



БИОМЕХАНИКА

УДК 531.2

А.В. ЧИГАРЕВ, д-р физ.-мат. наук
Белорусский национальный технический университет, г. Минск

А.В. БОРИСОВ, канд. техн. наук
Московский энергетический институт, г. Смоленск, Россия

МОДЕЛИРОВАНИЕ И ОПРЕДЕЛЕНИЕ КРИТЕРИЕВ СТАТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ЭНДО- И ЭКЗОСКЕЛЕТА

В работе рассмотрена устойчивость многозвенной модели экзоскелета в фазе стояния на опорной ноге в виде системы с пружинами в суставах. Оценены зоны жесткости пружин, необходимые для поддержания устойчивого равновесия рассматриваемой биомеханической системы.

Ключевые слова: экзоскелет, устойчивость, суставы, жесткость пружин, равновесие, одноопорная фаза

Введение. В мире все более активно ведутся работы по созданию различного рода экзоскелетов и антропоморфных роботов, однако, теоретических моделей немного. В основном, это практические, инженерные разработки. Имеются работы по биомеханике опорно-двигательного аппарата человека и двуногой ходьбе [1–6]. В работах [7, 8] рассматривается задача об асимптотической стабилизации вертикальной позы человека при помощи межзвездных (внутренних) моментов.

В данной работе, в отличие от ранее опубликованных исследований, предлагается моделирование статической устойчивости многозвездных стержневых структур под действием внутренних усилий и внешней связи. Отличия заключаются в том, что исследование проводится полностью аналитически и впервые получены обобщения для систем с произвольным конечным количеством звеньев. Под данный класс систем подпадают такие практически важные устройства, как антропоморфный робот, экзоскелет, эндоскелет человека в фазе стояния на одной ноге.

Постановка задачи. Рассмотрим модель устойчивости человека в виде многозвездной стержневой модели с сосредоточенными массами в фазе стояния на опорной ноге. Моменты в суставах, обеспечивающих статическую позу человека, моделируются пружинами определенной жесткости. Определим зоны жесткости пружин, необходимые для поддержания равновесия рассматриваемой биомеханической системы.

Для построения решения сначала записывается потенциальная энергия системы. Затем она раскладывается в ряд Маклорена. После этого вводят-

ся обозначения, в которых удобно представить потенциальную энергию для применения критерия Сильвестра. Решение полученных в результате неравенств проводится численно. Для наглядного представления решения строятся его графики.

Подобная модель может быть применена и к созданию антропоморфных роботов, при выяснении вопроса об их статической позе равновесия и необходимых для этого конструктивных элементов.

Практически возможная реализация предлагаемой модели — это устройство в виде экзоскелета с человеком внутри и поддержание его вертикального равновесия. Экзоскелеты могут быть применены в военных технологиях, медицине, геронтологии, спорте, промышленности, быту и т. д. — везде, где необходимо разгрузить или усилить естественный скелет человека. Следовательно, данная работа является актуальной и при практической реализации человеко-машинной системы.

Метод моделирования. Исследуем устойчивость трех звеньев опорной ноги и корпуса экзоскелета под действием внутренних усилий в шарнирах и проведем оценку значений, необходимых для устойчивого стояния. Моделирование проведем с использованием спиральных пружин, расположенных в суставах. Используем описанный в работе [9] метод исследования для рассматриваемой модели опорной ноги. Пусть модель имеет вид, изображенный на рисунке 1. Обозначим: $OA = l_1$ — стопа, связанная с опорой; $AB = l_2$ — голень; $BC = l_3$ — бедро; $CD = l_4$ — корпус — длины соответствующих звеньев модели опорной нижней конечности и корпуса механизма. Положение в



Рисунок 1 — Модель опорной ноги в виде четырехзвенной составной стержневой пружинной системы

одноопорной фазе однозначно определяется углами φ_i и длинами стержней l_i ($i = 1, \dots, 4$), поэтому рассматриваемая система имеет четыре степени свободы. Центры масс находятся в точках: C_1 — стопы опорной ноги, C_2 — голени опорной ноги, C_3 — бедра опорной ноги, C_4 — корпуса. Их положения будем задавать в виде отношений длины от начала соответствующего звена до центра масс ко всей длине звена, через множители n_i ($i = 1, \dots, 4$), ($0 < n_i < 1$) (если все звенья перенумеровать по номерам индексов у соответствующих углов). Такой способ задания положений центров масс предпочтительней, так как для человека положения центров масс конечностей определяются эмпирическим путем и задаются в процентном отношении одной части звена к другой [10, 11], кроме того, он позволяет учесть изменение положения центра масс во время движения через известные деформации звена. Массы: m_1, m_2, m_3, m_4 — стопы голени, бедра, корпуса соответственно. При расчетах и моделировании движения биомеханической системы все вышеприведенные характеристики берутся равными соответствующим экспериментальным данным человека [11].

Трением в горизонтальных цилиндрических опорах пренебрегаем. Спиральные пружины с жесткостями k_i ($i = 1, \dots, 4$) при верхнем вертикальном положении звеньев находятся в естественном недеформированном состоянии. Определим жесткости пружин k_i ($i = 1, \dots, 4$) так, чтобы в верхнем вертикальном положении равновесие системы было устойчивым.

Связи системы идеальны, стационарны и голономны, а активные силы, действующие на систему, консервативны. Поэтому здесь применима теорема

Лагранжа. Положение звеньев будем определять углами φ_i ($i = 1, \dots, 4$). Потенциальная энергия Π системы складывается из потенциальной энергии пружин и потенциальной энергии сил тяжести.

Потенциальная энергия Π системы находится в данном случае так:

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= \frac{k_1 \varphi_1^2}{2} + \frac{k_2 (\varphi_2 - \varphi_1)^2}{2} + \\ &+ \frac{k_3 (\varphi_3 - \varphi_2 - \varphi_1)^2}{2} + \frac{k_4 (\varphi_4 - \varphi_3 - \varphi_2 - \varphi_1)^2}{2}, \\ \Pi_2 &= -m_1 g l_1 n_1 (1 - \cos \varphi_1) - \\ &- m_2 g [l_1 (1 - \cos \varphi_1) + l_2 n_2 (1 - \cos \varphi_2)] - \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} &- m_3 g [l_1 (1 - \cos \varphi_1) + l_2 (1 - \cos \varphi_2) + l_3 n_3 (1 - \cos \varphi_3)] - \\ &- m_4 g [l_1 (1 - \cos \varphi_1) + l_2 (1 - \cos \varphi_2) + \\ &+ l_3 (1 - \cos \varphi_3) + l_4 n_4 (1 - \cos \varphi_4)]. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{k_1 \varphi_1^2}{2} + \frac{k_2 (\varphi_1^2 - 2\varphi_1 \varphi_2 + \varphi_2^2)}{2} + \\ &+ \frac{k_3 (\varphi_1^2 + 2\varphi_1 \varphi_2 + \varphi_2^2 - 2\varphi_1 \varphi_3 - 2\varphi_2 \varphi_3 + \varphi_3^2)}{2} + \\ &+ \frac{k_4 (\varphi_1^2 + 2\varphi_1 \varphi_2 + \varphi_2^2 + 2\varphi_1 \varphi_3 + 2\varphi_2 \varphi_3 + \varphi_3^2)}{2} - \\ &- \frac{2\varphi_1 \varphi_4 - 2\varphi_2 \varphi_4 - 2\varphi_3 \varphi_4 + \varphi_4^2}{2} - \\ &- (m_1 n_1 + m_2) g l_1 (1 - \cos \varphi_1) - m_2 g l_2 n_2 (1 - \cos \varphi_2) - \\ &- m_3 g [l_1 (1 - \cos \varphi_1) + l_2 (1 - \cos \varphi_2) + l_3 n_3 (1 - \cos \varphi_3)]. \end{aligned} \quad (2)$$

Пользуясь разложением в ряд Маклорена, получим после группировки

$$\begin{aligned} \Pi &= \left(\frac{1}{2}\right) \{ [k_1 + k_2 + k_3 + k_4 - (m_1 n_1 + m_2 + m_3 + m_4) g l_1] \varphi_1^2 + \\ &+ (k_2 + k_3 + k_4 - (m_2 n_2 + m_3 + m_4) g l_2) \varphi_2^2 + \\ &+ (k_3 + k_4 - (m_3 n_3 + m_4) g l_3) \varphi_3^2 + (k_4 - m_4 n_4 g l_4) \varphi_4^2 - \\ &- 2(k_2 - k_3 - k_4) \varphi_1 \varphi_2 - 2(k_3 - k_4) \varphi_1 \varphi_3 - 2k_4 \varphi_1 \varphi_4 - \\ &- 2(k_3 - k_4) \varphi_2 \varphi_3 - 2k_4 \varphi_2 \varphi_4 - 2k_4 \varphi_3 \varphi_4 \} + \dots, \end{aligned} \quad (3)$$

где точками обозначены члены, содержащие φ_1 и φ_2 в степени выше второй.

Введем обозначения

$$\begin{aligned} c_{11} &= k_1 + k_2 + k_3 + k_4 - (m_1 n_1 + m_2 + m_3 + m_4) g l_1, \\ c_{22} &= k_2 + k_3 + k_4 - (m_2 n_2 + m_3 + m_4) g l_2, \\ c_{33} &= k_3 + k_4 - (m_3 n_3 + m_4) g l_3, \\ c_{44} &= k_4 - m_4 g l_4 n_4, \\ c_{12} &= c_{21} = -k_2 + k_3 + k_4, \\ c_{13} &= c_{31} = c_{23} = c_{32} = -k_3 + k_4, \\ c_{14} &= c_{41} = c_{24} = c_{42} = c_{34} = c_{43} = -k_4. \end{aligned} \quad (4)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \Pi &= \left(\frac{1}{2}\right) (c_{11} \varphi_1^2 + c_{22} \varphi_2^2 + c_{33} \varphi_3^2 + c_{44} \varphi_4^2 + 2c_{12} \varphi_1 \varphi_2 + 2c_{13} \varphi_1 \varphi_3 + \\ &+ 2c_{23} \varphi_2 \varphi_3 + 2c_{14} \varphi_1 \varphi_4 + 2c_{24} \varphi_2 \varphi_4 + 2c_{34} \varphi_3 \varphi_4) + \dots \end{aligned} \quad (5)$$

Критерий Сильвестра в данном случае имеет вид:

$$\Delta_1 = c_{11} > 0; \Delta_2 = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} > 0;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} > 0; \Delta_4 = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{vmatrix} > 0. \quad (6)$$

Решение полученной системы неравенств в аналитическом виде достаточно громоздко. Построить область четырехмерного пространства (k_1, k_2, k_3, k_4) , соответствующую решению данных неравенств невозможно. Поэтому построим в СКМ Mathematica трехмерные области при одном из фиксированных аргументов (рисунок 2).

Можно построить области устойчивости и при двух фиксированных аргументах. Так как таких

областей получается 12, в качестве иллюстрации приведем две из них (рисунок 3).

Таким образом, оценены области устойчивости для четырехзвенной модели.

Обобщим полученные результаты для произвольной многозвенной модели, имеющей n звеньев.

Так как все параметры, характеризующие механическую систему, входят в коэффициенты c , и закономерность их обобщения уже понятна, введем обозначения:

$$c_{it} = \sum_{i=t}^n k_i - gl_i \left(m_i n_i - \sum_{i=t+1}^n m_i \right) \quad (t=1, \dots, n),$$

$$c_{st} = c_{st} - k_s + \sum_{i=s+1}^n k_i \quad (t=1, \dots, n; s=2, \dots, n; t \neq s). \quad (7)$$

Тогда

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_{s,j=1}^n c_{st} \varphi_t \varphi_s + \dots \quad (t=1, \dots, n; s=1,1, \dots, n). \quad (8)$$

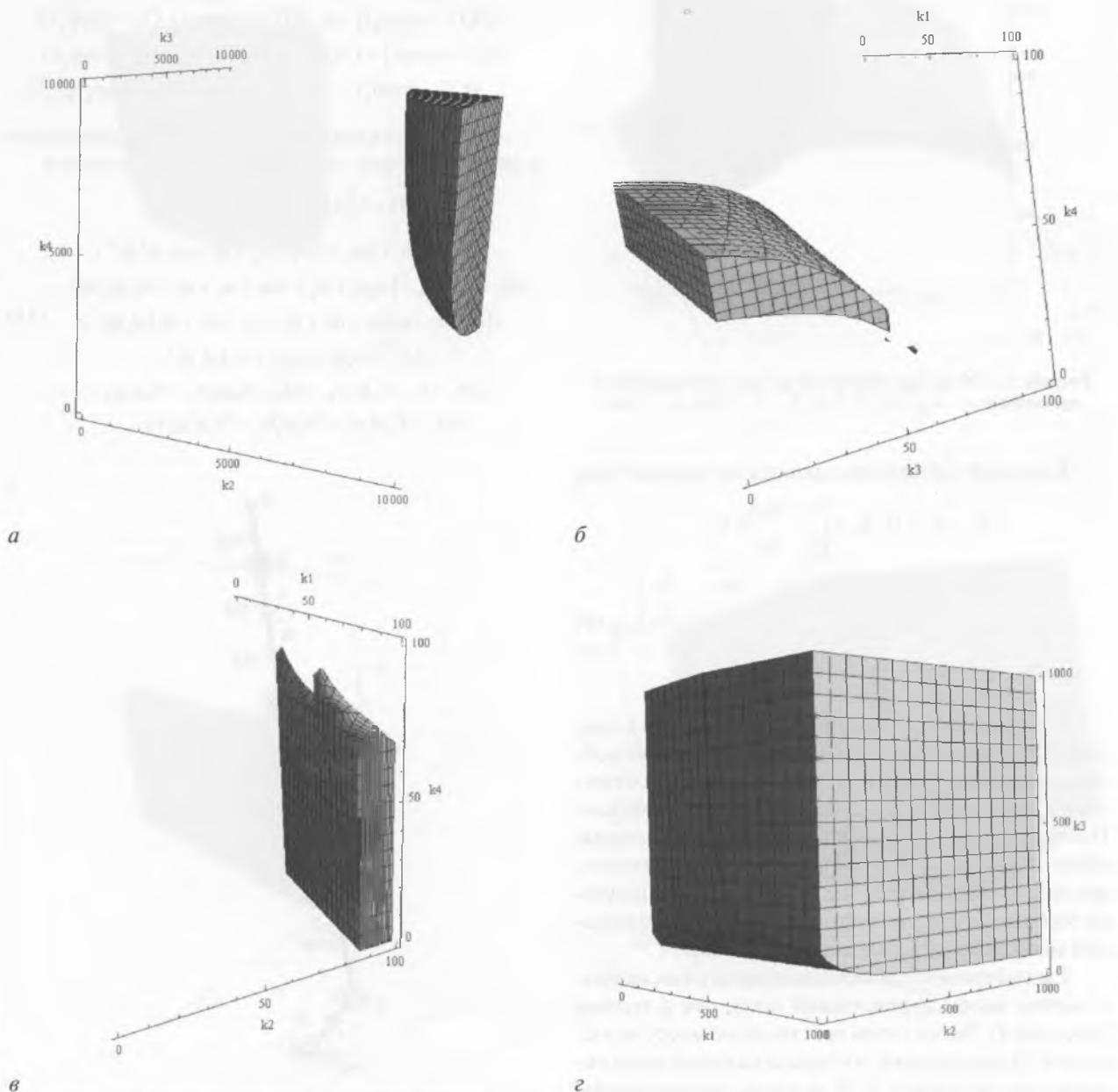
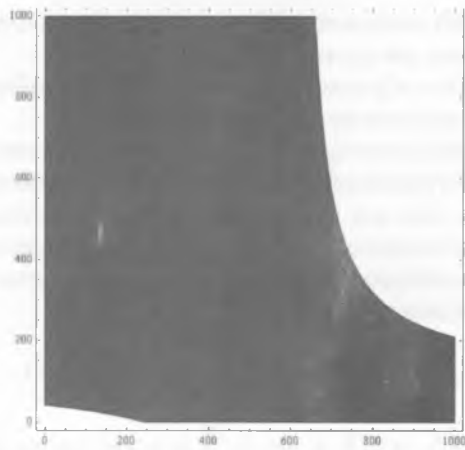
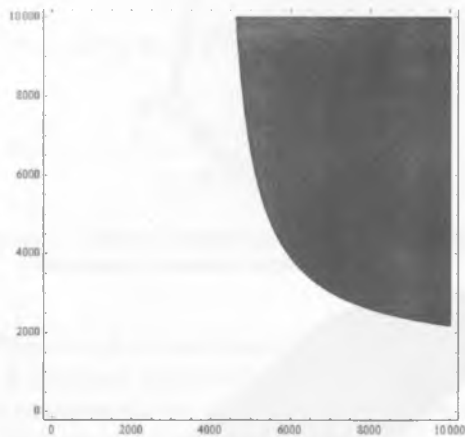


Рисунок 2 — Области устойчивости при одном из фиксированных аргументов: а — $k_1 = 5000$; б — $k_2 = 500$; в — $k_3 = 500$; г — $k_4 = 500$



а



б

Рисунок 3 — Области устойчивости при двух фиксированных аргументах: а — $k_2 = 500, k_3 = 50$; б — $k_1 = 5000, k_2 = 9000$

Критерий Сильвестра в данном случае имеет вид

$$\Delta_1 = c_{11} > 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} > 0;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} > 0, \dots; \Delta_n = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix} > 0. \quad (9)$$

Решение полученной системы неравенств в аналитическом виде достаточно громоздко. Построить область n -мерного пространства (k_1, k_2, \dots, k_n) , соответствующую решению данных неравенств невозможно. Поэтому можно построить трехмерные и двумерные области при фиксированных нескольких аргументах, аналогично рассмотренным выше случаям. Получено обобщение критерия устойчивости для произвольной многосвязной механической системы.

Рассмотрим устойчивость модели экзоскелета, с учетом массы переносимой ноги, рук и головы (рисунок 4). Также учтем собственную массу экзоскелета. Предположим, что масса каждого звена экзоскелета составляет 30 % от массы соответствующего звена человека.

На рисунке 4 введены дополнительно к рассмотренному выше случаю следующие обозначения: в точке C подвешена переносная нога с такой же массой, как и опорная; в точке прикреплены две руки, массой m_5 ; в точке E — голова, массой m_6 .

В данном случае потенциальная энергия Π системы находится по формуле:

$$\Pi_1 = \frac{k_1 \varphi_1^2}{2} + \frac{k_2 (\varphi_2 - \varphi_1)^2}{2} + \frac{k_3 (\varphi_3 - \varphi_2 - \varphi_1)^2}{2} + \frac{k_4 (\varphi_4 - \varphi_3 - \varphi_2 - \varphi_1)^2}{2};$$

$$\begin{aligned} \Pi_2 = & -m_1 g l_1 n_1 (1 - \cos \varphi_1) - m_2 g [l_1 (1 - \cos \varphi_1) + \\ & + l_2 n_2 (1 - \cos \varphi_2)] - m_3 g [l_1 (1 - \cos \varphi_1) + l_2 (1 - \cos \varphi_2) + \\ & + l_3 n_3 (1 - \cos \varphi_3)] - (m_1 + m_2 + m_3) g [l_1 (1 - \cos \varphi_1) + \\ & + l_2 (1 - \cos \varphi_2) + l_3 (1 - \cos \varphi_3)] - \\ & - m_4 g [l_1 (1 - \cos \varphi_1) + l_2 (1 - \cos \varphi_2) + l_3 (1 - \cos \varphi_3) + \\ & + l_4 n_4 (1 - \cos \varphi_4)] - m_5 g [l_1 (1 - \cos \varphi_1) + l_2 (1 - \cos \varphi_2) + \\ & + l_3 (1 - \cos \varphi_3) + l_4 n_5 (1 - \cos \varphi_4)] - m_6 g [l_1 (1 - \cos \varphi_1) + \\ & + l_2 (1 - \cos \varphi_2) + l_3 (1 - \cos \varphi_3) + l_4 (1 - \cos \varphi_4)]. \end{aligned} \quad (10)$$

Раскрывая квадраты и пользуясь разложением в ряд Маклорена, получим после группировки

$$\begin{aligned} \Pi = & \left(\frac{1}{2}\right) \{ [k_1 + k_2 + k_3 + k_4 - \\ & - (m_1 n_1 + m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4 + m_5 + m_6) g l_1 k \varphi_1^2 + \\ & + (k_2 + k_3 + k_4 - (m_2 n_2 + m_2 + 2m_3 + m_4 + m_5 + m_6) g l_2) \varphi_2^2 + \\ & + (k_3 + k_4 - (m_3 n_3 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 + m_6) g l_3) \varphi_3^2 + \\ & + (k_4 - (m_4 n_4 + m_5 n_5 + m_6) g l_4) \varphi_4^2 - \\ & - 2(k_2 - k_3 - k_4) \varphi_1 \varphi_2 - 2(k_3 - k_4) \varphi_1 \varphi_2 - 2k_4 \varphi_1 \varphi_4 - \\ & - 2(k_3 - k_4) \varphi_2 \varphi_3 - 2k_4 \varphi_2 \varphi_4 - 2k_4 \varphi_3 \varphi_4 \} + \dots, \end{aligned} \quad (11)$$

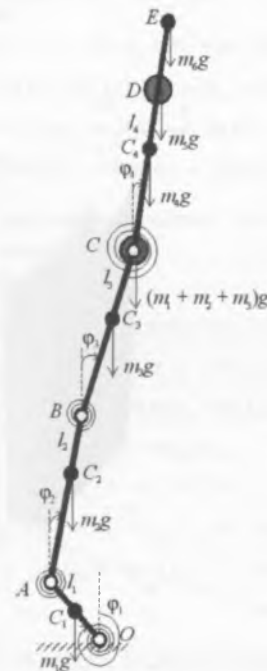


Рисунок 4 — Модель опорной ноги экзоскелета в виде четырехзвенной составной стержневой пружинной системы

где точками обозначены члены, содержащие φ_1 и φ_2 в степени выше второй.

Введем обозначения

$$\begin{aligned}
 c_{11} &= k_1 + k_2 + k_3 + k_4 - (m_1 n_1 + m_1 + \\
 &\quad + 2m_2 + 2m_3 + m_4 + m_5 + m_6) g l_1; \\
 c_{22} &= k_2 + k_3 + k_4 - (m_2 n_2 + m_2 + \\
 &\quad + 2m_3 + m_4 + m_5 + m_6) g l_2; \\
 c_{33} &= k_3 + k_4 - (m_3 n_3 + m_2 + m_3 + \\
 &\quad + m_4 + m_5 + m_6) g l_3; \\
 c_{44} &= k_4 - (m_4 n_4 + m_5 n_5 + m_6) g l_4; \\
 c_{12} &= c_{21} = -k_2 + k_3 + k_4; \\
 c_{13} &= c_{31} = c_{23} = c_{32} = -k_3 + k_4; \\
 c_{14} &= c_{41} = c_{24} = c_{42} = c_{34} = c_{43} = -k_4.
 \end{aligned}
 \tag{12}$$

Тогда потенциальная энергия примет вид (5), а критерий Сильвестра — вид (6).

Решению данных неравенств соответствует область четырехмерного пространства (k_1, k_2, k_3, k_4) , построить которую невозможно. Поэтому построим в СКМ Mathematica трехмерные области при одном из фиксированных аргументов (рисунок 5).

Можно построить области устойчивости и при двух фиксированных аргументах. Так как таких областей получается 12, в качестве иллюстрации приведем две из них (рисунок 6).

Таким образом, оценены области устойчивости для четырехзвенной модели.

Сравнивая полученные ранее для четырехзвенного механизма зависимости (см. рисунки 2 и 3) и зависимости, полученные для модели экзоскелета с

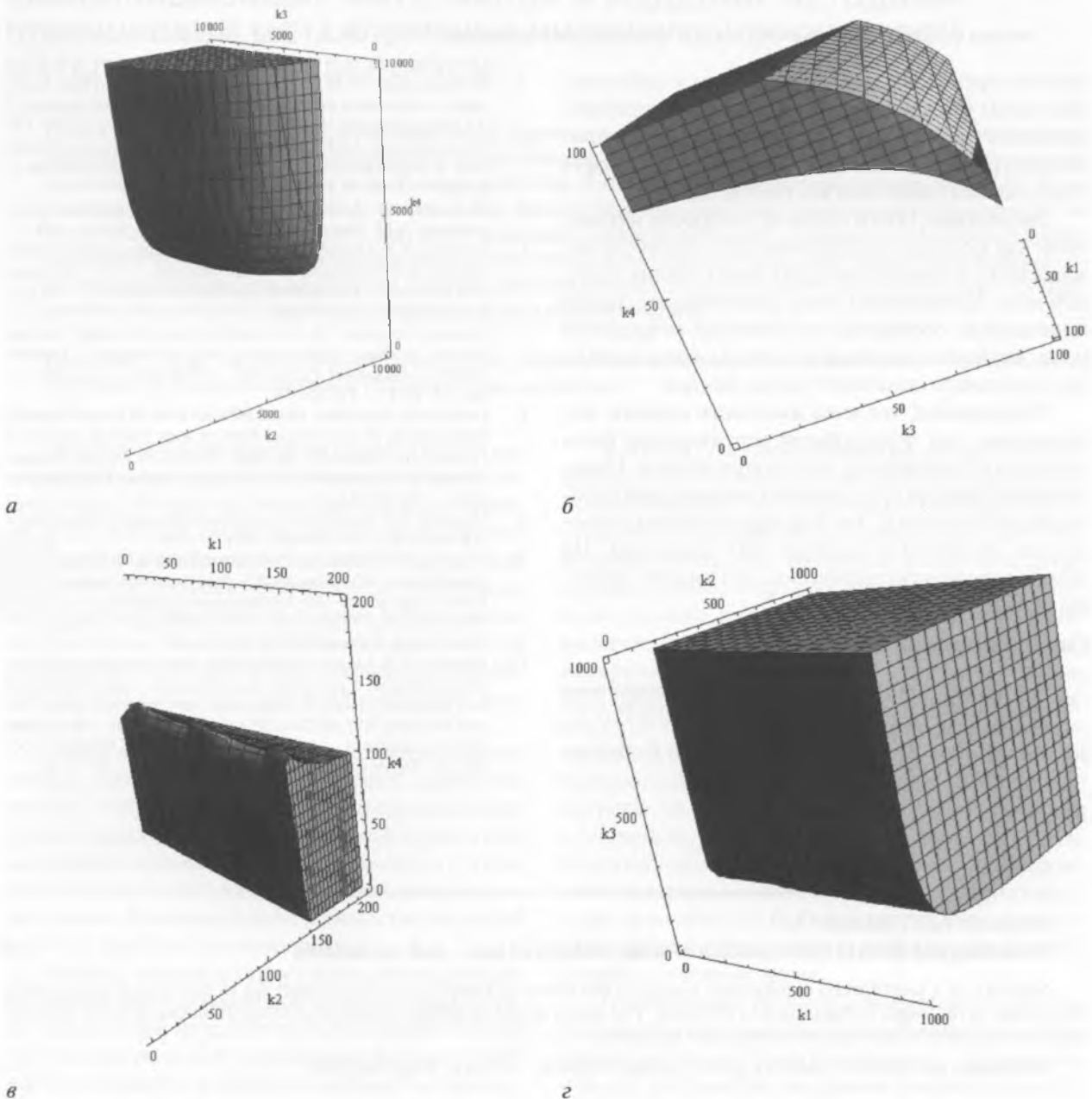
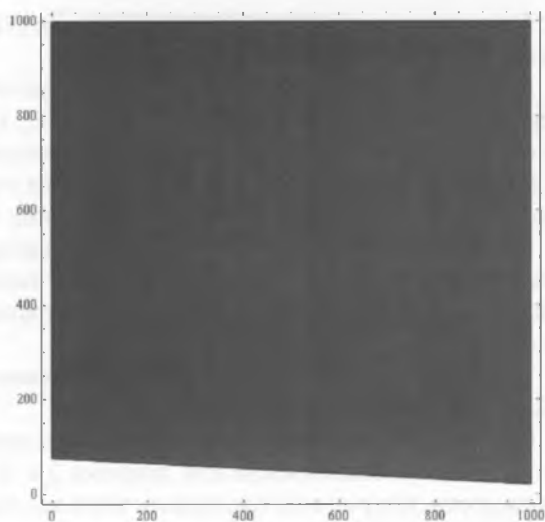
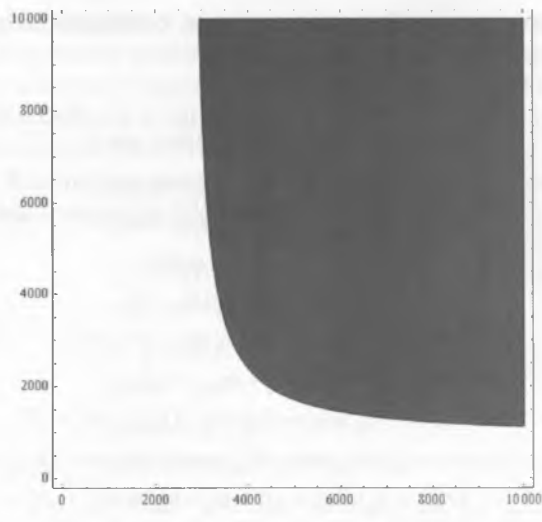


Рисунок 5 — Области устойчивости при одном из фиксированных аргументов: а — $k_1 = 10000$; б — $k_2 = 500$; в — $k_3 = 500$; г — $k_4 = 500$



а



б

Рисунок 6 — Области устойчивости при двух фиксированных аргументах: а — $k_2 = 500$, $k_3 = 50$; б — $k_1 = 10\,000$, $k_2 = 9\,000$

учетом переносной ноги, рук, головы и собственной массы (см. рисунки 5 и 6), видно, что принципиальных изменений в виде зависимостей не произошло, но зоны устойчивости сместились в область более высоких значений жесткости пружин.

Заключение. Таким образом, построена математическая модель, описывающая устойчивость экзоскелета с человеком внутри в фазе стояния на одной ноге. Установлены зоны устойчивости. Так же произведено обобщение полученных результатов на случай биомеханической системы, состоящей из произвольного конечного числа звеньев.

Установлено, что зоны жесткости пружин, необходимые для поддержания вертикальной позы человека в экзоскелете, достаточно велики. Практический интерес представляют минимально необходимые жесткости, так как при создании экзоскелета достаточно именно этих значений. Их можно определить графически. Это нижние границы областей на графиках.

Список литературы

1. Мартыненко, Ю.Г. Проблемы управления неустойчивыми системами / Ю.Г. Мартыненко, А.М. Формальский // Успехи механики. — 2005. — № 2. — С. 73–135.
2. Няшин, Ю.И. Основы биомеханики. / Ю.И. Няшин, В.А. Лохов. — ПГТУ. — 2007. — 210 с.
3. Формальский, А.М. О стабилизации перевернутого маятника с неподвижной или подвижной точкой подвеса / А.М. Формальский // ДАН. — Т. 406, № 2. — 2006. — С. 175–179.
4. Формальский, А.М. Перевернутый маятник на неподвижном и подвижном основании / А.М. Формальский // ПММ. — Т. 70, № 1. — 2006. — С. 62–71.
5. Формальский, А.М. Перемещение антропоморфных механизмов / А.М. Формальский. — М.: Наука, 1982. — 368 с.
6. Чигарев, А.В. Моделирование управляемого движения двуногого антропоморфного механизма / А.В. Чигарев, А.В. Борисов // Российский журнал биомеханики. — 2011. — Т. 15, № 1(51). — С. 74–88.
7. Yannick Aoustin. On the stabilization of a biped vertical posture in single support using internal torques / Yannick Aoustin, Alexander Formal'sky // Robotica, Jan. 2005. — Vol. 23, Is. 1. — Pp. 65–74.
8. Formal'sky Alexander. Biped Without Feet in Single Support: Stabilization of the Vertical Posture with Internal Torques / Formal'sky Alexander, Aoustin Yannick // Mobile Robots. Towards New Applications (Edited by Aleksandar Lazinica). — 2006. — Pp. 27–44.
9. Меркин, Д.Р. Введение в теорию устойчивости движения / Д.Р. Меркин. — М.: Наука, 1971. — 312 с.
10. Chigarev, A.V. Problems of Strength at Loading Multilayer Bones of the Person / A.V. Chigarev, A.V. Borisov // Mechanika — 2009. Proceedings of the 14th international conference. April 2–3, 2009; Kaunas University of Technology, Lithuania. — Technologija Kaunas, 2009. — Pp. 76–79.
11. Борисов, А.В. Методы определения длин конечностей и звеньев человека с расчетом инерционных характеристик / А.В. Борисов // Науч. тр. Междунар. науч.-практич. конф. ученых МАДИ (ГТУ), МСХА, ЛНАУ; 5–6 янв. 2004 г. — Т. 4. Педагогика и методика. — Москва-Луганск: Изд-во МАДИ (ГТУ), МСХА, ЛНАУ; Смоленск: ООО «Инга», 2004. — С. 77–90.

Chigarev A.V., Borisov A.V.

Modelling and criteria determination of static stability of endo- and exoskeleton

Stability of a multilinked exoskeleton model in the phase of standing on the support leg in the form a system with the springs in the joints is researched in the work. The zones of spring stiffness necessary for maintenance of stable balance of the considered biomechanical system are estimated.

Keywords: exoskeleton, stability, joints, springs stiffness, balance, single-support

Поступила в редакцию 25.07.2012.