

УДК 539.374

Э.И. СТАРОВОЙТОВ, Д.В. ЛЕОНЕНКО, доктора физ.-мат. наук  
Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель

Ю.М. ПЛЕСКАЧЕВСКИЙ, чл.-корр. НАН Беларуси  
Президиум Гомельского филиала НАН Беларуси

## КОЛЕБАНИЯ ТРЕХСЛОЙНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК В УПРУГОЙ СРЕДЕ ВИНКЛЕРА ПРИ РЕЗОНАНСЕ

*Рассмотрены колебания трехслойной цилиндрической оболочки в упругой среде под действием резонансных нагрузок. Для изотропных несущих слоев приняты гипотезы Кирхгофа—Лява. В толстом заполнителе учитывается работа поперечного сдвига и обжатие по толщине, изменение перемещений принято линейным по поперечной координате. На границах контакта используются условия непрерывности перемещений. Для упругой среды принята гипотеза Винклера. В качестве примера исследовано изменение перемещений при действии равномерно распределенной резонансной нагрузки.*

**Ключевые слова:** трехслойная цилиндрическая оболочка, динамика, упругая среда Винклера, резонанс

**Введение.** В работе [1] исследовано деформирование однородных оболочек, лежащих на упругом основании. Монография [2] посвящена деформированию трехслойных стержней, пластин и оболочек, не связанных с упругой средой. В статье [3] проанализированы спектры собственных частот оболочки, находящейся в упругой среде. Здесь рассматриваются колебания трехслойной круговой цилиндрической оболочки в упругой среде Винклера под действием гармонических резонансных нагрузок, т. е. нагрузок, частота которых совпадает с одной из собственных частот оболочки.

**Постановка задачи.** В тонких изотропных несущих слоях цилиндрической оболочки приняты гипотезы Кирхгофа—Лява. В толстом заполнителе учитывается работа поперечного сдвига и обжатие по толщине, изменение перемещений принято линейным по поперечной координате. На границах контакта используются условия непрерывности перемещений. Деформации малые.

Обозначим через  $h_k$  толщину  $k$ -го слоя,  $h_3 = 2c$ .

За независимые переменные принимаются  $u_\alpha^k$ ,  $w_k$  — тангенциальные перемещения и прогибы точек срединных поверхностей несущих слоев в направлении осей  $x_\alpha$ ,  $z$  правой системы координат, отнесенной к линиям главных кривизн срединной поверхности заполнителя и к внешней нормали, соответственно (рисунок 1). В результате получаем следующее выражение для перемещений в несущих слоях ( $c \leq z \leq c + h_1$ ,  $-c - h_2 \leq z \leq -c$ ):

$$\begin{aligned} u_\alpha^{kz} &= u_\alpha^k + (z \mp a_k) \psi_\alpha^k; \quad a_k = c + 0,5h_k; \\ \psi_1^k &= -w_{,1}^k, \quad \psi_2^k = (R \pm a_k)^{-1} (u_2^k - w_{,2}^k), \end{aligned} \quad (1)$$

здесь и далее греческие индексы принимают значения 1, 2, латинские — 1, 2, 3 (если другое специально не указано); нижний знак в формуле соответствует индексу  $k = 2$  (номеру слоя);  $\psi_\alpha^k$  — угол поворота

деформированной нормали в  $k$ -м несущем слое; частное дифференцирование по координате обозначается соответствующим нижним координатным индексом, следующим после запятой.

Из условия непрерывности перемещений на границах контакта слоев для заполнителя ( $-c \leq z \leq c$ ) получим:

$$\begin{aligned} u_1^{3z} &= 0,5 \sum_{k=1}^2 (1 \pm z/c) (u_1^k \pm 0,5h_k w_{,1}^k); \\ u_2^{3z} &= \sum_{k=1}^2 (1 \pm z/c) ((0,5 \mp D_{k2}) u_2^k \pm D_{k2} w_{,2}^k); \end{aligned} \quad (2)$$

$$w^{3z} = 0,5 \sum_{k=1}^2 (1 \pm z/c) w^k;$$

$$D_{k2} = 0,25h_k (1 \pm (c + 0,5h_k)/R)^{-1} R^{-1},$$

здесь и далее индекс «3» — номер заполнителя, как и другие цифровые индексы, будем писать без скобок.

Уравнения колебаний трехслойной цилиндрической оболочки и силовые граничные условия следуют из вариационного принципа Лагранжа с учетом вариации работы сил инерции:

$$\delta A - \delta W = \delta A_I, \quad (3)$$

где  $\delta A$  — вариация работы внешних сил;  $\delta W$  — вариация работы внутренних сил упругости;  $\delta A_I$  — вариация работы сил инерции.

К наружным поверхностям несущих слоев приложены распределенная нагрузка  $q_i^k$  и реакция упругой безынерционной среды Винклера:

$$q_{3r}^k = -\kappa_0^k w^k; \quad q_{\alpha r}^k = 0, \quad (4)$$

где  $\kappa_0^k$  — коэффициент постели.

Подставив в вариационное уравнение (3) соотношения для вариаций работ и выделив независимые вариации перемещений путем интегрирования

по частям, приравняв коэффициенты при независимых вариациях нулю, получим систему уравнений движения цилиндрической трехслойной оболочки в упругой среде (4). В случае плоской задачи уравнения движения будут следующими:

$$\sum_{k=1}^2 [a_{m11}^k u_{,11}^k + a_{m13}^k u_{,11}^k + a_{m15}^k w_{,1}^k + a_{m16}^k w_{,11}^k] - b_1^m \ddot{u}_1^m = -Rm_m q_1^m;$$

$$\sum_{k=1}^2 [a_{m31}^k w_{,1111}^k + a_{m33}^k w_{,11}^k + (a_{m34}^k - Rm_m \kappa_0^m \delta_{mk}) w^k + a_{m35}^k u_{,1111}^k + a_{m36}^k u_{,11}^k] - b_3^m \ddot{w}^m = -Rm_m [q_3^m \pm 0,5h_m q_{1,1}^m] \quad (m=1,2),$$

где  $\delta_{mk}$  — символы Кронекера;

$$m_m = 1 \pm (c + h_m) R^{-1};$$

$$b_1^m = 2R [\rho_m I_1^m + 0,25\rho_3 I_2^{\pm}];$$

$$b_3^m = b_1^m. \quad (6)$$

Коэффициенты, входящие в (6), выражаются через геометрические характеристики слоев и параметры упругости материалов.

Метод Бубнова–Галеркина позволяет представить искомые перемещения и нагрузку в виде разложения в ряды по системе базисных функций  $\Psi_{1m}^k, \Psi_{3m}^k$ , за счет выбора которых должны удовлетворяться граничные условия:

$$u_1^1 = \sum_m \omega_{1m}^1(x) T_{1m}(t); \quad u_2^1 = \sum_m \omega_{1m}^2(x) T_{2m}(t);$$

$$w_1 = \sum_m \Psi_{3m}^1(x) T_{3m}(t); \quad w_2 = \sum_m \Psi_{3m}^2(x) T_{4m}(t); \quad (7)$$

$$q_1^k = \sum_m \omega_{q1m}^k(x) q_{1m}^k(t); \quad q_3^k = \sum_m \omega_{q3m}^k(x) q_{3m}^k(t).$$

Подставив выражения (7) в систему (5), получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для определения функции времени  $T_{jm}(t)$ :

$$\sum_{j=1}^4 P_{jm} T_{jm} + q_m(t) = b_l \ddot{T}_{lm}, \quad (l=1...4), \quad (8)$$

где коэффициенты  $P_{jm}$  зависят от волнового параметра  $m$ ;  $q_m$  — коэффициенты разложения компонент внешней нагрузки по системе базисных функций.

**Собственные колебания.** Задачу о собственных колебаниях трехслойной цилиндрической оболочки получаем из (8), положив  $q_{lm} = 0$ . Предполагая, что все точки конструкции совершают колебания с одинаковой частотой, уравнения для ее вычисления получим из (9), предварительно функции  $T_{jm}(t)$  представив в виде

$$T_{lm}(t) = A_{lm} \sin(\omega_m t + \alpha_m), \quad (9)$$

где  $A_{lm}, \omega_m$  — амплитуды и частоты колебаний;  $\alpha_m$  — начальные фазы.

Опустив для краткости индексы  $m$  и  $n$ , подставив (9) в систему (8), придем к обобщенной задаче на собственные значения:

$$[P]\{A\} = -\omega^2 [B]\{A\}, \quad (10)$$

где  $[P]$  — квадратная матрица шестого порядка, составленная из коэффициентов  $P_{ijm}$ ;  $[B]$  — диагональная матрица из  $b_j$ ;  $\{A\}$  — вектор, сформированный амплитудами  $A_j$ .

Решив задачу на собственные значения (10), по найденным значениям  $\omega_i^2$  ( $i = 1, \dots, 4$ ) вычисляем собственный вектор  $\{A_i\}$ .

**Вынужденные колебания.** Представим искомые функции времени (9)  $T_{lm}(t)$  в виде разложения в конечный ряд по системе собственных ортонормированных функций  $\zeta_{mi}$

$$T_{lm} = \sum_{i=1}^4 \delta_{lmi} \zeta_{mi}, \quad (11)$$

где  $\delta_{lmi}$  — нормированные коэффициенты форм.

Подставляя это выражение в (8) и используя свойство ортогональности собственных форм колебаний, приходим к шести независимым уравнениям относительно собственных функций времени  $\zeta_{mi}$  (для каждого  $m$ ):

$$\ddot{\zeta}_{mi} + \omega_{mi}^2 \zeta_{mi} = \tilde{q}_{mi}(t); \quad (12)$$

$$\tilde{q}_{mi} = \sum_{l=1}^4 q_{lm} \delta_{lmi} / \sum_{l=1}^4 b_l \delta_{lmi}^2,$$

где  $\tilde{q}_{mi}$  — компоненты приведенной нагрузки.

После решения уравнений (12) искомые перемещения представляются в виде сумм произведений  $\zeta_{mi}$  на соответствующие коэффициенты и исходные координатные функции (7).

**Резонансное нагружение.** Рассмотрим вынужденные колебания упругой трехслойной оболочки, скрепленной с упругой безынерционной средой, под действием гармонических резонансных нагрузок, т. е. нагрузок, частота которых совпадает с одной из собственных частот колебаний рассматриваемой системы. Пусть  $q_3^2$  — резонансная поверхностная осесимметричная нагрузка:

$$q_3^2(x, t) = q_{3a}^2(x) \sin(\omega_{kj} t), \quad (13)$$

где  $\omega_{kj}$  — частота внешней силы, совпадающая с одной из собственных частот оболочки.

Коэффициенты разложения нагрузки (13) в ряд при условии свободного опирания на жесткие опоры торцов оболочки:

$$q_{3a}^2 = \frac{2 \sin(\omega_{kj} t)}{L} \int_0^L q_{3a}^2(x) \sin\left(\frac{\rho m}{L} x\right) dx. \quad (14)$$

Решение дифференциального уравнения (12) можно представить в виде

$$\zeta_{mi}(t) = A_{mi} \cos(\omega_{mi}t) + B_{mi} \sin(\omega_{mi}t) + y_{mi}(t),$$

где  $y_{mi}(t)$  — частное решение уравнения (12).

В случае параметров нагрузки (13)

$$y_{mi}(t) = \begin{cases} \frac{\tilde{q}_{mi}}{(\omega_{mi}^2 - \omega_{kj}^2)} \sin(\omega_{kj}t) & m \neq k \text{ или } i \neq j, \\ -\frac{\tilde{q}_{mi}}{2\omega_{mi}} t \cos(\omega_{mi}t) & m = k, i = j. \end{cases} \quad (15)$$

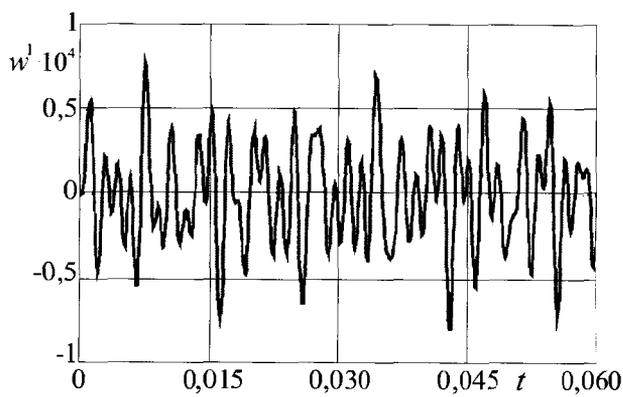
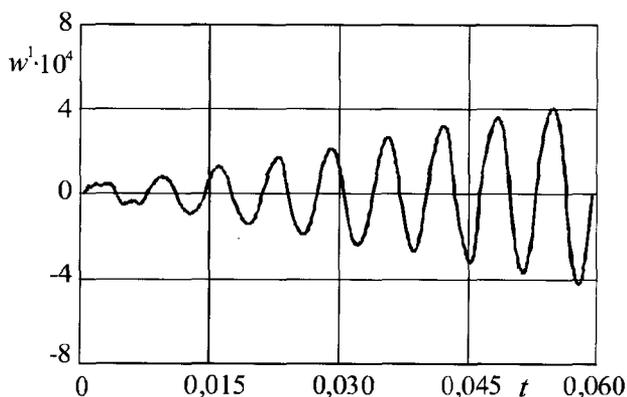
При нулевых начальных условиях константы интегрирования будут:

$$A_{mi} = 0; B_{mi} = -\frac{1}{\omega_{mi}} \begin{cases} \frac{\omega_{kj} \tilde{q}_{mi}}{(\omega_{mi}^2 - \omega_{kj}^2)} & m \neq k \text{ или } i \neq j, \\ -\frac{\tilde{q}_{mi}}{2\omega_{mi}} & m = k, i = j. \end{cases}$$

Если нагрузка равномерно распределена по всей поверхности оболочки, то

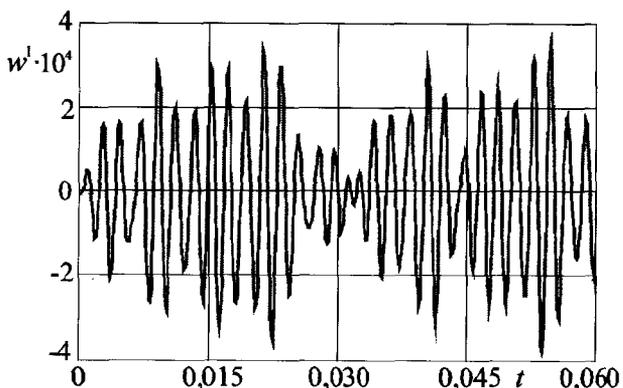
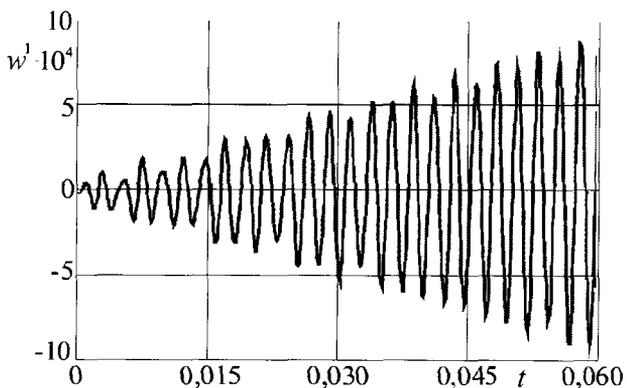
$$q_{3m}^2 = \frac{4q_0}{\pi m} \quad (m=1,3,5,\dots). \quad (16)$$

Здесь ложный резонанс возникает, если первый индекс  $k$  у частоты возмущающей силы  $\omega_{kj}$  четный. Это приводит к  $q_{3k}^2 = 0$  в (16) и нулевой резонанс-



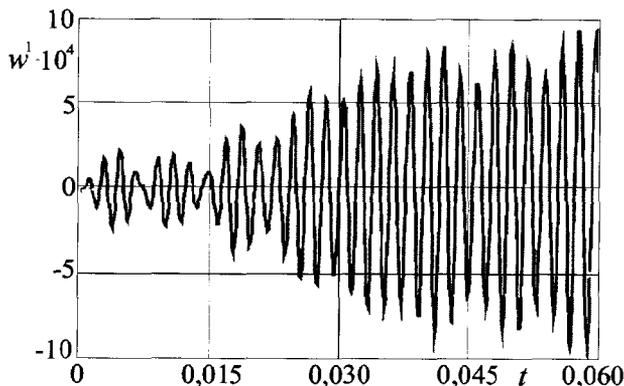
а

б



в

г



д

Рисунок 1 — Изменение прогибов в оболочке во времени  $t$  (с) в среде средней жесткости ( $\kappa_0 = 10^9$  Па/м) при резонансе по частоте  $\omega_{mi}$

ной составляющей в частном решении (15). В этом случае частота вынужденных колебаний совпадает с одной из собственных частот оболочки, но нарастания амплитуды колебаний не происходит.

**Численное исследование.** В качестве примера рассмотрено численное исследование колебаний круговой трехслойной цилиндрической оболочки («Д16Т — фторопласт — Д16Т»,  $h_1 = h_2 = 0,02 R$ ,  $c = 0,025 R$ ), свободно опертой торцами на жесткие неподвижные опоры, при действии нагрузки интенсивностью  $q_3^2 = q_0 = 2 \cdot 10^5$  Па. Внутри оболочки упругая среда отсутствует  $\kappa_0^2 = 0$ , снаружи имеется упругая среда с  $\kappa_0^1 = \kappa_0$ . Линейные перемещения отнесены к радиусу оболочки, время измеряется в секундах (с).

Рисунок 1 иллюстрирует колебания срединного сечения рассматриваемой трехслойной оболочки под действием резонансных нагрузок с частотами  $\omega_{n1}$  ( $n = 1, 2, \dots, 5$ ) в среде средней жесткости ( $\kappa_0 = 10^9$  Па/м;  $x = L/2$ ,  $L = 10R$ ): а —  $\omega_{11} = 979$  с<sup>-1</sup>; б —  $\omega_{21} = 1886$  с<sup>-1</sup>; в —  $\omega_{31} = 2600$  с<sup>-1</sup>; г —  $\omega_{41} = 3014$  с<sup>-1</sup>; д —  $\omega_{51} = 3209$  с<sup>-1</sup>. Здесь нарастание величины прогибов происходит при нечетных  $n$ , причем окружающая упругая среда замедляет рост амплитуд колебаний. При четных  $n$  подтверждается ложный резонанс — амплитуды постоянны.

Изменение максимального прогиба срединного сечения оболочки на интервале  $t \in [0; 0,6]$  с в зависимости от жесткости внешней среды при резонансе по частоте  $\omega_{11}$  для оболочек различной длины иллюстрирует рисунок 2.

Величины резонансных частот  $\omega_{11}$  не указаны, т. к. они изменяются для всех оболочек с увеличением жесткости среды. Здесь с ростом жесткости среды амплитуды колебаний уменьшаются для всех оболочек, при этом амплитуды в короткой оболочке более чувствительны к увеличению жесткости среды.

*Работа выполнена при финансовом содействии БРФФИ.*

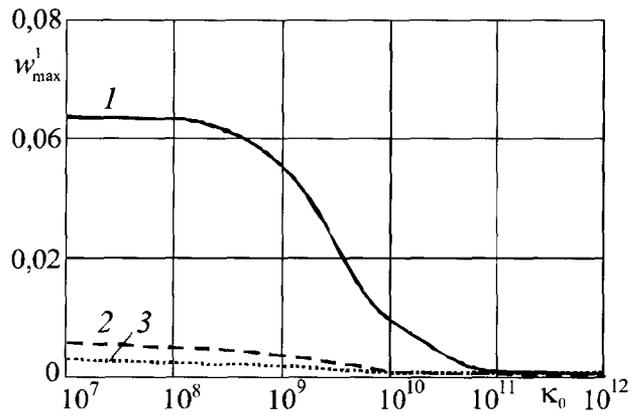


Рисунок 2 — Изменение максимального прогиба на интервале  $t \in [0; 0,6]$  с в зависимости от жесткости среды  $\kappa_0$  (Па/м) при резонансе по частоте  $\omega_{11}$ ; 1 —  $L = 2R$ ; 2 —  $L = 10R$ ; 3 —  $L = 20R$

### Список обозначений

- $\rho_k$  — плотность материала  $k$ -го слоя ( $k = 1, 2, 3$ );
- $h_k$  — толщина  $k$ -го слоя;
- $h_3 = 2c$  ( $k = 1, 2, 3$  — номер слоя);
- $u_1^k, w^k$  — тангенциальные перемещения в направлении оси  $x_1$  и прогибы точек срединной поверхности несущих слоев оболочки;
- $R$  — радиус срединного слоя заполнителя оболочки;
- $L$  — относительная длина оболочки;
- $T_{jm}^k$  — функция времени;
- $\delta A$  — вариация работы внешних сил;
- $\delta W$  — вариация работы внутренних сил упругости;
- $\delta A_1$  — вариация работы сил инерции;
- $\omega_{mp}$  — частоты собственных колебаний;
- $\kappa_0$  — коэффициент сжатия среды.

### Список литературы

1. Власов, В.З. Балки, плиты, оболочки на упругом основании / В.З. Власов, Н.Н. Леонтьев. — М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит-ры, 1960. — 491 с.
2. Старовойтов, Э.И. Вязкоупругопластические слоистые пластины и оболочки / Э.И. Старовойтов. — Гомель: БелГУТ, 2002. — 344 с.
3. Плескачевский, Ю.М. Механика трехслойных стержней и пластин, связанных с упругим основанием / Ю.М. Плескачевский, Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011. — 560 с.

Starovoitov E.I., Leonenko D.V., Pleskatshevsky Yu.M.

### Vibrations of the three-layered cylindrical shells in the elastic Winkler's medium at resonance

The vibrations of the three-layered cylindrical shell in elastic medium under resonance load are considered. Kirchhoff-Love's hypotheses are accepted for the thin isotropic bearing layers. The work of the in-plane shear, compression over thickness and variations in displacements are taken linear along the transverse coordinate for the thick filler the conditions of displacement continuity are not used on the contact boundaries. Reaction of the elastic medium is described in terms of the Winkler model. The investigation of variations in displacements under action of resonance uniformly distributed load is given as an example.

**Keywords:** three-layer cylindrical shell, dynamics, elastic Winkler's medium, resonance

Поступила в редакцию 15.10.2013.