



МЕХАНИКА МОБИЛЬНЫХ МАШИН

УДК 629.113:681.3

В.Б. АЛЬГИН, д-р техн. наук

Объединенный институт машиностроения НАН Беларуси, г. Минск

ДИНАМИКА МНОГОМАССОВЫХ СИСТЕМ МАШИН ПРИ ИЗМЕНЕНИИ СОСТОЯНИЙ ФРИКЦИОННЫХ КОМПОНЕНТОВ И НАПРАВЛЕНИЙ СИЛОВЫХ ПОТОКОВ

Рассмотрены особенности построения математических моделей для динамических расчетов многомассовых систем на переходных режимах с изменением состояния системы и направлений силовых потоков. Типовыми процессами являются включение и выключение сцепления мобильной машины, трогание машины с места, переключение передач, пробуксовка колес относительно дороги, блокировка и разблокировка колес при торможении. Проанализированы характерные ошибки динамических расчетов. Развита концепция регулярной механической системы в части требований к математическим моделям, описывающим изменения состояния системы, а также к описанию потерь в трансмиссионных механизмах. Представлены математические модели, методически корректно воспроизводящие условия замыкания и размыкания фрикционных компонентов с учетом особенностей компьютера как дискретного вычислительного устройства. Разработана процедура определения направления силовых потоков, проходящих через устройства-передачи, приведены особенности методики динамического расчета с учетом потерь в таких устройствах.

Ключевые слова: мобильная машина, многомассовая система, замыкающиеся и размыкающиеся компоненты, регулярная механическая система, динамический расчет, потери в механизмах, направление силового потока

Введение. Становление механики как науки, объясняющей поведение механических систем под действием сил, связано с именами Ньютона, Эйлера, Даламбера, Лагранжа, Гамильтона и разработанными ими методами составления уравнений движения механических объектов. В классическом представлении принято, что конфигурация механической системы известна и под действием сил не изменяется.

Для современных механических объектов характерно постоянное количественное и качественное усложнение, причем последнее связано с изменением конфигурации (или состояния). При таком изменении конфигурации происходит объединение, например, под действием сил трения, взаимодействующих масс или их разъединение под действием внешних и внутренних факторов.

Возможность исследования все более сложных объектов основывается на развитии вычислительной техники. При этом имеет место тенденция отказа от написания уравнений движения системы «вручную». Для сложного объекта во многих случаях эта задача нереальна. Аналитическое составление уравнений заменяется компьютерными методами и программными пакетами с графическим интерфей-

сом, которые позволяют пользователю «собрать» в интерактивном режиме механическую систему. Формирование уравнений ее движения происходит на последующем этапе автоматически средствами программного пакета. Таким образом, начальным этапом исследования механического объекта становится не составление уравнений динамики, а этап его схематизации в виде механической системы — объектной механической модели, состоящей из элементарных механических компонентов (масс, упругих звеньев, демпфирующих элементов, фрикционных пар, разнообразных соединений и т. д.).

Происходит типизация систем и подходов к решению задач их динамики. Выделяются отдельные системы, обладающие характерными особенностями поведения и, соответственно, моделирования. Так, система, в которой массы совершают большие перемещения, квалифицируется (в отличие от конечно-элементной системы) как «Multibody system» («Многомассовая система»).

Основные особенности данного направления представлены в [1–5]. В частности, в [1] указывается: «Многомассовая система используется для того, чтобы моделировать динамическое поведение

взаимосвязанных твердых и гибких тел, каждое из которых может подвергаться большим поступательным или вращательным перемещениям». Типичными представителями таких систем являются мобильные машины и другие механические объекты, поведение которых целесообразно описывать изменением скоростей, а не перемещением их составных частей, поскольку величины перемещений быстро накапливаются во времени.

В статье рассматриваются две связанные проблемы. Первая — развитие моделей и методов для решения задач динамики многомассовых систем, в которых происходят замыкания и размыкания компонентов за счет трения в их контакте. К характерным случаям относятся включение и выключение сцепления мобильной машины, трогание машины с места и переключение передач при включении фрикционных элементов трансмиссии, пробуксовка колес относительно дороги, блокировка и разблокировка колес при торможении. Данная проблема имеет также отношение к моделированию поведения разнообразных соединений (сопряжений деталей) в машиностроительных и иных конструкциях, в которых возможны фазы движения и остановки в результате действия активных сил (нагрузок) и действия сил трения в соединениях.

Общая особенность решения задач динамики подобных объектов — это отображение аналоговых по своей сути процессов замыкания и размыкания их элементов с помощью компьютера (дискретного устройства) и применения численных методов, которые генерируют решения с определенным шагом.

Вторая проблема — корректный учет потерь в механизмах, для случаев, когда изменение конфигурации объекта или режима его движения приводит к изменению направления передачи силового потока через эти механизмы.

Методическая корректность решения рассматриваемых в статье задач основывается на концепции регулярной механической системы (РМС) [6–8]. Концепция РМС полагает, что механическая система, которая используется для описания реального объекта, состоит из сосредоточенных масс и безмассовых устройств-соединителей: неподвижных звеньев (стоек), валов, муфт, тормозов, передач, иных устройств, налагающих кинематические связи на соединяемые массы. Массы могут вступать в контактное взаимодействие. Непосредственная связь (не через массу) для соединителей запрещена.

Характерные ошибки при схематизации — *безмассовые соединения* упругого вала с элементом муфты или упругого вала с элементом фрикциона, имитирующего контакт колеса с дорогой [9–13 и др.]. Эти ошибки проанализированы в работах [6–8, 14].

Применительно к рассматриваемым задачам концепция РМС предусматривает корректное проведение следующих процедур: 1) исходную схематизацию объекта в виде регулярной механической системы, 2) построение математической модели и

3) реализацию методики динамического расчета, ориентированной на использование компьютера (дискретного вычислительного устройства) и численного метода решения.

В опубликованных за последнее время работах [15, 16 и др.] первая процедура — исходная схематизация объектов (сцеплений, муфт коробок передач, а также контакта колеса с дорогой) — во все большей степени реализуется на основе концепции РМС. Вместе с тем, остальные процедуры выполняются не совсем корректно, что может приводить к существенным ошибкам в динамических расчетах систем, особенно при наличии в них нескольких замыкающихся и размыкающихся в процессе функционирования компонентов.

В работах по трибологии [17 и др.] обычно приводится пример фрикционных автоколебаний в системе «груз, удерживаемый пружиной, на движущемся основании»; движению груза препятствует пружина, соединенная с неподвижной опорой. Такая простейшая модель служит для изучения нестационарного трения скольжения (*stick-slip*). Одна из причин фрикционных колебаний — это *положительная разность между силами трения покоя и скольжения*. В общем случае эта разность зависит от продолжительности неподвижного контакта. Другой причиной фрикционных автоколебаний может стать падающая скоростная зависимость силы трения. В публикациях по указанной проблематике обычно ограничиваются качественным рассмотрением поведения пары трения в режиме с постоянной скоростью движения основания. Кроме того, не анализируются случаи, когда взаимодействуют несколько пар трения.

По второму рассматриваемому вопросу следует отметить, что авторы [16 и др.] полагают постоянство направления передачи мощностного потока, при этом потери в механизмах учитываются посредством КПД. Изменение крутящего момента, проходящего через механизм, описывается произведением передаточного числа на КПД механизма от входного к выходному звену. При этом не принимается во внимание, что в динамических расчетах возможны ситуации, когда выходное звено становится ведущим. Кроме того, в динамике, понятие «входа» и «выхода» для отдельного механизма, входящего в более сложный механизм, теряет смысл.

Цель статьи — развитие и детальное описание с позиций концепции РМС вопросов построения математической модели (процедура 2) и методики динамического расчета (процедура 3) системы, структура которой изменяется за счет замыкающихся и размыкающихся при действии трения компонентов, а также методики учета направления силовых потоков, проходящих через механизмы для корректного представления потерь. При этом режим работы системы может иметь явно выраженный нестационарный характер, например, это могут быть переходные режимы работы мобильных машин.

Контактные явления рассматриваются в обобщенном виде, без их детального описания на уровне трибологических явлений. Используется положение о мгновенной относительной остановке трущихся тел с абсолютно твердым контактом (гипотеза «скачка»). Такой подход достаточен для описания макропроцессов, происходящих в замыкающих и размыкающихся компонентах мобильных машин, оценки динамики машин и работоспособности самих компонентов. При необходимости, предлагаемые динамические модели регулярных механических систем могут быть детализированы путем углубленного описания процессов в контакте взаимодействующих компонентов.

Типовые ошибки в вычислительных моделях с фрикционными компонентами. На рисунке 1 показана простейшая двухмассовая регулярная механическая система с фрикционным компонентом F , который соединяет маховые массы J_1 и J_2 . Действие на массы сторонних для масс силовых факторов представлено моментами M_1 и M_2 .

В работе [16] такая система используется для моделирования контакта колеса с дорогой, а дополненная зубчатыми передачами — для моделирования фрикциона гидромеханической коробки передач, включаемого при трогании машины с места. При этом математическая модель, описывающая данную систему, имеет следующие ошибки.

Принято, что замыкание фрикциона происходит при одновременном выполнении двух условий: - при сближении до определенной величины скоростей маховых масс

$$\omega_1 - \omega_2 \leq \Delta\omega; \tag{1}$$

- и при определенном соотношении внешнего момента и момента трения

$$M_1 \leq M_F, \tag{2}$$

где ω_1 и ω_2 — угловые скорости маховых масс J_1 и J_2 ; $\Delta\omega$ — допустимая относительная скорость скольжения фрикционного элемента, при которой его можно рассматривать как замкнутый; M_F — момент трения фрикциона; M_1 — момент, действующий на маховую массу со стороны примыкающих к ней элементов, например, сумма упругого и диссипативного момента.

Как будет показано ниже одновременная проверка по условиям замыкания и срыва фрикциона не корректна. Вместе с тем каждое из приведенных условий также не является корректным.

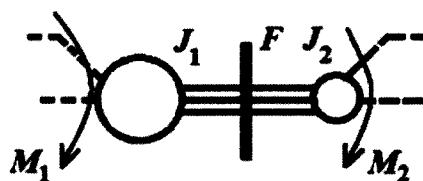


Рисунок 1 — Простейшая регулярная механическая система с фрикционным компонентом

Ошибочность условия (1) состоит в том, что в действительности замыкание фрикциона происходит при $\omega_1 = \omega_2$. (3)

При выравнивании скоростей рассматриваемый фрикционный компонент начинает двигаться под действием трения покоя как единое целое, части которого J_1 и J_2 имеют одинаковые скорости. Этот период может быть кратковременным или продолжительным, но он обязательно должен иметь место. Использование условия (1) не позволяет выделить указанную фазу движения компонентов фрикциона как единого целого.

Условие (2) имеет два некорректных аспекта.

Первый аспект — это сравнение момента M_1 , действующего на маховую массу J_1 с моментом трения фрикциона M_F , при рассмотрении возможности размыкания фрикциона за счет действия момента, превышающего момент трения. При таком старвнении наличие маховой массы J_1 в механической системе игнорируется. Правильно сопоставлять момент трения M_F с моментом M_{12} , действующим в звене 12, соединяющем маховые массы J_1 и J_2 .

Второй некорректный аспект состоит в том, что не учитывается разница между моментом трения M_F при относительном движении масс J_1 , J_2 и статическим моментом трения M_{F0} , когда эти массы двигаются как единое целое. В первом случае имеет место трение скольжения, во втором трение покоя. При замкнутом фрикционе должна проводиться проверка на превышение действующим моментом M_{12} статического момента трения фрикциона M_{F0} .

Математические модели систем с фрикционными компонентами. При разомкнутом состоянии фрикциона уравнения движения рассматриваемой системы (рисунок 2 а) имеют вид

$$\dot{\omega}_1 = (M_1 - M_F) / J_1; \tag{4}$$

$$\dot{\omega}_2 = (M_2 - M_F) / J_2, \tag{5}$$

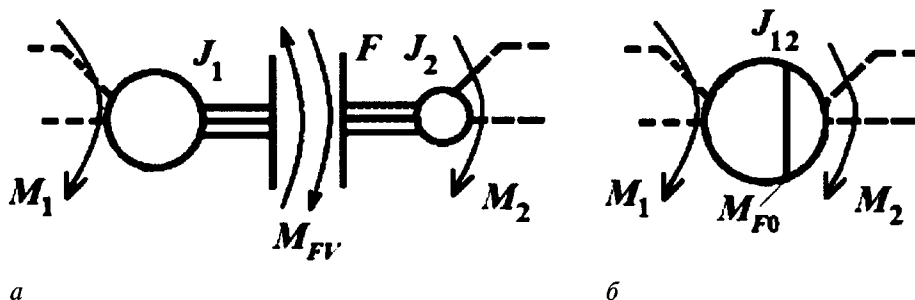


Рисунок 2 — Состояния РМС с фрикционом: а — разомкнутое; б — замкнутое

где M_F — известная функция, описывающая момент трения при буксовании частей фрикциона.

При замкнутом состоянии фрикциона (см. рисунок 2 б) можно рассматривать одно уравнение движения массы $J_{12} = (J_1 + J_2)$:

$$\dot{\omega}_{12} = (M_1 - M_2) / J_{12}. \quad (6)$$

Два подхода к формированию дифференциальных уравнений движения систем с изменяющимся состоянием. В настоящее время средства моделирования не позволяют добавлять или удалять переменные из систем дифференциальных уравнений в ходе ее решения, хотя даже при наличии такой возможности процесс решения при изменении числа уравнений существенно усложняется. При моделировании систем с изменяющимся состоянием за счет объединения и разъединения масс можно выделить два следующих подхода.

Первый — формировать для каждого состояния отдельную систему уравнений и переходить от одной системы к другой в процессе решения в зависимости от возникающих условий. С добавлением каждого фрикциона число систем уравнений удваивается. Поэтому при моделировании таких объектов как коробки передач с числом фрикционных элементов от трех и выше, написание подобных систем уравнений затруднительно.

Второй подход — использование одной универсальной системы уравнений, в которой присутствуют логические переменные (индикаторы состояния). Для рассматриваемой системы уравнения, соответствующие второму подходу, можно представить в следующем виде:

$$\dot{\omega}_1 = [M_1 - (1 - \lambda_F)M_F - \lambda_F M_{12}] / J_1; \quad (7)$$

$$\dot{\omega}_2 = [(1 - \lambda_F)M_F + \lambda_F M_{12} - M_2] / J_2, \quad (8)$$

где λ_F — индикатор состояния фрикциона. Индикатор принимает значения: $\lambda_F = 0$ при замкнутом состоянии; $\lambda_F = 1$ — при разомкнутом состоянии фрикциона.

На массы J_1 и J_2 действует либо момент трения фрикциона M_F ($\lambda_F = 1$), либо момент M_{12} , возникающий в жестком звене при его замкнутом состоянии ($\lambda_F = 0$).

Использование универсальной системы уравнений звеньев требует специальной процедуры для определения внутренних моментов жестких звеньев. Кроме того, в обоих подходах должны быть описаны условия смены состояний фрикционов, а значит и РМС, в ходе решения дифференциальных уравнений.

Особенности вычислительных процедур. В дальнейшем полагаем, что моделирование рассматриваемых процессов выполняется с использованием компьютера, реализующего дискретный вычислительный процесс. Решение основывается на численном методе интегрирования универсальной системы дифференциальных уравнений. В ходе решения рассчитываются значения производных и самих

неизвестных величин. Эти значения могут быть использованы в промежуточных вычислениях на каждом шаге процесса интегрирования.

Определение внутренних моментов жестких устройств. Для определения внутренних моментов, действующих в безмассовых жестких устройствах, могут быть использованы два подхода. Первый (кинематический) основан на рассмотрении дополнительного кинематического уравнения связи для замкнутых масс $\dot{\omega}_1 - \dot{\omega}_2 = 0$. В рассматриваемом случае три уравнения для нахождения неизвестных (двух производных скоростей и момента M_{12}) имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_1 + M_{12} / J_1 &= M_1 / J_1; \\ \dot{\omega}_2 + M_2 / J_2 &= M_{12} / J_2; \\ \dot{\omega}_1 - \dot{\omega}_2 &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Второй подход включает предварительную операцию исключения производных скоростей с тем, чтобы в уравнениях в качестве переменных присутствовали только искомые внутренние моменты (метод внутренних моментов). В рассматриваемом случае внутренний момент может быть рассчитан по выражению

$$M_{12} = (J_2 M_1 - J_1 M_2) / (J_1 + J_2). \quad (10)$$

Таким образом, корректное определение момента, нагружающего фрикцион в его замкнутом состоянии (см. рисунок 1), включает нахождение момента M_{12} — внутреннего момента в звене 12, а не момента M_1 , действующего на массу J_1 , что, как отмечалось выше, ошибочно делается в работе [16].

Момент M_{12} может существенно отличаться от момента M_1 . В таблице 1 показано, что чем больше отличаются между собой моменты инерции частей фрикциона J_1 и J_2 , тем значительней расхождение. Аналогичная картина имеет место при отличии по абсолютной величине моментов M_1 и M_2 , действующих на части фрикционов J_1 и J_2 . Лишь в одном случае — при $M_1 = -M_2$ — момент, действующий на часть J_1 , совпадает с моментом, нагружающим фрикцион: $M_1 = M_{12}$.

Условия изменения состояния фрикциона. Момент трения контактирующих элементов в стати-

Таблица 1 — Сопоставление моментов M_1 и M_{12} при различных параметрах масс и действующих моментов

Вариант	J_1	J_2	M_1	M_2	M_{12}	M_1/M_{12}
1	1,0	1,0	10,0	-1,0	5,5	1,82
2	2,0	1,0	10,0	-1,0	4,0	2,50
3	5,0	1,0	10,0	-1,0	2,5	4,00
4	9,0	1,0	10,0	-1,0	1,9	5,26
5	1,0	9,0	10,0	-1,0	9,1	1,10
6	9,0	1,0	1,0	-1,0	1,0	1,00
7	9,0	1,0	1,0	1,0	-0,8	-1,25

ческом состоянии и при скольжении имеет во многом различную физическую природу. Поэтому для описания момента трения в общем случае должны использоваться различные зависимости.

Типовая зависимость момента трения от скорости скольжения трущихся элементов фрикциона показана на рисунке 3. Под скоростью скольжения ΔV фрикциона обычно подразумевается эквивалентная либо средняя по поверхности трения скорость скольжения. Там же представлен статический момент M_{F0} , характеризующий замкнутое состояние фрикциона, который не «ложится» на кривую момента M_F .

К основным факторам, определяющим изменение момента трения M_{Fv} фрикциона при скольжении, относятся скорость скольжения элементов, удельное давление и температура. В достаточно общем случае момент трения фрикциона описывается выражением вида

$$M_F = M_{Fi}(t, p_1, \dots, p_n) \text{sign}(\Delta\omega_F), \quad (11)$$

где $M_{Fi}(t, p_1, \dots, p_n)$ — функция времени t , параметров конструкции и рабочего процесса фрикциона p_1, \dots, p_n ; $\Delta\omega_F$ — угловая скорость скольжения звеньев фрикциона, используется в функции sign для присвоения нужного знака моменту трения, как моменту, препятствующему относительному вращению звеньев фрикциона.

При описании статического момента M_{F0} к существенным факторам в необходимых случаях относится время нахождения фрикциона в замкнутом состоянии. В общем случае следует учитывать скачкообразное изменение момента трения при переходе от скольжения к замыканию фрикциона и наоборот.

Обобщение сказанного в развитие концепции регулярной механической системы приводит к формулировке следующего положения.

Положение «об изменении состояния контакта»: при возникновении условий, в которых возможен переход к новому состоянию контактирующих масс (например, замыкание или размыкание фрикциона), указанное состояние обязательно должно быть представлено в расчете на очередном (по крайней мере, одном) шаге вычислительного процесса.

Реализация указанного положения с учетом специфики дискретного вычислительного процес-

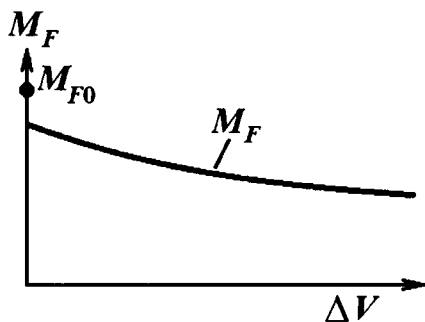


Рисунок 3 — Типовая зависимость момента трения от скорости скольжения трущихся элементов

са осуществляется следующим образом. Проверка условий изменения состояния проводится на каждом i -м шаге моделирования. При выполнении *соответствующих условий* осуществляется изменение состояния, которое действует в течение следующего $i + 1$ шага. Соответствующие условия имеют следующий вид.

Для случая замкнутого состояния фрикциона ($\lambda_F = 0$):

$$|M_{12i}| > M_{F0i} \rightarrow \lambda_{Fi} = 1, \quad (12)$$

т. е. для разблокировки замкнутого фрикциона необходимо, чтобы на рассматриваемом i -м шаге внутренний момент, взятый по абсолютной величине $|M_{12i}|$, — то есть момент, нагружающий фрикцион — превысил значение *статического* момента трения (трения покоя) фрикциона. В этом случае перед выполнением $(i + 1)$ -го шага моделирования изменяется значение индикатора на $\lambda_{Fi} = 1$, момент трения фрикциона на $(i + 1)$ -м шаге с учетом значения индикатора определяется по зависимости M_{Fv} скорости масс в начале $(i + 1)$ -го шага остаются равными.

Для случая разомкнутого состояния фрикциона ($\lambda_F = 1$):

$$\Delta\omega_{F_{i-1}} \Delta\omega_{Fi} \leq 0 \rightarrow \lambda_{F_{i+1}} = 0, \quad (13)$$

т. е. для блокировки фрикциона на $(i + 1)$ -м шаге моделирования необходимо *изменение знака произведения разностей угловых скоростей масс*, примыкающих к фрикциону, на предыдущем $(i - 1)$ -м и рассматриваемом i -м шагах моделирования.

На рисунке 4 показаны пунктирными линиями изменения скоростей ω , а кружками и квадратиками — их дискретные значения первой (1) и второй (2) частей фрикциона в процессе моделирования.

Данный случай требует сохранения в памяти компьютера значения разности скоростей $\Delta\omega_{F_{i-1}}$ на предыдущем шаге и специальной обработки кинематических параметров замыкаемых масс: *необходимо выравнивание их угловых скоростей и ускорений*.

Для повышения точности вычислений можно использовать дробление шага интегрирования с

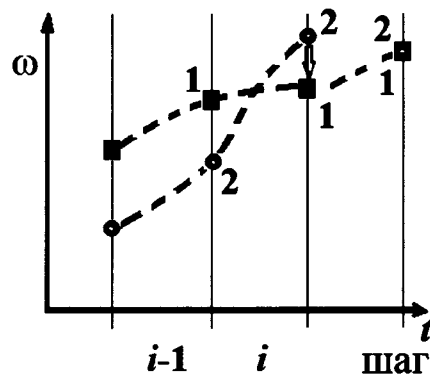


Рисунок 4 — Графическое изображение перехода от разомкнутого к замкнутому состоянию фрикциона при постоянном шаге интегрирования: 1, 2 — дискретное изменение скоростей первой и второй частей фрикциона

возвратом на предыдущий шаг, чтобы сузить временной интервал, на котором произошло замыкание. Более простые решения состоят в присвоении значений скоростей и ускорений обеим массам, приняв их по параметрам большей массы либо массы, имеющей меньшее ускорение. На рисунке 4 показана ситуация, когда после завершения i -го шага, на котором произошло изменение знака разности скоростей масс 1 и 2, массе 2 присваивается значение скорости массы 1, и на следующем шаге они имеют одинаковые скорости и двигаются как единое целое. Далее возможен новый «срыв» фрикциона при выполнении условий (12). Но, по крайней мере, на одном шаге моделирования фрикцион находится в замкнутом состоянии.

Определение внутренних моментов в системах со многими устройствами. Составление дифференциальных уравнений движения для механических систем, у которых сосредоточенные массы соединяются только упругими звеньями, не вызывает затруднений. Использование передач, дифференциалов и других устройств в виде упругих соединителей некорректно, поскольку при этом приходится оперировать их кинематическими характеристиками (внутренними передаточными числами и т. п.), которые получены в предположении «жесткой» кинематики указанных устройств. Такие устройства должны быть представлены как жесткие соединители, а их упругие свойства следует воспроизводить за счет присоединяемых к ним упругих звеньев. Кроме того, сопрягаемые элементы фрикционных устройств должны моделироваться с использованием жестких звеньев. Поэтому в данной задаче следует рассматривать в общем случае системы с упругими и жесткими звеньями, и должна быть предусмотрена процедура нахождения внутренних моментов в последних.

В общем случае при наличии в РМС нескольких жестких устройств внутренние моменты в них находятся решением системы алгебраических уравнений, число которых равно числу устройств. Та-

кой подход, доведенный до формального уровня, назван *методом внутренних моментов* [18]. При его применении используются матрицы для решения алгебраических уравнений и нахождения внутренних моментов минимальной размерности.

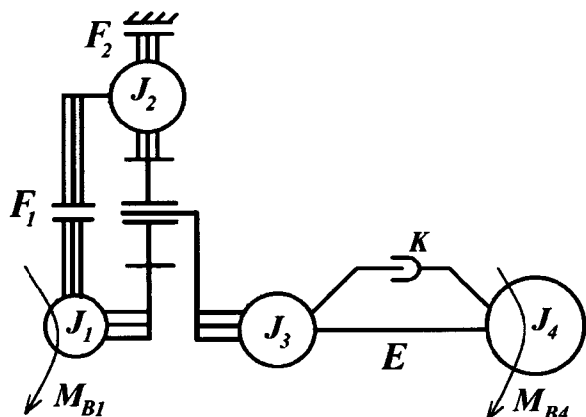
На рисунке 5 представлена характерная схема с разнородными устройствами. В ней присутствуют упруго-демпфирующее устройство (вал с податливостью E и диссипативным элементом K) и жесткие устройства с переменной (F_1, F_2) и постоянной (D) структурой.

Для формального описания структуры и использования этой информации при автоматизированном формировании уравнений квазистатики и динамики механизмов, имеющих типовые устройства, удобно использовать структурно-распределительную матрицу (СРМ) [7, 8, 19]. Описание структуры механизма, показанного на рисунке 5, с использованием СРМ представлено на рисунке 6.

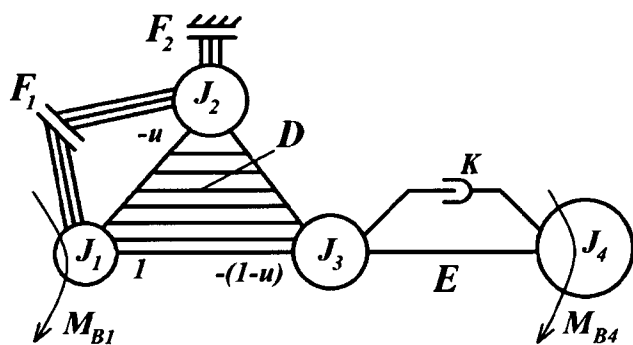
Универсальная система уравнений движения масс, составленная с использованием коэффициентов СРМ (A_{jk} — коэффициент СРМ, относящийся к устройству k , связанному с j -й массой), имеет вид

$$\begin{aligned}
 & 1) J_1 \dot{\omega}_1 + (1 - \lambda_1) A_{11} M_1 + [A_{12} M_2] + A_{13} M_3 + \\
 & + [A_{14} M_E + A_{15} M_K] = M_{B1} - \lambda_1 A_{11} M_{F1}; \\
 & 2) J_2 \dot{\omega}_2 + (1 - \lambda_1) A_{21} M_1 + (1 - \lambda_2) A_{22} M_2 + \\
 & + A_{23} M_3 + [A_{24} M_E + A_{25} M_K] = \\
 & = -\lambda_1 A_{21} M_{F1} - \lambda_2 A_{22} M_{F2}; \\
 & 3) J_3 \dot{\omega}_3 + [A_{31} M_1 + A_{32} M_2] + A_{33} M_3 + \\
 & + A_{34} M_E + A_{35} M_K = 0; \\
 & 4) J_4 \dot{\omega}_4 + [A_{41} M_1 + A_{42} M_2 + A_{43} M_3] + \\
 & + A_{44} M_E + A_{45} M_K = M_{B4}; \\
 & 5) \dot{M}_E = (\omega_3 - \omega_4) / E,
 \end{aligned}
 \tag{14}$$

где M_1, M_2 и M_3 — моменты в жестких устройствах F_1, F_2 и D ; M_E — упругий момент в звене E ; M_K — диссипативный момент в звене K ; например, $M_K = k(\omega_3 - \omega_4)$, где k — коэффициент демпфи-



а



б

Рисунок 5 — Пример системы с разнородными устройствами: а — РМС; б — регулярная динамическая схема

Основные звенья (строки j)	Устройства (столбцы)				
	F_1 (1)	F_2 (2)	D (3)	E (4)	K (5)
1 (J_1)	1	0	1	0	0
2 (J_2)	-1	1	- u	0	0
3 (J_3)	0	0	-(1- u)	1	1
4 (J_4)	0	0	0	-1	-1

Рисунок 6 — Описание структуры механизма по рисунку 5 (выделена часть СРМ, соответствующая жестким устройствам)

вания; квадратными скобками выделены слагаемые, с коэффициентами A_{jk} , равными нулю.

Уравнение движения маховой массы J_1 , к которой примыкает фрикцион F_1 , содержит в правой части момент трения буксующего фрикциона $\lambda_1 A_{11} M_{F1}$, а в левой части внутренний момент $(1 - \lambda_1) A_{11} M_1$, который имеет место в замкнутом фрикционе. За счет сомножителей λ_1 и $(1 - \lambda_1)$ эти моменты принимают ненулевые значения альтернативно, что позволяет использовать уравнение маховой массы J_1 как для случая буксующего, так и для случая замкнутого (блокированного) фрикциона. Уравнение движения маховой массы J_2 , к которой примыкают два фрикциона F_1 и F_2 , содержит две пары подобных моментов и соответственно два индикатора λ_1 и λ_2 .

Можно показать, что на основе системы уравнений динамики после преобразований может быть получена система алгебраических уравнений в виде, не содержащем производных и удобном для вычисления моментов, действующих в $K_{\lambda G}$ жестких устройствах (метод внутренних моментов) [8, 14, 19], что повышает скорость и точность вычислений.

При этом в общем случае уравнение для каждого i -го устройства ($i = 1, \dots, K_{\lambda G}$) принимает вид

$$\sum_{k=1}^{K_{\lambda}} (1 - \lambda_k) a_{ik} M_k + \sum_{k=K_{\lambda}+1}^{K_{\lambda G}} a_{ik} M_k = B_i, \quad (15)$$

где $B_i = \sum_{j=1}^{N_j} \frac{A_{ji}}{J_j} M_{(j)j} - \sum_{k=1}^{K_{\lambda}} \lambda_k a_{ik} M_{Fk}$.

В этих выражениях M_k — момент на первом звене k -го жесткого устройства; A_{jk} — коэффициент СРМ, описывающий распределение внутренних моментов по звеньям k -го жесткого устройства; $A_{jk} M_k$ — момент, действующий со стороны звена k -го жесткого устройства на j -ю массу; $A_{jk} M_{Fk}$ — момент, действующий на j -ю массу со стороны фрикциона с k -м номером, где M_{Fk} — момент трения фрикциона — функция времени, состояния и параметров фрикциона; K_{λ} — число фрикционов; $K_{\lambda G}$ — число жестких устройств, включая фрикционы; λ_k — индикатор состояния k -го фрикциона; $M_{(j)j}$ — сумма всех моментов, приложенных к j -й массе, кроме моментов со стороны жестких устройств, в том числе замкнутых фрикционов. В общий момент $M_{(j)j}$ входят с соответствующими коэффициентами СРМ упругие M_y и диссипативные M_k моменты примыкающих устройств, а также приложенные к рассматриваемой массе внешние моменты M_B и моменты от действия свободных демпферов M_V .

Внутренние моменты M_k определяются в общей процедуре решения алгебраических уравнений, обычно, матричным методом.

Расчет при наличии передач. Корректный учет потерь в механических устройствах. К типовым потерям относятся потери в контакте взаимодействующих фрикционных компонентов, диссипативные потери, потери в передачах.

При учете потерь во фрикционах и диссипативных потерь, пропорциональных относительной скорости вращающихся масс, направление действия сил трения (сопротивления), приводящих к рассеянию энергии, определяется достаточно просто. При этом достаточно иметь информацию о разности скоростей вращающихся масс. Эта информация доступна в процессе динамического расчета, и при изменении знака разности упомянутых скоростей действие сил трения (сопротивления) в математических моделях автоматически изменяется за счет использования функции sign .

Для устройств-передач характерен учет силовых потерь, в виде обобщенных эмпирических значений КПД в долях (от 0 до 1) от передаваемого момента. В этом случае необходима информация о направлении силовых потоков, проходящих через передачи.

При динамических расчетах трансмиссионных систем, содержащих передачи, обычно полагают определенное направление силового потока, проходящего через передачу. Ведущим элементом считается звено, связанное с входным валом трансмиссии, ведомым — с выходным валом. В уравнениях динамики используются произведения $u_i \eta_i$, где u_i , η_i — «передаточные числа и КПД трансформаторных элементов динамической модели» [16]. В простейших ситуациях, когда очевидно направления силового потока, такой подход возможен. Однако в общем случае при рассмотрении сложных систем и разнообразных режимов работы автомобиля (переключение передач, движение накатом, торможение и т. д.) подобный подход ведет к ошибкам.

Продемонстрируем это на типовых примерах. На рисунке 7 показана простейшая зубчатая передача. Рассмотрим два случая прохождения через нее силового потока.

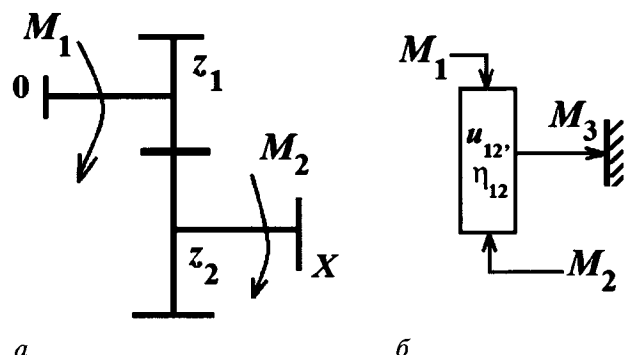


Рисунок 7 — Передача (а) и ее структурное представление с изображением силовых потоков (б)

Случай 1.1. Передача с неподвижными осями валов; поток мощности направлен от звена 0 к звену X.
Баланс мощности

$$M_1\omega_1\eta_{12} + M_2\omega_2 = 0, \quad (16)$$

где η_{12} — КПД зацепления при передаче силового потока от звена 1 к звену 2. Как отмечается в работе [20], значение КПД при изменении ведущего звена пары в отдельных механизмах могут сильно отличаться. Например, это имеет место в червячной передаче. Однако в большинстве пар цилиндрических и конических зубчатых колес, применяющихся в машиностроении $\eta_{12} = \eta_{21} = \eta$.

Момент на выходном звене

$$M_2 = -M_1\eta_{12}\omega_1/\omega_2 = -M_1\eta_{12}u_{12}. \quad (17)$$

При $M_1 = 1$; $u_{12} = 2$; $\eta_{12} = 0,98$ получим $M_2 = 1,96$.

На рисунке 7 б моменты M_1 и M_2 направлены к передаче, такое направление считается положительным. Очевидно, что КПД передачи η_{0x} соответствует КПД зацепления:

$$\eta_{0x} = \frac{-M_2\omega_2}{M_1\omega_1} = \frac{-(-1,96) \cdot 0,5}{1 \cdot 1} = 0,98. \quad (18)$$

Случай 1.2. Поток мощности направлен от звена X к звену 0. Предположим, что направление потока мощности по сравнению с предыдущим случаем изменилось, например, автомобиль стал двигаться накатом. Примем, что на выходном звене момент $M_2 = -1,96$. Тогда, если использовать соотношение (17) с произведением $u_{12}\eta_{12}$, получим $M_1 = -1$. В результате имеем КПД больше 1:

$$\eta_{x0} = \frac{-M_1\omega_1}{M_2\omega_2} = \frac{-1 \cdot 1}{(-1,96) \cdot 0,5} = 1,04. \quad (19)$$

Очевидно, что это не верно, и ошибка состоит в том, что математическая модель не учитывает изменение направления потока мощности.

Корректный учет направления потока мощности имеет известное решение при квазистатическом расчете сложных механизмов с одним входным и выходным звеном. Рассмотрим его применительно к планетарной передаче.

Случай 2. Планетарная передача. На рисунке 8 показана планетарная передача и ее структурное представление с изображением силовых потоков.

Случай 2.1. Силовой поток направлен от звена 0 к звену X. Для идеального механизма при внутреннем передаточном числе $u_{12}^3 = -2$ и $M_1 = 1$ имеем

$$M_x = M_3 = -M_1(1 - u_{12}^3) = -M_1(1 - (-2)) = -3. \quad (20)$$

Для механизма с учетом потерь в зацеплениях расчет может быть проведен по методике [20], позволяющей определять КПД сложного механизма без рассмотрения скоростных силовых факторов. В расчете вместо передаточного числа u используется силовое передаточное число механизма (устройства) $\hat{u} = u\eta^x$, где $x = +1$ или $x = -1$ в зависимости от направления силового потока.

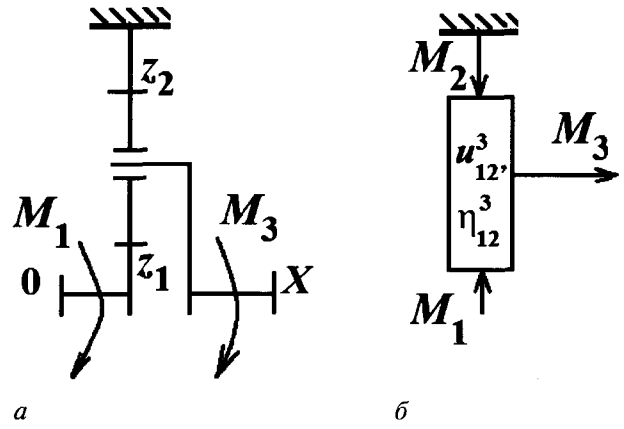


Рисунок 8 — Планетарная передача (а) и ее структурное представление с силовыми потоками (б)

Момент на выходном звене для рассматриваемого случая

$$M_x = M_3 = -M_1\hat{u}_{0x} = -M_1(1 - u_{12}^3\eta_0^x), \quad (21)$$

где $\eta_0 = \eta_1\eta_2$ — КПД планетарной передачи при остановленном водиле, η_1 — КПД внешнего зацепления (0,98); η_2 — КПД внутреннего зацепления (0,99); $\eta_0 = 0,97$.

Значение x определяется следующим правилом: если при малом уменьшении по абсолютной величине внутреннего передаточного числа u устройства передаточное число всего механизма по абсолютной величине уменьшается, то $x = 1$, в противном случае $x = -1$. (Малое уменьшение гарантирует, что направление потока мощности останется неизменным при проведенном изменении параметра.)

Рассматриваемый механизм состоит из одного устройства (планетарной передачи). В сложных случаях такой анализ проводится для каждого устройства отдельно.

В соответствии с приведенным правилом, в выражении силового передаточного числа (21) получаем $x = 1$, и момент на выходном звене

$$M_x = M_3 = -M_1(1 + 2 \cdot 0,97) = -2,94. \quad (22)$$

При этом КПД механизма

$$\eta_{0x} = \frac{\hat{u}_{0x}}{u_{0x}} = \frac{-2,94}{-3} = 0,98. \quad (23)$$

Случай 2.2. Силовой поток направлен от звена X к звену 0. Момент на звене X механизма примем $M_3 = 3$. В отличие от случая 2.1 момент подводится к звену X. Для идеального механизма

$$M_0 = M_1 = -M_3u_{x0} = -M_3 \frac{1}{(1 - u_{12}^3)}, \quad (24)$$

и $M_0 = -1$.

С учетом потерь в зацеплениях

$$M_0 = M_1 = -M_3\hat{u}_{x0} = -M_3 \frac{1}{(1 - u_{12}^3\eta_0^x)}. \quad (25)$$

Используя вышеприведенное правило, получаем $x = -1$; $M_0 = -0,98$ и КПД механизма для рассматриваемого случая $\eta_{x0} = 0,98$.

WT (Patent US 4070927)

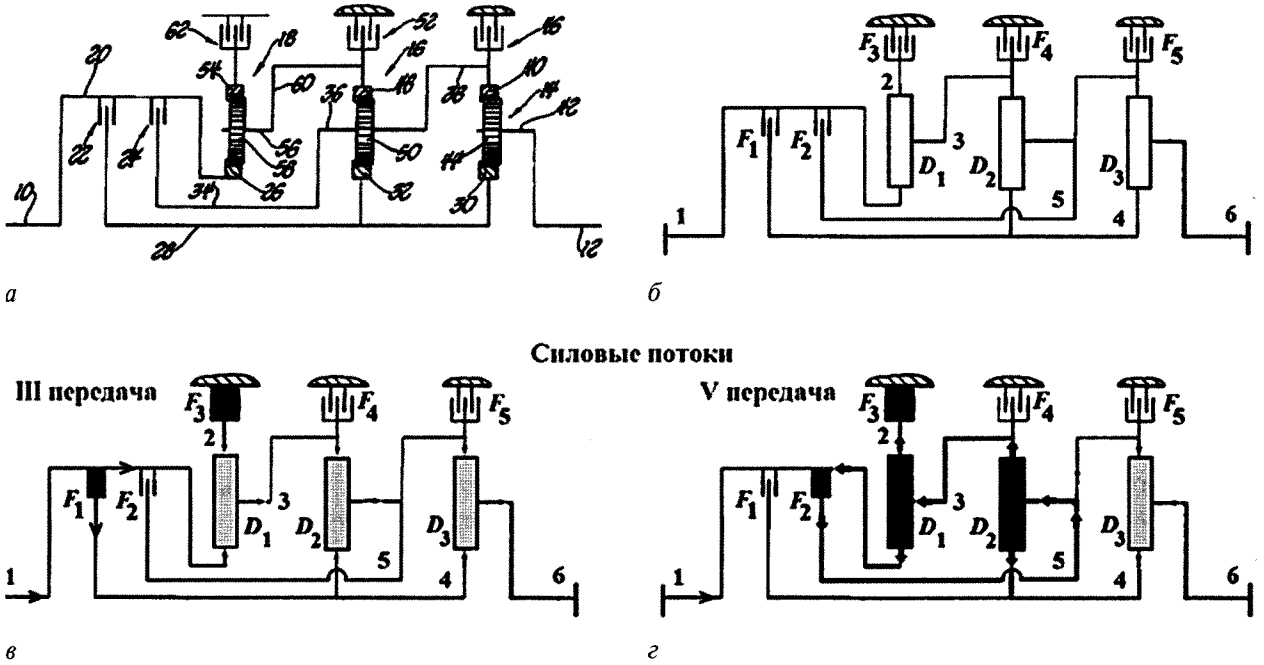


Рисунок 9 — Кинематическая схема коробки передач WT (а), ее структурное представление (б) и схемы силовых потоков на III (в) и V (г) передачах

Случай 3. Сложный механизм. Может сложиться впечатление, что в случаях, когда момент подводится к входному валу сложного механизма, направление передачи силового потока в устройствах всегда одно и то же. Однако это неверно.

На рисунке 9 представлена коробка передач WT [21], показаны силовые потоки, которые имеют разные направления в одних и тех же устройствах, а в таблице 2 — расчет моментов для них. Так на V передаче в планетарных рядах D_1, D_2 имеет место циркуляция мощности, направление силового потока меняется, моменты на первых звеньях (солнечных колесах) принимают отрицательные значения.

Общий случай. В приведенных выше примерах рассматривались системы с отчетливо выделенными

ми входными и выходными звеньями и квазистатические режимы их работы. В общем случае при динамических режимах из-за действия внешних и инерционных нагрузок эти особенности не сохраняются. Для корректного определения направления прохождения силового потока необходимо рассматривать каждое жесткое устройство и учитывать изменяемые динамические режимы работы системы. Динамический расчет механического объекта, схематизированного в виде регулярной механической системы, должен включать расчет внутренних моментов в устройствах с учетом потерь, и при этом необходима операция нахождения силовых передаточных чисел с учетом направления силовых потоков устройств.

Таблица 2 — Расчет моментов коробки передач WT при входном моменте $M_0 = 1$

Устройство (ряд)	Передача III			Передача V		
	1 (солнце)	2 (корона)	3(водило)	1 (солнце)	2 (корона)	3(водило)
Идеальный механизм						
D_1	0,294	0,523	-0,817	-0,209	-0,372	0,581
D_2	0,259	0,816	-1,075	-0,184	-0,580	0,764
D_3	0,447	1,077	-1,524	0,184	0,443	-0,627
С учетом потерь						
D_1	0,291	0,502	-0,793	-0,211	-0,364	0,575
D_2	0,259	0,791	-1,050	-0,184	-0,562	0,746
D_3	0,450	1,052	-1,502	0,184	0,430	-0,614

Поэтому целесообразно сформулировать и использовать в методиках и программных средствах динамических расчетов регулярных механических систем следующее положение.

Положение «об учете направления потоков силовых факторов в неидеальных устройствах»: в ходе динамического расчета механической системы необходима предварительная операция определения направления силовых потоков, проходящих через неидеальные устройства.

К подобным устройствам относятся зубчатые передачи с неподвижными осями валов, планетарные передачи, карданные и иные передачи, которые могут быть схематизированы в виде жестких устройств, при прохождении мощностного потока через которые происходит потеря момента. Обычно потери момента для таких устройств задаются в виде КПД.

Для определения значения показателя степени КПД устройства предлагается следующий подход. Предполагается, что схематизированные устройства представлены в структурно распределительной матрице, при этом значение момента на первом звене равно 1. Т. е. момент подводится к первому звену. Для этого случая указывается КПД устройства и значение показателя степени x в выражении силового передаточного числа устройства $\hat{u} = \eta \tau^x$.

Из рисунка 9 и таблицы 2 следует, что изменение направления силового потока, проходящего через устройство, сопровождается изменением знака момента на первом звене. Этот признак предлагается использовать для установления значения x для устройств в процессе динамического расчета.

На рисунке 10 показан фрагмент алгоритма динамического расчета РМС с жесткими и упругими компонентами. По сравнению со схемой, приведенной в работах [8, 14], в соответствии со сформулированным положением введена операция определения показателей x для жестких устройств (на рисунке выделены блоки, выполняющие эту операцию).

В процессе интегрирования системы дифференциальных уравнений на каждом шаге выполняется ряд операций для нахождения внутренних моментов в жестких устройствах, которые используются в расчете правых частей производных. Бло-

ки, связанные с этими операциями (см. рисунок 10), имеют следующее содержание.

Блок 13 «FRI1» формирует правые части производных для интегрируемой системы дифференциальных уравнений.

Блок 14 «VNMOM» вычисляет значения внутренних моментов, действующих во фрикционах, передачах и других жестких устройствах, а также устройствах-преобразователях моментов (например, гидротрансформаторе) путем обращения к блокам 15–20.

Блок 15 «MTREF» рассчитывает моменты трения фрикционов.

Блок 16 «PRISM» вычисляет для масс, примыкающих к жестким устройствам (замкнутым фрикционам, устройствам постоянной структуры), значения моментов $M_{(j)}$. Каждый такой момент представляет собой сумму всех моментов, приложенных к j -й массе, кроме моментов со стороны жестких устройств. Значения моментов $M_{(j)}$ используются в блоках 17 и 19.

Блок 17 «VNUTMX» рассчитывает внутренние моменты в жестких устройствах. При этом происходит обращение к блоку 18. (В случае изменения состояния фрикционов предварительно пересчитываются коэффициенты при неизвестных моментах матрицы, с помощью которой решается система алгебраических уравнений). Расчет внутренних моментов выполняется для устройств, рассматриваемых как идеальные механизмы, и служит для определения знака моментов на их первых звеньях. В результате определяется значения x , необходимые для расчета силовых передаточных чисел устройств, описанных в СРМ.

Блок 18 (20) «SIMQB» выполняет решение системы линейных алгебраических уравнений.

Блок 19 «VNUTMG» рассчитывает внутренние моменты с учетом потерь в жестких устройствах аналогично блоку 17, при этом вместо передаточных чисел в параметрах устройств используются силовые передаточные числа с учетом найденных значений x (т. е. направления проходящих через них силовых потоков).

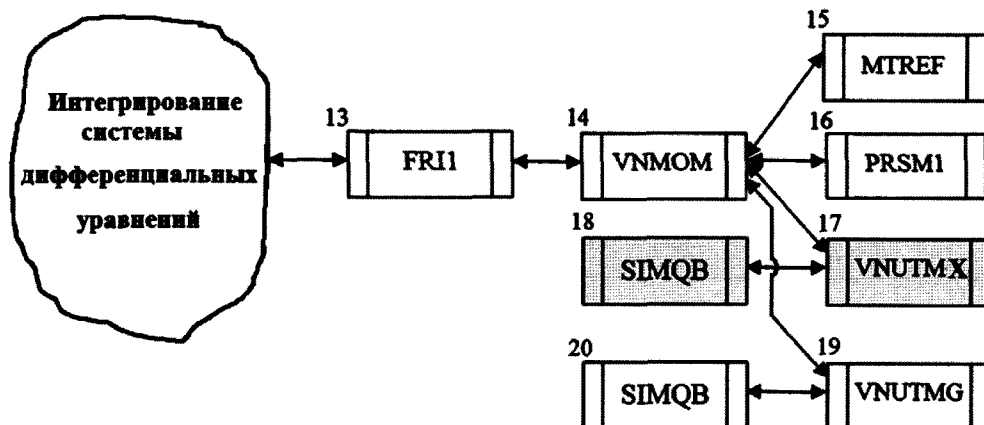
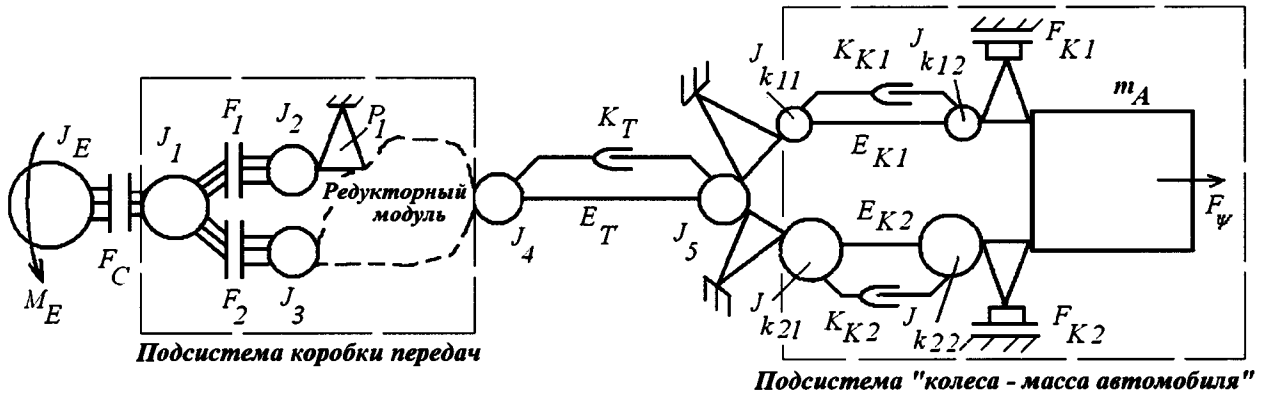
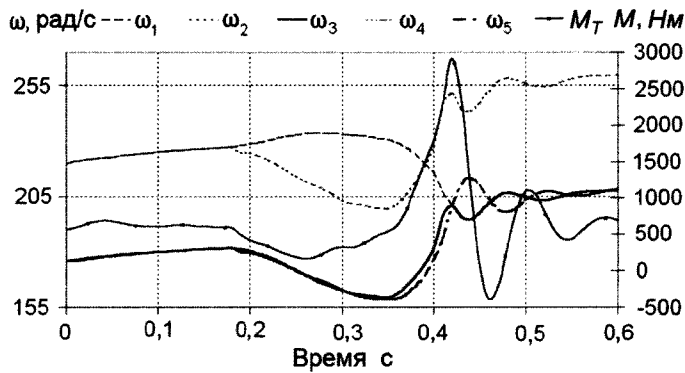


Рисунок 10 — Фрагмент алгоритма, описывающий шаг динамического расчета РМС



а



б

Рисунок 11 — Моделирование переключения передач на ходу тракторного агрегата:
а — динамическая схема с пятью фрикционными элементами; б — результаты

Пример расчета. На рисунке 11 а показана типовая динамическая схема тракторного агрегата, содержащая блок переключаемых на ходу передач. Схема включает моменты инерции вращающихся масс J_i , поступательно движущуюся массу трактора m_A упругие E_i и диссипативные K_i компоненты. Крутящий момент двигателя M_E действует на массу J_E . Элемент F_C имитирует сцепление силового агрегата, контакт элемент $F_{K1(2)}$ — ведущего колеса с опорной поверхностью. Фрикционные элементы коробки передач $F_{1(2)}$ управляются гидравлически подводимым давлением. В начальный момент времени фрикцион F_1 замкнут. Крутящий момент двигателя передается через устройство-передачу P_1 . Переключение передач производится выключением фрикциона F_1 и включением фрикциона F_2 .

Один из результатов моделирования представлен на рисунке 11 б. Показаны изменения угловых скоростей ω_i для соответствующих маховых масс J_i и колебания крутящего момента M_T в звене E_T . Установлено, что при определенных условиях переключения передач возможны пробуксовки F_C и $F_{K1(2)}$, поскольку возникают большие динамические нагрузки в трансмиссии. Это может привести к преждевременному выходу из строя сцепления силового агрегата.

Заключение. Продемонстрированы типовые ошибки в динамических расчетах многомассо-

вых систем с изменяемой конфигурацией в динамических режимах. Развита концепция регулярной механической системы. Наряду с требованиями к исходной схематизации механических объектов, сформулированы требования к моделям систем, состояния которых изменяется при замыкании и размыкании элементов под действием трения и описанию потерь в устройствах-передачах с учетом направления силового потока. Эти требования сформулированы в виде следующих положений.

Положение «об изменении состояния контакта»: при возникновении условий, в которых возможен переход к новому состоянию контактирующих масс (например, замыкание или размыкание фрикциона), указанное состояние обязательно должно быть представлено в расчете на очередном (по крайней мере, одном) шаге вычислительного процесса.

Положение «об учете направления потоков силовых факторов в неидеальных устройствах»: в ходе динамического расчета механической системы необходима предварительная операция определения направления силовых потоков, проходящих через неидеальные устройства.

Рассмотрены особенности реализации вычислительных процедур с использованием компьютера как дискретного вычислительного устройства,

воспроизводящего реальные аналоговые процессы механических объектов переменной структуры.

Список литературы

1. Multibody system [Electronic resource]. — Mode of access: http://en.wikipedia.org/wiki/Multibody_system. — Date of access: 11.08. 2014.
2. Виттенбург, Й. Динамика систем твердых тел / Й. Виттенбург. — М.: Мир, 1980. — 292 с.
3. Role of MMS and IFToMM in Multibody Dynamics / Javier Cuadrado [et al.] // Mechanisms and Machine Science. Vol. 1, Technology Developments: the Role of Mechanism and Machine Science and IFToMM / Series Editor Marco Ceccarelli. — Springer, 2011. — Part 2. — Pp. 161–172.
4. Schiehlen, W. Multibody system dynamics: roots and perspectives / W. Schiehlen // Multibody Sys. Dyn. — Vol. 1, No 2. — Pp. 149–188.
5. Shabana, A.A. Flexible multibody dynamics: review of past and recent developments / A.A. Shabana // Multibody Sys. Dyn. — 1997. — Vol. 1, No 2. — Pp. 189–222.
6. Альгин, В.Б. Схематизация и расчет мобильной машины как многомассовой системы. Регулярные механические системы / В.Б. Альгин // Механика машин, механизмов и материалов. — 2012. — № 1(18). — С. 6–16.
7. Альгин, В.Б. Схематизация и расчет мобильной машины как многомассовой системы. Динамика машинного агрегата / В.Б. Альгин // Механика машин, механизмов и материалов. — 2013. — № 2(23). — С. 5–18.
8. Альгин, В.Б. Расчет мобильной техники: кинематика, динамика, ресурс / В.Б. Альгин. — Минск: Беларус. навука, 2014. — 271 с.
9. Молибошко, Л.А. Компьютерное моделирование автомобилей: учеб. пособие для студ. спец. «Автомобилестроение». — Минск: ИВЦ Минфина, 2007. — 280 с.
10. Динамика колесных машин: моногр. / И.С. Сазонов [и др.]. — Могилев: Белорус.-Рос. ун-т, 2006. — 462 с.
11. Тарасик, В.П. Математическое моделирование технических систем: учеб. для вузов / В.П. Тарасик. — Минск: Дизайн ПРО, 2004. — 640 с.
12. Захарик, Ю.М. Научные основы обеспечения тягово-скоростных свойств грузовых автомобилей путем синтеза систем автоматического управления тяговыми режимами: дис. ... д-ра техн. наук / Ю.М. Захарик. — Минск: БНТУ, 2007.
13. Молибошко, Л.А. Компьютерные модели автомобилей: учеб. для вузов / Л.А. Молибошко. — Минск: Новое знание; М.: ИНФРА-М, 2012. — 294 с.
14. Схематизация и динамический расчет мобильной машины. Системы с переменной структурой / В.Б.Альгин [и др.] // Механика машин, механизмов и материалов. — 2008. — № 2(3). — С. 16–24.
15. Моделирование и анализ процесса трогания автопоезда с места / О.С. Руктешель [и др.] // Механика машин механизмов и материалов. — 2011. — № 4. — С. 19–23.
16. Исследование механической и тепловой нагруженности фрикционных гидромеханической передачи / О.А. Шаповалова [и др.] // Автомобил. пром-сть. — 2014. — № 2. — С. 16–20.
17. Мышкин, Н.К. Трение, смазка, износ. Физические основы и технические приложения трибологии / Н.К. Мышкин, М.И. Петроковец. — М: ФИЗМАТЛИТ, 2007. — 368 с.
18. Альгин, В.Б. Динамика, надежность и ресурсное проектирование трансмиссий мобильных машин / В.Б. Альгин. — Минск: Навука і тэхніка, 1995. — 256 с.
19. Альгин, В.Б. Схематизация и расчет мобильной машины как многомассовой системы. Кинематика и квазистатика / В.Б. Альгин // Механика машин, механизмов и материалов. — 2012. — № 2(19). — С. 5–13.
20. Крейнс М.А. Зубчатые механизмы (выбор оптимальных схем) / М.А. Крейнс, М.С. Розовский. — М: Наука (Физмат), 1972. — 428 с.
21. Planetary gearing arrangement for a transmission: Publication number US4070927 A / James C. Polak; General Motors Corporation. — Application number US 05/692,970; Filing date 04.06.76; Publication date 31.01.78.

Algin V.B.

Dynamics of multibody systems of machines under changing states of frictional components and directions of power flows

Features for creation of mathematical models for dynamic calculations of multibody systems on their transitional modes with changing the system states and the direction of power flows are considered. Such typical processes are as follows: switching on and switching off a clutch, starting the vehicle, gear shifting, wheels slipping, blocking and an unblocking of vehicle wheels under braking. Characteristic errors of dynamic calculations are analyzed. The concept of regular mechanical system regarding requirements to the mathematical models describing changes of a system state, and also to describing losses in transmission mechanisms is developed. The correct mathematical models reproducing conditions of connection and disconnection of frictional components taking into account features the discrete computer are presented. Procedure for identification of the direction of the power flows passing through devices-transfers is described; features of a technique of dynamic calculation taking into account losses in such devices are given.

Keywords: mobile machine, multibody system, components which may be locked or unlocked, regular mechanical system, dynamic calculation, losses in gears, power flow direction

Поступила в редакцию 29.10.2014.