

УДК 532.5.013.12+532.5.011.1

ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ ЗАКОНА ГИДРАВЛИЧЕСКОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ ПРИ СТЕСНЕННОМ ПАДЕНИИ ОДИНОЧНОГО ШАРА И ДВИЖЕНИИ ЖИДКОСТИ В ЗЕРНИСТЫХ СЛОЯХ

Кандидаты техн. наук, доценты **КРАВЦОВ М. В.**, КРАВЦОВ А. М.

Белорусский государственный аграрный технический университет

E-mail: arkravt@mail.ru

Приводятся результаты исследований различных гидромеханических процессов (стесненное падение одиночного шара в жидкости, взвешивание однородного монодисперсного зернистого слоя восходящим потоком жидкости, фильтрация однородной жидкости в пористом зернистом слое). Путем обобщения результатов теоретических и экспериментальных исследований с использованием теории подобия установлено, что законы гидравлических сопротивлений для данных гидромеханических процессов имеют общую основу и описываются общим уравнением, на основе которого получены частные формулы для расчета исследованных гидромеханических процессов. Формулы представлены в безразмерных критериях подобия, которые отражают соотношение основных действующих сил.

Представленные научные результаты вносят вклад в развитие теории прикладных гидромеханических явлений, а полученные новые формулы дают возможность для совершенствования методик расчетов сооружений и установок, в которых реализуются исследованные гидромеханические процессы. Так, результаты исследований стесненного падения одиночного шара в жидкости могут быть использованы в технике вискозиметрии и при решении задач, связанных с расчетами различных видов движения и отдельных узлов в технологиях, в которых реализуются гидравлические процессы стесненного падения одиночных шаров в жидкостях.

Процессы взвешивания (псевдооживления) зернистых слоев широко применяются в различных отраслях промышленности, например в химических технологиях при адсорбции, десорбции, растворении, выщелачивании, отмывке. Появление новой общей расчетной формулы дает возможность осуществлять технологические расчеты при любых режимах работы. Процесс фильтрации используется в промышленности, а также встречается в природных условиях, например при движении грунтовых вод. В настоящее время основой для методик расчетов служит одночленная формула Дарси, определяющая скорость фильтрации в зависимости от гидравлического уклона при введении коэффициента фильтрации. При этом возникают проблемы с определением режимов фильтрации и пределов применимости формулы Дарси. Появление общей формулы, предлагаемой в статье, решает данную проблему и позволяет производить расчеты с высокой точностью в широком диапазоне изменяющихся условий.

Ключевые слова: уравнение закона гидравлического сопротивления, одиночный шар, движение жидкости, зернистый слой.

Ил. 5. Библиогр.: 12 назв.

GENERAL EQUATION OF THE HYDRAULIC FRICTION LAW FOR HINDERED FALLING OF AN INDIVIDUAL BALL AND FLUID MOTION IN GRANULAR LAYERS

KRAUTSOV M. V., **KRAUTSOV A. M.**

Belorussian National Technical University

The article presents the results of a research into various hydromechanical processes such as hindered falling of an individual ball in a liquid; suspension of a homogeneous monodispersed granular layer with ascending fluid flow; homogeneous liquid filtration in a porous granular layer. The authors generalize the results of theoretical and experimental studies, employ the theory of similarity, and establish that the laws of hydraulic friction for the mentioned hydromechanical processes share the common ground described by one general equation that provides basis for obtaining the individual formulae computing the studied hydromechanical processes. The formulae appear in dimensionless similitude parameters that reflect correlation of the essential action forces.

The presented scientific results contribute to the theory development of the applied hydromechanical phenomena and the new obtained formulae enable enhancement of the calculation procedures for structures and installations that realize the studied hydromechanical processes. Thus, the research results for the hindered falling of an individual ball in a liquid can apply in viscosimetry techniques and in handling the problems related to calculations of various movement types and separate units in technologies realizing the hydraulic processes of hindered falling of individual balls in liquids.

Fluidization processes (pseudo-liquefaction) of the granular layers enjoy wide application in various segments of industry for instance in chemical engineering at adsorption, desorption, dissolution, dealkalization, ablation. A new general calculating formula incipency provides a possibility for technological computations realization under any operational mode. The filtration process is used in industry as well as occurs in nature, for example, in movement of the ground water. At present, the basis for calculating techniques is the monomial Darcy formula defining the filtering rate as function of the hydraulic gradient with bringing in the filtration coefficient. Thereat, the problems appear with determination of the filtration regime and the validity limits for the Darcy's equation. The incipency of the proposed in the article new general formula resolves this problem and allows estimating with high accuracy in a wide range of changing conditions.

Keywords: the equation of the hydraulic friction law, an individual ball, liquid motion, the granular layer.

Fig. 5. Ref.: 12 titles.

В настоящее время во многих отраслях техники имеют дело с обтеканием жидкостью движущихся или покоящихся одиночных тел и зернистых материалов. Во всех случаях при гидравлических расчетах необходимо определять различные параметры, которые находятся в зависимости от величин гидравлических сопротивлений. Использовать для этих целей известные дифференциальные уравнения гидродинамики невозможно, так как они не замкнуты (искомых параметров больше имеющихся уравнений). Поэтому для замыкания дифференциальных уравнений требуются дополнительные зависимости, которые, как правило, не представляется возможным вывести теоретическим путем в силу многофакторности и недостаточной изученности гидромеханических процессов. Их можно получить лишь из опыта при наблюдении за движением реальной жидкости, а затем из обобщения результатов опытных наблюдений.

Существенно облегчить подготовку экспериментальных исследований и обобщение опытных данных позволяет применение теории подобия.

Теория подобия определяет такую совокупность условий, подлежащих выполнению при экспериментальных исследованиях гидромеханических процессов, которая обеспечивает возможность правильного обобщения их результатов [1]. Использование безразмерных критериев подобия позволяет получить форму закона гидравлических сопротивлений при ограниченном числе опытов. Кроме того, анализ закономерностей, в которых действующие силы представлены в критериальной форме, дает возможность легко проследить за соотношениями этих сил при реализации конкретных процессов. Решение задач с использованием теории подобия состоит в определении основных закономерностей течения жидкостей, установлении зависимостей для расчета касательных напряжений, определении расчетных коэффициентов, входящих в соответствующие формулы, а также в определении самих характеристик потоков жидкости. Именно таким путем в данной статье раскрываются основные законы гидравлических сопротивлений для ряда гидромеханических процессов: стесненное осаждение одиночных шаров, взвешивание (псевдооживление) зернистых материалов восходящим потоком воды, фильтрация жидкости в однородных монодисперсных зернистых материалах. Для этих целей приводится систематизированный перечень критериев подобия, использование которых позволило получить ряд искомых закономерностей и дать их экспериментальное обоснование.

Рассмотрим только равномерное движение в направлении оси x . Тогда компонент скорости частицы жидкости в направлении оси x обозначим через u , а среднюю скорость натекающей на тело жидкости – через v . Расчетные формулы для различных случаев движения получим путем комбинации действующих сил, выраженных через безразмерные критерии подобия. Сформируем эти критерии из действующих в каждом конкретном случае сил, отнесенных к единице объема, через характерные длины, скорости и т. д. За характерную длину можно принять, например, диаметр тела d , а за характерную скорость – скорость потока жидкости v . Свойства жидких сред и тел, обтекаемых жидкостью, обозначим: ρ_t и ρ – плотность тела и жидкости; μ – динамический коэффициент вязкости жидкости; g – ускорение свободного падения тел.

Представим перечень сил, которые могут действовать в конкретных случаях [1–3]. Выражение для силы трения T , отнесенной к единице объема, легко получить, если рассматривать элемент жидкости, ось x которого расположена по направлению его движения. Тогда разность сил сдвига, возникающих при движении такого элемента, будет равна

$$\left(\tau + \frac{\partial \tau}{\partial y} dy \right) dx dz - \tau dx dz = \frac{\partial \tau}{\partial y} dx dy dz,$$

откуда и получаем выражение для силы трения на единицу объема в следующем виде:

$$T = \frac{\partial \tau}{\partial y}.$$

В соответствии с гипотезой Ньютона касательные напряжения трения

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y}.$$

С учетом этого получим

$$T = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \quad (1)$$

Выражением силы инерции I на единицу объема будет произведение массы на ускорение. Если u есть компонент скорости частицы жидкости в направлении оси x , то соответствующим компонентом ускорения при установившемся движении будет $u \frac{\partial u}{\partial x}$. Следовательно, сила инерции на единицу объема

$$I = \rho u \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (2)$$

К силам трения T и инерции I добавим силу тяжести G и эффективный вес $G_{\text{эф}}$, отнесенные к единице объема:

$$G = \rho g; \quad (3)$$

$$G_{\text{эф}} = (\rho_{\text{т}} - \rho) g = \Delta \rho g. \quad (4)$$

Из названных сил сформулируем комбинированные безразмерные соотношения (критерии подобия). Используя эти соотношения, решим вопрос, как изменяются действующие силы, когда изменяются величины, характеризующие рассматриваемое явление: скорость движения натекающей на тело жидкости v ; размер тела, например диаметр d ; плотность ρ и динамический коэффициент вязкости жидкости μ .

Очевидно, что для механически подобных течений скорость частицы жидкости u в любой точке объема движущейся жидкости пропорциональна скорости невозмущенного течения v . Поэтому, обозначая знаком « \sim » пропорциональность двух величин, можно написать

$$u \sim v.$$

Разности скоростей в соседних точках также пропорциональны скорости v

$$du \sim v.$$

Теперь, если учесть, что для механически подобных течений вокруг геометрически подобных тел разности координат каждой двух подобно расположенных соседних точек пропорциональны соответствующим линейным размерам геометрически подобных тел (например, в случае падения шаров – их диаметрам), то оказывается, что изменение компонента скорости жидкости в направлении оси x в какой-нибудь точке течения,

т. е. $\frac{\partial u}{\partial x}$, пропорционально $\frac{v}{d}$ и, следовательно, сила инерции I пропор-

циональна $\frac{\rho v^2}{d}$. Так как по тем же основаниям

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \approx \frac{v}{d^2},$$

то сила трения пропорциональна $\frac{\mu v}{d^2}$ и для отношения силы инерции к силе трения получаем:

$$\frac{I}{T} = \frac{\rho u \frac{\partial u}{\partial x}}{\mu \frac{\partial u^2}{\partial y^2}} = \frac{\rho v^2}{\frac{\mu v}{d^2}} = \frac{v d \rho}{\mu} = \text{Re}, \quad (5)$$

где Re – это число Рейнольдса.

Таким образом, в (5) представлен первый безразмерный критерий подобия для геометрически и механически подобных потоков, характеризующий отношение силы инерции к силе трения. Найдем теперь выражение закона подобия для действующих сил инерции I и тяжести G . В этом случае должно быть одинаково отношение этих сил

$$\frac{I}{G} = \frac{\rho u \frac{\partial u}{\partial x}}{\rho g}. \quad (6)$$

Ранее было установлено, что $u \frac{\partial u}{\partial x}$ изменяется пропорционально $\frac{v^2}{d}$ (где v – характерная скорость течения, а d – характерный линейный размер). Следовательно, (6) можно представить

$$\frac{I}{G} = \frac{v^2}{dg} = \text{Fr}, \quad (7)$$

где Fr – число Фруда (критерий Фруда), используется там, где проявляется действие силы тяжести.

Рассмотрим еще несколько комбинаций единичных сил, из которых конструируются известные безразмерные величины (критерии подобия). Часто в гидромеханике используют сложные критерии. Например, когда при движении тела в жидкости определяющими являются силы вязкости и тяжести, комбинируют критерии Рейнольдса и Фруда, получая критерий Галилея, в котором учтены силы G , I и T :

$$\text{Ga} = \frac{\text{Re}^2}{\text{Fr}} = \frac{G}{T} \frac{I}{T} = \frac{\rho g d^2}{\mu v} \frac{\rho v^2 d^2}{d \mu v} = \frac{d^3 \rho^2 g}{\mu^2}. \quad (8)$$

Известно, что при свободном равномерном падении одиночного шара в вязкой несжимаемой жидкости эффективный вес $G_{\text{эф}}$ уравновешивается силой инерции I (обе силы рассматриваются отнесенными к единице объема), т. е.

$$\frac{G_{\text{эф}}}{I} = \frac{\Delta\rho dg}{\rho v^2} = \frac{\Delta\rho}{\rho Fr} = \psi, \quad (9)$$

где $\frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{\rho_{\text{т}} - \rho}{\rho}$ – симплекс Архимеда; ψ – коэффициент сопротивления.

Поиск расчетной формулы коэффициента сопротивления ψ составляет одну из главных проблем гидромеханики. Многие ученые прилагали усилия для раскрытия функции $\psi = f(\text{Re})$. Этот многотрудный путь пока не привел к желаемым результатам.

Критерий Архимеда Ar получается, если критерий Галилея (8) помножить на симплекс Архимеда. Тогда

$$\text{Ar} = \text{Ga} \frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{d^3 \rho^2 g}{\mu^2} \frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{d^3 \Delta\rho \rho g}{\mu^2}. \quad (10)$$

С учетом (5) и (9) критерий Архимеда может быть представлен в следующем виде:

$$\text{Ar} = \frac{3}{4} \psi \text{Re}^2. \quad (10^*)$$

В соответствии с обобщением результатов теоретических и экспериментальных исследований [2–11] установлено, что законы гидравлических сопротивлений для рассматриваемых гидромеханических процессов имеют общую основу и описываются следующим уравнением:

$$\text{Re} = \frac{\frac{4}{3} \text{GaKг} (1 - K_{\text{ст.1}}^2)}{\frac{a}{(1 - K_{\text{ст.2}})^2} + b \sqrt{\frac{4}{3} \text{GaKг}}}, \quad (11)$$

где Re , Ga – соответственно критерии Рейнольдса и Галилея, которые учитывают главные действующие силы – трения, инерции и тяжести; Kг – критерий, учитывающий дополнительные действующие силы при реализации определенного гидромеханического процесса; $K_{\text{ст.1}}$, $K_{\text{ст.2}}$ – коэффициенты стеснения; a , b – коэффициенты, учитывающие влияние разного вида сопротивлений (определяются опытным путем).

Для подтверждения права на существование общего закона в виде формулы (11) рассмотрим несколько примеров гидравлических явлений, связанных с падением одиночных шаров в ограниченном стенками объеме вязкой несжимаемой жидкости, взвешиванием слоев зернистых однородных монодисперсных частиц восходящим потоком жидкости (псевдооживление) и движением жидкости в порах зернистых монодисперсных неподвижных слоев (фильтрация). Из общего вида закона гидравлических сопротивлений (11) частные законы для отдельных видов движения получаются путем учета дополнительных действующих сил и граничных условий (определяют значения параметров Kг , $K_{\text{ст.1}}$ и $K_{\text{ст.2}}$). Так, при падении в жидкости одиночного шара в стесненных стенками условиях [7] $\text{Kг} = \Delta\rho/\rho$; $K_{\text{ст.1}} = K_{\text{ст.2}} = d/D$ (d и D – диаметр шара и сосуда соответственно). В этом случае с учетом (10) формула (11) принимает вид

$$\text{Re} = \frac{\frac{4}{3} \text{Ar} \left(1 - \frac{d^2}{D^2}\right)}{\frac{a}{\left(1 - \frac{d}{D}\right)^2} + b \sqrt{\frac{4}{3} \text{Ar}}}. \quad (12)$$

В результате обработки опытных данных определены постоянные коэффициенты в (12): $a = 20,6$; $b = 2/3$. Результаты сопоставлений расчетных по (12) и опытных данных [5] для случая стесненного падения шаров в воде и водоглицериновых растворах представлены на рис. 1, 2.

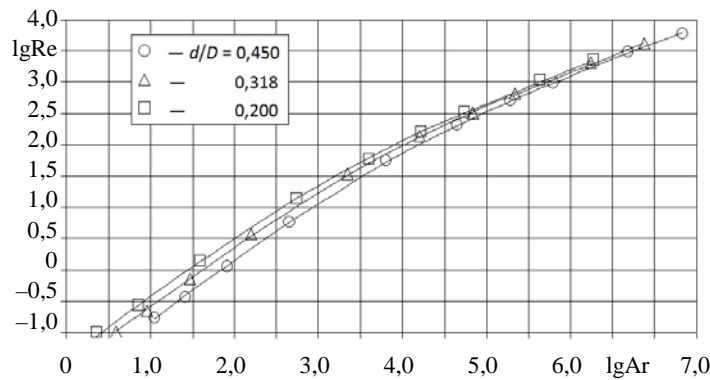


Рис. 1. Сопоставление расчетных по (12) (линии) и опытных данных [5] (точки) стесненного осаждения одиночных шаров в водно-глицериновых растворах при постоянном отношении d/D

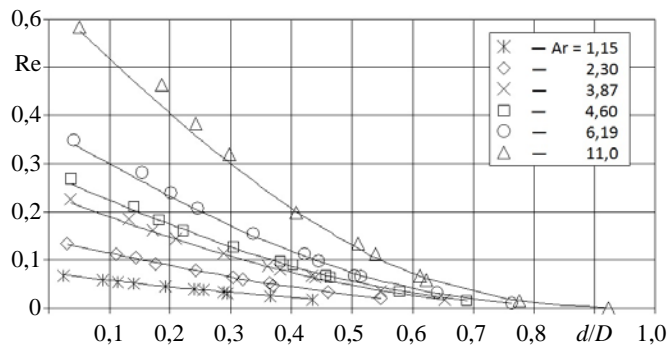


Рис. 2. Сопоставление расчетных по (12) (линии) и опытных данных [5] (точки) стесненного осаждения одиночных шаров в водно-глицериновых растворах при постоянном Ar

При взвешивании (псевдооживлении) слоев зернистых однородных монодисперсных частиц восходящим потоком жидкости в (11) следует принять [8]:

$$K_{\Gamma} = \frac{\Delta \rho_c}{\rho_c} = \frac{(1-c)(\rho_T - \rho)}{\rho_T c + \rho(1-c)}; \quad K_{\text{ст.1}} = \sqrt{\frac{3}{2} \beta c}; \quad K_{\text{ст.2}} = \sqrt{\frac{3}{2} \beta_0 c},$$

где $\Delta \rho_c = \rho_T - \rho_c$; ρ_T , ρ_c – плотности твердого зернистого материала и суспензии; c – объемная концентрация взвешенного зернистого материала;

β , β_0 – постоянные величины для среднестатистической формы частицы зернистого материала).

С учетом приведенных соотношений формула (11) приводится к виду

$$\text{Re} = \frac{\frac{4}{3} \text{Ar}' \left(1 - \frac{3}{2} \beta c\right)}{\frac{a}{\left(1 - \sqrt{\frac{3}{2}} \beta_0 c\right)^2} + b \sqrt{\frac{4}{3}} \text{Ar}'}, \quad (13)$$

где $\text{Ar}' = \text{Ga} \frac{\Delta \rho_c}{\rho_c}$ – модифицированный критерий Архимеда.

Обработка результатов опытных данных показала [8], что коэффициенты в формуле (13) следующие:

- для частиц естественных зернистых материалов (песок и гравий): $a = 15,5$; $b = 1,1$; $\beta = 0,725$; $\beta_0 = 0,5$;

- для частиц искусственно дробленых материалов с остроугольной формой (антрацит, керамзит и т. п.): $a = 59,8$; $b = 1,09$; $\beta = 0,890$; $\beta_0 = 0,315$.

Сопоставления расчетных и опытных данных из [8, 12] о взвешивании однородных монодисперсных зернистых слоев из частиц керамзита, кварцевого песка, гравия и антрацита приведены на рис. 3, 4. Во всех исследованных диапазонах (всего 439 опытных значений при концентрациях от 0,05 до 0,53) параметров взвешенных слоев для различных зернистых материалов относительные среднеарифметические погрешности не превысили 0,05 (5,00 %).

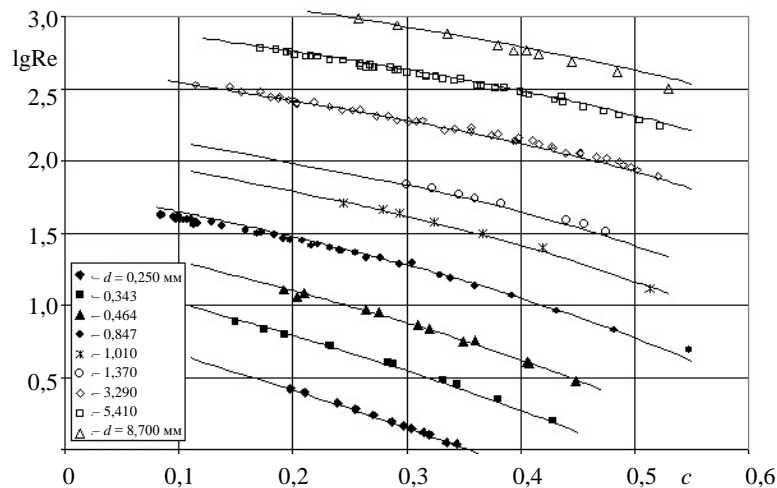


Рис. 3. Сопоставление расчетных по (13) (линии) и опытных данных [12] (точки) взвешивания зернистых слоев из частиц кварцевого песка и гравия ($\rho_r = 2470\text{--}2670 \text{ кг/м}^3$) в воде

При переходе от процесса взвешивания зернистых слоев (фильтрации жидкости в деформированной зернистой среде) к фильтрации жидкости в плотной зернистой среде общий вид зависимости сохранится. Однако при выборе безразмерных комплексов следует учесть, что в случае филь-

трации жидкости в плотной зернистой среде подъемная (архимедова) сила, обусловленная разностью плотностей твердого тела и жидкости ($\Delta\rho = \rho_T - \rho$), больше не оказывает влияния на ход процесса. Тогда как интенсивность взаимодействия, а следовательно, и гидравлический уклон i в значительной степени зависят от отношения пористости зернистой среды m к объемной концентрации частиц в слое зернистой загрузки $c = 1 - m$. Поэтому заменим симплекс $Kr = \Delta\rho_0/\rho$ в (13) на безразмерный комплекс $Kr = iC$ (здесь $C = m/c = (1 - c)/c$).

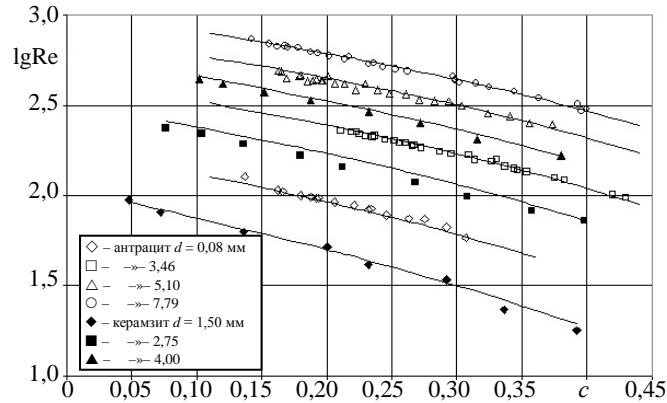


Рис. 4. Сопоставление расчетных по (13) (линии) и опытных данных (точки) взвешивания зернистых слоев из частиц антрацита [12] ($\rho_T = 1661$ кг/м³) и керамзита [8] ($\rho_T = 1900$ кг/м³) в воде

С учетом вышеизложенного в случае фильтрации воды через неподвижные пористые монодисперсные зернистые среды обобщенная формула (11) принимает вид [9]

$$Re = \frac{\frac{4}{3} GaiC \left(1 - \frac{3}{2} \beta c\right)}{\frac{a}{\left(1 - \sqrt{\frac{3}{2}} \beta_0 c\right)^2} + b \sqrt{\frac{4}{3}} GaiC}. \quad (14)$$

Или, решив уравнение (14) относительно i и v с учетом (5), получим:

$$i = \frac{3}{4} \frac{C}{Ga} \left(\frac{b Re + \sqrt{b^2 Re^2 + 4a Re \frac{2 - 3\beta c}{(\sqrt{2} - \sqrt{3}\beta_0 c)^2}}}{2 - 3\beta c} \right)^2; \quad (15)$$

$$v_\phi = \frac{\frac{4}{3} \frac{\mu}{d_4 \rho} GaiC \left(1 - \frac{3}{2} \beta c\right)}{\frac{a}{\left(1 - \sqrt{\frac{3}{2}} c \beta_0\right)^2} + b \sqrt{\frac{4}{3}} GaiC}, \quad (16)$$

где v_ϕ – скорость фильтрации.

В (14)–(16) коэффициенты β и β_0 постоянны для заданного вида зернистого материала и отражают влияние формы частиц. В результате обработки опытных данных о фильтрации воды в плотных зернистых средах из песка, гравия, антрацита [5, 12] и керамзита [9] оказалось, что постоянные коэффициенты a , b , β и β_0 в (14)–(16) равны:

- для песка и гравия: $a = 27,0$; $b = 1,91$; $\beta = 0,725$; $\beta_0 = 0,5$;
- для частиц дробленых материалов с остроугольной формой (антрацит, керамзит и т. п.): $a = 91,5$; $b = 1,67$; $\beta = 0,89$; $\beta_0 = 0,315$.

Сопоставление расчетных по (15) и опытных данных о фильтрации воды в плотных зернистых средах из частиц гравия, антрацита и керамзита, по данным исследований авторов статьи, показало, что относительные среднеарифметические отклонения равны:

- 0,046 – для гравия (по 29 опытным точкам при $i = 0,0598$ –5,28);
- 0,053 – для антрацита (по 148 опытным точкам при $i = 0,00188$ –6,36);
- 0,028 – для керамзита (по 40 опытным точкам при $i = 0,175$ –4,78).

Всего при сопоставлениях использовано 217 опытных значений при изменении гидравлических уклонов i от 0,00188 до 6,36. Сопоставления показали, что общая формула (15) обеспечивает высокую точность расчетов во всем исследованном диапазоне гидравлических уклонов и для различных видов зернистых материалов. Сопоставительные графики приведены на рис. 5.

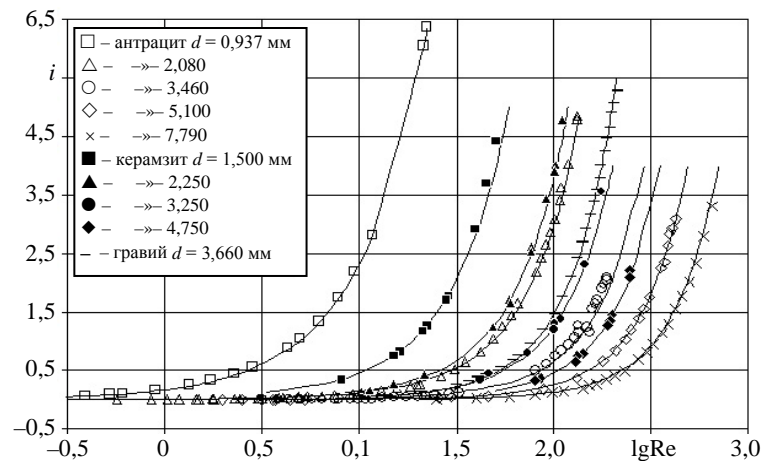


Рис. 5. Сопоставление расчетных по (15) (линии) и опытных данных (точки) о фильтрации воды в плотных зернистых средах из частиц гравия и антрацита [5, 12], керамзита [9]

Отметим, что при расчетах скоростей фильтрации однородных жидкостей по (16) для полидисперсных зернистых материалов следует знать также эффективный диаметр частиц и объемную концентрацию, значения которых могут уточняться на основе изучения гранулометрического состава и пористости среды в лабораторных условиях. Опытным путем установлено [5], что песок и гравий при монодисперсной зернистой среде образуют пористую среду с объемной концентрацией 0,525–0,608, а антрацит, керамзит и т. п. – 0,450–0,480. Поэтому для расчетов скоростей фильтрации однородных жидкостей в пористых средах по (16) можно принять макси-

мальные значения объемной концентрации (минимальные значения пористости): для частиц песка и гравия $c = 0,608$; для частиц дробленых материалов с остроугольной формой (антрацит, керамзит и т. п.) $c = 0,480$.

С получением общей формулы (14) для расчетов установившегося равномерного фильтрационного потока в плотной пористой зернистой среде отпадает необходимость использования для практических расчетов частных формул со всеми проблемами, связанными с определением постоянных коэффициентов в них, пределов их применения и т. д. При использовании общей формулы возрастает точность практических расчетов параметров фильтрационного потока.

ВЫВОДЫ

На основе систематизации и обобщения результатов исследований различных гидромеханических процессов (стесненное падение одиночного шара в жидкости, взвешивание однородного монодисперсного зернистого слоя восходящим потоком жидкости, фильтрация однородной жидкости в пористом зернистом слое) предложены общий вид закона сопротивлений и частные формулы с учетом граничных условий. Полученные зависимости могут использоваться для расчетов технологических параметров аппаратов и сооружений в различных отраслях техники, а также при развитии теоретических основ гидромеханики.

ЛИТЕРАТУРА

1. П р а н д т л ь, Л. Гидро- и аэромеханика: в 2 т. / Л. Прандтль, О. Титъенс. – М.: ОНТИ-НКТП СССР, 1935. – Т. 2. – 283 с.
2. К р а в ц о в, М. В. К вопросу моделирования процессов осаждения взвесей / М. В. Кравцов // Энергетика... Изв. высш. учеб. заведений. – 1976. – № 4. – С. 112–115.
3. К r a v t s o v, M. V. Modeling of Settling of Suspended Solids / M. V. Kravtsov // Fluid Mechanics, Soviet Research. – 1976. – Vol. 5, № 4. – С. 12–17.
4. К р а в ц о в, М. В. Стесненное осаждение твердых сферических частиц / М. В. Кравцов // Водное хозяйство Белоруссии. – 1974. – Вып. 4. – С. 80–89.
5. К р а в ц о в, М. В. Гидравлика зернистых материалов / М. В. Кравцов. – Минск: Наука и техника, 1980. – 168 с.
6. К р а в ц о в, М. В. О свободном падении одиночного тела в жидкостях / М. В. Кравцов, А. М. Кравцов // Энергетика... (Изв. высш. учеб. заведений и энерг. объединений СНГ). – 1999. – № 5. – С. 86–94.
7. К р а в ц о в, А. М. Ротаметрические измерения расходов и свойств жидкостей / А. М. Кравцов // Энергетика... (Изв. высш. учеб. заведений и энерг. объединений СНГ). – 2003. – № 6. – С. 76–82.
8. К р а в ц о в, А. М. Расчет промывки зернистой загрузки фильтра восходящим потоком воды / А. М. Кравцов // Вестник БНТУ. – 2004. – № 5. – С. 27–31.
9. К р а в ц о в, А. М. Фильтрация воды в слое однородной зернистой загрузки / А. М. Кравцов // Вестник БНТУ. – 2005. – № 1. – С. 26–30.
10. К р а в ц о в, М. В. Характер движения и скорости свободно падающих одиночных шаров в жидкостях / М. В. Кравцов, А. М. Кравцов // Энергетика... (Изв. высш. учеб. заведений и энерг. объединений СНГ). – 2011. – № 2. – С. 80–87.
11. К r a v t s o v, M. V. Laws of Free Fallen Single Spheres in Fluids / M. V. Kravtsov, A. M. Kravtsov // American Journal of Fluid Dynamics. – 2013. – No 3 (4). – P. 96–100.
12. М и н ц, Д. М. Гидравлика зернистых материалов / Д. М. Минц, С. А. Шуберт. – М.: Изд-во МКХ РСФСР, 1955. – 112 с.

REFERENCES

1. P r a n d t l', L., & Tit'ens, O. (1935) *Hydro- and Aeromechanics. Vol. 2.* Moscow, ONTI-NKTP USSR. 283 p. (in Russian).
2. K r a v t s o v, M. V. (1976) On the Issue of Simulation of the Suspension Sedimentation Processes. *Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii – Energetika* [Proceedings of Higher Education Institutions – Energetika], 4, 112–115 (in Russian).
3. K r a v t s o v, M. V. (1976) Modeling of Settling of Suspended Solids. *Fluid Mechanics, Soviet Research*, 5 (4), 12–17.
4. K r a v t s o v, M. V. (1974) Hindered Settling of the Solid Spherical Particles. *Vodnoe Khoziaistvo Belorussii* [Water Industry of Byelorussia], 4, 80–89 (in Russian).
5. K r a v t s o v, M. V. (1980) *Hydraulics of the Particulate Materials.* Minsk, Nauka i Tekhnika. 168 p. (in Russian).
6. K r a v t s o v, M. V., & Kravtsov, A. M. (1999) On the Free Sedimentation of an Individual Object in the Liquids. *Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii i Energeticheskikh Ob'edinenii SNG – Energetika* [Proceedings of CIS Higher Education Institutions and Power Engineering Associations – Energetika], 5, 86–94 (in Russian).
7. K r a v t s o v, A. M. (2003) High-Pressure Measuring of the Flow-Rates and Liquid Properties. *Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii i Energeticheskikh Ob'edinenii SNG – Energetika* [Proceedings of CIS Higher Education Institutions and Power Engineering Associations – Energetika], 6, 76–82 (in Russian).
8. K r a v t s o v, A. M. (2004) The Computation of the Granulate-Load Filter Sluicing with Ascendant Water Flow. *Vestnik BNTU* [Bulletin of the Belarusian National Technical University], 5, 27–31 (in Russian).
9. K r a v t s o v, A. M. (2005) Water Filtration in the Layer of Homogeneous Granulate Loads. *Vestnik BNTU* [Bulletin of the Belarusian National Technical University], 1, 26–30 (in Russian).
10. K r a v t s o v, M. V., & Kravtsov, A. M. (2011) The Character of Movement and Speed of Individual Balls Free-Falling in the Liquids. *Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii i Energeticheskikh Ob'edinenii SNG – Energetika* [Proceedings of CIS Higher Education Institutions and Power Engineering Associations – Energetika], 2, 80–87 (in Russian).
11. K r a v t s o v, M. V., & Kravtsov, A. M. (2013) Laws of Free Fallen Single Spheres in Fluids. *American Journal of Fluid Dynamics*, 3 (4), 96–100. Doi:10.5923/j.ajfd.20130304.02.
12. M i n t s, D. M., & Shubert, S. A. (1955) *Hydraulics of the Particulate Materials.* Moscow, MKKh RSFSR Press. 112 p. (in Russian).

Представлена кафедрой гидравлики
и гидравлических машин

Поступила 21.08.2014