



The procedure of determination of the temperature field of steel slug at heating in continuous furnace taking into account dependence of the temperature conductivity coefficient on temperature is stated. Implicit schema is used for numerical solution of two-dimensional equation of thermal conductivity with boundary terms of third type.

В. И. ТИМОШПОЛЬСКИЙ, НАН Беларуси,
Ю. М. ПЛЕСКАЧЕВСКИЙ, ИТМО им. А.В.Лыкова НАН Беларуси,
С. Л. ГАВРИЛЕНКО, С. В. ШИЛЬКО, ИММС им. В.А. Белого НАН Беларуси

УДК 621.74

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О НАГРЕВЕ ЗАГОТОВКИ С УЧЕТОМ ТЕМПЕРАТУРНОЙ ЗАВИСИМОСТИ КОЭФФИЦИЕНТА ТЕМПЕРАТУРОПРОВОДНОСТИ

Существующие расчеты температурного поля стальных заготовок при нагреве в методической печи, как правило, предполагают постоянство теплофизических и механических характеристик материала. Вместе с тем в температурном диапазоне, характерном для металлургических процессов, указанные характеристики являются не константами, а функциями температуры. В целях адекватного описания термомеханических процессов необходимо, используя соответствующие экспериментальные данные, разработать уточненные математические модели, учитывающие температурные зависимости удельной теплоемкости, коэффициентов тепло- и теплопроводности, пределов прочности и текучести, модуля Юнга и т.д.

Указанные задачи могут быть решены численными методами теплофизики и термомеханики, которые на основе теории тепло- и массопереноса [1] применительно к металлургическим процессам были развиты, в частности, в монографии [2].

В настоящей работе изложена процедура расчетного определения температурного поля заготовки при нагреве в методической печи с учетом зависимости коэффициента теплопроводности от температуры. При задании начальных и граничных условий использованы условия нагрева в методической печи призматической стальной заготовки сечением 125x125 мм².

Расчет температурного поля достаточно протяженной стальной заготовки можно свести к решению двумерного уравнения теплопроводности с начальными условиями (а именно, постоянной температурой при $t=0$) и граничными условиями третьего рода (теплообмен по закону Ньютона), физически достоверно моделирующими перенос тепла на границе заготовки с окружающей средой.

Для математической формулировки задачи запишем двумерное уравнение теплопроводности:

$$u_t = a^2 (u_{xx} + u_{yy})$$

с начальными условиями

$$u(x, y, 0) = T_0 = 120 \text{ } ^\circ\text{C}$$

и граничными условиями третьего рода

$$\frac{\partial u}{\partial n} - \alpha_1 u = -\alpha_1 \theta(t),$$

где α_1 – приведенный коэффициент внешней теплоотдачи; $\theta(t)$ – температура в печи (далее принято

изменение температуры в печи по зависимости $\theta(t) = 750 \text{ } ^\circ\text{C} + 5,63t$); $\frac{\partial}{\partial n}$ – производная по внутренней нормали к границе заготовки.

Преобразованные граничные условия имеют вид: $\frac{\partial u}{\partial n} - \alpha_1(u - \theta(t)) = 0$. Делаем замену: $u = u_1(x, y, t) + \theta(t)$, тогда $u - \theta(t) = u_1(x, y, t)$. После замены получаем очевидные равенства:

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u_1}{\partial n}, \quad \frac{\partial u_1}{\partial n} - \alpha_1 u_1 = 0.$$

Затем уравнение преобразуем в неоднородное, используя равенство $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u_1}{\partial t} + 5,63$. Тогда уравнение приобретает вид: $u_{1t} = a^2(u_{1xx} + u_{1yy}) - 5,63$ с начальными условиями $u_1(x, y, 0) = T_0 - \theta(0)$, которые следуют из проведенной замены и температуры печи в момент времени $t=0$.

Метод решения включает следующие действия:

- 1) замену дискретным аналогом непрерывного процесса теплообмена в сечении заготовки;
- 2) сведение дискретного аналога к системе линейных алгебраических уравнений;
- 3) определение температурной зависимости в каждый последующий момент времени путем решения системы уравнений;
- 4) корректировку граничных и начальных условий, а также коэффициента температуропроводности исходя из вновь найденной температуры;
- 5) возвращение к п. 2 для нахождения температурной зависимости внутри сечения в последующие моменты времени.

Целесообразно записать математическую постановку задачи в безразмерном виде с помощью характерных констант: $l_0 = 12,5$ см, $t_0 = 1500$ мин и значения $T_1 = T_0 - \theta(0)$. Для этого используем следующие равенства: 1) $u_1 = -630\tilde{u}_1$; 2) $x = l_0\tilde{x}$; 3) $y = l_0\tilde{y}$; 4) $a^2 = \tilde{a}^2 \frac{l_0^2}{t_0}$; 5) $f_0 = \tilde{f}_0 \frac{T_1}{t_0}$, где f_0 – плотность тепловых источников (в нашем случае $f_0 = -5,63$). В итоге получим следующую задачу (далее тильды на безразмерных параметрах опущены):

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} \right) + 13,35; \quad x, y \in [0, 1]; \quad t \in [0, 0, 4]$$

с начальным условием $u_1(x, y, 0) = 1$ и граничными условиями на сторонах сечения:

$$-\frac{\partial u_1}{\partial x} - \alpha_1 u_1 \Big|_{x=0}^y = 0, \quad \frac{\partial u_1}{\partial x} - \alpha_1 u_1 \Big|_{x=0}^y = 0, \quad \frac{\partial u_1}{\partial y} - \alpha_1 u_1 \Big|_{y=0}^x = 0, \quad -\frac{\partial u_1}{\partial y} - \alpha_1 u_1 \Big|_{y=0}^x = 0.$$

Для численного решения уравнения теплопроводности будем использовать неявную схему с весами. Вводя произвольный параметр σ , построим семейство разностных схем:

$$\frac{y_{ij}^{t+1} - y_{ij}^t}{\tau} = a^2 \left(\Lambda_x (\sigma y_{ij}^{t+1} + (1-\sigma)y_{ij}^t) + \Lambda_y (\sigma y_{ij}^{t+1} + (1-\sigma)y_{ij}^t) \right) + \varphi_i^j \quad (1)$$

где $0 < i, j < N_0$, $0 < t < N_1$, φ_i^j – слагаемое, полученное при дискретизации плотности тепловых источников.

Система уравнений (1) является схемой с весами, где $\Lambda_x y_{ij} = y_{xx,ij} = (y_{i-1j} - 2y_{ij} + y_{i+1j})/h^2$. Аналогично определяется Λ_y .

Для повышения точности и обеспечения устойчивости численной процедуры принимаем значение $\sigma = 0,5$ и проводим математические преобразования, после чего получаем разностную схему:

$$\frac{y_{ij}^{t+1} - y_{ij}^t}{\tau} = \frac{a^2}{2} \left(\frac{y_{i+1j}^{t+1} - 2y_{ij}^{t+1} + y_{i-1j}^{t+1}}{h^2} \right) + \frac{a^2}{2} \left(\frac{y_{i+1j}^t - 2y_{ij}^t + y_{i-1j}^t}{h^2} \right) + \frac{a^2}{2} \left(\frac{y_{ij+1}^{t+1} - 2y_{ij}^{t+1} + y_{ij-1}^{t+1}}{h^2} \right) +$$

$$+ \frac{a^2}{2} \left(\frac{y'_{ij+1} - 2y'_{ij} + y'_{ij-1}}{h^2} \right) + 13,35.$$

Для аппроксимации граничных условий с тем же порядком будем использовать следующие разностные аналоги:

$$\begin{aligned} \sigma \left(\frac{y'_{1j} - y'_{0j}}{h} - \alpha_1 y'_{0j} \right) + (1-\sigma) \left(\frac{y'_{1j} - y'_{0j}}{h} - \alpha_1 y'_{0j} \right) &= 0,5h \frac{y'_{0j} - y'_{0j}}{\tau} - 6,675h, \\ \sigma \left(\frac{y'_{i1} - y'_{i0}}{h} - \alpha_1 y'_{i0} \right) + (1-\sigma) \left(\frac{y'_{i1} - y'_{i0}}{h} - \alpha_1 y'_{i0} \right) &= 0,5h \frac{y'_{i0} - y'_{i0}}{\tau} - 6,675h, \\ \sigma \left(-\frac{y'_{10j} - y'_{9j}}{h} - \alpha_1 y'_{10j} \right) + (1-\sigma) \left(-\frac{y'_{10j} - y'_{9j}}{h} - \alpha_1 y'_{10j} \right) &= 0,5h \frac{y'_{10j} - y'_{10j}}{\tau} - 6,675h, \\ \sigma \left(-\frac{y'_{i10} - y'_{i9}}{h} - \alpha_1 y'_{i10} \right) + (1-\sigma) \left(-\frac{y'_{i10} - y'_{i9}}{h} - \alpha_1 y'_{i10} \right) &= 0,5h \frac{y'_{i10} - y'_{i10}}{\tau} - 6,675h. \end{aligned}$$

Чтобы аппроксимировать граничные условия с тем же порядком, что и уравнение (1), положим $\sigma=0,5$. После несложных математических преобразований имеем следующие линейные алгебраические уравнения относительно y'_{ij}^{t+1} , правая часть которых зависит от y'_{ij}^t (t -го слоя), которые считаем известными.

В итоге получим сеточный аналог третьей краевой задачи для уравнения теплопроводности:

$$y'_{ij}^{t+1} \left(1 + \frac{2\tau a^2}{h^2} \right) - \frac{\tau a^2}{2h^2} (y'_{i-1j} + y'_{ij-1} + y'_{i+1j} + y'_{ij+1}) = y'_{ij}^t \left(1 - \frac{2\tau a^2}{h^2} \right) + \frac{\tau a^2}{2h^2} (y'_{i-1j} + y'_{ij-1} + y'_{i+1j} + y'_{ij+1}) + 13,35\tau,$$

где $\tau=0,004$; $h=0,1$, $a^2 = a^2(T)$. Указанные шаги дискретизации по пространственным координатам и времени взяты из условия наиболее полного описания процесса нагрева.

Преобразованные разностные граничные условия третьего рода имеют вид

$$y'_{1j}^{t+1} - \left(1 + \alpha_1 h + \frac{h^2}{\tau} \right) y'_{0j}^{t+1} = \left(1 + \alpha_1 h - \frac{h^2}{\tau} \right) y'_{0j}^t - y'_{1j}^t - 13,35h^2, \quad (2)$$

$$\left(1 + \alpha_1 h + \frac{h^2}{\tau} \right) y'_{10j}^{t+1} - y'_{9j}^{t+1} = y'_{9j}^t - \left(1 + \alpha_1 h - \frac{h^2}{\tau} \right) y'_{10j}^t + 13,35h^2, \quad (3)$$

$$y'_{i1}^{t+1} - \left(1 + \alpha_1 h + \frac{h^2}{\tau} \right) y'_{i0}^{t+1} = \left(1 + \alpha_1 h - \frac{h^2}{\tau} \right) y'_{i0}^t - y'_{i1}^t - 13,35h^2, \quad (4)$$

$$\left(1 + \alpha_1 h + \frac{h^2}{\tau} \right) y'_{i10}^{t+1} - y'_{i9}^{t+1} = y'_{i9}^t - \left(1 + \alpha_1 h - \frac{h^2}{\tau} \right) y'_{i10}^t + 13,35h^2. \quad (5)$$

Для приведения сеточных уравнений к системе линейных алгебраических уравнений преобразуем сеточные значения в вектор по формуле $x_{11i+j} = y'_{ij}$. Рассмотрим сеточный аналог уравнения теплопроводности при $i, j = 1, \dots, 9$ при дискретизации сечения заготовки в виде 10×10 разбиений с количеством узлов 11×11 (рис. 1).

Разностные граничные условия справедливы при следующих значениях индексов: (1) — для $j = 0, \dots, 10$, (2) — для $j = 0, \dots, 10$, (3) и (4) соответствуют $i = 1, \dots, 9$. В итоге имеем 40 линейных алгебраических уравнений, а разностный аналог уравнения теплопроводности дает 81 уравнение.

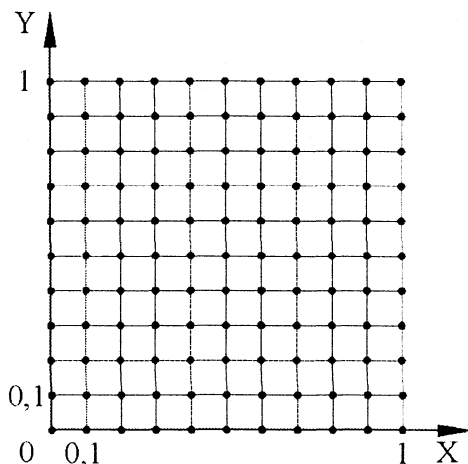


Рис. 1. Схема дискретизации сечения стальной заготовки

Таким образом, для определения 121 неизвестного записывается система, включающая 121 линейное алгебраическое уравнение с определителем, отличным от нуля. Начальные условия имеют вид: $y_{ij}^0 = 1$ при $i, j = 0, \dots, 10$.

Для определения временной зависимости температуры внутри заготовки задавались шаги дискретизации, указанные выше. Принималось постоянство коэффициента внешней теплоотдачи в процессе нагрева $\sigma = 329 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$, что соответствует приведенному (безразмерному) коэффициенту $\alpha_1 = 3,5$.

Предложенная вычислительная схема была реализована с использованием программного продукта Mathcad. Расчетные зависимости температуры от времени для двух точек «угол – верх» и «середина – верх» сечения призматической заготовки, нагреваемой в методической печи, приведенные на рис. 2, 3, сопоставлены с экспериментальными данными из работы [4].

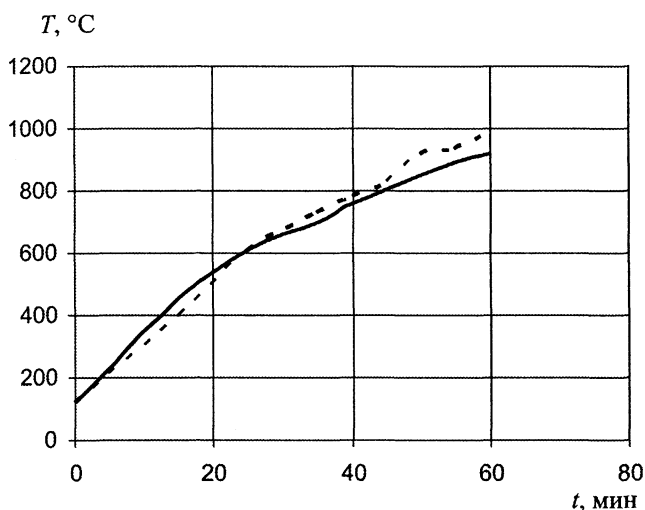


Рис. 2. Зависимость температуры от времени для точки «угол – верх» сечения заготовки, находящейся в методической и I сварочной зонах печи: сплошная линия – экспериментальные данные; пунктирная – расчетные значения

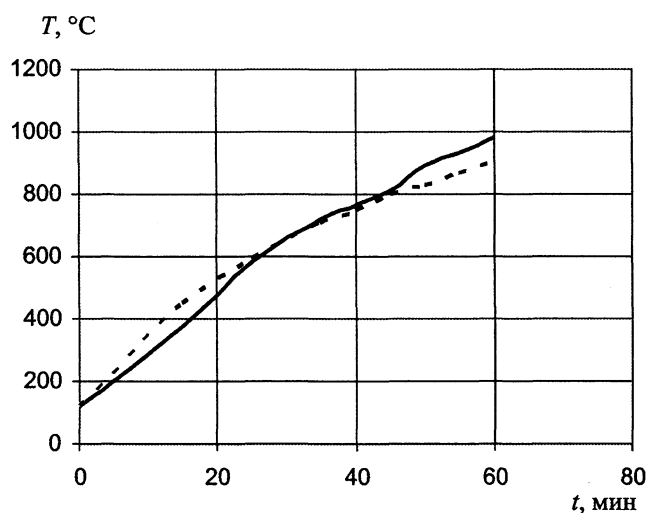


Рис. 3. Зависимость температуры от времени для точки «середина – верх» сечения заготовки, находящейся в печи в методической и I сварочной зонах: сплошная линия – экспериментальные данные; пунктирная – расчетные значения

Разностные аналоги уравнения теплопроводности и граничных условий, используемые в настоящей работе, в соответствии с [3] аппроксимируют задачу с порядком $O(h^2 + \tau^2)$; кроме того, данная разностная схема абсолютно устойчива. В качестве зависимости $a^2(T)$ может быть использована линейная аппроксимация на основе справочных значений [5].

Как видно из рис. 2, 3, при постоянном приведенном коэффициенте теплоотдачи α_1 достигается удовлетворительное соответствие полученных численных результатов и экспериментальных данных.

Литература

1. Лыков А.В., Михайлов Ю.А. Теория тепло- и массопереноса. М.; Л.: Госэнергоиздат, 1963.
2. Тимошпольский В.И., Самойлович Ю.А., Трусова И.А., Филиппов В.В., Несенчук А.П. Стальной слиток: В 3-х т. Т.3. Нагрев / Под общ. ред. В.И. Тимошпольского, Ю.А. Самойловича. Мн.: Беларуская навука, 2001.
3. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем. М.: Наука, 1971.
4. Тимошпольский В.И., Трусова И.А., Тищенко В.А. и др. Комплексное исследование работы нагревательных печей БМЗ // Сталь. 2004. № 10. С. 37-41.
5. Физические свойства сталей и сплавов, применяемых в энергетике / Под ред. Б.Е. Неймарка. М.;Л.: Энергия, 1967.