

УДК 621-501.14

ИССЛЕДОВАНИЕ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ  
И СКОЛЬЗЯЩИХ ДВИЖЕНИЙ  
В КВАЗИРЕЛЕЙНЫХ СЛЕДЯЩИХ СИСТЕМАХ

**Докт. техн. наук, проф. МИХАЛЕВ А. С.**

*Республиканский институт высшей школы, БГУ*

Скользящие движения, присущие в определенных условиях системам с переменной структурой (СПС), обладают рядом привлекательных свойств, и поэтому вопросам их организации, протекания и устойчивости первостепенное внимание уделено в основополагающих работах С. В. Емельянова и учеников его школы [1].

Из теории СПС известно, что для получения устойчивых скользящих движений в системе  $n$ -го порядка необходимо определять « $n - 1$ » производную от сигнала ошибки, что встречает известные трудности технической реализации.

С этой точки зрения интерес представляют квазирелейные следящие системы, исследованные в [2] на основе приближенного метода гармонической линейризации. Путем включения звеньев усилительного тракта между блоками умножения и взятия модуля в амплитудном канале порядок уравнений для «быстрых» колебательных движений можно снизить практически до второго и таким образом существенно упростить реализацию скользких движений.

Покажем это на примере квазирелейной следящей системы, структурная схема которой приведена на рис. 1.

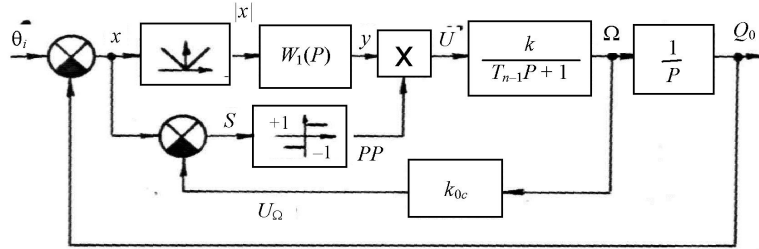


Рис. 1. Структурная схема квазирелейной следящей системы

В этой системе фильтры, усилители и другие инерционные звенья выполнены нереверсивными, помещены между блоками умножения и взятия модуля и имеют передаточную функцию в общем случае произвольного порядка вида

$$W_1(P) = \left[ \prod_{i=1}^k (T_i^2 P + 2\zeta T_i P + 1) \prod_{2k}^{n-2} (T_k P + 1) \right]^{-1}. \quad (1)$$

Смена структуры производится с помощью реле реверса (РР), на вход которого поступает разность сигнала ошибки  $x$  и напряжения скоростной реверсивной обратной связи. Таким образом, в квазирелейной системе на рис. 1 реализован один из вариантов шестого способа коррекции по классификации [3].

Обычно исследование СПС включает в себя анализ условий существования и возникновения скользких режимов, устойчивости и параметров движений системы в скользких режимах, в связи с чем рассмотрим последовательно эти задачи.

**Условия существования скользких режимов.** Как видно из рис. 1, свободные движения системы при  $\theta_i = 0$  описываются следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} b_m \frac{d^m y}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} y}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{dy}{dt} + b_0 y = x \operatorname{sgn} x; \\ e_1 \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} = -k_1 y \operatorname{sgn} s, \end{cases} \quad (2)$$

где  $m = n - 2$ ;  $e_1 = T_{n-1}$ ;  $s = \dot{x} r_1$ ;  $r_1 = k_{0c}/k_2$ .

Смена структуры системы происходит при переключениях  $PP$  двигателя, т. е. при  $S = 0$ , а также при  $x = 0$  из-за влияния блока взятия модуля в амплитудном канале. Чтобы показать возможность существования скользящего режима, необходимо доказать, что уравнение  $S = 0$  определяет при некоторых условиях в  $n$ -мерном фазовом пространстве гиперповерхность скольжения.

Для решения этой задачи в [1] выбирают обычно пространство с координатами  $x$  и первыми  $(n - 1)$  его производными. Как будет показано ниже, в исследуемой системе  $(n - 1)$  производные в уравнении поверхности переключения имеют место, если записать уравнения движения системы относительно координаты  $y$  и ее производных. Поэтому исключим из (2) производные от  $x$ , имея в виду, что:

$$\dot{x} = \left[ \sum_{i=0}^m b_i y^{i+1} \right] \operatorname{sgn} x; \quad (3)$$

$$\ddot{x} = \left[ \sum_{i=0}^m b_i y^{i+2} \right] \operatorname{sgn} x, \quad (4)$$

т. е. запишем

$$y^n + a_n y^{n-1} + \dots + a_2 y^2 + a_1 y = -k y \operatorname{sgn}(sx), \quad (5)$$

где

$$n = m + 2; \quad a_i = (e_1 b_{i-3} + b_{i-2})(e_1 b_m)^{-1}; \quad i = n; n - 1, \dots, 3;$$

$$a_2 = b_0 (e_1 b_m)^{-1}; \quad a_1 = 0, \quad k = k_1 (e_1 b_m)^{-1}.$$

Далее выразим  $s$  через  $y$  и его производные:

$$s = r_1 b_m \left[ c_n y^{n-1} + c_{n-1} y^{n-2} + \dots + c_2 y^1 + c_1 y \right] \operatorname{sgn} x; \quad (6)$$

$$c_n = 1; \quad c_i = \frac{r_1 b_{i-2} + b_{i-1}}{r_1 b_m}; \quad c_1 = \frac{b_0}{r_1 b_m}.$$

Введем в рассмотрение фазовое пространство с координатами  $y^j = y_{j+1}$ ,  $i = 0, 1, \dots, (n - 1)$ . Тогда уравнение (5) запишем в виде следующей системы уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dy_1}{dt} = y_2; \\ \frac{dy_2}{dt} = y_3; \\ \dots \dots \dots \\ \frac{dy_{n-1}}{dt} = y_n; \\ \frac{dy_n}{dt} = -\sum_{i=1}^n a_i y_i - \psi y_1 k, \end{array} \right. \quad (7)$$

где  $\psi = \operatorname{sgn} sx$ .

В этом же фазовом пространстве запишем уравнение гиперповерхности

$$s = \left[ \sum_{i=1}^n c_i y_i \right] \operatorname{sgn} x r_1 b_m. \quad (8)$$

Чтобы найденная гиперповерхность оказалась поверхностью скольжения, необходимо, как известно [1], выполнение следующих неравенств:

$$\frac{ds}{dt} > 0 | s < 0 \quad \text{и} \quad \frac{ds}{dt} < 0 | s > 0. \quad (9)$$

Поэтому из (8) определим производную

$$\frac{ds}{dt} = r_1 b_m \left[ \sum_{i=2}^n c_{i-1} y_i + \frac{dy_n}{dt} \right] \operatorname{sgn} x, \quad (10)$$

или с учетом (7)

$$\frac{ds}{dt} = r_1 b_m \left[ - \sum_{i=2}^n (a_i - c_{i-1}) y_i - k \psi y_1 \right] \operatorname{sgn} x. \quad (11)$$

Коэффициент при  $y_i$  в уравнении (11), как нетрудно видеть, равен

$$a_i - c_{i-1} = \frac{r_1 - e_1}{-r_1 e_1 b_m} b_{i-2}, \quad (12)$$

поэтому

$$\frac{ds}{dt} = - \frac{r_1 - e_1}{e_1} \left[ \sum_{i=2}^n c_{b-2} y_i \right] \operatorname{sgn} x - k y_1 \operatorname{sgn} s. \quad (13)$$

Из последнего уравнения при  $r_1 = e_1$  следует:

$$\frac{ds}{dt} = -k y_1 \operatorname{sgn} s, \quad (14)$$

т. е. неравенства (8) выполняются при условии  $y_1 > 0$ .

Таким образом, гиперповерхность переключения является поверхностью скольжения при  $r_1 = e_1$ ;  $y_1 > 0$ , т. е. при попадании на нее изображающей точки возникает скользящее движение. Особенность полученных условий существования скользящих движений в квазирелейных системах по сравнению с СПС известного типа [1] состоит в том, что они записаны в виде всего одного равенства коэффициентов и одного неравенства относительно координаты  $y$ . Кроме того, из уравнения (14) следует, что в момент попадания изображающей точки на гиперповерхность  $s = 0$  при всегда  $r_1 = e_1$  всегда  $y_1 > 0$ , т. е. вся полученная гиперповерхность является гиперповерхностью скольжения. Теперь, следуя [1], покажем, что из любой точки фазового пространства в режиме свободных движений изображающая точка попадает на гиперповерхность скольжения.

**Условия попадания изображающей точки на гиперповерхность переключения.** Сформулируем и докажем следующую теорему.

Теорема: в квазирелейной системе со структурой, представленной на рис. 1, при условии (1) для попадания изображающей точки на гиперповерхность переключения  $s = r_1 \dot{x} + x = 0$  необходимо и достаточно, чтобы все коэффициенты уравнения (5) были больше нуля при  $sx > 0$ , т. е.  $a_i > 0; i = 1, 2, \dots, n$ .

Для доказательства сформулированной теоремы перепишем прежде всего (13) с учетом (3) в виде

$$\frac{ds}{dt} = -\frac{r_1 - e_1}{e_1} x - ky_1 \operatorname{sgn} s \quad (15)$$

и, учитывая, что при  $s = 0$   $\dot{x} = -x/r_1$ , найдем

$$\frac{ds}{dt} = \frac{r_1 - e_1}{r_1 e_1} x - ky_1 \operatorname{sgn} s. \quad (16)$$

Характеристическое уравнение системы, как видно из (5), можно представить следующим образом:

$$\lambda^n + a_n \lambda^{n-1} + \dots + a_2 \lambda + k\psi = 0, \quad (17)$$

где  $\psi = \operatorname{sgn} sx$ .

Воспользуемся далее проекциями фазовых траекторий на координатную плоскость с осями  $x$  и  $\dot{x}$ , приведенную на рис. 2.

Допустим, что в начале движения изображающая точка имеет проекцию в точке  $O_1$  на рис. 2. Поскольку в этой точке  $sx > 0$ , то  $\psi = 1$ , т. е. в характеристическом уравнении (17) все коэффициенты оказываются положительными и согласно правилу Декарта вещественные корни такого уравнения отрицательны. Если характеристическое уравнение при этом не имеет комплексно-сопряженных корней, то изображающая точка попадает на гиперповерхность переключения либо в произвольной точке, либо в нуле фазового пространства. Если же кроме вещественных корней имеются комплексно-сопряженные, то автономное движение носит колебательный характер. В ходе этого движения, очевидно,  $x$  должен менять свой знак, т. е. проекция изображающей точки из правой полуплоскости на рис. 2 перемещается в левую.

При этом она неизбежно попадает на линию  $s = 0$ , а изображающая точка – на гиперповерхность переключения. Это следует из того, что гиперповерхность в координатах  $x_{i+1} = y^i, i = 0, 1, \dots, (n-1)$ , описывается уравнением первого порядка  $s = r_1 x_2 + x_1 = 0$ .

Предположим теперь, что проекция изображающей точки в начале движения имеет координаты точки  $O_2$ . Поскольку в этом случае  $sx > 0$ , то  $\psi = -1$  и характеристическое уравнение (17) имеет один (последний) отрицательный коэффициент.

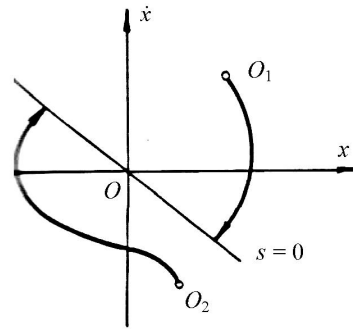


Рис. 2. О попадании изображающей точки на поверхность переключения в системе на рис. 1

Согласно правилу Декарта это означает, что среди вещественных корней найдется один положительный. Тогда при  $t \rightarrow \infty$   $x(t) \rightarrow \infty$  или  $x(t) \rightarrow -\infty$  в зависимости от начальных условий. В первом случае изображающая точка неизбежно попадает на гиперповерхность переключения, что легко увидеть на рис. 2. Во втором случае изображающая точка обязательно пересечет гиперповерхность переключения  $x = 0$  и попадает в область, где  $sx > 0$ , из которой, как показано выше, она всегда попадает на гиперповерхность  $s = 0$ . Таким образом, поскольку фазовое пространство симметрично, достаточные условия доказаны при всех значениях  $x$ .

Покажем теперь, что эти условия являются не только достаточными, но и необходимыми. Допустим, что один из коэффициентов характеристического уравнения (17) при  $\psi = 1$  отрицательный, т. е. имеется по крайней мере один вещественный положительный корень, и попадание изображающей точки на гиперповерхность переключения  $s = 0$  имеет место при всех начальных условиях. Тогда при  $t \rightarrow \infty$   $x(t) \rightarrow \infty$  или  $x(t) \rightarrow -\infty$ , т. е. не при всех начальных условиях, изображающая точка попадает на гиперповерхность переключения  $s = 0$ .

Отмеченное противоречие доказывает необходимость сформулированных в теореме условий.

**Устойчивость движений в скользящем режиме.** Из теории систем с переменной структурой известно, что скользящие движения могут быть как устойчивыми, так и неустойчивыми. Поэтому следующей задачей в исследовании динамики квазирелейных систем является анализ устойчивости скользящих движений. Для решения этой задачи запишем уравнение гиперповерхности переключения

$$s = [c_n y^{n-1} + c_{n-1} y^{n-2} + \dots + c_2 y^1 + c_1 y] \operatorname{sgn} x. \quad (18)$$

Как следует из структурной схемы на рис. 1 и уравнения (18), характеристическое уравнение, соответствующее движению изображающей точки по гиперповерхности переключения, можно записать следующим образом:

$$(T_1^2 + 1) \prod_{i=1}^k (T_i^2 + 2\zeta T_i + 1) \prod_{i=2k}^{n-1} (T_i^2 + 1) = 0. \quad (19)$$

Из (19) видно, что все вещественные корни отрицательны, а комплексно-сопряженные корни имеют отрицательные вещественные части, и, следовательно, скользящие режимы являются устойчивыми. Интересно отметить, что движение изображающей точки по гиперповерхности скольжения, как это следует из (18), может иметь колебательный характер (без смены, однако, знака координаты  $y$ ), тогда как в координатах  $x$ ,  $\dot{x}$  рассогласование  $x$  убывает по монотонной кривой.

**Квазиоптимальные по быстродействию управления в квазирелейных следящих системах.** Поскольку по характеру управления квазирелейные следящие системы близки к обычным релейным системам, монотонные переходные процессы могут быть получены в них не только со скользящим движением в финальной фазе, но и в форме, аналогич-

ной переходным процессам в оптимальных по быстродействию релейных системах.

Так как в ходе управления выходной сигнал «квазиреле» изменяется, то такие управления в квазирелейных системах уступают по быстродействию обычным оптимальным релейным системам и поэтому ниже называются квазиоптимальными.

Наиболее просто вопросы реализации квазиоптимальных управлений решаются в системах третьего порядка, поэтому положим в структуре на рис. 1

$$W_1(P) = (T_1 P + 1)^{-1}$$

и найдем условия, при которых изображающая точка попадает в начало фазового пространства при одном переключении канала реверса двигателя.

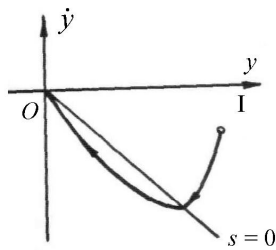


Рис. 3. Квазиоптимальные движения в квазирелейных системах

Поскольку вторая производная  $\ddot{x}$  на поверхности переключения  $s = 0$  в координатах  $x$ ,  $\dot{x}$  и  $\ddot{x}$  неопределенна, удобнее анализировать движение относительно координаты  $y$ . На рис. 3 показаны проекции возможных движений в квазиоптимальной системе третьего порядка на плоскость  $y, \dot{y}$ . При надлежащем выборе поверхности переключения движение, начинаясь в точке I, может заканчиваться в начале координат за одно переключение реле реверса.

Очевидно, что условием такого движения является отсутствие комплексно-сопряженных корней в характеристическом уравнении системы при  $sx < 0$ , т. е. решение уравнения движения системы на втором интервале должно иметь вид:

$$y = B_1 e^{a_1 t} + B_2 e^{a_2 t} + B_3 e^{a_3 t}; \quad (20)$$

$$\dot{y} = B_1 a_1 e^{a_1 t} + B_2 a_2 e^{a_2 t} + B_3 a_3 e^{a_3 t}; \quad (21)$$

$$\ddot{y} = B_1 a_1^2 e^{a_1 t} + B_2 a_2^2 e^{a_2 t} + B_3 a_3^2 e^{a_3 t}, \quad (22)$$

где  $a_1 < 0, a_2 < 0, a_3 > 0$  – корни характеристического уравнения при  $sx < 0$ .

Вторым условием существования квазиоптимальных движений является отсутствие последней компоненты в (20), что возможно при  $B_3 = 0$ .

Известно, что в системах третьего порядка при указанном характере корней:

$$B_3 = \frac{a_1 a_2 y_0 + (a_1 + a_2) \dot{y}_0 + \ddot{y}_0}{(a_1 - a_2)(a_2 - a_3)}, \quad (23)$$

где  $y_0, \dot{y}_0, \ddot{y}_0$  – начальные условия для второго интервала движения.

Поскольку второй интервал движения начинается с гиперповерхности переключения, его начальные условия, очевидно, должны удовлетворять уравнению этой поверхности

$$e_1 r_1 \ddot{y}_0 + (r_1 + e_1) \dot{y}_0 + y_0 = 0. \quad (24)$$

Сопоставляя (23) и (24), нетрудно заметить, что условиями квазиоптимального движения являются следующие соотношения:

$$a_1 a_2 = \frac{1}{e_1 r}; \quad a_1 + a_2 = \frac{e_1 + r_1}{e_1 r_1} = (e_1 + r_1) a_1 a_2, \quad (25)$$

которые можно записать более удобно для выбора параметров канала реверса БДПТ

$$r = -e_1 + \frac{a_1 + a_2}{a_1 a_2}. \quad (26)$$

Таким образом, еще одной особенностью предложенных в [2] и исследуемых в настоящей работе квазирелейных систем является возможность получения квазиоптимальных по быстродействию переходных процессов.

### ВЫВОД

В квазирелейных следящих системах, содержащих нереверсивный прямой тракт, дополненный каналом реверса, удается существенно упростить техническую реализацию скользящих режимов. В работе получены условия существования скользящих режимов в таких квазирелейных системах, сформулирована и доказана теорема о попадании изображающей точки на гиперповерхность переключения, исследована устойчивость скользящих движений, выявлена возможность квазиоптимальных по быстродействию движений и определены условия их существования.

### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Е м е л ь я н о в, С. В. Системы автоматического управления с переменной структурой / С. В. Емельянов. – М.: Наука, 1967. – 320 с.
2. М и х а л е в, А. С. Квазирелейные системы / А. С. Михалев // Радиофизика и электроника: сб. науч. тр. – Минск: БГУ, 1997. – Вып. 3.
3. М а р к и н а, Л. И. Итерационный синтез автоматических систем с разрывными законами управления / Л. И. Маркина, А. С. Михалев // Выбранные научные работы Белорусского государственного университета. – Т. 4: Фізика. – Мінск: БДУ, 2001. – С. 586–605.

Представлена кафедрой  
электрических станций БНТУ

Поступила 12.10.2010