 + 4x^2 + y^2}$.

19.9. Найти работу переменной силы $\vec{F}$ вдоль пути $\overset{\cup}{AB}$:

1) $\vec{F} = (x + y)\vec{i} + 2x\vec{j}$ при перемещении материальной точки по окружности $x = a\cos t$, $y = a\sin t$.

2) $\vec{F} = 4x^2\vec{i} + xy\vec{j}$ при перемещении материальной точки вдоль дуги $y = x^3$ от точки $O(0;\, 0)$ до точки $C(1;\, 1)$.

19.10. Найти координаты центра тяжести дуги линии:

1) винтовой линии $x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = bt$, линейная плотность в каждой точке пропорциональна аппликате этой точки; $t_A = 0,\ t_B = \pi$;

2) плоской материальной дуги $y = \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}}$, $0 \le x \le 1$, линейная плотность которой $\gamma(x, y) = y\sqrt{1+x}$.

Ответы:

19.1. 1) $\frac{8}{27}\left(10\sqrt{10}-1\right)$; **2)** $2\pi\sqrt{a^2+b^2}$; **3)** $8a$.

19.2. 1) πa^2; **2)** $\frac{3a^2\pi}{8}$.

9.3. 1) $\frac{19}{3}$; **2)** $\frac{14}{9}$.

19.4. 1) $\frac{3}{2}$; **2)** 8π.

19.5. 1) (0; 0; 2π); **2)** $x_C = y_C = \frac{2R}{\pi}$.

19.6. 1) $\frac{52}{3}$; **2)** $\frac{\pi^2}{3}$; **3)** $6a$.

19.7. 1) πab; **2)** $3\pi a^2$.

19.8. 1) $\frac{32a^2}{3}$; **2)** $\frac{166}{15}$.

19.9. 1) πa^2; **2)** $\frac{37}{21}$.

19.10. 1) $\left(-\frac{4a}{\pi^2}; \frac{2a}{\pi}; \frac{2}{3}b\pi\right)$; **2)** $x_C = \frac{10}{9}$; $y_C = \frac{21}{32}$..

Занятие 20. Поверхностные интегралы I рода

Аудиторные задания

20.1. Вычислить поверхностные интегралы I рода по указанным поверхностям:

1) $\iint\limits_S xyz\mathrm{d}S,$ где S – часть плоскости $x+y+z=1,$ лежащая в первом октанте;

2) $\iint\limits_S (3x-2y+6z)\mathrm{d}S,$ где S – часть плоскости $2x+y+2z=2,$ отсеченная координатными плоскостями;

3) $\iint\limits_S \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}S,$ где S – часть поверхности конуса $x^2+y^2=z^2,$ $0\le z\le 1;$

4) $\iint\limits_S x\mathrm{d}S,$ где S – полусфера $z=\sqrt{1-x^2-y^2};$

5) $\iint\limits_S \left(x^2+y^2+z^2\right)\mathrm{d}S,$ где S – сфера $x^2+y^2+z^2=1;$

6) $\iint\limits_S \left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}S,$ где S – поверхность, отсекаемая от параболоида $x^2+y^2=2z$ плоскостью $z=1.$

7) $\iint\limits_S (6x+4y+3z)\mathrm{d}S,$ где S – часть плоскости $x+2y+3z=6,$ расположенная в первом октанте;

8) $\iint\limits_S \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}S,$ где S – часть поверхности конуса $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{16}=\dfrac{z^2}{9},$ расположенная между плоскостями $z=0$ и $z=3.$

9) $\iint\limits_S xyz\mathrm{d}S,$ где S – часть поверхности параболоида $z=x^2+y^2,$ отсекаемая плоскостью $z=1.$

Домашние задания

20.2. Найти поверхностные интегралы I рода по указанным поверхностям:

1) $\iint\limits_S \left(3x^2+3y^2+5z^2\right)\mathrm{d}S$, где S – часть поверхности $z=\sqrt{x^2+y^2}$, отсеченная плоскостями $z=0$ и $z=1$.

2) $\iint\limits_S \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dS$, где S – поверхность конуса $z^2=x^2+y^2$, ограниченного плоскостями $z=0$ и $z=h$.

3) $\iint\limits_S z^2 dS$, где S – часть плоскости $x+y+z=1$, расположенной в первом октанте.

4) $\iint\limits_S (3x-y+z)dS$, где S – часть плоскости $x+z+-2y=2$, отсеченная координатными плоскостями.

5) $\iint\limits_S \left(x^2+y+z^2-4\right)dS$, где S – часть поверхности $2y=9-x^2-z^2$, отсеченная плоскостью $y=0\ (y>0)$;

6) $\iint\limits_S (x-3y+2z)\mathrm{d}S$, где S – часть плоскости $4x+3y+2z-4=0$, расположенная в первом октанте;

7) $\iint\limits_S x(y+z)\mathrm{d}S$, где S – часть цилиндрической поверхности $x=\sqrt{1-y^2}$, отсеченной плоскостями $z=0$ и $z=2$.

8) $\iint\limits_S \left(x^2+y^2+z^2\right)\mathrm{d}S$, где S – сфера $x^2+y^2+z^2=1$.

Ответы:

20.1. 1) $\dfrac{\sqrt{3}}{120}$; **2)** $\dfrac{5}{2}$; **3)** $\dfrac{2\sqrt{2}\pi}{3}$; **4)** 0; **5)** 4π; **6)** $\dfrac{24\sqrt{3}+4}{15}\pi$;

7) $54\sqrt{14}$; **8)** $\dfrac{160\pi}{3}$; **9)** 0.

20.2. 1) $4\sqrt{2}\pi$; **2)** $\dfrac{4}{3}\pi h^3$; **3)** $\dfrac{\sqrt{3}}{12}$; **4)** $3\sqrt{6}$; **5)** $\dfrac{\pi}{5}\left(10^{\frac{5}{2}}-1\right)$;

6) $\dfrac{\sqrt{29}}{9}$; **7)** 4; **8)** 4π.

Занятие 21. Поверхностные интегралы II рода

Аудиторные задания

21.1. Вычислить интегралы по указанным поверхностям:

1) $\iint\limits_S y\mathrm{d}x\mathrm{d}z$, где S – верхняя сторона части плоскости $x+y+z=a$, лежащей в первом октанте;

2) $\iint\limits_S x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}x\mathrm{d}z+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, где S – верхняя часть поверхности $x+2y+z-6=0$, расположенная в первом октанте;

3) $\iint\limits_S \sqrt[4]{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, где S – верхняя сторона круга $x^2+y^2\le a^2$;

4) $\iint\limits_S \left(y^2+z^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, где S – верхняя сторона поверхности $z=\sqrt{a^2-x^2}$, отсеченная плоскостями $y=0$, $y=b$;

5) $\iint\limits_S x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}z+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, где S – внешняя сторона части сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$, расположенной в первом октанте;

6) $\iint\limits_S x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}z+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, где S – внешняя сторона поверхности конуса $z^2+y^2=\dfrac{R^2}{3}x^2$; $0\le x\le\sqrt{3}$.

21.2. Применяя формулу Остроградского, вычислить:

1) $\iint\limits_S x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}x\mathrm{d}z+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, где S – положительная сторона куба, составленного плоскостями $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x=1$, $y=1$, $z=1$;

2) $\iint\limits_S x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}x\mathrm{d}z+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, где S – внешняя сторона сферы $x^2+y^2+z^2=1$;

3) $\iint\limits_S y\mathrm{d}x\mathrm{d}z$, где S – поверхность тетраэдра, ограниченного плоскостями $x+y+z=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$;

4) $\iint\limits_S x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}x\mathrm{d}z + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$ где S – внешняя сторона цилиндра $x^2 + y^2 = 4$ с основаниями $z = 0$ и $z = 3$.

Домашние задания

21.3. Вычислить интегралы по указанным поверхностям:

1) $\iint\limits_S x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}x\mathrm{d}z + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$ по верхней поверхности части плоскости $x + y + z = a,$ лежащей в первом октанте;

2) $\iint\limits_S z\mathrm{d}x\mathrm{d}y + x\mathrm{d}x\mathrm{d}z + y\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$ где S – внешняя сторона треугольника, образованного пересечением плоскости $x - y + z = 1$ и координатными плоскостями;

3) $\iint\limits_S \left(x^2 + z^2\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$ где S – верхняя сторона поверхности $x=\sqrt{9-y^2},$ отсеченной плоскостями $z = 0,$ $z = 2.$

21.4. Вычислить непосредственно, результат проверить по формуле Остроградского:

1) $\iint\limits_S x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}x\mathrm{d}z + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$ где S – внешняя сторона цилиндра $x^2 + y^2 = R^2$ с основаниями $z = 0$ и $z = H;$

2) $\iint\limits_S x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}x\mathrm{d}z + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$ где S – положительная сторона поверхности куба, ограниченного плоскостями $x = 0,$ $y = 0,$ $z = 0,$ $x = 4,$ $y = 4,$ $z = 4.$

21.5. Применяя формулу Остроградского, вычислить:

1) $\iint\limits_S x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}x\mathrm{d}z + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$ где S – положительная сторона поверхности, ограниченной плоскостями $x = 0,$ $y = 0,$ $z = 0,$ $x + y + 2z = 1;$

2) $\iint\limits_S (x + y)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (y - z)\mathrm{d}x\mathrm{d}z + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ через поверхность шара $x^2 + y^2 + z^2 = 1;$

3) $\iint\limits_S x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}z + z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, где S – внешняя сторона куба $0 \le x \le a;\ 0 \le y \le a;\ 0 \le z \le a$;

4) $\iint\limits_S x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}x\mathrm{d}z + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, где S – внешняя сторона поверхности пирамиды, ограниченной плоскостями $x = 0,\ y = 0,\ z = 0,$ $2x + 3y + 4z = 12$;

5) $\iint\limits_S x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^3\mathrm{d}x\mathrm{d}z + z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, где S – внешняя сторона поверхности сферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

Ответы:

21.1. 1) $\dfrac{a^3}{6}$; **2)** 54; **3)** $\dfrac{4}{5}\pi\sqrt{a^5}$; **4)** $\dfrac{2ab}{3}\left(b^2 + 2a^2\right)$;
5) $\dfrac{3}{8}\pi R^4$; **6)** $\dfrac{3\pi R^2}{2} + \dfrac{2R^3}{\sqrt{3}}$.

21.2. 1) 1; **2)** 4π; **3)** $\dfrac{1}{6}$; **4) 36**π.

21.3. 1) $\dfrac{a^3}{2}$; **2)** $-\dfrac{1}{6}$; **3)** 88.

21.4. 1) $3\pi R^2H$; **2)** 192.

21.5 1) $\dfrac{1}{4}$; **2)** 4π; **3)** $3a^4$; **4)** 36; **5)** $\dfrac{12}{5}\pi a^5$.

Занятие 22. Приложения интегралов по поверхности

Аудиторные задания

22.1. Вычислить площадь поверхности той части плоскости $x + 2y + z = 4$, которая расположена в первом октанте.

22.2. Найти площадь поверхности части конуса $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, заключенного внутри цилиндра $x^2 + y^2 = 2x$.

22.3. Найти площадь поверхности $z = 2 - \dfrac{x^2 + y^2}{2}$, расположенной над плоскостью xOy.

22.4. Найти площадь части поверхности $y = x^2 + z^2$, вырезанной цилиндром $z^2 + x^2 = 1$ и расположенной в первом октанте.

22.5. Вычислить массу поверхности $z = x$, ограниченной плоскостями $x + y = 1$; $y = 0$; $x = 0$, если поверхностная плотность в каждой точке равна абсциссе этой точки.

22.6. Найти массу полусферы $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$, если поверхностная плотность в каждой ее точке равна z^2.

22.7. Вычислить массу поверхности $z^2 = x^2 + y^2$, заключенной между плоскостями $z = 0$; $z = 1$, если поверхностная плотность пропорциональна $x^2 + y^2$.

22.8. Найти координаты центра тяжести однородной треугольной пластинки $x + y + z = 1$ $\left(x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0\right)$.

22.9. Найти момент инерции относительно оси OX кругового цилиндра, высота которого h и радиус основания a.

Домашние задания

22.10. Найти площадь части поверхности $2x + 2y + z = 8$, заключенной внутри цилиндра $x^2 + y^2 = 1$.

22.11. Найти площадь части поверхности $2x + y + z = 4$, которая расположена в первом октанте.

22.12. Определить суммарный электрический заряд, распределенный на части поверхности двуполостного гиперболоида $z^2 = x^2 + y^2 + 1$, $1 \le z \le \sqrt{2}$, если плотность заряда в каждой точке пропорциональна аппликате этой точки $(\delta = kz)$.

22.13. Вычислить поток вектора $\vec{a} = \left(x + y\right)\vec{i} + \left(y - x\right)\vec{j} + z\vec{k}$ через поверхность шара единичного радиуса с центром в начале координат.

22.14. Найти массу полусферы $x=\sqrt{R^2-y^2-z^2}$, если поверхностная плотность в каждой точке пропорциональна квадрату расстояния этой точки до начала координат.

22.15. Найти массу полусферы $x^2+y^2+z^2=R^2\ (z\geq 0)$, если поверхностная плотность в каждой точке $\gamma=\sqrt{x^2+y^2}$.

22.16. Найти массу, координаты центра тяжести и моменты инерции относительно осей и начала координат пластинки $D=\left\{y\geq x^2,\ y\leq 1\right\}$, если плотность $\gamma(x,y)=x^2y$.

22.17. Найти массу, центр тяжести однородного полушара $x^2+y^2+z^2\leq 1,\ z\geq 0$ (плотность $\gamma=1$).

22.18. Найти массу, центр тяжести однородного цилиндрического тела, ограниченного поверхностями $x^2+y^2=1,\ z=0$.

Ответы:

22.1. $4\sqrt{6}$.

22.2. $\sqrt{2}\pi$.

22.3. $\frac{2}{3}\pi\left(5\sqrt{5}-1\right)$.

22.4. $\frac{\pi}{24}\left(5\sqrt{5}-1\right)$.

22.5. $\frac{\sqrt{2}}{6}$.

22.6. $\frac{2}{3}\pi a^4$.

22.7. $\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$.

22.8. $\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$.

22.9. $\pi h a^2\left(\frac{a^2}{4}+\frac{h^2}{3}\right)$.

22.10. 3π.

22.11. $4\sqrt{6}$.

22.12. $\frac{k\pi}{3}\left(3\sqrt{3}-1\right)$.

22.13. $\mathbf{4}\pi$.

22.14. $2\pi R^4$.

22.15. $\frac{\pi R^2}{4}$.

22.16. $m=\frac{4}{21}$; $x_c=0$; $y_c=\frac{7}{9}$; $I_x=\frac{4}{33}$; $I_y=\frac{4}{45}$; $I_o=\frac{104}{495}$.

22.17. $m=\frac{2\pi}{3}$; $x_c=y_c=0$; $z_c=\frac{3}{8}$.

22.18. $m=\frac{3}{2}\pi$; $z_c=\frac{7}{9}$; $C\left(0;\,0;\,\frac{7}{9}\right)$.

ТЕОРИЯ ПОЛЯ

Занятие 23. Элементы теории поля

Аудиторные задания

23.1. Найти линии уровня скалярного поля:

1) $u = 2x + 3y$; **2)** $u = 2x^2 - 4x + y^2 + 2y + z^2$;

3) $u = x + 2y + 5z$; **4)** $u = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{5} + \dfrac{z^2}{6}$.

23.2. Определить вектор-градиент скалярного поля u:

1) $u = 2x + 3y$; **2)** $u = 3x + 5y - 6z$; **3)** $u = 4x^2 + 6xy - 5z^3$.

23.3. Найти вектор-градиент скалярного поля u в точке M и наибольшую скорость возрастания поля в этой точке, если:

1) $u = \ln\left(x\,\mathrm{tg}\,y\right)$, $M\left(1;\ \dfrac{\pi}{4}\right)$; **2)** $u = x^2yz - xy^2z + xyz^2$, $M\left(1;\ 2;\ 1\right)$.

23.4. Найти производную скалярного поля u в точке M по направлению вектора $\vec{e}$, если:

1) $u = xy + y^2 - 4z$, $M\left(1;\ 2;\ 3\right)$, $\vec{e} = 2\bar{i} + 3\bar{j} - 5\bar{k}$;

2) $u = 4xy + y^2$, $M\left(1;\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\vec{e} = \vec{i} + 2\sqrt{3}\vec{j}$;

3) $u = x^2y + xz^2 - 2z$, $M\left(1;\ 1;\ -1\right)$, $\vec{e} = \overrightarrow{MM_1}$, $M_1\left(2;\ -1;\ 2\right)$.

23.5. Для векторного поля $\vec{F}$ найти векторные линии:

1) $\vec{F} = \left(5x - y\right)\vec{i} + 2y\vec{j}$; **2)** $\vec{F} = \left(3x - y^2\right)\vec{i} + y\vec{j}$;

3) $\vec{F} = y\vec{i} - x\vec{j} - 2\vec{k}$; **4)** $\vec{F} = \left(x + y^2 + z^2\right)\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$;

5) $\vec{F} = \left(x - y + z\right)\vec{i} + \left(x + y - z\right)\vec{j} + \left(2z - y\right)\vec{k}$.

23.6. Вычислить дивергенцию поля $\vec{F}$ в точке M, если:

1) $\vec{F} = \left(2xy + zx\right)\vec{i} + \left(xyz + y\right)\vec{j} + \left(x + y + 2z\right)\vec{k}$, $M\left(1;\ 1;\ 2\right)$;

2) $\vec{F} = \left(x + y + z\right)\vec{i} + \left(x^2 + y^2 + z^2\right)\vec{j} + \left(y^3 + x^3 + z^3\right)\vec{k}$, $M\left(1;\ 2;\ 3\right)$;

3) $\vec{F}=\left(x^2yz-5y^2z+6xz^2\right)\vec{i}+\left(2y^2xz-4yz^2+3xz\right)\vec{j}+$
$+\left(z^2xy-7zy^3+z^3\right)\vec{k}, M\left(0;-1;1\right).$

23.7. Найти ротор векторного поля $\vec{F}$:

1) $\vec{F}=\left(2xy-z\right)\vec{i}+\left(yx+z\right)\vec{j}+\left(x^2-2xz\right)\vec{k}$;

2) $\vec{F}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$; **3)** $\vec{F}=xyz\vec{i}+\left(2x+3y-z\right)\vec{j}+\left(x^2+z^2\right)\vec{k}$.

Домашние задания

23.8. Для заданного скалярного поля записать уравнение линии уровня, проходящей через точку *M*. Определить в точке *M* производную поля u по направлению $\vec{l}$, градиент поля и наибольшую скорость возрастания поля в этой точке.

$u=x^2+y^2+4x+2y-2, \quad M\left(-1,2\right), \quad \vec{l}=-3\vec{i}+4\vec{j}.$

23.9. Для заданного скалярного поля *u* определить в точке M_1 производную поля по направлению вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$, градиент, производную по направлению вектора $\vec{l}$, который образует с градиентом в точке M_1 угол φ.

1) $u=xy^2z+yz^2-3z,\ M_1\left(0,1,2\right),\ M_2\left(-2,3,-1\right), \quad \vec{l}=\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k},$ $\varphi=30^\circ$;

2) $u=\dfrac{y}{xz}+\dfrac{x}{yz}+\dfrac{z}{xy},\ M_1\left(1,2,3\right),\ M_2\left(-2,1,-1\right), \quad \vec{l}=2\vec{i}-4\vec{j}+3\vec{k},$ $\varphi=225^\circ$.

23.10. Вычислить производную поля $u=\ln\left(xz^2+2yz\right)$ в точке $M\left(1,3,2\right)$ по положительному направлению окружности

$$\begin{cases} x=1+\cos t, \\ y=2+\sin t, \\ z=2. \end{cases}$$

23.11. Найти угол φ между градиентами функций $u = x + yz + 2\sqrt{xz}$ и $\vartheta = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ в точке $M(2, 3, 2)$.

23.12. Найти векторные линии поля:
1) $\vec{F} = (2x + y)\vec{i} + 2(y + 2z)\vec{j} + (x - z)\vec{k}$; **2)** $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

23.13. Найти дивергенцию векторного поля $\vec{F}$:
1) $\vec{F} = \left(2x^2y - 3xz^3 + 5x^3yz\right)\vec{i} + \left(4y^3x + xyz + 8z^2\right)\vec{j} + $
$+\left(6z^3xy^2 - 7z^2x + 9zy\right)\vec{k}$;
2) $\vec{F} = \left(3y^2 - 2xy + x^2\right)\vec{i} + \left(xy - 5y^2\right)\vec{j}$;
3) $\vec{F} = x^2\,\vec{i} - yx\,\vec{j} + xyz\,\vec{k}$;
4) $\vec{F} = \left(x^2y + y^2x - xy\right)\vec{i} + \left(y^3 - 4xy + 3y^2\right)\vec{j}$.

23.14. Найти ротор векторного поля $\vec{F}$:
1) $\vec{F} = x^2\vec{i} + y^2\,\vec{j} + z^2\,\vec{k}$; **2)** $\vec{F} = y^2z\vec{i} + xz^2\vec{j} + x^2y\vec{k}$.

Ответы:

23.1. 1) $c = 2x + 3y$; **2)** $\dfrac{(x-1)^2}{3} + \dfrac{(y+1)^2}{6} + \dfrac{z^2}{6} = C$;
3) $c = x + 2y + 5z$; **4)** $C = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{5} + \dfrac{z^2}{6}$.

23.2. 1) $\operatorname{grad} u = 2\vec{i} + 3\vec{j}$; **2)** $\operatorname{grad} u(3; 5; -6)$;
3) $\operatorname{grad} u\left(8x + 6y;\ 6x;\ -15z^2\right)$.

23.3. 1) $\operatorname{grad} u = i + 2j$; $\max \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}l} = \sqrt{5}$;
2) $\operatorname{grad} u = 6\vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}$; $\max \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}l} = \sqrt{41}$.

23.4. 1) $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}l} = \dfrac{37}{\sqrt{38}}$; **2)** $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}l} = \dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}\left(5 + \sqrt{3}\right)$; **3)** $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}l} = -\dfrac{11}{\sqrt{14}}$.

23.5. 1) $\dfrac{\left(\frac{y}{x}-3\right)^{\frac{2}{3}}}{\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{5}{3}}\cdot x}$; **2)** $x=y^2$; **3)** $\begin{cases} x=c\cos t, \\ y=c\sin t, \\ z=2t+c_1; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x-y^2-z^2=c_1 z, \\ y=c_2 z; \end{cases}$ **5)** $\begin{cases} x=\left(c_1+c_2+c_1 t\right)\mathrm{e}^t+c_3\mathrm{e}^{2t}, \\ y=\left(-c_1+c_2+c_1 t\right)\mathrm{e}^t, \\ z=\left(c_2+c_1 t\right)\mathrm{e}^t+c_3\mathrm{e}^{2t}. \end{cases}$

23.6. 1) $\operatorname{div}\vec{F}\left(M\right)=9$; **2)** $\operatorname{div}\vec{F}\left(M\right)=32$; **3)** $\operatorname{div}\vec{F}\left(M\right)=12$.

23.7. 1) $\operatorname{rot}\vec{F}=\left(-2x+3z-1\right)\vec{j}+\left(y-2x\right)\vec{k}$; **2)** $\operatorname{rot}\vec{F}=0$;

3) $\operatorname{rot}\vec{F}=i+\left(xy+2x\right)\vec{j}+\left(2-xz\right)\vec{k}$.

23.8. $\left(x+2\right)^2+\left(y+1\right)^2=10$; $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\vec{l}}=\dfrac{18}{5}$; $\operatorname{grad}u=2\vec{i}+6\vec{j}$;

$\max\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\vec{l}}=2\sqrt{10}$.

23.9. 1) $\dfrac{\mathrm{du}}{\mathrm{d}\vec{\mathrm{e}}}=0$; $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\overline{M_1M_2}}=\dfrac{1}{\sqrt{17}}$; $\operatorname{grad}u=2\vec{i}+4\vec{j}+\vec{k}$; $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\vec{l}_1}=\dfrac{3\sqrt{7}}{2}$;

2) $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\vec{l}}=-\dfrac{4}{3\sqrt{29}}$; $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\overline{M_1M_2}}=\dfrac{101}{18\sqrt{26}}$; $\operatorname{grad}u=-2\vec{i}-\dfrac{1}{2}\vec{j}+\dfrac{2}{9}\vec{k}$;

$\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\vec{l}_1}=-\dfrac{\sqrt{2786}}{36}$.

23.10. $-\dfrac{1}{4}$.

23.11. $\varphi=\arccos\left(\dfrac{9}{\sqrt{102}}\right)$.

23.12. 1) $\begin{cases} x=c_1+c_2 t+4c_3\mathrm{e}^{3t}, \\ y=c_2-2c_1-2c_2 t+4c_3\mathrm{e}^{3t}, \\ z=c_1-c_2+c_2 t+c_3\mathrm{e}^{3t}; \end{cases}$ **2)** $y=c_1 x$; $z=c_2$.

23.13. 1) $4xy-3z^3+15x^2yz+12xy^2-13xz+18xy^2z^2+9y$;

2) $3x-12y$; **3)** $x+xy$; **4)** $4y^2-4x+5y+2xy$.

23.14. 1) 0; **2)** $\left(x^2-2xz\right)\vec{i}+\left(y^2-2xy\right)\vec{j}+\left(z^2-2yz\right)\vec{k}$.

Занятие 24. Поток векторного поля. Циркуляция. Потенциальное поле

Аудиторные задания

24.1. Вычислить поток векторного поля $\vec{F}=x\vec{i}+y\vec{j}-z\vec{k}$ через верхнюю сторону части поверхности $z=4-x^2-y^2$, отсеченной плоскостью $z=0$.

24.2. Вычислить поток векторного поля $\vec{F}=(4x-3)\vec{i}+ +(2y-6x)\vec{j}-y^2z^3\vec{k}$ через внутреннюю сторону боковой поверхности части цилиндра $x^2+y^2=9$, ограниченной плоскостью $z=0$, параболоидом $z=x^2+y^2$ и расположенной в первом октанте.

24.3. Вычислить поток поля $\vec{F}=x^3\vec{i}-y^3\vec{j}+2z\vec{k}$ через внешнюю сторону части сферы $x^2+y^2+z^2=1$, вырезанной конической поверхностью $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

24.4. Вычислить поток векторного поля $\vec{F}=3x\vec{i}-3y\vec{j}-5z^2\vec{k}$ через внешнюю сторону замкнутой поверхности S, состоящей из части параболоида $2z=x^2+y^2$ и сферы $x^2+y^2+z^2=8$, накрывающей параболоид.

24.5. Вычислить поток векторного поля $\vec{F}=2xy\vec{i}-y^2\vec{j}+z^3\vec{k}$ через внешнюю сторону замкнутой поверхности, ограниченной поверхностями: $\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{3}\cdot z$ и $x^2+y^2+z^2=2Rz$.

24.6. Вычислить поток через положительно ориентированную замкнутую поверхность S:

1) $\vec{F} = xy^2\vec{i} + y(z-x)\vec{j} + \left(x^2 - zy^2\right)\vec{k}$, $S\colon \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} + \dfrac{z^2}{16} = 1$;

2) $\vec{F} = 3xy^2\vec{i} - \left(1 + yz^2\right)\vec{j} + \left(2 - zx^2\right)\vec{k}$, $S\colon \begin{cases} x^2 + z^2 - y^2 = 0, \\ y = 1, \ y \geq 0; \end{cases}$

3) $\vec{F} = \left(x^2 - y^2\right)\vec{i} + \left(yx^2 - z^2\right)\vec{j} + \left(zy^2 - x^2\right)\vec{k}$, $S\colon \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 16, \\ z = \sqrt{x^2 + y^2}. \end{cases}$

24.7. Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{F}$ вдоль линии L:

1) $\vec{F} = (2x - y^2 + 1)\vec{i} + (3x + 2y^2 - 10)\vec{j}$, $L\colon \begin{cases} x = 3 - y^2, \\ y = x - 1. \end{cases}$

2) $\vec{F} = \left(y^3 - 8yz - z\right)\vec{i} + \left(yz - x^3 + 2x\right)\vec{j} + \left(yx^3 - 2z^3\right)\vec{k}$, $L\colon \begin{cases} z = x^2 + y^2, \\ z = 1, \ z \geq 0. \end{cases}$

3) $\vec{F} = \left(x^2 - y^2\right)\vec{i} + \left(x^2 - z^2\right)\vec{j} + \left(y^2 - x^2\right)\vec{k}$, L – контур треугольника ABC, где $A(1;\ 0;\ 0)$, $B(0;\ 1;\ 0)$, $C(0;\ 0;\ 1)$.

4) $\vec{F} = (x - y)\vec{i} + (y - z)\vec{j} + (z - x)\vec{k}$, L – часть линии

$L\colon \begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 2\sin t, \\ z = \dfrac{2t}{\pi}. \end{cases}$ от точки $B(2;\ 0;\ 4)$ и отрезка BA.

24.8. Вычислить по формуле Стокса циркуляцию векторного поля $\vec{F}$ по замкнутому контуру L:

1) $\vec{F} = \left(z^3 + 2y^3 + 3y\right)\vec{i} + \left(y^3 - 2x^3 - xz^2\right)\vec{j} + \left(z^2 - 5xy^2\right)\vec{k}$,

$L\colon \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ z = \sqrt{x^2 + y^2}. \end{cases}$

2) $\vec{F} = \left(3z^2 - y^3\right)\vec{i} + \left(x^3 - 2y^2z^2\right)\vec{j} + \left(2xyz - x^2y^2\right)\vec{k}$, $L\colon \begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ 2x + z = 4. \end{cases}$

24.9. Выяснить, является ли векторное поле $\vec{F}$ потенциальным. Найти его потенциал и вычислить линейный интеграл *w* поля $\vec{F}$ от точки *M* до точки *N*:

1) $\vec{F} = x\ln x(1+y^2)\vec{i} + yx^2(1+y^2)^{-1}$, $M(2;\,3)$, $N(-4;\,7)$;

2) $\vec{F} = \left(3x^2y^3z^{-1} - 2x^3\right)\vec{i} + \left(2x^3yz^{-1} + 3y^3\right)\vec{j} + \left(z^3 - x^3y^2z^{-2}\right)\vec{k}$, $M(1;\,2;\,2)$, $N(1;\,3;\,1)$;

3) $\vec{F} = (x+z)\vec{i} + (y+z)\vec{j} + 5\vec{z}$.

24.10. Выяснить, является ли векторное поле соленоидальным:

1) $\vec{F} = x^2y\vec{i} - 2xy^2\vec{j} + 2xyz\vec{k}$;

2) $\vec{F} = 5xyz\vec{i} - 3xz\vec{j} + 4x\vec{k}$.

Домашние задания

24.11. Вычислить поток векторного поля $\vec{F} = (4x-3y)\vec{i} + (2y-6x)\vec{j} - y^2z\vec{k}$ через внутреннюю сторону боковой поверхности части цилиндра $x^2 + y^2 = 4$, ограниченной плоскостью $z = 0$, параболоидом $z = x^2 + y^2$ и расположенной в первом октанте.

24.12. Вычислить поток поля $\vec{F} = y\vec{i} + z\vec{j} + x\vec{k}$ через нижнюю сторону плоскости треугольника *ABC*, где $A(2,\,0,\,0)$, $B(0,\,2,\,0)$, $C(0,\,0,\,2)$.

24.13. Вычислить поток поля $\vec{F} = y\vec{i} + x\vec{j} - z^2\cos y\vec{k}$ через внешнюю сторону части цилиндра $x^2 + y^2 = 4$, лежащей в третьем октанте и ограниченной плоскостями $z = 0$ и $x + y + z = 4$.

24.14. Вычислить поток векторного поля $\vec{F}$ через положительно ориентированную замкнутую поверхность S:

1) $\vec{F} = 3xy^2\vec{i} - \left(1 + yz^2\right)\vec{j} + \left(2 - zx^2\right)\vec{k}$, где $S\colon \begin{cases} x^2 + z^2 - y^2 = 0, \\ y = 1,\ \ y \ge 0. \end{cases}$

2) $\vec{F} = \left(x^2 - y^2\right)\vec{i} + \left(yx^2 - z^2\right)\vec{j} + \left(zy^2 - x^2\right)\vec{k}$, где $S\colon \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 16, \\ z = \sqrt{x^2 + y^2}. \end{cases}$

24.15. Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{F} = y^2\vec{i} + z^2\,\vec{j} +$ $+\left(x^2 - 2y\right)\vec{k}$ вдоль линии $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, $x^2 + y^2 = 2x$.

24.16. Вычислить по формуле Стокса циркуляцию векторного поля $\vec{F} = \left(y^3 - yx^2\right)\vec{i} + \left(y^2 - x^2 + x\right)\vec{j}$ по контуру L: $(x-1)^2 + 4y^2 = 4$.

24.17. Для заданного векторного поля $\vec{F} = \left(2xz + \dfrac{1}{y}\right)\vec{i} - \left(\dfrac{x+z}{y^2}\right)\vec{j} +$ $+\left(x^2 + \dfrac{1}{y}\right)\vec{k}$, $A(-1,\ 3,\ -2)$, $B(1,\ 2,\ 3)$:

1) проверить потенциальность поля;

2) найти потенциал поля.

Ответы:

24.1. 8π.

24.2. $-81\left(\dfrac{3}{2}\pi - 18\right)$.

24.3. $\dfrac{4\pi}{3}\left(1 - \dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)$.

24.4. $\left(-32\sqrt{2} + \dfrac{20}{3}\right)\cdot 2\pi$.

24.5. $\dfrac{153\pi R^5}{32}$.

24.6. 1) 64π; **2)** $\dfrac{\pi}{2}$; **3)** $\dfrac{8 - 5\sqrt{2}}{1024\pi}$.

24.7. 1) 4,5; **2)** $\dfrac{17\pi}{2}$; **3)** 2; **4)** $8 + 2\pi$.

24.8. 1) $-2{,}5\pi$; **2)** 120π.

24.9. 1) поле потенциальное, $w = 8\ln 50 - 2\ln 10$, $u(x,\ y,\ z) = \frac{1}{2}x^2 +$ $\ln\left(1 + y^2\right) + C$; **2)** поле потенциальное, $w = 52$; $u(x,\ y,\ z) = -\frac{1}{2}x^4 +$ $+\frac{3}{4}y^4 + \frac{1}{4}z^4 + x^3y^2z^{-1} + C$; **3)** поле не потенциальное.

24.10. 1) Да; **2)** нет.

24.11. $72 - 3\pi$.

24.12. –4.

24.13. $\frac{80}{3}$.

24.14. 1) $\frac{\pi}{2}$; **2)** $\frac{8 - 5\sqrt{2}}{1024\pi}$.

24.15. $-\frac{6\pi + 16}{3}$.

24.16. $\frac{\pi}{2}$.

24.17. Поле потенциальное, $u = x^2z + \frac{x + z}{y} + C$.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Занятие 25. Дифференциальные уравнения первого порядка. Уравнения с разделяющимися переменными и однородные

Аудиторные задания

25.1. Решить уравнения:

1) $(x+5)\mathrm{d}y+y^2\mathrm{d}x=0$; **2)** $(x^2+1)y\mathrm{d}x=x(y^2+1)\mathrm{d}y$;

3) $y'=\mathrm{e}^{2x-3y}$; **4)** $\dfrac{\cos x}{y}\mathrm{d}x=\dfrac{\sin y}{x}\mathrm{d}y$;

5) $x^2(y+5)\mathrm{d}x-xy^2\mathrm{d}y=0,\ \ y(1)=1$; **6)** $\dfrac{2^x}{y}\mathrm{d}y+3^{-x}\mathrm{d}x=0,\ \ y(0)=1$;

7) $y'=\cos(x+y)$; **8)** $y'=\mathrm{e}^{2x+y}$;

9) $y\operatorname{arctg}x\mathrm{d}x+(1+x^2)(y+2)\mathrm{d}y=0$; **10)** $\dfrac{y+2}{x-3}\mathrm{d}x+\dfrac{y-7}{y+2}\mathrm{d}y=0$;

11) $xy'=y-x\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}$; **12)** $xy'-5\sqrt{3x^2+y^2}-y=0$;

13) $(\mathrm{y}^2-4xy)\mathrm{d}x=-x^2\mathrm{d}y$; **14)** $y'-\dfrac{y^2}{x^2}-\dfrac{y}{x}=1$;

15) $(3x+y)\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y=0$; **16)** $xy'=4y\ln\dfrac{y}{x}$;

17) $y'=\dfrac{y^2}{xy+y^2}$; **18)** $y'=\dfrac{y^2-x^2}{xy}$;

19) $y'=\dfrac{y^3}{x^3}+\dfrac{y}{x}$; **20)** $(x^3+xy^2)\mathrm{d}y-y^3\mathrm{d}x=0$;

21) $(3y+x+2)\mathrm{d}y=(2x+1)\mathrm{d}x$; **22)** $(x-y)\mathrm{d}y=(x-y+3)\mathrm{d}x$.

Домашние задания

25.2. Решить уравнения:

1) $\sqrt{1-y^2}\mathrm{d}x+y\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}y=0$; **2)** $xyy'=1-x^2$;

3) $(1-x)\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x = 0;$

4) $y'\sqrt{1-x^2} = 1+y^2;$

5) $x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x = 0,\ y(1)=1;$

6) $y\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x - \left(1+\mathrm{e}^{2x}\right)\mathrm{d}y = 0;$

7) $y' = y\cos x,\ y(0)=1;$

8) $\left(xy^2+x\right)\mathrm{d}y + \left(x^2y-y\right)\mathrm{d}x = 0,\ y(1)=1;$

9) $y' = \mathrm{e}^{x+y};$

10) $y'\sin x = y\ln y,\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \mathrm{e};$

11) $y' = \dfrac{y^2}{x^2} - 2;$

12) $xy' = y(\ln y - \ln x);$

13) $y' = \cos(x+y);$

14) $xy' = x + \dfrac{1}{2}y,\ y(1)=0;$

15) $y'\mathrm{tg}x = y,\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1;$

16) $y' = \dfrac{2xy}{x^2-y^2};$

17) $y' = \dfrac{y}{x} + \mathrm{e}^{-\frac{y}{x}},\ y(1)=0;$

18) $(y-x)\mathrm{d}x - (y+x)\mathrm{d}y = 0;$

19) $\left(y+\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y = 0,$

20) $y' = \left(x^2-x\right)\left(1+y^2\right);\ y(1)=0;$

21) $\left(\sqrt{xy}-x\right)\mathrm{d}y + y\mathrm{d}x = 0,\ y(1)=1;$

22) $y' = \dfrac{y}{x} + \dfrac{x}{y}.$

Ответы:

25.1. 1) $y = \ln^{-1}\left|\dfrac{x+5}{c}\right|;$

2) $x^2 - y^2 = 2\ln\left|\dfrac{Cy}{x}\right|;$

3) $\dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{3y} - \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} = C;$

4) $x\cos x + y\sin y + \cos x - \sin y = C;$

5) $\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{y^2}{2} + 5y - 25\ln|y+5| + 25\ln 6 - 5 = 0;$

6) $1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{\ln 6}} = C;\ y = \mathrm{e}^{-\frac{1}{\ln 6 \cdot 6x}} - \mathrm{e}^{-\frac{1}{\ln 6}} + 1;$

7) $\dfrac{1-\cos(x+y)}{\sin(x+y)} = x + \dfrac{2}{\sqrt{2}} - 1;$

8) $C\mathrm{e}^{x} = \mathrm{e}^{\frac{2x+y}{2}}\left(\mathrm{e}^{2x+y}+2\right)^{1/2};$

9) $\dfrac{\operatorname{arctg}^2 x}{2}+y+\ln cy^2=0$; **10)** $x+y+\ln\dfrac{c(x-3)^{11}}{(y+2)^9}=0$;

11) $e^{-\frac{y}{x}}=\ln|cx|$; **12)** $\dfrac{y+\sqrt{3x^2+y^2}}{x^6}=c$; **13)** $\left|\dfrac{y-3x}{y}\right|^{\frac{1}{\sqrt{3}}}=|cx|$;

14) $\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}=\ln|cx|$; **15)** $y=(3\ln|x|+c)x,\ x=0$;

16) $\dfrac{1}{x}\left(4\ln\dfrac{y}{x}-1\right)^{1/4}=C$; **17)** $x=y\ln|y|-cy,\ y=0$;

18) $y=\pm x\sqrt{c-2\ln|x|}$; **19)** $y=-\dfrac{1}{2x\ln|cx|}$; **20)** $y=ce^{-\frac{y^2}{2x^2}}$;

21) $\dfrac{x+y+2}{(4x-6y-1)(2x+1)^5}=\pm C=C_1$; **22)** $y=x\pm\sqrt{2C-6x}$.

25.2. 1) $1+y^2=c\left(1-x^2\right)$; **2)** $x^2+y^2=2\ln|cx|$; **3)** $y=\dfrac{c}{1-x}$;

4) $\operatorname{arctg} y-\arcsin x=c$; **5)** $y=x$; **6)** $y=c\sqrt{1+e^{2x}}$; **7)** $y=e^{\sin x}$;

8) $\dfrac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)+\ln\left|\dfrac{y}{x}\right|=1$; **9)** $e^x+e^{-y}+c=0$; **10)** $y=e^{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$;

11) $y=\dfrac{x\left(2+cx^3\right)}{1-cx^3}$; **12)** $\dfrac{\ln\left|\dfrac{y}{x}-1\right|}{|x|}=C$; **13)** $\operatorname{tg}\dfrac{x+y}{2}-x=C$;

14) $4x=(2x-y)^2$; **15)** $y=\sin x$; **16)** $\left(x^2+y^2\right)^{-1}=c$;

17) $y=x\ln\left|1+\ln|x|\right|$; **18)** $\ln c\sqrt{1+e^{2x}}=y$; **19)** $y=\sqrt{x^2+y^2}$;

20) $y=\operatorname{tg}\left(\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^2}{2}+c\right)$; **21)** $\ln|y|+2\sqrt{\dfrac{x}{y}}=2$;

22) $y=\pm x\sqrt{2\ln|x|+C}$.

Занятие 26. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка, уравнения Бернулли и в полных дифференциалах

Аудиторные задания

26.1. Решить уравнения:

1) $y' - \dfrac{y}{x} = x^2,\ y(1) = 1;$ **2)** $x^2 y' = \ln x - 2xy;\ y(1) = 1;$

3) $y' = \dfrac{1}{\cos y} - y\mathrm{tg}y,\ y(0) = 0;$ **4)** $y' - y\,\mathrm{ctg}\,x - \dfrac{y^3}{\sin x} = 0;$

5) $\mathrm{e}^x y = 1 - y'\mathrm{e}^x,\ y(0) = 1;$ **6)** $y' + 2xy - x\mathrm{e}^{-x^2} = 0,\ y(0) = 1;$

7) $y'\sin x = y + 1 - \cos x,\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1;$ **8)** $\left(1 - x^2\right)^{\frac{1}{2}} y' = y - \arcsin x;$

9) $xy' - 2y - 2x^2 y^{\frac{1}{2}} = 0,\ y(1) = 1;$ **10)** $xy' + y = 2x\mathrm{e}^{x^2},\ y(1) = \mathrm{e};$

11) $\dfrac{y'}{y^3} = x^3 - \dfrac{3}{xy^2};$ **12)** $(2x - y + 1)\mathrm{d}x = (x + 1 - 2y)\mathrm{d}y,\ y(1) = 1;$

13) $\left(x\left(x^2 - y^2\right)^{-\frac{1}{2}} - 1\right)\mathrm{d}x = y(x^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}y,\ y(1) = 1;$

14) $(y + 2x)\mathrm{d}x + (2y + x)\mathrm{d}y = 0,\ y(2) = 1;$

15) $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^y} - \left(x\dfrac{1}{\mathrm{e}^y} + 2y\right)\mathrm{d}y = 0;$ **;**

16) $2x\cos^2 y\mathrm{d}x + \left(2y - x^2\sin 2y\right)\mathrm{d}y = 0;$

17) $yx^{-1}\mathrm{d}x + \left(\ln x + y^3\right)\mathrm{d}y = 0,\ y(1) = 1;$

18) $\left(y + 2x^{-2}\right)\mathrm{d}x + \left(x - 3y^{-2}\right)\mathrm{d}y = 0,\ y(2) = 1;$

19) $y' = \dfrac{2xy}{y^2 - x^2},\ y(0) = 1;$ **20)** $y' = \dfrac{2x + 3x^2 y}{3y^2 - x^3};$

21) $y' = \dfrac{3y^2 - 4x - 3x^2}{4y + 6xy},\ y(0) = 2;$

22) $\left(1+x^2\right)^{-2}2x\left(1-\mathrm{e}^y\right)\mathrm{d}x+\mathrm{e}^y\left(1+x^2\right)^{-1}\mathrm{d}y=0, \quad y(0)=3;$

23) $y'=\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}+1}{\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}\left(\frac{x}{y}-1\right)};$ 24) $\left(\dfrac{\sin 2x+xy}{y}\right)\mathrm{d}x+\left(\dfrac{y^3-\sin^2 x}{y^2}\right)\mathrm{d}y=0,\ y(0)=1.$

Домашние задания

26.2. Решить уравнения:

1) $x^2y'+(1-2x)y=x^2;$ **2)** $y'-2y-\mathrm{e}^y+x=0,\ y(0)=\dfrac{1}{4};$

3) $y'+\dfrac{3y}{x}-\dfrac{2}{x^3}=0,\ y(1)=1;$ **4)** $y'+2xy=x\mathrm{e}^{-x^2},\ y(0)=1;$

5) $\left(1+x^2\right)y'-2xy=\left(1+x^2\right)^2,\ \ y(0)=1;$

6) $y'+\dfrac{y}{x}=2\ln x+1,\ y(1)=2;$

7) $y'-\dfrac{2y}{x}=x^3;$ **8)** $y'+4xy=2x\mathrm{e}^{-x^2}y^{1/2};$

9) $y'-\dfrac{y}{x\ln x}=x\ln x,\ y(\mathrm{e})=\dfrac{\mathrm{e}^2}{2};$ **10)** $y'-4\dfrac{y}{x}=xy^{1/2};$

11) $4xy'+3y+\mathrm{e}^x x^4y^5=0;$ **12)** $y'+2xy=2x^3y^3,\ y(0)=1;$

13) $y'+y=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^x y^{\frac{1}{2}},\ y(0)=\dfrac{9}{4};$ **14)** $y'-y=xy^2,\ y(0)=1$**;**

15) $y'-yx^{-\frac{1}{2}}=y^2\mathrm{e}^{2\sqrt{x}};$ **16)** $(2x+y)\mathrm{d}x+(x+2y)\mathrm{d}y=0;$

17) $\mathrm{e}^y\mathrm{d}x+\left(x\mathrm{e}^y-2y\right)\mathrm{d}y=0;$ **18)** $y\mathrm{e}^x\mathrm{d}x+\left(y+\mathrm{e}^x\right)\mathrm{d}y=0;$

19) $\dfrac{y}{x}\mathrm{d}x+\left(y^3+\ln x\right)\mathrm{d}y=0,\ y(1)=1;$

20) $2x\cos^2 y\mathrm{d}x+\left(2y-x^2\sin 2y\right)\mathrm{d}y=0;$

21) $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^y}-\left(\dfrac{x}{\mathrm{e}^y}+2y\right)\mathrm{d}y=0,\ y(5)=0;$

22) $\left(x^2+y^2+y\right)\mathrm{d}x+\left(2xy+x+\mathrm{e}^y\right)\mathrm{d}y,\ y(0)=0;$

23) $\dfrac{x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=\left(\dfrac{y}{x^2+y^2}-1\right)\mathrm{d}x,\ y(1)=1.$

Ответы:

26.1. 1) $y=\dfrac{x}{2}+\dfrac{x^3}{2},\ y=\dfrac{1}{2}\left(x+x^3\right);$ **2)** $y=\dfrac{1}{x^2}(x\ln x-x+2);$

3) $y=\sin x;$ **4)** $y=\sin x(2\cos x+c)^{-\frac{1}{2}};$ **5)** $y=\mathrm{e}^{-x}(x+1);$

6) $y=\left(\dfrac{x^2}{2}+1\right)\mathrm{e}^{-x^2};$ **7)** $y=(x+c)\,\mathrm{tg}\dfrac{x}{2},\ y=\left(x+1-\dfrac{\pi}{2}\right)\mathrm{tg}\dfrac{x}{2};$

8) $y=\arcsin x+1+c\mathrm{e}^{\arcsin x};$ **9)** $y=x^2(x+c)^2,\ y=x^4;$

10) $y=\dfrac{c+\mathrm{e}^{x^2}}{x},\ y=x^{-1}\mathrm{e}^{x^2};$ **11)** $y=0,\ y^2=x^{-4}\left(cx^2+1\right)^{-1};$

12) $y^2+x^2-xy+x-y-1=0;$

13) $\left(x^2-y^2\right)^{\frac{1}{2}}-x+C=0,\ \left(x^2-y^2\right)^{\frac{1}{2}}-x+1=0;$

14) $x^2+xy+y^2-7=0;$ **15)** $\dfrac{x}{\mathrm{e}^y}-y^2=C;$

16) $y^2+x^2\cos^2 y-C=0;$ **17)** $4y\ln x+y^4=1;$

18) $xy-2x^{-1}+3y^{-1}=4;$ **19)** $3x^2y-y^3=C,\ 3x^2y-y^3+1=0;$

20) $x^3y-y^3+x^2=C;$ **21)** $x^3+2x^2-2y^2-3xy^2=8;$

22) $\left(\mathrm{e}^y-1\right)\left(1+x^2\right)^{-1}+\mathrm{e}^3-1=0;$ **23)** $y\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}+x+C=0;$

24) $2^{-1}\left(y^2+x^2\right)+y^{-1}\sin^2 x-2^{-1}=0.$

26.2. 1) $y = Cx^2 e^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{x^2}$; **2)** $y = -e^x + \frac{x}{2} + e^{2x} + \frac{1}{4}$;

3) $y = \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3}$; **4)** $y = e^{-x^2}\left(1 + \frac{x^2}{2}\right)$; **5)** $y = \left(1 + x^2\right)\left(x + 1\right)$;

6) $y = x\ln x + \frac{2}{x}$; **7)** $y = \frac{x^4}{6} + \frac{C}{x^2}$; **8)** $y^2 = e^{-2x^2}\left(C + \frac{1}{2}x^2\right)^2$;

9) $y = \frac{x^2 \ln x}{2}$; **10)** $y = x^4\left(\frac{1}{2}\ln|x| + C\right)^2$; **11)** $y^{-4} = \left(e^x + C\right)x^3$;

12) $\frac{1}{y^2} = x^2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{2x^2}$; **13)** $y = e^{-x}\left(\frac{1}{2}e^x + 1\right)^2$;

14) $y = -e^x + \frac{x}{2} + e^{2x} + \frac{1}{4}$; **15)** $y = e^{2\sqrt{x}}\left(\frac{e^{\sqrt{2x}}}{2}\sqrt{x} - \frac{1}{8}e^{2\sqrt{x}} + C\right)$;

16) $x^2 + xy + y^2 = C$; **17)** $xe^y - y^2 = C$; **18)** $ye^x + \frac{y^2}{2} = C$;

19) $y\ln x + \frac{1}{4y^4} = \frac{1}{4}$; **20)** $x^2 \cos y + y^2 = C$; **21)** $xe^{-y} + y^2 = 5$;

22) $\frac{x^3}{3} + xy^2 + xy + e^y = 0$; **23)** $\operatorname{arctg}\frac{y}{x} - x = \frac{\pi}{4} - 1$.

Занятие 27. Дифференциальные уравнения высших порядков, допускающие понижения порядка

Аудиторные задания

27.1. Решить уравнения:

1) $y'' = x^2 - 2x$; **2)** $y''' = e^{2x}$, $y(0) = \frac{9}{8}$, $y'(0) = \frac{1}{4}$, $y''(0) = -\frac{1}{2}$;

3) $y''' = x - \cos 2x$, $y(0) = 0$, **4)** $y'' = 2x\ln x$; $y'(0) = 1$, $y''(0) = 0$;

5) $y^{\mathrm{IV}} = \sin 2x$; **6)** $y''' = x + \cos x$;

7) $y'' = -6x$, $y(0) = y'(0) = 0$; **8)** $y''' = e^{-x}$, $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$;

9) $xy''=y'$; 10) $y'=x\ln xy''$;

11) $y''=xe^x$, $y(0)=y'(0)=0$; 12) $y'''=-\cos x$;

13) $y'''=\dfrac{2}{x^3}$; 14) $(1+\sin x)y'''-\cos xy''=0$;

15) $x^2+2y'x=6y''$; 16) $xy''=y'$;

17) $xy''=\sin x$; 18) $y''-xy''+y'=0$;

19) $y''-\dfrac{y'}{x}=0$; 20) $(x+1)y'''-y''=0$;

21) $x^3y'''=6$, $y(1)=0$;

22) $y''-2y'\operatorname{ctg}x=\sin^3 x$; $y'(0)=5$, $y''(1)=1$;

23) $y''+50\sin y\cos^3 y=0$;

24) $3y'y''=e^y$, $y(-3)=0$, $y'(-3)=1$; $y(0)=0$, $y'(0)=5$;

25) $yy''=y'(y'+1)$; 26) $y''=e^{2y}$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$;

27) $2y'''-3(y')^2=0$, $y(0)=-3$; 28) $yy''=y'^2$; $y'(0)=1$, $y''(0)=-1$;

29) $y^3y''+4\left(y-y^4\right)=0$;

30) $y''\cos y=(y')^2\sin y$; $y(0)=\sqrt{2}$, $y'(0)=\sqrt{2}$;

31) $y^3y''-1=0$; 32) $y''=2yy'$; 33) $yy''=-y'^2$;

34) $y'^2+2yy''=0$; 35) $yy''+y'^2-1=0$; 36) $y^3y''-1=0$;

37) $y''+y'^2-2e^{-y}=0$.

Домашние задания

27.2. Решить уравнения:

1) $y''=\operatorname{arctg}x$; **2)** $y''=xe^x$; **3)** $y'''=x\sqrt{x}$; **4)** $y''=\ln x+x$;

5) $y^{\mathrm{IV}}=x-1$; **6)** $xy^{\mathrm{IV}}=1$; **7)** $y''=-\dfrac{x}{y}$; **8)** $x(y''-x)=y'$;

9) $x^2y''-(y')^2=0$; **10)** $y''=\sin 2x+\sec^2 x$;

11) $xy'' = y'\ln y',\ y(1) = y'(1) = \mathrm{e};$

12) $2yy'' + y^2 - (y')^2 = 0,\ y(0) = y'(0) = 1;$ **13)** $yy'' - (y')^3 = 0;$

14) $y''' - 3yy' = 0,\ y(0) = y'(0) = 1,\ y''(0) = \dfrac{3}{2};$

15) $3yy'' - 2y = 0,\ y(0) = y'(0) = 1.$

Ответы:

27.1. 1) $y = \dfrac{x^4}{12} - \dfrac{x^3}{3} + C_1x + C_2;$ **2)** $y = \dfrac{1}{8}\mathrm{e}^{2x} - \dfrac{x^2}{2} + 1;$

3) $y = \dfrac{1}{24}x^4 + \dfrac{1}{8}\sin 2x + \dfrac{3}{4}x;$ **4)** $y = \dfrac{x^3}{3}\ln x - \dfrac{5}{18}x^3 + C_1x + C_2;$

5) $y = \dfrac{1}{16}\sin 2x + C_1\dfrac{x^3}{6} + C_2\dfrac{x^2}{2} + C_3x + C4;$

6) $y = \dfrac{x^4}{24} - \sin x + C_1x^2 + C_2x + C_3;$

7) $y = -x^3;$ **8)** $y = \mathrm{e}^{-x} + \dfrac{x^2}{2} - x + 1;$ **9)** $y = C_1x^2 + C_2;$

10) $y = C_1(x\ln x - x) + C_2;$

11) $y = (x-2)\mathrm{e}^x + x + C_2,\ y = (x-2)\mathrm{e}^x + x + 2;$

12) $y = \sin x + C_1x^2 + C_2x + C_3;$ **13)** $y = \ln|x| + C_1x^2 + C_2x + C_3;$

14) $y = C_1\left(\dfrac{x^2}{2} - \sin x\right) + C_2x + C_3;$ **15)** $y = \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{1}{4}C_1x^4 + C_2;$

16) $y = C_1x^2 + C_2;$ **17)** $y = x\int\limits_0^x \dfrac{\sin t}{t}\mathrm{d}t + \cos x + C_1x + C_2;$

18) $y = C_1\dfrac{x^2}{2} - C_1x + C_2;$ **19)** $y = C_1\dfrac{x^2}{2} + C_2;$

20) $y = \dfrac{C_1x^3}{6} + \dfrac{C_1x^2}{2} + C_2x + C_3;$ **21)** $y = 3\ln|x| + 2x^2 - 2x;$

22) $y=\frac{C_1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\sin 2x\right)+C_2-\frac{\sin^3 x}{3}$; **23)** $y=\operatorname{arctg}5x$;

24) $y=3\ln\frac{3}{|x|}$, $x>0$; **25)** $C_1y-1=C_2e^{C_1x}$, $y=C-x$, $y=0$;

26) $y=\ln|x-1|$; **27)** $y(x+2)+x+6=0$;

28) $y\ln|y|+x+C_1y+C_2=0$, $y=C$; **29)** $y=\sqrt{e^{4x}+1}$;

30) $y=\arcsin(C_1x+C_2)$; **31)** $C_1y^2-(C_1x+C_2)^2=1$;

32) $y=C_1\operatorname{tg}(C_1x+C_2)$, $y=C$; **33)** $y^2-C_1x-C_2=0$;

34) $y^3=C_1(x+C_2)^2$, $y=C$; **35)** $y^2-x^2-C_1x-C_2=0$;

36) $(C_1x+C_2)^2+1+C_1y^2=0$; **37)** $(x+C_2)^2-e^y-C_1=0$.

27.2. 1) $y=\frac{1}{2}(x^2-1)\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}x\ln(1+x^2)+\frac{1}{2}x+C_1x+C_2$;

2) $y=\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{3}{4}x^2+\frac{x^3}{6}+C_1x+C_2$;

3) $y=\frac{8}{315}x^4\sqrt{x}+C_1x^2+C_2x+C_3$;

4) $y=\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{3}{4}x^2+\frac{x^3}{6}+C_1x+C_2$;

5) $y=\frac{(x-1)^5}{120}+C_1x^3+C_2x^2+C_3x+C_4$;

6) $y=\frac{x^3}{6}\ln|x|+C_1x^3+C_2x^2+C_3x+C_4$;

7) $y=\pm\frac{1}{2}\left(x\sqrt{C_1^2-x^2}+C_1^2\arcsin\frac{x}{C_1}\right)+C_2$;

8) $y=\frac{x^3}{3}+C_1x^2+C_2$; **9)** $C_1x-C_1^2y=\ln|C_1x+1|+C_2$;

10) $y=-\ln|\cos x|+\sin x-\frac{x^2}{2}+C_1x+C_2$; **11)** $y=e^x$;

12) $y=\sin x+1$ **;** **13)** $y\ln y+x+C_1y+C_2=0,\ y=C$;

14) $y=4(x\pm 2)^{-2}$; **15)** $y=\left(1+\dfrac{x}{3}\right)^3$.

Занятие 28. Линейные однородные и неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Метод Лагранжа

Аудиторные задания

28.1. Решить уравнения:

1) $y''-2y'=0$; **2)** $y''-6y'+9y=0$;

3) $y''+y'-2y=0$; **4)** $y''+4y=0$;

5) $y'''+y''=0,\ y(0)=1,\ y'(0)=0$; **6)** $y''-4y'=0$; $y''(0)=1$;

7) $3y''-2y'-8y=0$; **8)** $y''-2y'-2y=0$;

9) $2y''-5y'+2y=0$; **10)** $y''-2y'+3y=0$; $y(0)=1,\ y'(0)=3$;

11) $y'''-8y=0$; **12)** $y''-2y'+2y=0,\ y(0)=0,\ y'(0)=1$.

28.2. Даны корни характеристического многочлена, записать решение соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения:

1) $\kappa_{1,2,3,4}=3\pm 2i,\ \kappa_{5,6}=1,\ \kappa_7=0$; **2)** $\kappa_{1,2,3,4}=5;\ \kappa_{5,6}=\pm i$;

3) $\kappa_{1,2,3,4,5,6}=0,\ \kappa_{7,8,9,10}=-1\pm 4i$;

4) $\kappa_1=1,\ \kappa_{2,3}=5\pm 7i,\ \kappa_{4,5}=-8$; **5)** $\kappa_{1,2,3}=4;\ \kappa_{5,6}=7\pm 2$.

28.3. Решить уравнения методом вариации:

1) $y''+4y=\dfrac{1}{\sin^2 x}$; **2)** $y''+3y'+2y=\dfrac{1}{e^x+1}$;

3) $y''+2y'+2y=\dfrac{1}{e^x\sin x}$; **4)** $y''+4y'+4y=e^{-2x}\ln x$;

5) $y''+y=\operatorname{ctg} x$; **6)** $y''-2y'+y=\dfrac{e^x}{\sqrt{4-x^2}}$; **7)** $y''+y'=\dfrac{1}{\sin x}$;

8) $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x}$; **9)** $y'' - 3y' + 2y = \dfrac{e^{2x}}{e^x + 1}$;

10) $y'' + 4y' + 4y = \dfrac{e^{-2x}}{x^3}$; **11)** $y'' + 2y' + y = \dfrac{1}{e^x\sqrt{4 - x^2}}$;

12) $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{4 + x^2}$; **13)** $y'' + y = \dfrac{1}{\cos x}$.

Домашние задания

28.4. Решить уравнение:

1) $y'' - 2y' + y = 0$; **2)** $y'' + 3y' - 4y = 0$; ;

3) $y'' + 6y' + 9y = 0$;

4) $y'' - 2y' + 2y = 0,\ \ y'(0) = y(0) = 1;\ \ y(0) = y'(0) = 1$;

5) $y''' - y' = 0,\ \ y(0) = 3$, **6)** $y^{\text{IV}} - 3y'' - 4y = 0;\ \ y'(0) = -1,\ y''(0) = 1$;

7) $y^{\text{IV}} + 2y'' + y = 0$; **8)** $y^{\text{IV}} + 5y'' + 4y = 0$;

9) $y^{\text{V}} + 3y^{\text{IV}} + 3y''' + y'' = 0$; **10)** $y'' + 4y' + 5y = 0$;

11) $y'' + 2y' + y = \dfrac{1}{xe^x}$; **12)** $y'' + 4y = \dfrac{1}{\cos 2x}$; **13)** $y'' + 9y = 3\,\mathrm{tg}\,3x$;

14) $y'' + 4y = \mathrm{ctg}\,2x$; **15)** $y'' - 4y' + 5y = \dfrac{e^{2x}}{\cos x}$.

Ответы:

28.1. 1) $y = C_1 + C_2e^{2x}$; **2)** $y = e^{3x}(C_1 + C_2x)$;

3) $y = C_1e^{-2x} + C_2e^x$; **4)** $y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x$; **5)** $y = x + e^{-x}$;

6) $y = C_1 + C_2e^{4x}$; **7)** $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-\frac{4}{3}x}$;

8) $y = C_1e^{(1-\sqrt{3})x} + C_2e^{(1+\sqrt{3}x)}$; **9)** $y = C_1e^{2x} + C_2e^{x/2}$;

10) $y = e^x\cos\sqrt{2}x + \sqrt{2}\sin\sqrt{2}x$;

11) $y = C_1e^{2x} + e^{-x}\left(C_2\cos\sqrt{3}x + C_3\sin\sqrt{3}x\right)$; **12)** $y = e^x\sin x$.

28.2. 1) $y=e^{3x}\left(\left(C_1+C_2x\right)\cos 2x+\left(C_3+C_4x\right)\sin 2x\right)+\left(C_5+C_6x\right)e^{x}+C_7;$

2) $y=(C_1+C_2x+C_3x^2+C_4x^3)e^{5x}+C_5\cos x+C_6\sin x;$

3) $y=C_1+C_2x+C_3x^2+C_4x^3+C_5x^4+C_6x^5+e^{-x}\left(\left(C_7+C_8x\right)\cos 4x+\right.$ $\left.+\left(C_9+C_{10}x\right)\sin 4x\right);$

4) $y=C_1e^{x}+e^{5x}\left(C_2\cos 7x+C_3\sin 7x\right)+\left(C_4+C_5x\right)e^{-8x};$

5) $y=(C_1+C_2x+C_3x^2)e^{4x}+e^{7x}\left(C_4\cos 2x+C_5\sin x\right).$

28.3. 1) $y=\left(C_1-\ln\left|\sin x\right|\right)\cos 2x+\left(C_2-x-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}x\right)\sin 2x;$

2) $y=\left(e^{-x}+e^{-2x}\right)\ln\left(e^{x}+1\right)+C_1e^{-x}+C_2e^{-2x};$

3) $y=\left(C_1-x\right)e^{-x}\cos x+\left(C_2+\ln\left|\sin x\right|\right)e^{-x}\sin x;$

4) $y=\left(C_1+C_2x+\frac{x^2\ln x}{2}-\frac{3}{4}x^2\right)e^{-2x};$

5) $y=C_1\cos x+C_2\sin x+\sin x\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|;$

6) $y=\left(C_1+C_2x+\sqrt{4-x^2}+x\arcsin\frac{x}{2}\right)e^{x};$

7) $y=\left(C_1-x\right)\cos x+\left(C_2+\ln\left|\sin x\right|\right)\sin x;$

8) $y=e^{x}(x\ln\left|x\right|C_1x+C_2);$

9) $y=\left(C_1+x-\ln\left(e^{x}+1\right)\right)e^{2x}+\left(C_2+\ln\left(e^{x}+1\right)\right)e^{x};$

10) $y=e^{-2x}\left(C_1+C_2x+\frac{1}{2x}\right);$

11) $y=\left(C_1+C_2x+\sqrt{4-x^2}+x\arcsin\frac{x}{2}\right)e^{-x};$

12) $y=\left(C_1+C_2x-\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+\frac{x}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}\right)e^{x};$

13) $y=\left(C_1+\ln\left|\cos x\right|\right)\cos x+\left(C_2+x\right)\sin x.$

28.4. **1)** $y = e^{x}\left(C_1 + C_2 x\right)$; **2)** $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-4x}$;

3) $y = e^{-3x}\left(1 + 4x\right)$; **4)** $y = e^{x}\left(\cos x + \sin x\right)$; **5)** $y = 2 + e^{-x}$;

6) $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{2x} + C_3 \sin x + C_4 \cos x$;

7) $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x\left(C_3 \cos x + C_4 \sin x\right)$;

8) $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x$;

9) $y = C_1 + C_2 x + e^{-x}\left(C_3 + C_4 x + C_5 x^2\right)$;

10) $y = e^{\frac{1}{2}x}\left(C_1 + C_2 x\right)$; **11)** $y = \left(C_1 + C_2 x\right)e^{-x} + x e^{-x} \ln|x|$;

12) $y = \dfrac{x}{2}\sin 2x + \dfrac{\cos 2x}{4}\ln\left|\cos 2x\right| + C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x$;

13) $y = \left(C_1 - \dfrac{1}{3}\ln\left(\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{3}{2}x\right)\right)\right)\cos 3x + C_2 \sin 3x$;

14) $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \dfrac{1}{4}\sin 2x \ln \operatorname{tg} 2x$;

15) $y = \left(\left(C_1 + \ln\cos x\right)\cos x + \left(C_2 + x\right)\sin x\right)e^{2x}$.

Занятие 29. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами с правой частью специального вида

Аудиторные задания

29.1. Решить уравнения:

1) $y'' - 2y' = 2e^{x}$, $y(1) = -1$, $y'(1) = 0$; **2)** $y'' + 8y' = 8x$;

3) $y'' + y = 4e^{x}$, $y(0) = 4$, $y'(0) = 3$;

4) $y'' + y = 2\cos x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$; **5)** $y'' - 3y' + 2y = xe^{x}$;

6) $y'' + 5y' = 50\cos 5x$; **7)** $y'' - 5y' + 4y = 4x^2 e^{2x}$;

8) $y'' - 4y' + 8y = e^{2x} + \sin 2x$; **9)** $y'' - 2y' + 2y = 4e^{x}\cos x$;

10) $y'' + 4y = \sin x$, $y(0) = y'(0) = 1$; $y(\pi) = \pi e^{\pi}$, $y'(\pi) = e^{\pi}$;

11) $y'' + 3y' + 2y = x\sin x$; **12)** $y'' - 9y = e^{3x}\cos x$;

13) $y'' + y = x^2 \sin x$; **14)** $y'' - 3y' + 2y = x\cos x$;

15) $y'' - 6y' + 9y = 9x^2 - 12x + 2$;

16) $y'' - 4y' + 5y = e^{2x}(2\cos x + \sin x)$; $y(0) = 1,\ y'(0) = 3$;

17) $y'' - 2y' + y = x^3$; **18)** $y'' + 2y' + y = x^2 e^{-x}\cos x$;

19) $y'' - 3y' + 2y = \left(x^2 + x\right)e^{3x}$; **20)** $y'' - 2y = 2xe^x(\cos x - \sin x)$.

29.2. Дана правая часть уравнения и известны характеристические числа соответствующего однородного линейного уравнения, требуется записать общее решение:

1) $f(x) = 3e^x - 5x\cos x + 8,\ k_{1,2,3,4} = \pm i,\ k_{5,6} = 1,\ k_7 = 0$;

2) $f(x) = x^2 e^{2x} - 3x^3 + 4\cos 7x,\ k_{1,2} = 5,\ \kappa_3 = 2,\ k_4 = k_5 = k_6 = 0$;

3) $f(x) = (x-1) - e^x - 2\cos x,\ k_{1,2} = 0,\ k_3 = 2,\ k_4 = 1,\ k_{5,6} = 1 \pm i$;

4) $f(x) = xe^x + \sin 9x,\ k_{1,2} = 1 \pm i,\ k_{3,4} = \pm 9i$;

5) $f(x) = 2x^2 - e^x + 5x^3 - 2,\ k_{1,2} = 1,\ \kappa_3 = 0,\ k_4 = \pm i$;

6) $f(x) = -2xe^{7x} - 3\cos 7x,\ k_{1,2} = 5,\ k_3 = 7,\ k_{4,5} = 1 \pm 7i,\ k_{6,7} = \pm 7i$;

7) $f(x) = 5 - 2x\sin 4x,\ k_{1,2,3,4} = 0,\ k_{5,6} = 1 \pm 4i$;

8) $f(x) = e^{3x}\cos 2x - \sin 5x,\ k_{1,2,3} = 4,\ k_{5,6} = 3 \pm 2i$;

9) $f(x) = x^2 - 5,\ k_{1,2,3} = 1,\ k_{4,5} = \pm i$;

10) $f(x) = -4\sin x + \cos x - 6x,\ k_1 = 0,\ k_{2,3} = \pm 2i$.

29.3. Определить к какому виду (I–XI) относятся дифференциальные уравнения (1–35):

I. Уравнение с разделяющимися переменными:

$M_1(x)N_1(y)\mathrm{d}x + M_2(x)N_2(y)\mathrm{d}y = 0.$

II. Уравнение однородное первого порядка:

$y' = f(x, y) = \varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$, где $f(x, y)$ – однородная функция нулевого измерения $y = ux$.

III. Уравнение в полных дифференциалах:

$$P(x, y)\mathrm{d}x + Q(x, y)\mathrm{d}y = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

IV. Линейное уравнение первого порядка:

$$y' + P(x)y = q(x), \quad y = uv.$$

V. Уравнение Бернулли:

$$y' + P(x)y = q(x)y^{\alpha}, \quad y = uv.$$

VI. Линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 0.$$

VII. Линейное неоднородное уравнение, решаемое только методом Лагранжа:

$$y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x) y = f(x).$$

VII. Линейное неоднородное уравнение с постоянными коэффициентами со специальной правой частью:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = f(x),$$

где $f(x) = \mathrm{e}^{\alpha x}\left(P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x\right)$.

IX. Уравнение высших порядков вида:

$$y^{(n)} = f(x).$$

X. Уравнение высших порядков вида:

$$F\left(x, y^{(k)}, \ldots, y^{(n)}\right) = 0; \quad y^{(k)} = P, \ k < n.$$

XI. Уравнение высших порядков вида:

$$F\left(y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0, \quad y' = P, \ y'' = \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y}P, \ldots.$$

XII. Уравнение высших порядков вида:

$$F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0, \quad y' = P, \ y'' = \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}, \ldots.$$

1) $y'' + y' = \mathrm{e}^x$;

2) $y\mathrm{e}^x\mathrm{d}x + (x+1)(y-1)\mathrm{d}y = 0$;

3) $y' + x^2 y = x + 2$;

4) $(x+2)y''' = y''$;

5) $xy\,\mathrm{d}x = \left(x^2 + y^2\right)\mathrm{d}y$;

6) $y' + \dfrac{1}{x}y = xy^3$;

7) $y'' - y' + 3y = x^2\mathrm{e}^x$;

8) $\left(x^2 + y^2\right)\mathrm{d}x + 2yx\,\mathrm{d}y = 0$;

9) $y'' - 3y' + y = 0$;

10) $y^{(\mathrm{IV})} = \cos x$;

11) $y'' - y = \mathrm{tg}\,x$;

12) $y''y = 1$;

13) $y'' - 5y' = 0$;

14) $y' + 3x^4y = x^2 - 3$;

15) $y^2x^2\mathrm{d}x = \left(x^4 + y^4\right)\mathrm{d}y$;

16) $y' - 5xy = \mathrm{e}^x y^2$;

17) $y''' = x^3 + 5$;

18) $y'' + y' = 3yy'$;

19) $y\mathrm{e}^x\mathrm{d}x - \left(1 - \mathrm{e}^x\right)\mathrm{d}y = 0$;

20) $y'' - y' + 2y = x^2\mathrm{e}^x\cos x$;

21) $y' = \dfrac{2xy}{x^2 - y^2}$;

22) $(x-3)(y+2)\mathrm{d}x + x^2y^3\mathrm{d}y = 0$;

23) $y'' - 3y'y = 0$;

24) $y^{\mathrm{V}} = x\mathrm{e}^x$;

25) $y\cos x\,\mathrm{d}x + (1 + \sin x)\mathrm{d}y = 0$;

26) $y'' + y' - y = \dfrac{\mathrm{e}^{5x}}{1 - \mathrm{e}^{5x}}$;

27) $y'' - y' + 4(y + y') = 0$;

28) $y' - 7x^2y = \left(x^3 - 1\right)y^3$;

29) $y''x - y'y = x$;

30) $x\cos y\,\mathrm{d}y + \sin x\,\mathrm{tg}\,y\,\mathrm{d}x = 0$;

31) $y'' + 3y' = \dfrac{4}{\cos x}$;

32) $y^{\mathrm{IV}} - 3xy^{\mathrm{III}} = y$;

33) $y'' - 3y' + 5y = 0$;

34) $(x - y)\mathrm{d}x + (x + y)\mathrm{d}y = 0$;

35) $2y'' - 3y'x + 2xy = 0$.

Домашние задания

29.4. Решить уравнения:

1) $y'' + 16y = 32y^{4x}$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$;

2) $y'' - 4y = \mathrm{e}^{2x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -8$;

3) $y'' - 2y' + y = -12\cos 2x - 9\sin 2x$;

4) $y'' - 4y' = 3x + 1$, $y(0) = -2$, $y'(0) = 0$;

5) $y'' + 9y' = 3\cos 3x,\ \ y(0) = 1,\ \ y'(0) = 2;$

6) $y'' + 3y' = 1 + \sin 3x + 4\mathrm{e}^{2x},\ \ y(0) = 0,\ \ y'(0) = 1;$

7) $y'' - 3y' + 2y = (34 - 12x)\mathrm{e}^{-x};$ **8)** $y'' + y' = 2x - 1;$

9) $y'' + y = 2 + \cos 2x;$ **10)** $y'' + 6y' + 10y = x^2 + 4\mathrm{e}^{x};$

11) $y'' + 3y' - 4y = 5\sin x;$ **12)** $y'' + 2y' + y = 8\mathrm{e}^{-x};$

13) $y'' + 4y = 2x^2 + 3x + 1;$ **14)** $y'' - 4y' + 3y = (2x + 3)\mathrm{e}^{2x};$

15) $y'' - 4y = 2\sin x + \cos 2x.$

Ответы:

29.1. 1) $y = \mathrm{e}^{2x-1} - 2\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e} - 1;$ **2)** $y = (C_1 + C_2 x)\mathrm{e}^{2x} + \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{x}{2} + \dfrac{3}{8};$

3) $y = 2\cos x - 5\sin x + 2\mathrm{e}^{x};$ **4)** $y = \cos x + x\sin x;$

5) $y = C_1\mathrm{e}^{2x} + C_2\mathrm{e}^{x} - \left(\dfrac{x^2}{2} + x\right)\mathrm{e}^{x};$

6) $y = C_1 + C_2\mathrm{e}^{-5x} + \sin 5x - \cos 5x;$

7) $y = C_1\mathrm{e}^{x} + C_2\mathrm{e}^{4x} - \left(2x^2 - 2x + 3\right)\mathrm{e}^{2x};$

8) $y = \mathrm{e}^{2x}\left(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x\right) + \dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{2x} + \dfrac{1}{10}\cos 2x + \dfrac{1}{20}\sin 2x;$

9) $y = \mathrm{e}^{x}\left((2x - \pi - 1)\sin x - \pi\cos x\right);$

10) $y = \cos 2x + \dfrac{1}{3}(\sin 2x + \sin x);$

11) $y = C_1\mathrm{e}^{-x} + C_2\mathrm{e}^{-2x} + \left(-\dfrac{3}{10}x + \dfrac{17}{50}\right)\cos x + \left(\dfrac{1}{10}x + \dfrac{3}{25}\right)\sin x;$

12) $y = C_1\mathrm{e}^{3x} + C_2\mathrm{e}^{-3x} + \mathrm{e}^{3x}\left(\dfrac{6}{37}\sin x - \dfrac{\cos x}{37}\right);$

13) $y = \left(C_1 + \dfrac{x}{4} - \dfrac{x^3}{6}\right)\cos x + \left(C_2 + \dfrac{x^2}{4}\right)\sin x;$

14) $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + (0,1x - 0,12)\cos x - (0,3x + 0,34)\sin x;$

15) $y = x^2 + e^{3x};$

16) $y = \left(C_1 \cos x + C_2 \sin x - \dfrac{x}{2}\cos x + x\sin x \right) e^{2x};$

17) $y = (C_1 + C_2 x)e^x + x^3 + 6x^2 + 18x + 24;$

18) $y = (C_1 + C_2 x)e^{-x} + e^{-x}\left(\left(6 - x^2\right)\cos x + 4x\sin x\right);$

19) $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \left(\dfrac{x^2}{2} - x + 1 \right) e^{3x};$

20) $y = C_1 e^{-\sqrt{2}x} + C_2 e^{\sqrt{2}x} + xe^x \sin x + e^x \cos x.$

29.2. 1) $y = (C_1 + C_2 x)\cos x + (C_3 + C_4 x)\sin x + (C_5 + C_6 x)e^x + C_7 +$
$+ x^2 A_1 e^x + x^2 \left((A_2 x + A_3)\cos x + (A_4 x + A_5)\sin x \right) + A_6 x;$

2) $y = (C_1 + C_2 x)e^{5x} + C_3 e^{2x} + C_4 + C_5 x + C_6 x^2 + x\left(A_1 x^2 + A_2 x + A_3\right)e^{2x} +$
$+ x^3 \left(A_4 + A_5 x + A_6 x^2 + A_7 x^3 \right) + A_8 \cos 7x + A_9 \sin 7x;$

3) $y = C_1 + C_2 x + C_3 e^{2x} + C_3 e^x + e^x \left(C_4 \cos x + C_5 \sin x \right) + x^2 \left(A_1 x + A_2 \right) +$
$+ x A_3 e^x + + A_4 \cos x + A_5 \sin x;$

4) $y = e^x \left(C_1 \cos x + C_2 \sin x \right) + C_3 \cos 9x + C_4 \sin 9x + \left(A_1 x + A_2 \right) e^x +$
$+ x\left(A_3 \cos 9x + A_4 \sin 9x \right);$

5) $y = (C_1 + C_2 x)e^x + C_3 + C_4 \cos x + C_5 \sin x + \left(A_1 x^3 + A_2 x^2 + A_3 x + A_4 \right) \times$
$\times x + x^2 A_5 e^x;$

6) $y = (C_1 + C_2 x)e^{5x} + C_3 e^{7x} + e^x \left(C_4 \cos 7x + C_5 \sin 7x \right) + C_6 \cos 7x +$
$+ C_7 \sin 7x + e^{7x} x\left(A_1 x + A_2 \right) + x\left(A_3 \cos 7x + A_4 \sin 7x \right);$

7) $y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 x^3 + e^x \left(C_5 \cos 4x + C_6 \sin 4x \right) + x^4 A_1 +$
$+ \left(A_2 x + A_3 \right)\cos 4x + (A_3 x + A_4)\sin 4x;$

8) $y=(C_1+C_2x+C_3x^2)e^{4x}+e^{3x}\left(C_5\cos 2x+C_6\sin 2x\right)+xe^{3x}(A_1\cos 2x+$
$+A_2\sin 2x)+A_3\cos 5x+A_4\sin 5x;$

9) $y=(C_1+C_2x+C_3x^2)e^{x}+C_4\cos x+C_5\sin x+A_1x^2+A_2x+A_3;$

10) $y=C_1+C_2\cos 2x+C_3\sin 2x+A_1\cos x+A_2\sin x+x(A_3x+A_4).$

29.3. 1) VIII; **2)** I; **3)** IV; **4)** X; **5)** II; **6)** V; **7)** VIII; **8)** II, III; **9)** VI; **10)** X; **11)** VII; **12)** XI; **13)** VI; **14)** IV; **15)** II; **16)** V; **17)** IX; **18)** XI; **19)** III; **20)** VIII; **21)** II, III; **22)** I; **23)** XI; **24)** IX; **25)** III; **26)** VIII; **27)** XI; **28)** V; **29)** XII; **30)** I; **31)** VII; **32)** X; **33)** VI; **34)** II; **35)** XII.

29.4. 1) $y=\cos 4x-\sin 4x+e^{4x};$ **2)** $y=3e^{-2x}-2e^{2x}+2xe^{2x};$

3) $y=-2e^{-x}-4xe^{-x}+3\sin 2x;$

4) $y=\frac{1}{64}(25+39e^{4x}-28x-24x^2);$

5) $y=-\frac{1}{90}e^{-9x}(7-10e^{9x}+3e^{9x}\cos 3x-9e^{9x}\sin 3x);$

6) $y=C_1e^{-3x}+C_2+\frac{x}{3}+\frac{2}{5}e^{2x}-\frac{1}{18}(\cos 3x+\sin 3x);$

7) $y=C_1e^{x}+C_2e^{2x}+(4-2x)e^{-x};$ **8)** $y=C_1+C_2e^{-x}+x^2-3x;$

9) $y=C_1\cos x+C_2\sin x+2-\frac{1}{15}\cos 2x-\frac{4}{15}\sin 2x;$

10) $y=e^{-3x}\left(C_1\cos x+C_2\sin x\right)+\frac{1}{10}x^2-\frac{3}{25}x+\frac{13}{250}+\frac{4}{17}e^{x};$

11) $y=C_1e^{-4x}+C_2e^{x}-\frac{15}{34}\sin x;$

12) $y=C_1e^{-x}+C_2xe^{-x}+4x^2e^{-x};$

13) $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x+\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{4}x;$

14) $y=C_1e^{x}+C_2e^{3x}+(2x+3)e^{2x};$

15) $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}-\frac{1}{40}\left(5\cos 2x+16\sin 2x\right).$

Занятие 30. Решение систем дифференциальных уравнений методом Эйлера и методом исключения

Аудиторные задания

30.1. Решить системы:

1) $\begin{cases} x' = y + t, \\ y' = x - t. \end{cases}$ **2)** $\begin{cases} x' = 2x - 5y, \\ y' = 5x - 6y. \end{cases}$ **3)** $\begin{cases} x' = y + 2e^t, \\ y' = x + t^2. \end{cases}$ **4)** $\begin{cases} y' = x, \\ x' = -x + y. \end{cases}$

5) $\begin{cases} x' = 2x - y, \\ y' = x + 2e^t. \end{cases}$ **6)** $\begin{cases} x' = x - 4y, \\ y' = x - 3y. \end{cases}$ **7)** $\begin{cases} x' = x + y - \cos t, \\ y' = -2x - y + \sin t + \cos t. \end{cases}$

8) $\begin{cases} x' = x + 5y, & x(0) = -2, \\ y' = -x - 3y, & y(0) = 1. \end{cases}$ **9)** $\begin{cases} x' = 2x + y + 2e^t, \\ y' = x + 2y - 3e^{4t}. \end{cases}$

10) $\begin{cases} x' = -x + 2y, & x(0) = 0, \\ y' = -2x - 5y, & y(0) = 1. \end{cases}$ **11)** $\begin{cases} x' = 4x - 3y + \sin t, \\ y' = 2x - y - 2\cos t. \end{cases}$

12) $\begin{cases} x' = y + z, \\ y' = x + z, \\ z' = x + y. \end{cases}$ **13)** $\begin{cases} x' = -3x - 4y, & x(0) = 1, \\ y' = -2x - 5y, & y(0) = 4. \end{cases}$

14) $\begin{cases} x' = 3x - y, \\ y' = 4x - y. \end{cases}$ **15)** $\begin{cases} x' = x + y, \\ y' = 3y - 2x. \end{cases}$ **16)** $\begin{cases} x' = x - y, \\ y' = x + y + e^t. \end{cases}$

17) $\begin{cases} x' = 2y - x + 1, \\ y' = 3y - 2x. \end{cases}$ **18)** $\begin{cases} x' = x - 3y, \\ y' = 3x + y. \end{cases}$ **19)** $\begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = 4y - x. \end{cases}$

20) $\begin{cases} x' = y + \operatorname{tg}^2 t - 1, \\ y' = -x + \operatorname{tg} t. \end{cases}$ **21)** $\begin{cases} x' = x + 3y, & x(0) = 3, \\ y' = -x + 5y, & y(0) = 1. \end{cases}$

22) $\begin{cases} x' = -x + 8y, \\ y' = x + y. \end{cases}$ **23)** $\begin{cases} x' = x + 2y, \\ y' = x - 5\sin t. \end{cases}$ **24)** $\begin{cases} x' = \dfrac{1}{y}, \\ y' = \dfrac{1}{x}. \end{cases}$

25) $\begin{cases} y' = -2y + z - e^{2x}, \\ z' = -3y + 2z + 6e^{2x}. \end{cases}$ **26)** $\begin{cases} x' = 5x - 3y + 2e^{3t}, \\ y' = x + y + 5e^{-t}. \end{cases}$

27) $\begin{cases} x' = y - 5\cos t, \\ y' = 2x + y. \end{cases}$ 28) $\begin{cases} x' = -y + t^2, \\ y' = x + t. \end{cases}$

29) $\begin{cases} x' = 2x - y, \\ y' = y - 2x + 18t. \end{cases}$ 30) $\begin{cases} x' = -2y + 3, \\ y' = 2x - 2t. \end{cases}$

Домашние задания

30.2. Решить системы:

1) $\begin{cases} x' = 2y - 5x + \mathrm{e}^t, \\ y' = x - 6y + \mathrm{e}^{-2t}. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x' = y, & x(0) = 0, \\ y' = -x + 1, & y(0) = 1{,}5. \end{cases}$

3) $\begin{cases} x' = x + y, \\ y' = x - y. \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x' = 2x + y + \cos t, \\ y' = -x + 2\sin t. \end{cases}$

5) $\begin{cases} x' = 2x - y, \\ y' = 3x + 4y. \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x' = 3x - 2y, & x(0) = 1, \\ y' = 4x + 7y, & y(0) = 0. \end{cases}$

7) $\begin{cases} x' = x + y + t, \\ y' = -4x - 3y + 2t. \end{cases}$ 8) $\begin{cases} x' = x + y, & x(0) = 0, \\ y' = -6x + 6y, & y(0) = -1. \end{cases}$

9) $\begin{cases} x' = -y + \mathrm{e}^{3t}, \\ y' = -x + 2\mathrm{e}^{3t}. \end{cases}$ 10) $\begin{cases} x' = 4x + y - \mathrm{e}^{2t}, \\ y' = y - 2x. \end{cases}$

11) $\begin{cases} x' = 2x - 4y, \\ y' = x - 3y + 3\mathrm{e}^t. \end{cases}$ 12) $\begin{cases} x' = 2x - 3y, \\ y' = x - 2y + 2\sin t. \end{cases}$

13) $\begin{cases} x' = 3x + y, & x(0) = -1, \\ y' = -3x + 7y, & y(0) = 1. \end{cases}$ 14) $\begin{cases} x' = 6x - 3y, & x(0) = -2, \\ y' = x + 2y, & y(0) = 0. \end{cases}$

Ответы:

30.1. 1) $\begin{cases} x = C_1\mathrm{e}^t - C_2\mathrm{e}^{-t} + t - 1, \\ y = C_1\mathrm{e}^t + C_2\mathrm{e}^{-t} - t + 1. \end{cases}$

2) $\begin{cases} x = \mathrm{e}^{-2t}\left(C_1\cos 3t + C_2\sin 3t\right), \\ y = \dfrac{1}{5}\mathrm{e}^{-2t}\left(\left(4C_1 - 3C_2\right)\cos 3t + \left(3C_1 + 4C_2\right)\sin 3t\right). \end{cases}$

3) $\begin{cases} x = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + t e^t - t^2 - 2, \\ y = C_1 e^t - C_2 e^{-t} + (t-1) e^t - 2t. \end{cases}$

4) $\begin{cases} y = C_1 \sin t - C_2 \cos t + C_3 e^t, \\ x = C_1 \cos t + C_2 \sin t + C_3 e^t. \end{cases}$

5) $\begin{cases} x = \left(C_1 + C_2 t - t^2\right) e^t, \\ y = \left(C_1 - C_2 + t(C_2 + 2) - t^2\right) e^t. \end{cases}$ **6)** $\begin{cases} x = (2C_1 t + 2C_2 + C_1) e^{-t}, \\ y = (C_1 t + C_2) e^{-t}. \end{cases}$

7) $\begin{cases} x = C_1 \cos t + C_2 \sin t - t \cos t, \\ y = (C_2 - C_1) \cos t - (C_1 + C_2) \sin t + t(\cos t + \sin t). \end{cases}$

8) $\begin{cases} x = -2e^{-t} + 3e^{-7t}, \\ y = e^{-t} + 3e^{-7t}. \end{cases}$ **9)** $\begin{cases} x = C_1 e^t + C_2 e^{3t} + t e^t - e^{4t}, \\ y = -C_1 e^t + C_2 e^{3t} - (t+1) e^t - 2e^{4t}. \end{cases}$

10) $\begin{cases} x = 2t e^{-3t}, \\ y = (1 - 2t) e^{-3t}. \end{cases}$ **11)** $\begin{cases} x = C_1 e^t + 3C_2 e^{2t} + \cos t - 2\sin t, \\ y = C_1 e^t + 2C_2 e^{2t} + 2\cos t - 2\sin t. \end{cases}$

12) $\begin{cases} x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t}, \\ y = C_3 e^{-t} + C_2 e^{2t}, \\ z = -(C_1 + C_3) e^{-t} + C_2 e^{2t}. \end{cases}$ **13)** $\begin{cases} x = -2e^{-t} + 3e^{-7t}, \\ y = e^{-t} + 3e^{-7t}. \end{cases}$

14) $\begin{cases} x = (C_1 + C_2 t) e^t, \\ y = (2C_1 - C_2 + 2C_2 t) e^t. \end{cases}$

15) $\begin{cases} x = e^{2t} (C_1 \cos t + C_2 \sin t), \\ y = e^{2t} \left((C_1 + C_2) \cos t + (C_2 - C_1) \sin t\right). \end{cases}$

16) $\begin{cases} x = (C_2 \cos t + C_2 \sin t - 1) e^t, \\ y = (C_1 \sin t - C_2 \cos t) e^t. \end{cases}$ **17)** $\begin{cases} x = (C_1 + 2C_2 t) e^t - 3, \\ y = (C_1 + C_2 + 2C_2 t) e^t - 2. \end{cases}$

18) $\begin{cases} x = e^t (C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t), \\ y = e^t (C_1 \sin 3t - C_2 \cos 3t). \end{cases}$ **19)** $\begin{cases} x = (C_1 + C_2 t) e^{3t}, \\ y = (C_1 + C_2 + C_2 t) e^{3t}. \end{cases}$

20) $\begin{cases} x = C_1\cos t + C_2\sin t + \mathrm{tg}\, t, \\ y = -C_1\sin t + C_2\cos t + 2. \end{cases}$ **21)** $\begin{cases} x = 3e^{2t}, \\ y = e^{2t}. \end{cases}$

22) $\begin{cases} x = 2C_1e^{3t} - 4C_2e^{-3t}, \\ y = C_1e^{3t} + C_2e^{-3t}. \end{cases}$ **23)** $\begin{cases} x = C_1e^{-t} + 2C_2e^{2t} - \cos t + 3\sin t, \\ y = -C_1e^{-t} + C_2e^{2t} + 2\cos t - \sin t. \end{cases}$

24) $\begin{cases} C_1x^2 = 2t + C_2, \\ y^2 = C_1(2t + C_2). \end{cases}$ **25)** $\begin{cases} y = 2e^{2x} + C_1e^{x} + C_2e^{-x}, \\ z = 9e^{2x} + 3C_1e^{x} + C_2e^{-x}. \end{cases}$

26) $\begin{cases} x = C_1e^{2t} + 3C_2e^{4t} - e^{-t} - 4e^{3t}, \\ y = C_1e^{2t} + C_2e^{4t} - 2e^{-t} - 2e^{3t}. \end{cases}$

27) $\begin{cases} x = C_1e^{2t} + C_2e^{-t} - 2\sin t - \cos t, \\ y = 2C_1e^{2t} - C_2e^{-t} + \sin t + 3\cos t. \end{cases}$

28) $\begin{cases} x = -C_1\sin t + C_2\cos t + t, \\ y = C_1\cos t + C_2\sin t + t^2 - 1. \end{cases}$

29) $\begin{cases} x = C_1e^{3t} + 3t^2 + 2t + C_2, \\ y = -C_1e^{3t} + 6t^2 - 2t + 2C_2 - 2. \end{cases}$

30) $\begin{cases} x = C_1\cos 2t + C_2\sin 2t + t, \\ y = C_1\sin 2t - C_2\cos 2t + 1. \end{cases}$

30.2. 1) $\begin{cases} x = C_1e^{-4t} + C_2e^{-7t} + \dfrac{1}{5}e^{-2t} + \dfrac{7}{40}e^{t}, \\ y = \dfrac{1}{2}C_1e^{-4t} - C_2e^{-7t} + \dfrac{3}{10}e^{-2t} + \dfrac{1}{40}e^{t}. \end{cases}$

2) $\begin{cases} x = 1 - \cos t + 1{,}5\sin t, \\ y = \sin t + 1{,}5\cos t. \end{cases}$ **3)** $\begin{cases} x = C_1e^{-\sqrt{2}t} + C_2e^{-\sqrt{2}t}, \\ y = C_1\left(\sqrt{2} - 1\right)e^{\sqrt{2}t} - C_2\left(\sqrt{2} + 1\right)e^{-\sqrt{2}t}. \end{cases}$

4) $\begin{cases} x = (C_1 + C_2t)e^{t} + \dfrac{1}{2}\cos t, \\ y = \left(C_2(1 - t) - C_1\right)e^{t} - 2\cos t - \dfrac{1}{2}\sin t. \end{cases}$ **5)** $\begin{cases} x = C_1e^{t} + C_2e^{5t}, \\ y = -C_1e^{t} + 15C_2e^{5t}. \end{cases}$

6) $\begin{cases} x = \mathrm{e}^{5t}\left(\cos 2t - \sin 2t\right), \\ y = 2\mathrm{e}^{5t}\sin 2t. \end{cases}$ **7)** $\begin{cases} x = \left(C_1 + C_2 t\right)\mathrm{e}^{-t} + 5t - 9, \\ y = \left(C_2 - 2C_1 - 2C_2 t\right)\mathrm{e}^{-t} - 6t + 14. \end{cases}$

8) $\begin{cases} x = C_1\mathrm{e}^{3t} + C_2\mathrm{e}^{4t}, \\ y = 2C_1\mathrm{e}^{3t} + 3C_2\mathrm{e}^{4t}. \end{cases}$ **9)** $\begin{cases} x = C_1\mathrm{e}^{t} + C_2\mathrm{e}^{-t} + \dfrac{1}{8}\mathrm{e}^{3t}, \\ y = -C_1\mathrm{e}^{t} + C_2\mathrm{e}^{-t} + \dfrac{5}{8}\mathrm{e}^{3t}. \end{cases}$

10) $\begin{cases} x = C_1\mathrm{e}^{2t} + C_2\mathrm{e}^{3t} + \left(t + 1\right)\mathrm{e}^{2t}, \\ y = -2C_1\mathrm{e}^{2t} - C_2\mathrm{e}^{3t} - 2t\mathrm{e}^{2t}. \end{cases}$

11) $\begin{cases} x = 4C_1\mathrm{e}^{t} + C_2\mathrm{e}^{-2t} - 4t\mathrm{e}^{t}, \\ y = C_1\mathrm{e}^{t} + C_2\mathrm{e}^{-2t} - \left(t - 1\right)\mathrm{e}^{t}. \end{cases}$

12) $\begin{cases} x = 3C_1\mathrm{e}^{t} + C_2\mathrm{e}^{-t} + 3\sin t, \\ y = C_1\mathrm{e}^{t} + C_2\mathrm{e}^{-t} - \cos t + 2\sin t. \end{cases}$

13) $\begin{cases} x = C_1\mathrm{e}^{4t} + C_2\mathrm{e}^{6t}, \\ y = C_1\mathrm{e}^{4t} + 3C_2\mathrm{e}^{6t}. \end{cases}$ **14)** $\begin{cases} x = C_1\mathrm{e}^{3t} + 3C_2\mathrm{e}^{5t}, \\ y = C_1\mathrm{e}^{3t} + C_2\mathrm{e}^{5t}. \end{cases}$

Типовой расчет № 1

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ И ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛЫ

В заданиях:
№ 1–6 – найти неопределенные интегралы;
№ 7 – вычислить определенный интеграл;
№ 8 – вычислить несобственный интеграл или доказать его расходимость.

Вариант 1

1) $\int \frac{x\mathrm{d}x}{2x+1}$; **2)** $\int (2x-1)\sin^2 x\mathrm{d}x$; **3)** $\int \frac{x\mathrm{d}x}{2+\sqrt{x+4}}$;

4) $\int \sin^3 2x\cos^2 2x\mathrm{d}x$; **5)** $\int \frac{x^4+2x^2+3}{x^3-8}\mathrm{d}x$; **6)** $\int \frac{\operatorname{arctg} 2x}{1+4x^2}\mathrm{d}x$;

7) $\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x}{\sqrt{\mathrm{e}^x+1}}$; **8)** $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x\mathrm{d}x}{4+x^2}$.

9) Вычислить площадь трапеции, ограниченной линиями $\rho = a\cos\varphi$, $\rho = 2a\cos\varphi$.

10) Найти длину полукубической параболы $y^2 = \frac{2}{3}(x-1)^2$, заключенную внутри параболы $y^2 = \frac{x}{3}$.

Вариант 2

1) $\int x^2\mathrm{e}^{x^3}\mathrm{d}x$; **2)** $\int \sqrt[3]{x}\ln x\mathrm{d}x$; **3)** $\int \frac{\sin^2 x + x\sin 2x}{x\sin^2 x}\mathrm{d}x$;

4) $\int \sin^4 \frac{3}{2}x\mathrm{d}x$; **5)** $\int \frac{2x+3}{x(x^2+2x-3)}\mathrm{d}x$; **6)** $\int \frac{\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt{x}+1}\mathrm{d}x$;

7) $\int\limits_1^{\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{4+\ln x}}$; **8)** $\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^3}$.

9) Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = x^2$, $y = 2 - x$.

10) Найти длину кардиоиды $\rho = 2(1 - \sin\varphi)$.

Вариант 3

1) $\int \frac{\sin x\mathrm{d}x}{4+\cos^2 x}$; **2)** $\int \mathrm{e}^x \cos 2x\mathrm{d}x$; **3)** $\int \sin^2 x\cos x\mathrm{d}x$;

4) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x + 3\sin x}$; **5)** $\int \frac{(x^2+1)\mathrm{d}x}{x^3+4x^2}$; **6)** $\int \frac{\sqrt{x}\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+1}$;

7) $\int\limits_1^4 \frac{1+\sqrt{y}}{y^2}\mathrm{d}y$; **8)** $\int\limits_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$.

9) Найти площадь криволинейной трапеции ограниченной линией $\rho = a(1 - \cos\varphi)$.

10) Найти объем тела, полученного вращением криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = x^2$, $y = 2 - x$, $y = 0$, вокруг оси Ox.

Вариант 4

1) $\int \frac{x^2\mathrm{d}x}{9-x^3}$; **2)** $\int \operatorname{arctg} 2x\mathrm{d}x$; **3)** $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin^2 x}$;

4) $\int \frac{2\sqrt{\ln x}\mathrm{d}x}{x}$; **5)** $\int \frac{x^3\mathrm{d}x}{(x^2+1)(x^2+4)}$; **6)** $\int \frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+4}$;

7) $\int\limits_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{\cos^3 x}\mathrm{d}x$; **8)** $\int\limits_1^{\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}x}{x\ln^2 x}$.

9) Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $xy = 6$, $x + y = 7$.

10) Найти периметр фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$.

Вариант 5

1) $\int \frac{dx}{\sin^2 x\sqrt{1-\text{ctg}\,x}}$; **2)** $\int \ln 4x dx$; **3)** $\int \frac{dx}{\arccos x\sqrt{1-x^2}}$;

4) $\int \frac{6\sin x+\cos x}{1+\cos x}dx$; **5)** $\int \frac{x^4 dx}{x^3+1}$; **6)** $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{x^2}+2}dx$;

7) $\int\limits_1^e \frac{\ln x+4x^2}{x}dx$; **8)** $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x dx}{(1+x^2)^2}$.

9) Найти длину дуги кривой $y=e^x-1$ от точки $(0; 0)$ до точки $(1;\ e-1)$.

10) Найти объем тела, полученного вращением фигуры, ограниченной линиями $y=x^2$, $y=0$, $x=2$, вокруг оси Oy.

Вариант 6

1) $\int \frac{\cos^2 x dx}{\sin^4 x}$; **2)** $\int x\arccos 2x dx$; **3)** $\int \frac{2\,\text{tg}x+3}{\sin^2 x+2\cos^2 x}dx$;

4) $\int x\sin(1-3x^2)dx$; **5)** $\int \frac{x^5+2x-1}{x^4-1}dx$; **6)** $\int \frac{\sqrt{2x+1}dx}{4+\sqrt{2x+1}}$;

7) $\int\limits_0^{\pi/3} \sin^2 x dx$; **8)** $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1}$.

9) Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой $x=t-\sin t$, $y=1+\cos t$, $0\le t\le \pi$.

10) Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси Oy криволинейной трапеции, ограниченной линиями: $xy=1$, $x=3$, $y=3$.

Вариант № 7

1) $\int \frac{1+\text{tg}x}{\cos^2 x}dx$; **2)** $\int \frac{2x-1}{\cos^2 x}dx$; **3)** $\int x^2\sqrt{1-3x^3}\,dx$;

4) $\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos x-3\sin x}$; 5) $\int\frac{x^2+3x+1}{x^3+2x^2-3x}\mathrm{d}x$; 6) $\int\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x$;

7) $\int\limits_1^{\sqrt{3}}\frac{\operatorname{arctg}x}{1+x^2}\mathrm{d}x$; 8) $\int\limits_1^{\mathrm{e}}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{\ln x}}$.

9) Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией $\rho=2\cos 3\varphi$.

10) Вычислить длину кривой $x=\cos^3 t$, $y=\sin^3 t$.

Вариант 8

1) $\int\frac{x^3\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^4}}$; 2) $\int\ln(1+x^2)\mathrm{d}x$; 3) $\int\mathrm{e}^{\sqrt{x}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$;

4) $\int\frac{\mathrm{d}x}{5+2\sin x+3\cos x}$; 5) $\int\frac{x^3+2x^2}{(x-1)(x^2+1)}\mathrm{d}x$;

6) $\int\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}(\sqrt[3]{x+1}+1)}\mathrm{d}x$; 7) $\int\limits_0^2\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x$; 8) $\int\limits_0^3\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{9-x^2}}$.

9) Вычислить длину кривой $y=\ln x$ от точки $(1;\ 0)$ до точки $(\mathrm{e};\ 1)$.

10) Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линией $x=\cos t$, $y=3\sin t$, $0\le t\le\frac{\pi}{2}$.

Вариант 9

1) $\int\frac{(1+\sqrt{x})^5\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$; 2) $\int(2x-1)\mathrm{e}^{4x}\mathrm{d}x$; 3) $\int\frac{x^6\mathrm{d}x}{10+x^7}$;

4) $\int\sin^4 2x\cos^2 2x\mathrm{d}x$; 5) $\int\frac{4-3x}{x^3+8x^2}\mathrm{d}x$; 6) $\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x+2}}$;

7) $\int\limits_4^9\frac{y+1}{\sqrt{y}-1}\mathrm{d}x$; 8) $\int\limits_1^{+\infty}\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$.

9) Найти площадь фигуры ограниченной линией $\rho = 2a\sin\varphi$.

10) Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной линиями $y^2 = x$, $x = 4$.

Вариант 10

1) $\int x^2 \sin x^3 \mathrm{d}x$; **2)** $\int x^2 \sin 3x \mathrm{d}x$; **3)** $\int (x^2+1)\mathrm{e}^{x^3+3x}\mathrm{d}x$;

4) $\int \frac{\sqrt{\sin x}\,\mathrm{d}x}{\sqrt{\cos^5 x}}$; **5)** $\int \frac{x^2+1}{x^3+2x^2+3x}\mathrm{d}x$; **6)** $\int \frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}+\sqrt[6]{x}}\mathrm{d}x$;

7) $\int\limits_0^{\ln 4} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+1}$; **8)** $\int\limits_0^1 \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$.

9. Найти длину кривой $\rho = 4\sin\varphi$.

10. Найти площадь фигуры, ограниченную линией $x = 4\cos t$, $y = 3\sin t$.

Вариант 11

1) $\int (1+\mathrm{ctg}^3 x)\frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x}$; **2)** $\int (x^2+1)\ln x \mathrm{d}x$; **3)** $\int \sqrt{9-x^2}\,\mathrm{d}x$;

4) $\int \frac{\mathrm{d}x}{2\cos x+3}$; **5)** $\int \frac{x^2+4}{x^3+x}\mathrm{d}x$; **6)** $\int \frac{\sqrt{2x-1}\,\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[6]{2x-1}}$;

7) $\int\limits_0^{\pi/2} \cos x\, 2^{\sin x}\mathrm{d}x$; **8)** $\int\limits_1^2 \frac{x^3\mathrm{d}x}{\sqrt{16-x^4}}$.

9. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $x^2 = 16x - 4y$, $x = 4 + y$.

10. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $x^2 - y^2 = a^2$, $x = 2a$.

Вариант № 12

1) $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$; **2)** $\int \frac{\ln x}{x^4}\mathrm{d}x$; **3)** $\int x^3 \mathrm{e}^{4x^4}\mathrm{d}x$;

4) $\int \mathrm{tg}^4 3x\mathrm{d}x$; **5)** $\int \frac{2x+9}{x^4-x^2-12}\mathrm{d}x$; **6)** $\int \frac{\sqrt[6]{x}\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$;

7) $\int\limits_1^{\mathrm{e}^2} \frac{\ln^2 x}{x}\mathrm{d}x$; **8)** $\int\limits_1^{+\infty} \frac{x^2\mathrm{d}x}{(x^3+1)^4}$.

9) Найти длину кривой $y=\ln\cos x$ от точки $(0;0)$ до точки $(\frac{\pi}{4};\ \ln\frac{\sqrt{2}}{2})$.

10) Найти площадь фигуры, ограниченной одним витком $\rho = 2\varphi$.

Вариант 13

1) $\int \mathrm{tg}3x\mathrm{d}x$; **2)** $\int (4x-1)\cos^2 2x\mathrm{d}x$; **3)** $\int \frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$;

4) $\int \frac{\mathrm{d}x}{5\sin^2 x - 3\cos^2 x}$; **5)** $\int \frac{3x+4}{x^3+5x^2-6x}\mathrm{d}x$; **6)** $\int \frac{\sqrt{x}\,\mathrm{d}x}{1-\sqrt[4]{x}}$;

7) $\int\limits_0^{\sqrt{3}} x^3\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x$; **8)** $\int\limits_1^2 \frac{x\mathrm{d}x}{(x-1)^2}$.

9) Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y^2 = x+5$, $y^2 = 4-x$.

10) Найти длину кривой $x=\mathrm{e}^t\cos t$, $y=\mathrm{e}^t\sin t$ $(0\le t\le 1)$.

Вариант № 14

1) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2+1}}$; **2)** $\int \ln^2 2x\mathrm{d}x$; **3)** $\int \mathrm{e}^x\cos\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$;

4) $\int \mathrm{ctg}^3 3x\mathrm{d}x$; 5) $\int \frac{3x+8}{x^3-x}\mathrm{d}x$; 6) $\int \frac{\sqrt[6]{x+1}}{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x$;

7) $\int\limits_1^4 \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}}$; 8) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln^2 x}{x}\mathrm{d}x$.

9) Найти площадь фигуры, ограниченной линией $\rho = 4\sin 2\varphi$.

10) Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 9 - x$, $x = 0$.

Вариант 15

1) $\int \cos x\sqrt{1-\sin x}\,\mathrm{d}x$; 2) $\int \frac{x\mathrm{d}x}{\sin^2 2x}$; 3) $\int x4^{x^2}\mathrm{d}x$;

4) $\int \frac{\mathrm{d}x}{2+\cos x}$; 5) $\int \frac{2x-1}{x^4+5x^2+6}\mathrm{d}x$; 6) $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\mathrm{d}x$;

7) $\int\limits_0^{\pi/3} \sin x\cos^2 x\mathrm{d}x$; 8) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin\frac{1}{x^2}}{x^3}\mathrm{d}x$.

9) Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{1}{1+x^2}$, $y = \frac{x^2}{2}$.

10) Найти длину кривой $x = 2(\cos t + t\sin t)$, $y = 2(\sin t - t\cos t)$, $0 \le t \le \pi$.

Вариант 16

1) $\int \frac{\sqrt{1-2\ln x}}{x}\mathrm{d}x$; 2) $\int \mathrm{e}^{2x}\sin^2 x\mathrm{d}x$; 3) $\int \frac{2x+3}{x^2+x+2}\mathrm{d}x$;

4) $\int \sin^4 2x\cos^4 2x\mathrm{d}x$; 5) $\int \frac{3x^2+4x-1}{x^4+x^2}\mathrm{d}x$; 6) $\int \frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}+\sqrt[6]{x}}\mathrm{d}x$;

7) $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/3} \mathrm{tg}^2 x\mathrm{d}x$; 8) $\int\limits_{+1}^{4} \frac{x\mathrm{d}x}{x^2-1}$.

9) Найти длину кривой $y^2=(x-1)^3$ от точки $(1;0)$ до точки $(6;\sqrt{125})$.

10) Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной линиями $y=x^2-x$, $y=0$.

Вариант 17

1) $\int 2^x\sqrt{1+2^x}\,\mathrm{d}x$; **2)** $\int \frac{3x+5}{\cos^2 3x}\mathrm{d}x$; **3)** $\int \frac{4x-3}{\sqrt{2-2x-x^2}}\mathrm{d}x$;

4) $\int \frac{\sin 2x\mathrm{d}x}{4\sin^2 x+\cos^2 x}$; **5)** $\int \frac{x^4+x^2+1}{x^4-8x^2-9}dx$; **6)** $\int \frac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[6]{x}-1}\mathrm{d}x$;

7) $\int\limits_0^{\pi/6} \sin^3 2x\mathrm{d}x$; $\int\limits_1^2 \frac{x^2\mathrm{d}x}{x^3-1}$.

9) Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y^2=9x$, $y=3x$.

10) Вычислить длину кривой $x=5\cos^2 t$, $y=5\sin^2 t$ $(0\le t\le \frac{\pi}{2})$.

Вариант 18

1) $\int \frac{4x-1}{\sqrt{2x^2-x+3}}\mathrm{d}x$; **2)** $\int x\,\mathrm{arctg}2x\mathrm{d}x$; **3)** $\int \sin 2x\cos^2 x\mathrm{d}x$;

4) $\int \mathrm{tg}^5 2x\mathrm{d}x$; **5)** $\int \frac{x^2+4x-3}{x^4+4x^2}\mathrm{d}x$; **6)** $\int \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}(\sqrt[3]{x}+1)}\mathrm{d}x$;

7) $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{3+5\cos x}$; **8)** $\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{2-4x}}$.

9) Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $xy=4$, $y=1$, $y=4$, $x=0$.

10) Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной линиями: $y=2x$, $y=x$, $x=3$.

Вариант 19

1) $\int \frac{\mathrm{ctg}^3 x}{\sin^2 x}\mathrm{d}x$; **2)** $\int \frac{\ln^2 x}{x^2}\mathrm{d}x$; **3)** $\int \frac{x^2\mathrm{d}x}{2x^2+1}$;

4) $\int \frac{\sin x\mathrm{d}x}{1+\cos x}$; **5)** $\int \frac{x^4+2x-1}{8-x^3}\mathrm{d}x$; **6)** $\int \frac{x+2}{1+\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x$;

7) $\int\limits_0^{\pi/4} \sin^5 x\mathrm{d}x$; **8)** $\int\limits_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2} x\mathrm{d}x$.

9) Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y=\sin x$, $y=0$ $(0\le x\le \pi)$.

10) Найти длину кривой $x=8\sin t+6\cos t$, $y=6\sin t-8\cos t$ $(0\le t\le \frac{\pi}{2})$.

Вариант 20

1) $\int 3^{\mathrm{tg}\,3x}\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 3x}$; **2)** $\int x^2\mathrm{e}^{3x}\mathrm{d}x$; **3)** $\int \frac{4x+1}{x+2}\mathrm{d}x$;

4) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x+6\sin x\cos x-16\cos^2 x}$; **5)** $\int \frac{x^3+x-1}{x^3-2x^2+x}\mathrm{d}x$;

6) $\int \frac{x-1}{x\sqrt{x-2}}\mathrm{d}x$; **7)** $\int\limits_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin 2x}{4+\cos^2 x}\mathrm{d}x$; **8)** $\int\limits_0^{\pi/4} 4^{\mathrm{ctg}\,x}\frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x}$.

9) Найти площадь фигуры, ограниченной линией $\rho=3\cos\varphi$.

10) Найти длину кривой $y=\mathrm{e}^{-x}$ от точки $(0;1)$ до точки $(5;\,\mathrm{e}^{-5})$.

Вариант 21

1) $\int \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+3x+5}}\mathrm{d}x$; **2)** $\int \arccos 2x\mathrm{d}x$; **3)** $\int 2^x\,\mathrm{tg}2^x\,\mathrm{d}x$;

4) $\int \frac{2-\sin x+3\cos x}{1+\cos x}\mathrm{d}x$; **5)** $\int \frac{4x^2+38}{(x+1)(x^2-4x+13)}\mathrm{d}x$;

6) $\int \frac{\sqrt{x}\,\mathrm{d}x}{3x+\sqrt[3]{x^2}}$; 7) $\int\limits_0^{\pi/4} \frac{x\mathrm{d}x}{\cos^2 3x}$; 8) $\int\limits_{e^2}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\ln\ln x}$.

9) Найти площадь фигуры, ограниченной линией $\rho = 4\cos 3\varphi$.

10) Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$, $y = 2 - x$, $x = 0$ $(x > 0)$.

Вариант 22

1) $\int \frac{\sqrt[3]{\ln^2 x}}{x}\mathrm{d}x$; **2)** $\int (2x+3)2^x \mathrm{d}x$; **3)** $\int \frac{4x-1}{x^2+2x+2}\mathrm{d}x$;

4) $\int \mathrm{ctg}^6 3x\,\mathrm{d}x$; **5)** $\int \frac{6x\,\mathrm{d}x}{x^3-1}$; **6)** $\int \frac{\sqrt{x+3}\,\mathrm{d}x}{1+\sqrt[3]{x+3}}$;

7) $\int\limits_{\pi/12}^{\pi/9} \mathrm{ctg}\,3x\mathrm{d}x$; **8)** $\int\limits_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$.

9. Найти площадь фигуры, ограниченной линией $x = 4\cos t$, $y = 9\sin t$.

10. Найти длину кривой $\rho = 4(1-\sin\varphi)$.

Вариант 23

1) $\int \sin 2x\sqrt{1+\sin^2 x}\mathrm{d}x$; **2)** $\int \log_2(3x-1)\,\mathrm{d}x$;

3) $\int \frac{x-1}{\sqrt{13-6x+x^2}}\mathrm{d}x$; **4)** $\int \frac{\mathrm{d}x}{2\sin x+3\cos x+3}$;

5) $\int \frac{3x-1}{x^4+13x^2+36}\mathrm{d}x$; **6)** $\int \frac{x+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}}{x(1+\sqrt[3]{x})}\mathrm{d}x$;

7) $\int\limits_{\pi/16}^{\pi/12} \cos^2 4x\mathrm{d}x$; **8)** $\int\limits_1^2 \frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt[4]{(x^2-1)^3}}$.

9) Найти длину кривой $y = \ln \sin x$ $(\frac{\pi}{6} \le x \le \frac{\pi}{3})$.

10) Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $xy = 4$, $y = x$, $x = 1$.

Вариант 24

1) $\int \frac{\sin x}{\mathrm{e}^{\cos x}} \mathrm{d}x$; **2)** $\int \frac{x \,\mathrm{arctg}\, x}{\sqrt{1+x^2}} \mathrm{d}x$; **3)** $\int \frac{3x-4}{x^2+6x+13} \mathrm{d}x$;

4) $\int \frac{\mathrm{d}x}{4\sin^2 x + 8 \sin x \cos x}$; **5)** $\int \frac{x^4 \mathrm{d}x}{x^4+5x^2+4}$;

6) $\int \frac{\sqrt{x}\,\mathrm{d}x}{2+\sqrt[4]{x}}$; **7)** $\int\limits_{1}^{\mathrm{e}/2} \ln 2x \mathrm{d}x$; 8) $\int\limits_{0}^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x} \mathrm{d}x$.

9) Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $xy = 9$, $y = x$, $x = 5$.

10) Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной линиями $y^2 = x$, $x = 4$.

Вариант 25

1) $\int \frac{\mathrm{arctg}^2 x}{1+x^2} \mathrm{d}x$; **2)** $\int (x^2-2x+1)\,\mathrm{e}^{3x} \mathrm{d}x$; **3)** $\int \frac{8x-5}{\sqrt{x^2+4x+5}} \mathrm{d}x$;

4) $\int \mathrm{ctg}^5 4x \mathrm{d}x$; **5)** $\int \frac{x^3+2x+3}{x^4-16} \mathrm{d}x$; **6)** $\int \frac{\sqrt{x}\,\mathrm{d}x}{4x+\sqrt[3]{x^2}}$;

7) $\int\limits_{1}^{\sqrt{3}} x\sqrt{4-x^2}\, \mathrm{d}x$; **8)** $\int\limits_{0}^{1} \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}}\, \mathrm{d}x$.

9) Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^2$, $y=4-3x^2$.

10) Найти длину кривой $\rho = 5(1+\cos\varphi)$.

Типовой расчет № 2

ИНТЕГРАЛ ПО ФИГУРЕ

Вариант 1

1) Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $x^2 + y^2 = 4$ и $y^2 = 4(1-x)$ (вне параболы).

2) Вычислить массу тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 + z^2 = 4;\ x^2 + y^2 = 3z,$ если плотность в каждой точке равна аппликате точки.

3) Вычислить $\int\limits_L \frac{\mathrm{d}S}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ по отрезку прямой $y = \frac{1}{2}x - 2$ от точки $A(0, -2)$ до точки $B(4, 0)$.

4) Вычислить $\int\limits_L xy\mathrm{d}x$ по дуге синусоиды $y = \sin x$ от $x = \pi$ до $x = 0$.

5) Вычислить площадь части поверхности $x + 6y + 2z = 12$, лежащей в первом октанте.

6) Вычислить поток вектора $\vec{a} = (x + y)\vec{i} + (y - x)\vec{j} + z\vec{k}$ через поверхность шара единичного радиуса с центром в начале координат.

Вариант 2

1) Найти массу фигуры, ограниченной линиями $y = x^2;\ x + y = 2,$ если плотность ее в каждой точке равна ординате этой точки.

2) Найти объем тела, ограниченного поверхностями $z = 1 - x^2 - y^2;$ $y = x;\ y = x\sqrt{3},$ расположенного в первом октанте.

3) Вычислить $\int\limits_L \sqrt{x^2 + y^2}\,\mathrm{d}l,$ где L – кривая, $\begin{cases} x = a(\cos t + t\sin t), \\ y = a(\sin t - t\cos t), \end{cases}$ $(0 \le t \le 2\pi)$.

4) Найти функцию z по ее полному дифференциалу $\mathrm{d}z = \left(\frac{1}{y} - \frac{y}{x^2}\right)\mathrm{d}x + \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{y^2}\right)\mathrm{d}y.$

5) Вычислить $\iint\limits_S x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}x\mathrm{d}z + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, где S – положительная сторона поверхности куба, ограниченного плоскостями $x = 0$; $y = 0$; $z = 0$; $x = 4$; $y = 4$; $z = 4$. Вычислить непосредственно и с помощью формулы Остроградского.

6) Найти $\mathrm{div}\left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,u\right)$, где $u = \sin(x + y + z)$.

Вариант 3

1) Найти массу фигуры, ограниченной параболой $y = 1 - x^2$ и осью Ox, если плотность $\gamma(x, y) = x^2 y^2$.

2) Найти объем тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 = 2x$; $z = x^2 + y^2$; $z = 0$.

3) Вычислить $\int\limits_L x\mathrm{d}l$ по параболе $y = x^2$ от точки $(1, 1)$ до точки $(2, 4)$.

4) Вычислить $\oint\limits_C 2\left(x^2 + y^2\right)\mathrm{d}x + (x + y)^2\mathrm{d}y$, применяя формулу Грина, где C – контур треугольника с вершинами в точках $A(1, 1)$, $B(2, 2)$, $C(1, 3)$, пробегаемый против часовой стрелки.

5) Вычислить $\iint\limits_S \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,\mathrm{d}S$, где S – поверхность конуса $z^2 = x^2 + y^2$, ограниченного плоскостями $z = h$; $z = 0$.

6) Найти $\overrightarrow{\mathrm{rot}\,F}$, если $\vec{F} = y^2\vec{i} - x^2\vec{j} + z^2\vec{k}$.

Вариант 4

1) Найти массу половины круга радиуса R с центром в начале координат, лежащей в области $y \ge 0$, если плотность равна квадрату полярного радиуса.

2) Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z=4-y^2$; $y=\dfrac{x^2}{2}$; $x=0$; $z=0$.

3) Вычислить $\int\limits_l (3x-5y+z+2)\mathrm{d}l$, где l – отрезок прямой между точками $A(4,1,6)$ и $B(5,3,8)$.

4) Поле образовано силой $\vec{F}=y\vec{i}+a\vec{j}$. Определить работу при перемещении массы m по контуру, образованному осями координат и эллипсом $\begin{cases} x=a\cos t, \\ y=b\sin t, \end{cases}$ лежащим в I четверти.

5) Найти площадь поверхности части конуса $z=\sqrt{x^2+y^2}$, заключенного внутри цилиндра $x^2+y^2=2x$.

6) Найти $\operatorname{div}[\vec{u},\vec{v}]$, где $\vec{u}=x\vec{i}+2y\vec{j}-z\vec{k}$; $\vec{v}=y\vec{i}-2z\vec{j}+x\vec{k}$.

Вариант 5

1) Вычислить $\iint\limits_D \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, где D – круг: $x^2+y^2=ax$.

2) Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z=x^2$; $3x+2y=12$; $z=0$, $y=0$.

3) Вычислить массу одной арки циклоиды $x=a(t-\sin t)$; $y=a(1-\cos t)$, если плотность в каждой точке кривой равна ординате точки.

4) Вычислить $\int\limits_l \left(xy-y^2\right)\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y$ от точки $A(0,0)$ до точки $B(1,2)$ по кривой $y=2\sqrt{x}$.

5) Вычислить $\iint\limits_S x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}x\mathrm{d}z+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, где S – внешняя сторона поверхности куба, ограниченного плоскостями $x=0$, $x=1$, $y=1$, $z=0$, $z=1$, с помощью формулы Остроградского.

6) Найти $\operatorname{rot}(\vec{r},\vec{a})\vec{r}$, где $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$; $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$.

Вариант 6

1) Вычислить $\iint\limits_D \frac{\ln\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, где область D – кольцо между окружностями радиусов e и 1 с центром в начале координат.

2) Вычислить массу тела, ограниченного поверхностями $2x+2y+$ $+z-6=0;\ x=0;\ y=0;\ z=0,$ если плотность в каждой его точке равна абсциссе этой точки.

3) Вычислить $\int\limits_L \sin^2 x\cos^3 x\mathrm{d}l$, где L – дуга кривой $y=\ln\cos x$ $\left(0\le x\le\frac{\pi}{4}\right)$.

4) Найти функцию z по ее полному дифференциалу $\mathrm{d}z=\sin\left(x+y\right)\times$ $\times\left(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y\right)$.

5) Вычислить $\iint\limits_S \left(y^2+z^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, где S – верхняя сторона поверхности $z=\sqrt{a^2-x^2}$, отсеченная плоскостями $y=0,\ y=b.$

6) Найти циркуляцию поля $\vec{F}=y\vec{i}$ по контуру окружности $x=b\cos t,\ y=b+b\sin t.$

Вариант 7

1) Вычислить $\iint\limits_D \mathrm{e}^{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, где область D – круг радиуса r с центром в начале координат.

2) Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями x^2+4y^2+ $+z=1;\ z=0.$

3) Вычислить массу m дуги кривой L, заданной уравнениями $x=\frac{t^2}{2},\ \ y=t,\ z=\frac{t^3}{3},\ 0\le t\le 2,$ если плотность в каждой ее точке $\gamma=\sqrt{1+4x^2+y^2}$.

4) Вычислить $\int\limits_{l} \frac{x\mathrm{d}x}{y} + \frac{\mathrm{d}y}{y+a}$ по отрезку циклоиды $x = a\left(t - \sin t\right)$; $y = a\left(1 - \cos t\right)$ от точки $t_1 = \frac{\pi}{6}$ до точки $t_2 = \frac{\pi}{3}$.

5) Вычислить $\iint x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}x\mathrm{d}z + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ по верхней поверхности части плоскости $x + y + z = a$, лежащей в первом октанте.

6) Доказать, что поле $\vec{F} = \frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$ является потенциальным.

Вариант 8

1) С помощью двойного интеграла найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \mathrm{e}^{x}$; $y = \mathrm{e}^{-x}$; $y = 2$.

2) Вычислить объем той части шара $x^2 + y^2 + z^2 = 4R^2$, которая лежит внутри цилиндра $x^2 + y^2 = R^2$.

3) Найти массу дуги кривой $x = t$; $y = \frac{1}{2}t^2$ $\left(0 \le t \le 1\right)$, если плотность равна $\sqrt{2y}$.

4) Вычислить $\int\limits_{L} x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y + \left(x + y - 1\right)\mathrm{d}z$, где L – отрезок прямой, соединяющий точки $A\left(1, 1, 1\right)$ и $B\left(2, 3, 4\right)$.

5) Найти площадь части поверхности $y = x^2 + z^2$, вырезанной цилиндром $z^2 + x^2 = 1$ и расположенной в первом октанте.

6) Найти поток вектора $\vec{a} = y\vec{i} + z\vec{j} + x\vec{k}$ через плоскость $x + y + z = a$, расположенную в первом октанте.

Вариант 9

1) С помощью двойного интеграла вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $\rho = 2\left(1 + \cos\varphi\right)$; $\rho = 2\cos\varphi$.

2) Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $y = x^2$; $y + z = 2$; $z = 0$.

3) Найти массу дуги кривой $y = \dfrac{2x\sqrt{x}}{3}$ от точки $O(0, 0)$ до точки $B\left(4, \dfrac{16}{3}\right)$, если плотность пропорциональна длине дуги.

4) Вычислить $\int\limits_L \dfrac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{x^2 + y^2}$, где L – окружность $x = a\cos t$, $y = a\sin t$ (в положительном направлении).

5) С помощью формулы Остроградского вычислить $\iint\limits_S x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}x\mathrm{d}z + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, если S – внешняя сторона цилиндра $x^2 + y^2 = 4$ с основаниями $z = 0$ и $z = 3$.

6) Найти $\overrightarrow{\mathrm{rot}F}$, если $\vec{F} = y^2 z\vec{i} + z^2 x\vec{j} + x^2 y\vec{k}$.

Вариант 10

1) С помощью двойного интеграла вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 2x - x^2$; $y = x^2$.

2) Найти массу тела, ограниченного поверхностями $x + y + z = a\sqrt{2}$; $x^2 + y^2 = a^2$; $z = 0$, если плотность в каждой его точке равна $x^2 + y^2$.

3) Вычислить $\int\limits_L \left(x^2 + y^2 + z^2\right)\mathrm{d}l$, где L – дуга винтовой линии $x = a\cos t$; $y = a\sin t$; $z = bt$ $(0 \le t \le 2\pi)$.

4) Найти функцию z по ее полному дифференциалу $\mathrm{d}z = \mathrm{e}^{xy}\left((1 + xy)\mathrm{d}x + x^2\mathrm{d}y\right)$.

5) Применяя формулу Остроградского, вычислить $\iint\limits_S x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^3\mathrm{d}x\mathrm{d}z + z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, где S – внешняя сторона поверхности сферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

6) Найти циркуляцию вектора $\vec{F} = y^2\vec{i}$ по замкнутой кривой, составленной из верхней половины эллипса $x = a\cos t$; $y = b\sin t$ и отрезка оси Ox.

Вариант 11

1) Найти массу плоской фигуры, ограниченной линиями $y = \dfrac{3}{x}$; $x^2 + y^2 = 10$, если плотность каждой ее точки равна абсциссе этой точки.

2) Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $hz = x^2 + y^2$; $z = h$.

3) Вычислить $\int\limits_L \sqrt{x^2 + y^2 + a^2}\,\mathrm{d}l$, где L – дуга спирали Архимеда $r = a\varphi$ $(a > 0)$ между точками $O(0, 0)$; $A\left(a^2, a\right)$.

4) Вычислить с помощью формулы Грина $\oint\limits_C \dfrac{y}{x}\mathrm{d}x + 2\ln x\mathrm{d}y$, где C – треугольник, сторонами которого являются прямые $y = 4 - 2x$; $x = 1$; $y = 0$.

5) Вычислить $\iint\limits_S z^2\mathrm{d}S$, где S – часть плоскости $x + y + z = 1$, расположенной в первом октанте.

6) Найти линейный интеграл вектора $\vec{a} = x^3\vec{i} - y^3\vec{j}$ вдоль дуги окружности $x = R\cos t$; $y = R\sin t$, лежащей в первой четверти.

Вариант 12

1) С помощью двойного интеграла вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \mathrm{e}^x$; $y = \mathrm{e}^{2x}$; $x = 1$.

2) Найти массу тела, ограниченного поверхностями $2az = x^2 + y^2$; $x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2$, если плотность в каждой точке равна аппликате этой точки.

3) Вычислить $\int\limits_L x^2 \mathrm{d}l,$ где L – верхняя половина окружности $x^2+y^2=a^2.$

4) Выяснить, будет ли интеграл $\int\limits_{(AB)} \left(2xy-5y^3\right)\mathrm{d}x+\left(x^2-15xy^2+6y\right)\mathrm{d}y$ зависеть от пути интегрирования, и вычислить его по линии AB, соединяющей точки $(0,0),\ (2,2).$

5) Вычислить $\iint\limits_S z\mathrm{d}x\mathrm{d}y+x\mathrm{d}x\mathrm{d}z+y\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$ где S – внешняя сторона треугольника, образованного пересечением плоскости $x-y+z=1$ и координатными плоскостями.

6) Найти $\mathrm{rot}\vec{a}$, если $\vec{a}=\left(3x^2y^2z+3x^2\right)\vec{i}+2x^3yz\vec{j}+\left(x^3y^2+3z^2\right)\vec{k}.$

Вариант 13

1) Двойным интегрированием найти объем тела, ограниченного поверхностями $x^2+y^2=R^2;\ z=0;\ z=y.$

2) Вычислить $\iiint\limits_V y\cos\left(x+z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$ где V – область, ограниченная цилиндром $y=\sqrt{x}$ и плоскостями $x+z=\dfrac{\pi}{2};\ y=0;\ z=0.$

3) Вычислить массу отрезка прямой $y=2-x,$ заключенного между координатными осями, если линейная плотность в каждой его точке пропорциональна квадрату абсциссы в этой точке, а в точке (2, 0) равна 4.

4) Применяя формулу Грина, вычислить $\oint\limits_C -x^2y\mathrm{d}x+xy^2\mathrm{d}y,$ где C – окружность $x^2+y^2=a^2$ (в положительном направлении).

5) Найти площадь поверхности $z=2-\dfrac{x^2+y^2}{2},$ расположенной над плоскостью xOy.

6) Найти поток вектора $\vec{a}=y\vec{i}+z\vec{j}+x\vec{k}$ через часть плоскости $x+y+z=a,$ расположенной в первом октанте.

Вариант 14

1) Переменив порядок интегрирования, записать данное выражение в виде одного двойного интеграла $\int_0^1 dx \int_0^{x^2} dy + \int_1^4 dx \int_0^{\frac{1}{3}(4-x)} dy$. Вычислить площадь фигуры.

2) Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z = 6 - x^2 - y^2$; $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

3) Найти массу дуги кривой $y = \ln x\left(\sqrt{3} \le x \le 2\sqrt{2}\right)$, если плотность в каждой точке равна квадрату ее абсциссы.

4) Вычислить $\int_L y\,dx - \left(y + x^2\right)dy$, где L – дуга параболы $y = 2x - x^2$, расположенная над осью Ox, пробегаемая по ходу часовой стрелки.

5) Применяя формулу Остроградского, вычислить $\iint_S x\,dy\,dz + y\,dx\,dz + z\,dx\,dy$, где S – положительная сторона поверхности, ограниченной плоскостями $x = 0$; $y = 0$; $z = 0$; $x + y + 2z = 1$.

6) Найти дивергенцию градиента функции $u = x^3 + y^3 + z^3 + 3x^2y^2z^2$.

Вариант 15

1) С помощью двойного интеграла вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 16 - 8x$; $y^2 = 24x + 48$.

2) Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $2 - z = x^2 + y^2$; $z = x^2 + y^2$.

3) Вычислить $\int_L \sqrt{x^2 + y^2}\,dl$, где L – окружность $x^2 + y^2 = ax$.

4) С помощью формулы Грина вычислить $\oint_C \frac{1}{x}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}dx + \frac{2}{y}\operatorname{arctg}\frac{x}{y}dy$, где C – замкнутый контур, составленный дугами двух окружностей $x^2 + y^2 = 1$; $x^2 + y^2 = 4\left(y > 0\right)$ и отрезками прямых $y = x$ и $y = \sqrt{3}x$ $\left(y > 0\right)$, заключенных между этими окружностями.

5) Найти массу полусферы $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$, если поверхностная плотность в каждой ее точке равна z^2.

6) Найти $\operatorname{rot}\vec{F}$, если $\vec{F}=\left(x^2+y^2\right)\vec{i}+2xyz\vec{j}+\vec{k}$.

Вариант 16

1) Вычислить $\iint\limits_D\left(x^2+2xy\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, где область D ограничена прямыми $y=x$; $y=2x$; $x+y=6$.

2) Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $x^2+y^2=a^2$; $x^2+z^2=a^2$.

3) Вычислить массу дуги кривой $x=\ln\left(1+t^2\right)$; $y=2\operatorname{arctg}t-t$ от $t=1$, если плотность равна $\dfrac{y}{\mathrm{e}^x}$.

4) Поле образовано силой $\vec{F}=(x+y)\vec{i}+2x\vec{j}$. Вычислить работу по перемещению единицы массы по окружности $x=a\cos t$; $y=a\sin t$.

5) Вычислить массу поверхности $z^2=x^2+y^2$, заключенной между плоскостями $z=0$; $z=1$, если поверхностная плотность пропорциональна x^2+y^2.

6) Найти $\operatorname{rot}\vec{F}$, если $\vec{F}=x^2y^2\vec{i}+y^3z\vec{j}+xz^3\vec{k}$.

Вариант 17

1) С помощью двойного интеграла вычислить площадь плоской области, ограниченной линиями $y^2=4x$, $x+y=3$, $y\geq 0$.

2) Определить массу пирамиды, образованной плоскостями $x+y+z=a$; $x=0$; $y=0$; $z=0$, если плотность в каждой точке равна аппликате этой точки.

3) Вычислить $\int\limits_L y^2\mathrm{d}l$, где L – дуга кривой $x=\ln y$ между точками $A(0,1)$ и $B(1,\mathrm{e})$.

4) Применяя формулу Грина, вычислить $\oint\limits_C y^2\mathrm{d}x+\left(x+y\right)^2\mathrm{d}y$ по контуру треугольника ABC с вершинами $A\left(a,0\right);B\left(a,a\right);C\left(0,a\right)$.

5) Пользуясь формулой Остроградского, вычислить $\iint\limits_S x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}x\mathrm{d}z+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, где S – внешняя сторона поверхности пирамиды, ограниченной плоскостями $x=0;\ y=0;\ z=0;\ \ 2x+3y+4z=12.$

6) Найти циркуляции вектора $\vec{F}=-y\vec{i}+x\vec{j}$ по окружности $x^2+\left(y-1\right)^2=1.$

Вариант 18

1) Изменив порядок интегрирования, записать данное выражение в виде одного двойного интеграла $\int\limits_0^1\mathrm{d}y\int\limits_0^y\mathrm{d}x+\int\limits_1^2\mathrm{d}y\int\limits_0^{2-y}\mathrm{d}x.$ Вычислить площадь фигуры.

2) Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $x^2+4y^2+z=1;\ z=0.$

3) Вычислить массу дуги кривой $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$, лежащей в первой четверти, если плотность в каждой ее точке равна абсциссе этой точки.

4) Доказать, что $\int\limits_{AB}\operatorname{tg}y\mathrm{d}x+x\sec^2 y\mathrm{d}y$ не зависит от пути интегрирования. Вычислить его, если $A\left(1,\ \dfrac{\pi}{6}\right);\ B\left(2;\ \dfrac{\pi}{4}\right).$

5) Найти массу полусферы $x=\sqrt{R^2-y^2-z^2}$, если поверхностная плотность в каждой точке пропорциональна квадрату расстояния этой точки до начала координат.

6) Найти циркуляцию векторного поля $\vec{F}=y\vec{i}+z\vec{j}+x\vec{k}$ вдоль замкнутого контура, полученного от пересечения сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$ координатными плоскостями, расположенными в первом октанте.

Вариант 19

1) Построить область, площадь которой выражается интегралом $\int\limits_0^1 \mathrm{d}x \int\limits_{\frac{1}{2}(1-x)^2}^{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}y.$ Вычислить этот интеграл. Поменять порядок интегрирования.

2) Определить массу тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 - z^2 = 0;\ z = h,$ если плотность в каждой точке пропорциональна аппликате этой точки.

3) Вычислить $\int\limits_L \frac{\cos^2 x \mathrm{d}l}{\sqrt{1+\cos^2 x}},$ где L – дуга кривой $y = \sin x \left(0 \le x \le \pi\right).$

4) Доказать, что выражение $3x^2 \mathrm{e}^y \mathrm{d}x + \left(x^3 \mathrm{e}^y 1\right)\mathrm{d}y$ является полным дифференциалом некоторой функции. Найти эту функцию.

5) Вычислить $\iint\limits_S \left(x^2 + z^2\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$ где S – внешняя сторона поверхности $x = \sqrt{9 - y^2},$ отсеченной плоскостями $z = 0;\ z = 2.$

6) Найти $\mathrm{rot}\left(\vec{r}, \vec{a}\right)\cdot\vec{r},$ где $\vec{r} = x\vec{i} + 2y\vec{j} - z\vec{k},\ \vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}.$

Вариант 20

1) С помощью двойного интеграла вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $\rho = a\left(1 - \cos\varphi\right);\ \ \rho = a\cos\varphi.$

2) Определить массу сферического слоя между поверхностями $x^2 + y^2 + z^2 = a^2;\ x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2,$ если плотность в каждой точке обратно пропорциональна расстоянию точки от начала координат.

3) Вычислить $\int\limits_L y\mathrm{d}l,$ где L – дуга параболы $y^2 = 2x,$ отсеченная параболой $x^2 = 2y.$

4) Показать, что $\oint\limits_C y\mathrm{d}x + \left(x + y\right)\mathrm{d}y,$ по любому замкнутому контуру равен нулю. Проверьте, вычислив интеграл по контуру фигуры, ограниченной линиями $y = x^2,\ y = 4.$

5) Вычислить массу поверхности $z = x$, ограниченной плоскостями $x + y = 1$; $y = 0$; $x = 0$, если поверхностная плотность в каждой точке равна абсциссе этой точки.

6) Найти циркуляцию вектора $\vec{F} = y^2\vec{i}$ по замкнутой кривой, составленной из верхней половины эллипса $x = 4\cos t$; $y = \sin t$ и отрезка оси Ox.

Вариант 21

1) С помощью двойного интеграла вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $xy = a^2$; $y = x$; $y = 2a$ $(a > 0)$.

2) Определить массу полушара $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$; $z = 0$, если плотность его в каждой точке равна аппликате этой точки.

3) Вычислить $\int\limits_L \sin^3 x \mathrm{d}l$, где L – дуга кривой $y = \ln\sin x$ от $x_1 = \dfrac{\pi}{4}$ до $x_2 = \dfrac{\pi}{2}$.

4) Вычислить $\oint\limits_C \left(\mathrm{e}^{2x} - y^2\right)\mathrm{d}x + (1 - 2xy)\mathrm{d}y$, где C – треугольник сторонами которого являются прямые $y = 2$; $x = 0$; $y = x$. Доказать, что данный интеграл по любому замкнутому контуру равен нулю.

5) Найти площадь части поверхности $y = x^2 + z^2$, вырезанной цилиндром $z^2 + x^2 = 1$ и расположенной в первом октанте.

6) Найти $\operatorname{div}[\vec{u}, \vec{v}]$, где $\vec{u} = 2x\vec{i} - y\vec{j} + 3z\vec{k}$; $\vec{v} = 3y\vec{i} + z\vec{j} - x\vec{k}$.

Вариант 22

1) С помощью двойного интеграла вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 4 + x$; $x + 3y = 0$.

2) Определить объем тела, ограниченного поверхностями $z^2 = 2ax$; $x^2 + y^2 = ax$; $z = 0$; $y = 0$.

3) Найти массу дуги винтовой линии $x = 4a\cos t,\ y = 4a\sin t,\ \ z = 3at,$ если плотность ее в каждой точке пропорциональна аппликате этой точки $(0 \le t \le 2\pi)$.

4) Вычислить $\int\limits_{(1,1)}^{(3,2)} \dfrac{x}{(x+y)^2}\mathrm{d}x + \dfrac{2x+y}{(x+y)^2}\mathrm{d}y.$

5) Используя формулу Остроградского, вычислить $\iint\limits_S (x+y)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (y-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}z + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ через поверхность шара $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

6) Найти $\mathrm{rot}\vec{F}$, если $\vec{F} = 3x^2y^2\vec{i} + 2y^3z\vec{j} - z^2x^2\vec{k}.$

Вариант 23

1) С помощью двойного интеграла вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $ay = x^2 - 2ax;\ y = x.$

2) Вычислить массу тела, ограниченного поверхностями $y = \sqrt{x^2 + z^2}$; $y = b$, если плотность в каждой его точке пропорционально ординате этой точки.

3) Вычислить $\int\limits_L xyz\mathrm{d}l$, где L – дуга кривой $x = \dfrac{1}{2}t^2;\ y = t;\ \ z = \dfrac{1}{3}\sqrt{8t^3}$ $(0 \le t \le 1)$.

4) Найти работу силы $\vec{F} = xy\vec{i} + (x+y)\vec{j}$ при перемещении массы m из начала координат в точку $A(1,1)$ по параболе $y = x^2$.

5) С помощью формулы Стокса показать, что $\oint\limits_C yz\mathrm{d}x + xz\mathrm{d}y + xy\mathrm{d}z$ по любому замкнутому контуру равен нулю. Проверить, вычислив интеграл по контуру треугольника с вершинами $O(0,0,0)$; $A(1,1,0)$; $B(1,1,1)$.

6) Вычислить поток вектора $\vec{a} = x^3\vec{i} + y^3\vec{j} + z\vec{k}$ через поверхность шара $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

Вариант 24

1) Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \ln x$; $x - y = 1$; $x = 3$.

2) Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $y^2 = 4a^2 - 3ax$; $y^2 = ax$; $z = \pm h$.

3) Найти массу дуги полуокружности $x = a\cos t$; $y = a\sin t$, если плотность ее в каждой точке равна $x^2 y$.

4) Найти работу, производимую силой $\vec{F} = 4x^2\vec{i} + xy\vec{j}$ при перемещении массы m вдоль дуги $y = x^3$ от точки $O(0, 0)$ до точки $C(1, 1)$.

5) Вычислить $\iint\limits_S x^2 \mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}z + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, где S – внешняя сторона части сферы, расположенной в первом октанте.

6) Доказать, что поле $\vec{F} = \dfrac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$ является потенциальным.

Вариант 25

1) Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x$; $x^2 + y^2 = 2x$; $y = 0$.

2) Определить массу тела, ограниченного поверхностями $2x + z = 2a$; $x + y = a$; $y^2 = ax$; $y = 0\ (y > 0)$, если плотность в каждой его точке равна ординате его точки.

3) Вычислить $\int\limits_L y\mathrm{d}l$, где L – первая арка циклоиды $x = 3(t - \sin t)$; $y = 3(1 - \cos t)$.

4) Вычислить $\oint\limits_C x\mathrm{d}y + y\mathrm{d}x$, где C – треугольник со сторонами $x = 0$; $y = 0$; $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$. Доказать, что данный интеграл по любому замкнутому контуру равен нулю.

5) Вычислить $\iint\limits_S \left(x^2+y+z^2-4\right)\mathrm{d}S,$ где S – часть поверхности $2y=9-x^2-z^2,$ отсеченная плоскостью $y=0\left(y>0\right).$

6) Найти циркуляцию векторного поля $\vec{F}=y\vec{i}+z\vec{j}+x\vec{k}$ вдоль замкнутого контура, полученного от пересечения сферы $x^2+y^2+z^2=4$ координатными плоскостями, расположенными в первом октанте.

Вариант 26

1) Построить область, площадь которой выражается интегралом $\int\limits_0^a \mathrm{d}y \int\limits_{a-y}^{\sqrt{a^2-y^2}} \mathrm{d}x.$ Вычислить этот интеграл. Поменять порядок интегрирования.

2) Вычислить массу тела, ограниченного поверхностями $x+z=a;$ $x=0;$ $y=0;$ $y=a;$ $z=0,$ если плотность его в каждой точке равна $x^2+y^2.$

3) Вычислить $\int\limits_L x\mathrm{d}l,$ где L – отрезок прямой от точки $\left(0,0\right)$ до точки $\left(1,2\right).$

4) Вычислить работу силы $\vec{F}=y\cdot\vec{i}+\left(y-x\right)\vec{j}$ при перемещении единицы массы по дуге параболы $y=a-\dfrac{x^2}{a}$ из точки $A\left(-a;0\right)$ к точке $B\left(0,a\right).$

5) Вычислить $\iint\limits_S x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}z+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$, где S – внешняя сторона поверхности конуса $z^2+y^2=\dfrac{R^2}{3}x^2;$ $0\le x\le\sqrt{3}.$

6) Найти линейный интеграл вектора $\vec{a}=x^3\vec{i}-y^3\vec{j}$ вдоль первой четверти окружности $x=3\cos t;$ $y=3\sin t.$

Вариант 27

1) Построить область, площадь которой выражается интегралом $\int\limits_0^a dx \int\limits_x^{\sqrt{2a^2-x^2}} dy$. Вычислить этот интеграл. Поменять порядок интегрирования.

2) Определить объем тела, ограниченного поверхностями $x^2+y^2-z^2=0$; $x^2+y^2+z^2=a^2$ (внутри конуса).

3) Найти массу дуги параболы $y=\dfrac{x^2}{2}$, лежащей между точками $\left(1, \dfrac{1}{2}\right)$ и $(2, 2)$, если плотность равна $\dfrac{y}{x}$.

4) Вычислить $\int\limits_L xy^2 dx + yz^2 dy - x^2 z dz$, где L – отрезок прямой OB; $O(0, 0, 0)$; $B(-2, 4, 5)$.

5) С помощью формулы Остроградского, вычислить $\iint\limits_S x^2 dydz + y^2 dxdz + z^2 dxdy$, где S – внешняя сторона куба $0 \le x \le a$; $0 \le y \le a$; $0 \le z \le a$.

6) Найти $\operatorname{rot}\vec{a}$, если $\vec{a} = x^3 z\vec{i} + y^3 x\vec{j} + z^3 x\vec{k}$.

Вариант 28

1) Построить область, площадь которой выражается интегралом $\int\limits_0^1 dx \int\limits_x^{2-x^2} dy$. Изменить порядок интегрирования. Вычислить интеграл.

2) Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z=\sqrt{x^2+y^2}$; $z=x^2+y^2$.

3) Найти массу винтовой линии $x=a\cos t$; $y=a\sin t$; $z=b$ $(0 \le t \le 2\pi)$, если плотность в каждой ее точке пропорциональна квадрату расстояния этой точки до начала координат.

4) Вычислить $\int\limits_L (x-y)\mathrm{d}x + (x+y)\mathrm{d}y$, где L – отрезок прямой соединяющий точки $A(2,3)$ и $B(3,5)$.

5) Вычислить площадь поверхности той части плоскости $x+2y+z=4$, которая расположена в первом октанте.

6) Найти $\mathrm{rot}\vec{F}$, если $\vec{F} = y^3z^2\vec{i} + 4xz^2\vec{j} - xy^2\vec{k}$.

Вариант 29

1) Построить область, площадь которой выражается интегралом $\int\limits_{-2}^{0}\mathrm{d}y\int\limits_{y-4}^{0}\mathrm{d}x$. Изменить порядок интегрирования. Вычислить интеграл.

2) Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z = x^2 + y^2$; $x+y=4$; $x=0$; $y=0$; $z=0$.

3) Вычислить $\int\limits_L \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}l$, где L – верхняя половина кардиоиды $\rho = a(1+\cos\varphi)$.

4) Поле образовано силой $\vec{F} = (x+y)\vec{i} + (2xy-8)\vec{j}$. Найти работу поля при перемещении материальной точки массы m по дуге окружности от точки $(a,0)$ до точки $(0,a)$.

5) Вычислить массу поверхности $z^2 = x^2 + y^2$, заключенной между плоскостями $z=0$ и $z=1$, если поверхностная плотность пропорциональна x^2+y^2.

6) Найти циркуляцию поля $\vec{F} = y\vec{i}$ по контуру окружности $x = 2\cos t$; $y = 2 + 2\sin t$.

Вариант 30

1) Вычислить площадь фигуры, ограниченную линиями $ax = y^2 - 2ay$; $x+y=0$.

2) Определить массу тела, ограниченного поверхностями

$az = a^2 - x^2 - y^2$; $z = 0$, если плотность его в каждой точке пропорциональна аппликате этой точки.

3) Вычислить $\int\limits_L xy\,\mathrm{d}l$ по периметру прямоугольника, ограниченного прямыми $x = 0$; $y = 0$; $x = 4$; $y = 2$.

4) Вычислить $\int\limits_L (x - y)\,\mathrm{d}x + \mathrm{d}y$, где L – верхняя половина окружности $x^2 + y^2 = R^2$ (в положительном направлении).

5) Найти площадь части поверхности $2x + y + z = 4$, которая расположена в первом октанте.

6) Найти дивергенцию градиента функции $u = \ln(x + 2y + 3z)$.

Типовой расчет № 4

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ ДІФФЕРЕНЦІАЛЬНЫХ УРАВНЕНІЙ

В заданиях:

№ 1–8, 10, 11 – найти общее решение дифференциальных уравнений. Если даны начальные условия, то решить задачу Коши;

№ 9 – решить методом Лагранжа;

№ 12 – решить систему дифференциальных уравнений.

Вариант 1

1) $y'\sin x = y\ln y;$

2) $xy'\cos\dfrac{y}{x} = y\cos\dfrac{y}{x} - x;$

3) $(x^2+1)y' + 4xy = 3;$

4) $y' = \dfrac{4y}{x} + x\sqrt{y};$

5) $\dfrac{y}{x}\mathrm{d}x + (y^3 + \ln x)\,\mathrm{d}x = 0;$

6) $2yy'' = 3(y')^2 + 4y^2;$

7) $y'' = \dfrac{y'}{x}\left(1 + \ln\dfrac{y'}{x}\right), \quad \begin{cases} y(1) = \dfrac{1}{2}, \\ y'(1) = 1; \end{cases}$

8) 0 $y^{\mathrm{IV}} + 2y''' + y'' = 0;$

9) $y'' + y = \dfrac{1}{\sqrt{\cos 2x}};$

10) $y'' - 2y' = (2x+3)\,\mathrm{e}^{2x};$

11) $y'' + 2y' + 2y = 1 + 4\sin x;$

12) $\begin{cases} x' = 3x + y, \\ y' = x + 3y. \end{cases}$

Вариант 2

1) $y' = (2y+1)\,\mathrm{tg}\,x;$

2) $xy' = y(\ln y - \ln x);$

3) $x^2y' + xy + 1 = 0;$

4) $2xy' + 2y = xy^2;$

5) $(2x + \mathrm{e}^{\frac{x}{y}})\mathrm{d}x + \left(1 - \dfrac{x}{y}\right)\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}\mathrm{d}y = 0;$

6) $\mathrm{e}^y\left(y'' + (y')^2\right) = 2;$

7) $e^{x}(y''e^{x})=1,\ \begin{cases} y(0)=1, \\ y'(0)=0; \end{cases}$

8) $y^{\mathrm{IV}}-3y''-4y=0;$

9) $y''+4y'+4y=\dfrac{e^{-2x}}{x^{3}};$

10) $y''+y'=x^{2}+1;$

11) $y''+2y'-3y=e^{2x}+9\cos x;$

12) $\begin{cases} \dot{x}=2y-x+1, \\ \dot{y}=3y-2x. \end{cases}$

Вариант 3

1) $y'=\dfrac{e^{2x}}{\ln y};$

2) $y\,dy=(2y-x)\,dx;$

3) $xy'+y+xe^{-x^{2}}=0;$

4) $2y'+2xy=xe^{-x^{2}}y^{2};$

5) $y'y^{2}+yy''=(y')^{2};$

6) $(10xy-8y+1)\,dx+(5x^{2}-8x+3)dy=0;$

7) $y''=\dfrac{y'}{x}\ln\dfrac{y'}{x},\ \begin{cases} y(1)=e, \\ y'(1)=e; \end{cases}$

8) $y'''+2y''-3y'=0;$

9) $y''-4y'+5y=\dfrac{e^{2x}}{\cos x};$

10) $4y''+4y'+y=3\cos 2x;$

11) $y''+4y'+5y=2x+3+xe^{x};$

12) $\begin{cases} \dot{x}=2x-4y, \\ \dot{y}=x-3y+3e^{t}. \end{cases}$

Вариант 4

1) $3e^{x}(\sin y)\,dx+(1+e^{x})\cos y\,dy=0;$

2) $\dfrac{dx}{xy-x^{2}}=\dfrac{dy}{2y^{2}-xy};$

3) $y'=2x(x^{2}+y);$

4) $y'+2xy=2x^{3}y^{3};$

5) $(2x^{3}-xy^{2})\,dx+(2y^{3}-x^{2}y)\,dy=0;$

6) $yy''=(y')e^{3};$

7) $y''=\dfrac{y'}{x}+x\cos x,\ \begin{cases} y(\pi)=\pi+1, \\ y'(\pi)=2\pi; \end{cases}$

8) $y^{\mathrm{IV}}-y''=0;$

9) $y'' + 2y' + y = 3e^{-x}\sqrt{x+1}$;

10) $y'' + 9y = 4\cos 3x$;

11) $y'' - 4y' = 2x + 1 + 4e^{2x}$;

12) $\begin{cases} \dot{x} = 4x + y - 36t, \\ \dot{y} = y - 2x - 2e^t. \end{cases}$

Вариант 5

1) $3^{y^2 - x^2} = \dfrac{yy'}{x}$;

2) $y' = \dfrac{y}{x} - \dfrac{x}{y}$;

3) $y'\operatorname{ctg} x - y = 2\cos^2 x \operatorname{ctg} x$;

4) $xy' + y = y^2 \ln x$;

5) $e^y dx + (xe^y - 2y)\, dy = 0$;

6) $y''y + (y')^2 = y'$;

7) $x(y'' - x) = y'$, $y(1) = y'(1) = 1$;

8) $y^{IV} - y''' = 0$;

9) $y'' + y = \operatorname{tg} x$;

10) $y'' + 6y' + 13y = 3e^{2x} \sin x$;

11) $y'' - 2y' + y = 2e^x + x - 1$;

12) $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 3y + 5t, \\ \dot{y} = 3x + 2y + 8e^t. \end{cases}$

Вариант 6

1) $y'\sqrt{1 - x^2} - \cos^2 y = 0$;

2) $4xy\,dy = (x^2 - y^2)\, dx$;

3) $y' - 3x^2 y - x^2 e^{x^3} = 0$;

4) $y' - 9x^2 y = (x^5 + x^2) y^{\frac{2}{3}}$;

5) $\dfrac{x\,dy}{x^2 + y^2} = \left(\dfrac{y}{x^2 + y^2} - 1 \right) dx$;

6) $y'' = y' + x$;

7) $y''y^3 = 1$, $y(0,5) = y'(0,5) = 1$;

8) $y^{IV} + 8y'' - 9y = 0$;

9) $y'' - y = \dfrac{e^{2x}}{e^x - 1}$;

10) $y'' - 4y = 5e^{2x}$;

11) $y'' - 4y' = 2x - 3 + \cos 3x$;

12) $\begin{cases} \dot{x} = 4x - 3y + \sin t, \\ \dot{y} = 2x - y + 2\cos t. \end{cases}$

Вариант 7

1) $(1+\mathrm{e}^{3y})\,x\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{3y}\mathrm{d}y$;

2) $xy'=y+y\ln\dfrac{y}{x}$;

3) $(x^2-1)y'-xy=x^3-x$;

4) $xy'+y=xy^2$;

5) $x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y=0$;

6) $y''+y'(y-1)=(y')^2$;

7) $xy''=y',\ y(1)=y'(1)=2$;

8) $y^{\mathrm{IV}}+2y'''+2y''=0$;

9) $y''+4y=2\,\mathrm{tg}\,x$;

10) $y''-4y'+4y=3\mathrm{e}^{2x}$;

11) $y''-6y'+13y=4\sin 2x-\cos x$;

12) $\begin{cases} y'=\dfrac{y^2}{z}, \\ z'=\dfrac{1}{2}y. \end{cases}$

Вариант 8

1) $(x+2xy)\,\mathrm{d}x+(1+x^2)\,\mathrm{d}y=0$;

2) $y\,\mathrm{d}x=(2\sqrt{xy}-x)\,\mathrm{d}y$;

3) $y'+2y=\mathrm{e}^{3x}$;

4) $xy'-y=y^2$;

5) $\dfrac{\mathrm{d}x}{y}-\dfrac{x}{y^2}\mathrm{d}y=0$;

6) $2yy''+y^2=(y')^2$;

7) $x(y''+1)+y'=2,\ y(1)=\dfrac{1}{2},\ y'(1)=\dfrac{5}{2}$;

8) $y^{\mathrm{IV}}+8y''+16y=0$;

9) $y''-y'=\dfrac{1}{\mathrm{e}^x+1}$;

10) $y''+10y'+26y=(3x-1)\,\mathrm{e}^x$;

11) $y''+4y'=1+4\cos^4 x$;

12) $\begin{cases} \dot{x}=y-\cos t, \\ \dot{y}=-x+\sin t. \end{cases}$

Вариант 9

1) $(1+y^2)\,\mathrm{d}x-(2y+\sqrt{1+y^2})(1+x)^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}y=0$;

2) $y^2-3xy+3x^2y'=0$;

3) $y'+\dfrac{y}{x}=2\ln x+1$;

4) $y' + \dfrac{2y}{x} = \dfrac{2\sqrt{y}}{\cos^2 x}$;

5) $yy'' = y'(y'+1)$;

6) $(\mathrm{e}^x + y + \sin y)\,\mathrm{d}x + (\mathrm{e}^y + x + \cos y \cdot x)\,\mathrm{d}y = 0$;

7) $y'' = -\dfrac{x}{y'}$, $y(2) = 0$, $y'(2) = 1$;

8) $y^{\mathrm{IV}} + y'' = 0$;

9) $y'' + 4y = \operatorname{ctg} 2x$;

10) $y'' + y' = 3\cos x$;

11) $4y'' - 4y' + y = x^2 + 4\mathrm{e}^{2x}$;

12) $\begin{cases} y' = -5y + 2z + 40\mathrm{e}^x, \\ x' = y - 6z + 9\mathrm{e}^{-x}. \end{cases}$

Вариант 10

1) $(2xy^2 + x)\,\mathrm{d}x + (3y - x^2 y)\,\mathrm{d}y = 0$;

2) $(x - y)\,\mathrm{d}x + (x + y)\,\mathrm{d}y = 0$;

3) $y' + \dfrac{2y}{x+1} = \mathrm{e}^x (x+1)^2$;

4) $y' - \dfrac{xy}{x^2 - 1} = x\sqrt{y}$;

5) $xy'' - y'' + \dfrac{1}{x} = 0$;

6) $2x\cos^2 y\,\mathrm{d}x + (2y - x^2 \sin 2y)\,\mathrm{d}y = 0$;

7) $y'' = 2yy'$, $y(0) = y'(0) = 1$;

8) $y''' - 8y = 0$;

9) $y'' + 4y = \dfrac{1}{\cos 2x}$;

10) $y'' + 4y' + 29y + 26\,\mathrm{e}^{-x}$;

11) $y'' + 4y' = 2x + 5 + x\mathrm{e}^{3x}$;

12) $\begin{cases} \dot{x} = -y, \\ \dot{y} = 3x + 4y. \end{cases}$

Вариант 11

1) $(\sqrt{xy} - \sqrt{x})\,\mathrm{d}y + y\,\mathrm{d}x = 0$;

2) $xy' - y = x \operatorname{tg} \dfrac{y}{x}$;

3) $xy' + y = \mathrm{e}^x$;

4) $y' - y + y^2 \cos x = 0$;

5) $2xy\,\mathrm{d}y + (x^2 + y^2 + 2x)\,\mathrm{d}x = 0$;

6) $y'' + \dfrac{(y')^2}{1 - y} = 0$;

7) $y'' - 2\operatorname{ctg} x y' = \sin^3 x$, $y(\frac{\pi}{4}) = 0$, $y'(\frac{\pi}{4}) = 1$;

8) $4y^{\mathrm{IV}} + 4y''' + y'' = 0$;

9) $y'' + y = \frac{1}{\sin x}$;

10) $y'' - 12y' + 36y = 32\cos 2x$;

11) $y'' - 2y' + 2y = 3x + (4x-1)\mathrm{e}^{2x}$;

12) $\begin{cases} \dot{x} = 2y - 3x, \\ \dot{y} = y - 2x + t. \end{cases}$

Вариант 12

1) $(x^2 + 2x)y' = y + 4$;

2) $xy' - y = (x+y)\ln\frac{x+y}{x}$;

3) $xy' - \frac{y}{x+1} = x$;

4) $y' = y\operatorname{ctg} x + \frac{y^3}{\sin x}$;

5) $2yy' = y''$;

6) $(x^3 - 3xy^2 + 2)\,\mathrm{d}x - (3x^2 y - y^2)\,\mathrm{d}y = 0$;

7) $y^{\mathrm{IV}} - 5y'' + 4y = 0$;

8) $y''(x^2+1) = 2xy'$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$;

9) $y'' + 2y' + y = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}$;

10) $y'' + y' = x\mathrm{e}^{-x}$;

11) $y'' + 3y' + 10y = \sin 3x - \cos x$;

12) $\begin{cases} \dot{x} = x - y + 18t, \\ \dot{y} = 5x - y. \end{cases}$

Вариант 13

1) $y^2 + y'x^2 = 0$;

2) $xy' = y\cos\ln\frac{y}{x}$;

3) $y' + y = \cos x$;

4) $y' - \frac{y}{x} = \frac{x^2}{y}$;

5) $2(y')^2 = y''(y-1)$;

6) $(x^2 + y^2 + y)\,\mathrm{d}x + (2xy + x + \mathrm{e}^y)\,\mathrm{d}y = 0$;

7) $y''x + y' = \ln x$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 2$;

8) $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$;

9) $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{\sqrt{4 - x^2}}$;

10) $y'' + 6y' + 9y = 2x^2 - 1$;

11) $y'' + 4y' + 5y = 4xe^{2x} + \cos x$;

12) $\begin{cases} \dot{x} = 2y - x, \\ \dot{y} = 4y - 3x + e^{3t}. \end{cases}$

Вариант 14

1) $2e^y(1 + x^2)\,dy - x(e^y + 1)\,dx = 0$;

2) $x\,dy - y\,dx = \sqrt{x^2 + y^2}\,dx$;

3) $y' - \dfrac{y}{x} = x$;

4) $y' + 2y = y^2 e^x$;

5) $(y + x\ln y)\,dx + (\dfrac{x^2}{2y} + x + 1)\,dy = 0$;

6) $2xy'y'' = (y')^2 + 1$;

7) $y'' = y'e^y$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$;

8) $y^{IV} + 4y''' - 5y'' = 0$;

9) $y'' + y = \mathrm{tg}^2 x$;

10) $4y'' + 9y = 5\cos 3x$;

11) $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y + 2e^t, \\ \dot{y} = x + 2y - 3e^{4t}; \end{cases}$

12) $y'' + 8y' + 17y = 2x^2 + 3x + 1 + 3e^{2x}$.

Вариант 15

1) $x\ln xy' = y$;

2) $y' = \dfrac{x^2 + y^2}{xy}$;

3) $y' - \dfrac{y}{1 - x^2} = 1 + x$;

4) $xy' - 4y - 2x^2\sqrt{y} = 0$;

5) $y'' - \dfrac{y'}{x - 1} = x(x - 1)$;

6) $(3x^2 y + \sin x)\,dx + (x^3 - \cos y)\,dy = 0$;

7) $y'' + 2y(y')^3 = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = \dfrac{1}{3}$;

8) $y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0$;

9) $y'' - 3y' + 2y = \dfrac{e^x + 2}{e^x + 1};$ **10)** $y'' + 4y' + 5y = 4e^x \cos 3x;$

11) $y'' - 4y' + 4y = 5e^{2x} + 3\cos 4x;$ **12)** $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y, \\ \dot{y} = x + 2e^t. \end{cases}$

Вариант 16

1) $(4 + x^2)\,dy - \sqrt{1 - 16y^2}\,dx = 0;$ **2)** $x^2 + xy + y^2 = x^2 y';$

3) $y' - \dfrac{2y}{x} = x^3;$ **4)** $xy^2 y' = x^2 + y^3;$

5) $x^2 \sin y\,dx + (1 + \dfrac{x^3}{3}\cos y)\,dy = 0;$ **6)** $y'' + 4y' = 2x^2;$

7) $y'' = 2 - y,\ y(0) = 2,\ y'(0) = 2;$ **8)** $y^{\mathrm{IV}} + y'' = 0;$

9) $y'' + 4y = \dfrac{1}{\sin^2 x};$ **10)** $y'' + 9y = 3\cos 3x;$

11) $y'' - y' = 4x + 3 + 4e^{2x};$ **12)** $\begin{cases} \dot{x} = x + 2y, \\ \dot{y} = x - 5\sin t. \end{cases}$

Вариант 17

1) $yy' = e^{2x - y};$ **2)** $(x^2 + xy)\,y' = x\sqrt{x^2 - y^2} + xy + y^2;$

3) $y' \operatorname{tg} x - y = 1;$ **4)** $xy' + y = \sqrt{x};$

5) $e^x dy + (ye^x - 2x)\,dx = 0;$ **6)** $x^2 y'' = (y')^2;$

7) $y'' = \dfrac{1}{y^3},\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0;$ **8)** $y^{\mathrm{IV}} + 2y''' + y'' = 0;$

9) $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x};$ **10)** $y'' + 2y' + 5y = 3x e^{2x};$

11) $y'' + 4y' + 4y = 3x + 1 + 5\cos 3x;$ **12)** $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y, \\ \dot{y} = y - 2x + 18t. \end{cases}$

Вариант 18

1) $xy' + y = y^2$;

2) $4y' = \dfrac{y^2 + 4x^2}{x^2}$;

3) $y' - \dfrac{y}{x} = x\cos 2x$;

4) $y' - \dfrac{y}{\sqrt{x}} = \mathrm{e}^{2\sqrt{x}} y^2$;

5) $(\ln y - x)\,\mathrm{d}x + (\dfrac{x}{y} - y)\,\mathrm{d}y = 0$;

6) $y''(2y+3) = 2(y')^2$;

7) $x^3 y'' + x^2 y' = 1,\ y(1) = 1,\ y'(1) = 2$;

8) $y^{\mathrm{IV}} - 3y''' + 3y'' - y' = 0$;

9) $y'' + y = \operatorname{ctg} x$;

10) $y'' - 16y = 3x\,\mathrm{e}^{4x}$;

11) $y'' + 5y' = 4x + 3 + \cos 2x$;

12) $\begin{cases} \dot{x} = x - y, \\ \dot{y} = y - x + \cos 3t. \end{cases}$

Вариант 19

1) $y' = \dfrac{y-1}{x+1}$;

2) $(xy' - y)\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} = x$;

3) $xy' + y = \mathrm{e}^x$;

4) $y' - \dfrac{2xy}{1+x^2} = \dfrac{4\operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}}\sqrt{y}$;

5) $xy'' + y' = \ln x$;

6) $\left(\dfrac{\sin 2x}{y} + x\right)\mathrm{d}x + \left(y - \dfrac{\sin^2 x}{y^2}\right)\mathrm{d}y = 0$;

7) $y'' + y(y')^3 = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 2$;

8) $y^{\mathrm{IV}} + 18y'' + 81y = 0$;

9) $y'' + y = \dfrac{1}{\cos^2 x}$;

10) $y'' + 5y' - 6y = (2x+3)\mathrm{e}^x$;

11) $y'' - 4y' = (3x+1)^2 + 5x\,\mathrm{e}^x$;

12) $\begin{cases} \dot{x} = -y + t - 1, \\ \dot{y} = x + 2t. \end{cases}$

Вариант 20

1) $\sin x \sin y\, \mathrm{d}x + \cos x \cos y\, \mathrm{d}y = 0;$ **2)** $y^2 + x^2 y' = xy'y;$

3) $x^2 y' + 2xy - 1 = 0;$ **4)** $y' + \dfrac{y}{x} = x^2 y^4;$

5) $\left(1 + \dfrac{y^2}{x^2}\right)\mathrm{d}x - \dfrac{2y}{x}\mathrm{d}y = 0;$ **6)** $y'' = 2(y' - 1)\operatorname{ctg} x;$

7) $y^{\mathrm{IV}} + 2y''' = 0;$ **8)** $y'y^2 + yy'' = (y')^2,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 2;$

9) $y'' + 4y' + 4y = \mathrm{e}^{-2x} \ln x;$ **10)** $y'' - y' - 2y = x\cos x - \sin x;$

11) $y'' + 9y = x^2 + 5 - 9\mathrm{e}^{4x};$ **12)** $\begin{cases} \dot{x} = 3x - 4y - \mathrm{e}^{-2t}, \\ \dot{y} = x - 2y - 3\mathrm{e}^{-2t}. \end{cases}$

Вариант 21

1) $(y - 2)\,\mathrm{d}x + x^2 \mathrm{d}y = 0;$ **2)** $y' = \dfrac{3x}{y} + \dfrac{y}{x};$

3) $xy' - y = x^2 \mathrm{e}^x;$ **4)** $xy' + 2y + x^5 y^3 \mathrm{e}^x = 0;$

5) $(5x + xy^2)\mathrm{d}x + (4y + x^2 y)\mathrm{d}y = 0;$ **6)** $3y'y'' = 2y;$

7) $x(y'' + y') = y',\ y(0) = -1,\ y'(0) = 0;$ **8)** $y^{\mathrm{V}} - 2y^{\mathrm{IV}} + y''' = 0;$

9) $y'' + 5y' + 6y = \dfrac{1}{1 + \mathrm{e}^{2x}};$ **10)** $y'' + 2y' - 3y = (x + 3)\,\mathrm{e}^x;$

11) $y'' + 4y = 1 + 6\cos 3x;$ **12)** $\begin{cases} \dot{x} = y - 5\cos t, \\ \dot{y} = 2x + y. \end{cases}$

Вариант 22

1) $\sqrt{3 + y^2}\,\mathrm{d}x - y\mathrm{d}y = x^2 y\mathrm{d}y;$ **2)** $y\mathrm{d}y = (2y - x)\,\mathrm{d}x;$

3) $xy' - \dfrac{y}{x + 1} = x;$ **4)** $2y' - \dfrac{xy}{x^2 - 1} = \dfrac{x}{y};$

5) $x(y''-x)=y'$; 6) $(3x\sin y+1)\,\mathrm{d}x+(\frac{3}{2}x^2\cos y+1)\,\mathrm{d}y=0$;

7) $y^{\mathrm{IV}}-5y'''=0$; 8) $3y'y''=y+(y')^3+1,\ y(0)=-2,\ y'(0)=0$;

9) $y''+9y=3\operatorname{tg}3x$; 10) $y''+4y'=(x+1)^2$;

11) $y''-3y'+4y=\cos 3x+12\mathrm{e}^{2x}$; 12) $\begin{cases}\dot{x}=y+2\mathrm{e}^t,\\ \dot{y}=x+t^2.\end{cases}$

Вариант 23

1) $(1+x)y'=xy$; 2) $x^2y'=y(x+y)$;

3) $(1-x)(y'+y)=\mathrm{e}^{-x}$; 4) $\frac{x}{y^2}=y'+y$;

5) $\frac{y}{x^2}\mathrm{d}x-\frac{xy+1}{x}\mathrm{d}y=0$; 6) $(x+1)y''+x(y')^2=y'$;

7) $y^{\mathrm{IV}}+13y''+36y=0$; 8) $y'(1+(y')^2)=3y''$; $y(2)=1,\ y'(2)=2$;

9) $y''+6y'+9y=4\mathrm{e}^x(\cos x-\sin x)$; 10) $y''+4y'+4y=\frac{\mathrm{e}^{-2x}}{x^3}$;

11) $y''+4y'=x^2+2x-3+5\mathrm{e}^{3x}$; 12) $\begin{cases}y'=\frac{y}{x},\\ z'=y+z.\end{cases}$

Вариант 24

1) $y'-2\sqrt{y}\ln x=0$;

2) $(4x^2+3xy+y^2)\,\mathrm{d}x+(4y^2+3xy+x^2)\,\mathrm{d}y=0$;

3) $y'+y\cos x=\sin x\cos x$; 4) $y'-3y=x\sqrt[3]{y}$;

5) $\left(1+\frac{2x}{y^3}\right)\mathrm{d}x+\left(\frac{1}{y^2}-\frac{3x^2}{y^4}\right)\mathrm{d}y=0$;

6) $y''(1+\ln x)+\frac{y'}{x}=2+\ln x$;

7) $2y'' = 3y^2,\ y(-2) = 1,\ y'(-2) = 1;$ **8)** $y^{\mathrm{IV}} + 4y''' + 5y'' = 0;$

9) $y'' + 2y' + y = \mathrm{e}^{-x} \ln x;$ **10)** $2y'' + 9y' = 4\sin 3x + \cos 3x;$

11) $y'' + 6y' + 9y = 4x + 3 - 5\mathrm{e}^{-3x};$ **12)** $\begin{cases} \dot{x} = x + y + t, \\ \dot{y} = -4x - 3y + 2t. \end{cases}$

Вариант 25

1) $(4x + xy^2)\,\mathrm{d}x + (3y - x^2 y)\,\mathrm{d}y = 0;$ **2)** $y = \left(y' - \mathrm{e}^{\frac{y}{x}} \right) x;$

3) $y' - y \operatorname{tg} x = \dfrac{1}{\cos x};$ **4)** $y' - xy = -y^3 \mathrm{e}^{-x^2};$

5) $(3x^2 y - \dfrac{4}{x^2})\,\mathrm{d}x + (\cos y + x^3)\,\mathrm{d}y = 0;$ **6)** $y\,(y'' + 1) = (y')^2;$

7) $y'' x \ln x = 2y',\ y(\mathrm{e}) = 1,\ y'(\mathrm{e}) = 2;$ **8)** $y^{\mathrm{IV}} - 15y'' - 16y = 0;$

9) $y'' - 4y' + 4y = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{4 + x^2};$ **10)** $4y'' - 4y' + y = 4x^2 + 5x;$

11) $y'' - 8y' + 20y = 4\sin 2x + x\,\mathrm{e}^{2x};$ **12)** $\begin{cases} \dot{x} = -y + \mathrm{e}^{3t}, \\ \dot{y} = -x + 2\,\mathrm{e}^{3t}. \end{cases}$

ПЕРЕЧЕНЬ УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИХ ПОСОБИЙ

1. Гусак, А. А. Высшая математика : в 2 т. / А. А. Гусак. – Минск : ТетраСистемс, 2009. – Ч. 2. – 2009.

2. Пискунов, Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления (для втузов) : в 2 т. / Н. С. Пискунов. – М. : Наука, 1985. – Т. 2. – 2009.

3. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике / Д. Т. Письменный. – М. : Айрис Пресс, 2010.

4. Сборник задач по математике для втузов : в 2 ч. / под ред. А. В. Ефимова, Б. П. Демидовича. – М. : Наука, 1985. – Ч. 2. – 1985.

5. Высшая математика в упражнениях и задачах : в 2 ч. / П. Е. Данко [и др.]. – М. : Оникс, 2005. – Ч. 2. – 2005.

6. Белько, И. В. Высшая математика для инженеров : в 2 ч. / И. В. Белько [и др.]. – М. : Новое знание, 2007. – Ч. 2. – 2007.

Учебное издание

МАТЕМАТИКА

Практикум для студентов
инженерно-технических специальностей

В 4 частях

Часть 2

Составители:
БРИЧИКОВА Елена Алексеевна
ВОРОНОВИЧ Галина Константиновна
КАТКОВСКАЯ Ирина Николаевна и др.

Редактор *Т. А. Панкрат*
Компьютерная верстка *Н. А. Школьниковой*

Подписано в печать 19.02.2015. Формат 60×84 $^{1}/_{16}$. Бумага офсетная. Ризография.
Усл. печ. л. 8,02. Уч.-изд. л. 6,27. Тираж 500. Заказ 466.

Издатель и полиграфическое исполнение: Белорусский национальный технический университет.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя
печатных изданий № 1/173 от 12.02.2014. Пр. Независимости, 65. 220013, г. Минск.