ВЫСШИЕ УЧЕБНЫЕ ЗАВЕДЕНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УДК 539.2/.6+612.76+519.68:[5/6+3]

М.А. ЖУРАВКОВ, д-р физ.-мат. наук
Белорусский государственный университет, г. Минск

Ю.М. ПЛЕСКАЧЕВСКИЙ, чл.-кор. НАН Беларуси
Президиум Гомельского филиала НАН Беларуси

Н.С. РОМАНОВА
Белорусский государственный университет, г. Минск

НЕКОТОРЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ РАЗВИТИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ТЕОРИЙ СОВРЕМЕННОЙ МЕХАНИКИ

Развитие классических и формирование новых разделов механики требует модификации и совершенствования математических моделей и методов решения модельных задач. В работе рассмотрены некоторые направления развития механико-математических моделей для описания механического состояния и поведения различных классов сред, перспективы использования математического аппарата интегро-дифференцирования дробного порядка в механике, представлены сопряженные задачи биомеханики и биофизики, математические модели деформирования материалов с учетом сложной внутренней структуры.

Ключевые слова: *механико-математические модели дробного порядка, обобщенная модель Максвелла, Кельвина-Фойгта, Зенера, модели вязкоупругости, неоднородные среды*

Введение. В настоящее время активно развиваются новые направления современной механики и модифицируются «привычные» классические разделы. Вследствие этого требуется развитие и построение новых математических моделей, используемых для описания механического состояния и поведения исследуемых объектов, с целью более адекватного отражения особенностей их поведения, учета большего количества определяющих факторов, изучения сложных комплексных («сопряженных») взаимовлияющих процессов, происходящих в среде. Сегодня при построении механико-математических моделей во многих случаях требуется обязательный учет внутренней структуры среды/материалов. В данном контексте следует выделить такие направления, как создание новых материалов с заданными свойствами, причем как на макро-, так и микро- и наноуровне, исследование свойств и поведения биоматериалов и наноструктур. Актуальным является построение моделей, описывающих напряженно-деформированное состояние в средах, которые «не укладываются в рамки» хорошо известных и развитых «стандартных» моделей различных разделов механики сплошных и дискретных сред.

Для построения математических моделей деформирования материалов с учетом (микро)структуры и новых материалов имеются различные подходы. Так, один из возможных подходов состоит в представлении физических законов в дискретном виде, их разложении в ряды Тейлора с учетом величин до некоторого порядка по характерному размеру (микро)структуры.

В настоящее время в большинстве случаев при решении задач из различных разделов и областей механики используются модели, в которых объект рассматривается в приближении (квази)сплошной непрерывной средой, что подразумевает выполнение определенным образом усреднения по пространству свойств среды и параметров деформирования. В таких моделях учет наличия структурных неоднородностей и особенностей поведения разного масштабного уровня выполняется специальными методами и подходами, например введением специальных непрерывных функций. Естественно, что введение таких функций является достаточно условным, так как приведенные (эффективные, интегральные и т. п.) характеристики в случае значительных «резких» изменений свойств среды или характера ее поведения могут существенно отличаться от соответствующих реальных значений.

В то же время очевидно, что при деформировании объектов сложного внутреннего строения / закона поведения существенную роль играют локальные деформации, обусловленные относительными перемещениями и деформациями его структурных составляющих.

Так, например, использование классических моделей деформирования упругих тел в биомеханике без учета внутренней структуры материалов не позволяет в принципе получать достоверных результатов и резко сужает область решаемых задач. При этом достичь повышения «точности результатов» путем «уточнения численных алгоритмов решения задач» практически не удается. В этом случае для получения результатов, соответствующих поведению реальных объектов, необходимо изменить собственно математическую модель, используемую для описания поведения изучаемого объекта.

В работе рассмотрены некоторые возможные пути развития механико-математических моделей для адекватного и достоверного описания механического состояния и поведения различных классов сред.

О перспективах использования интегро-дифференциального исчисления дробного порядка в механике. В настоящее время при изучении широкого круга явлений и процессов из различных областей и разделов науки и техники все более активно используются модели, включающие в качестве определяющих уравнения, базирующиеся на дробных соотношениях между основными масштабными параметрами исследуемых объектов [1, 2].

Так, например, наличие в определяющих соотношениях производной дробного порядка по координате позволяет учесть фрактальность неоднородной среды, что представляется существенным моментом при рассмотрении физических процессов в такой среде (см., например, [3—6]). Дифференциальные уравнения с производными дробного порядка по времени активно используются при построении математических моделей для интерпретации стохастических процессов немарковского типа или процессов с памятью (свойство эредитарности) [7].

В соответствии с основными характерными свойствами аппарата интегро-дифференцирования дробного порядка весьма перспективным представляется использования теории дробного исчисления при исследовании механических процессов и явлений в природных и искусственных неоднородных структурах (сплавы, полимеры, геологические слои), биоматериалах и наноматериалах.

Далее приведены примеры, демонстрирующие потенциальные возможности и эффективность использования дифференцирования дробного порядка в механике.

Исследование процессов ползучести и релаксации в неоднородных структурах. Как известно, в общем случае процессы ползучести и релаксации для реальных неоднородных сред являются нелинейными как в пространстве, так и во времени. Поэтому, использование производных дробного порядка в уравнениях состояния вязкоупругих сред позволяет отобразить и учесть как неоднородную структуру вязкого и упругого элементов, так и неоднородность механических процессов по времени.

Очевидно, что особый интерес представляют модели с ядрами дробного порядка дифференцирования, являющиеся обобщением «классических» вязкоупругих моделей.

Так, *дробная модель Кельвина*, построенная как развитие классической модели вязкоупругости Кельвина-Фойгта [8] при использовании производной дробного порядка, имеет вид [9]:

$$\sigma(t)=\eta_0 D_t^{\beta}\varepsilon(t)+E_0\varepsilon(t). \qquad (1)$$

Показатель β в (1) удовлетворяет условиям $0<\beta<1$. В этом случае функции релаксации $G(t)$ нелинейно зависит от времени t (типа $t^{-\alpha}$).

В дробной модели Кельвина-Фойгта, в случае известных коэффициенте вязкости η и модуле упругости E_0, функции ползучести $J(t)$ и релаксации $G(t)$ определяются следующим образом [9]:

$$J(t)=\frac{1}{E_0}+\tilde{E}\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta},\ G(t)=E_0+\frac{\eta}{t^{\beta}}\cdot\frac{1-\beta}{\Gamma(2-\beta)},$$

где $\tilde{E}=E_{\beta}\cdot E_0^{\beta-1}$, а E_{β} — функция Миттаг-Леффлера [1, 2].

Как известно, помимо моделей типа Кельвина, к наиболее «популярным» классическим реологическим моделям относятся и модели Максвелла. *Дробная модель вязкоупругости Максвелла*, построения с использованием дробного оператора Римана-Лиувилля порядка α и базирующаяся на классической модели Максвелла, может быть записана в таком виде [10]:

$$\sigma(t)=E\tau_0^{\alpha}D_t^{\beta}\varepsilon(t), \qquad (2)$$

где модуль упругости E и параметр вязкости τ связаны функцией релаксации напряжений $G(t)=\dfrac{E}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\dfrac{\tau}{t}\right)^{\alpha}G(t)$, здесь вязкость $\eta=E\tau$.

Формальное обобщение уравнения Максвелла, определяющего состояние вязкоупругой среды, на дробно-дифференциальный вид осуществляется путем использования дробных операторов порядков α, β [10]:

$$\sigma(t)+\tau_0^{\beta}D_t^{\beta}\sigma(t)=E\tau_0^{\alpha}D_t^{\alpha}\varepsilon(t),\ 0<\alpha,\beta<1. \qquad (3)$$

Дробный аналог стандартной линейной модели твердого тела имеет следующее представление [11]:

$$G_1(1+\tau_{20}^{\alpha}D_t^{\alpha})\varepsilon(t)=(1+\tau_{10}^{\alpha}D_t^{\alpha})\sigma(t),$$
$$G_1=\frac{G_0G_2}{G_0+G_2},\ \tau_1^{\alpha}=\frac{\eta}{G_0+G_2},\ \tau_2^{\alpha}=\frac{\eta G_1}{G_2}, \qquad (4)$$

где $G(t)$ — функция релаксации и $0<\alpha<1$.

Трехпараметрическая модель Зенера (Zener) является объединением двух классических моделей: Максвелла и Кельвина-Фойгта [12]. Модифицированная с помощью производных дробного порядка Римана-Лиувилля «целочисленная» модель Зенера записывается так [3]:

$$\sigma(t)+a_0D_t^{\beta}\sigma(t)=E\varepsilon(t)+E_{10}D_t^{\alpha}\varepsilon(t),$$
$$0<\alpha,\beta<1,\ E>0. \qquad (5)$$

Реологическая модель для решения динамических задач вязкоупругости, построенная на основе дробных моделей Кельвина-Фойгта и Максвелла, имеет следующий вид [13]:

$$\sigma(t)+\sum_{k=1}^{N_\sigma}\mu_{\gamma k}D_t^{\alpha_k}\sigma=\varepsilon(t)+\sum_{k=1}^{N_\varepsilon}\mu_{\varepsilon k}D_t^{\beta_k}\varepsilon, \qquad (6)$$

где $\alpha_k=\dfrac{2k}{N_\sigma}$ при $k=\overline{1,N_\sigma}$ и $\beta_k=\dfrac{2k}{N_\varepsilon}$ при $k=\overline{1,N_\varepsilon}$.

С интересными примерами использования дробных моделей Кельвина-Фойгта и Максвелла при построении систем разрешающих уравнений для описания сложных прикладных процессов и явлений можно познакомиться в работах [14—17].

Имеется ряд работ, в которых изложены результаты выполнения прикладных исследований с использованием в моделях поведения среды производных дробного порядка, по изучению поведения таких гетерогенных сред, как породные геологические слои [4], металлы и стекла [5], полимеры [6].

Так, например, в [5] показано, что закон, устанавливающий взаимосвязь между компонентами напряженного и деформированного состояний для некоторых видов сплавов металлов, может быть принят в таком виде:

$$\sigma(t)+a\frac{d^{\alpha}\sigma}{dt^{\alpha}}=b_0\varepsilon(t)+b_1\frac{d^{\alpha}\varepsilon}{dt^{\alpha}},\ 0<\alpha\le 1. \qquad (7)$$

Здесь параметры a, b_0, b_1 зависят от свойств исследуемых материалов. Модель Капуто-Майнарди (Caputo-Mainardi) (7) сводится к классическому закону вязкоупругости при $a=0$, $b_0=\mu$, $b_1=E$, $\alpha=1$.

В работе [6] показано, что закон, описывающий связь напряженного и деформированного состояний для большого класса полимеров, удобно использовать в таком представлении:

$$\tau(t)=\mu_S\frac{d\varepsilon}{dt}+\left(\frac{3}{2}(\mu_0-\mu_S)nkT\right)^{\alpha}D_t^{\alpha}\varepsilon(t),\ \alpha=0{,}5.$$

Здесь k — постоянная Больцмана, T — абсолютная температура.

Следует отметить, что наряду с первыми исследованиями западных ученых в направлении изучения возможностей использования теории дробного интегро-дифференцирования к проблемам механики сплошных сред, в тоже время были опубликованы и фундаментальные результаты по данной тематике и представителями советских научных школ: Ю.Н. Работновым, Т.Д. Шермергором, С.И. Мешковым, Ю.А. Россихиным, В.М. Зеленевым, В.Л. Гонсовским и др. [18—20].

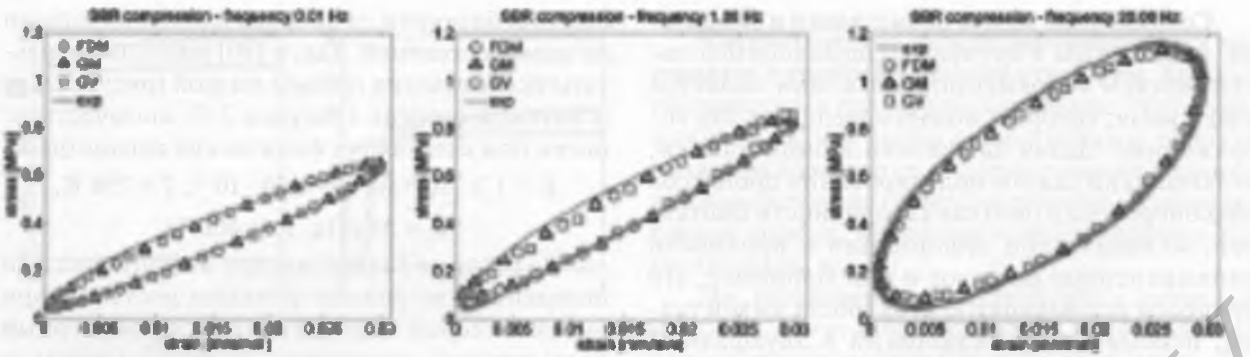
Так, Ю.Н. Работнов построил класс дробно-экспотенциальных функций с интегральной особенностью в начальный момент времени (слабосингулярные функции) и показал эффективность использования функций такого вида в качестве ядер интегральных операторов в наследственной теории упругости [18]. Такое направление в построении моделей поведения вязкоупругих сред представляется достаточно эффективным.

В работе [21] опубликованы результаты сравнения экспериментальных данных, полученных при тестировании поведения образцов, изготовленных из бутадиен-стирольного каучука (I) и полипропиленового пластика (II), с численными результатами, полученными при использовании дробной модели Зенера (FDM) (5), восьмиэлементной обобщенной модели Максвелла (GM) (3) и обобщенной модели Кельвина-Фойгта (GV) (1), на основе дробных производных Римана-Лиувилля. Адекватность использования моделей, построенных на основе математического аппарата дробного интегро-дифференцирования при исследовании основных характеристик рассматриваемого материала показана на рисунке 1 (адаптирован из [21]), где кривые упругого гистерезиса, полученные экспериментально и на основе численного моделирования очень хорошо коррелируют.

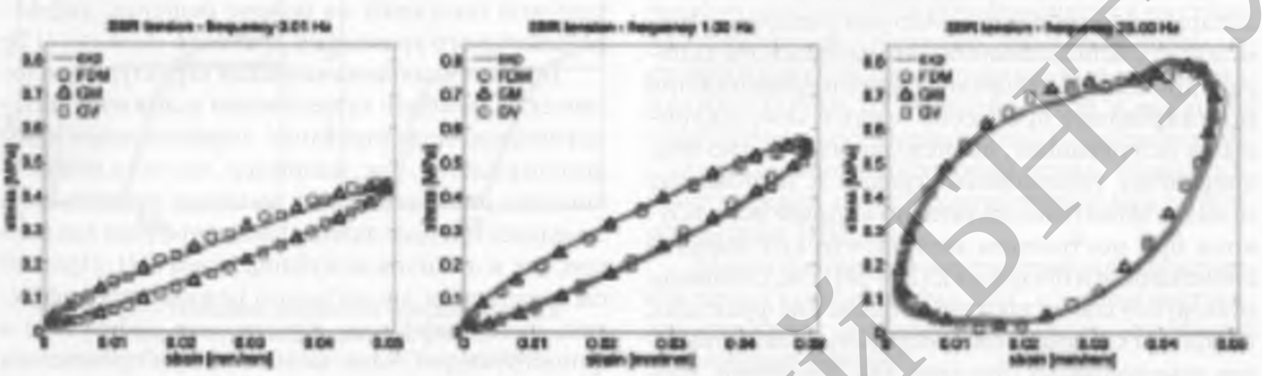
Определение физико-механических характеристик гетерогенных материалов. Гетерогенные структуры в общем случае обладают свойствами ярко выраженной неоднородности и изменчивости как по координатам, так и во времени, поэтому их физико-механические свойства в общем случае достаточно сложно описать формулами классической механики. Отсюда представляется весьма перспективным, особенно для материалов и структур с резко изменяющимися свойствами в пространстве и со временем, при построении математических зависимостей, описывающих их состояние, использовать аппарат дробного дифференцирования. Данное направление исследований развивается достаточно активно [21].

Например, для материалов, поведение которых можно описать вязкоупругой моделью Фойгта, коэффициенты Ламе λ, μ являются функциями времени и могут быть представлены как $\lambda(t)=\lambda_0+\lambda_1\partial/\partial t$ и $\mu(t)=\mu_0+\mu_1\partial/\partial t$, где λ_0, λ_1, μ_0, μ_1 — соответственно коэффициенты объемного сжатия, объемной ползучести, упругий модуль сдвига и модуль сдвига ползучести.

Очевидно, что для многих материалов использование упомянутой пары модулей сдвига (μ_0, μ_1) для описания наблюдаемого в действительности их поведения является недостаточным. Особенно это



а



б

Рисунок 1 — Адекватность использования моделей, построенных на основе математического аппарата дробного интегро-дифференцирования: *а* — кривая гистерезиса образцов I вида при 0,01 Гц, 1,00 Гц, 20,00 Гц; *б* — кривая гистерезиса образцов II вида при 0,01 Гц, 1,00 Гц, 20,00 Гц

проявляется, например, при изучении динамических процессов в материалах при воздействии нагрузки дискретного, импульсного или периодического вида [22]. Для более адекватного описания реального поведения материала необходимо вводить более сложные, чем простейшая модель Фойгта, модели. Альтернативой введения дополнительных характеристик и усложнения модели для описания поведения материалов является введение характеристики μ_α и константы α таких, что коэффициент μ может быть представлен следующим образом:

$$\mu(t) = \mu_0 + \mu_\alpha \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha}, \; 0 < \alpha \le 1. \tag{8}$$

Уравнение (8) можно рассматривать как модель Фойгта дробного порядка для $\alpha < 1$.

В работе [23] предложены математические выражения для определения реологических свойств наноструктурированных систем. Формулы для функции релаксации напряжений представляются следующим образом:

$$G(p,\tilde{t}) = R(p,\tilde{t}) + G^*(p,\tilde{t}), \tag{9}$$

$$G(p,\tilde{t}) = \frac{k}{\tilde{t}^{\Delta r}} \exp\left(-\frac{\tilde{t}}{t_R}\right) + G^*(p,\tilde{t}). \tag{10}$$

Здесь отклик $\tilde{t}$ вязкоупругой системы зависит от степени давления $p\,(0 \le p \le 1)$ и, следовательно, модуль релаксации напряжений при сдвиге $G(p,\tilde{t})$ зависит от значений $\tilde{t}$ и p и равен сумме ядра релаксации $R(p,\tilde{t})$ и равновесного модуля сдвига $G^*(p,\tilde{t})$. Жесткость геля k, время релаксации t_R, степень релаксации Δ_R и равновесный модуль сдвига $G^*(p,\tilde{t})$ зависят от степени реакции p.

В качестве примера использования аппарата интегро-дифференцирования дробного порядка для вычисления механических свойств неоднородных материалов можно привести работу [24], в которой представлены подходы к вычислению механических свойств вязкоупругих материалов. Так, например, такие параметры, как накопление и потеря податливости для дробной модели Максвелла (3) предложено вычислять по формулам

$$J_1(\omega) = J_0 + (\eta\omega^\alpha)^{-1} \cos\frac{\pi\alpha}{2},$$

$$J_2(\omega) = (\eta\omega^\alpha)^{-1} \cos\frac{\pi\alpha}{2}.$$

Для дробного аналога стандартной линейной модели твердого тела (4) формулы комплексных модулей имеют следующий вид:

$$G_1(\omega) = \frac{G_1 + (\tau_2^\alpha + \tau_1^\alpha G_1)\omega^\alpha \cos\frac{\pi\alpha}{2} + \tau_1^\alpha \tau_2^\alpha \omega^{2\alpha}}{1 + 2\tau_1^\alpha \omega^\alpha \cos\frac{\pi\alpha}{2} + (\tau_1^\alpha)^2 \omega^{2\alpha}},$$

$$G_2(\omega) = \frac{(\tau_2^\alpha - \tau_1^\alpha G_1)\omega^\alpha \sin\frac{\pi\alpha}{2}}{1 + 2\tau_1^\alpha \cos\frac{\pi\alpha}{2} + (\tau_1^\alpha)^2 \omega^{2\alpha}}.$$

Сопряженные задачи биомеханики и биофизики. Актуальным и активно развивающимся направлением современной механики является класс задач, который можно определить как сопряженные задачи биофизики и биомеханики, включающий задачи моделирования процессов массопереноса в биотканях, прочности биотканей, механической деформации и прочности биоинженерных протезов и т. п. Например, это процессы регенерации клеток, роста живой ткани, перемещения включений в двухфазных фракциях и т. д.

Описание самоподобных структур с помощью аппарата фрактальной геометрии расширяет возможность использования математического аппарата дробного интегродиффиренцирования при моделировании процессов «с памятью», «склонных к регенерации», происходящих в сильно неоднородных, гетерогенных средах. К настоящему моменту фракталы достаточно активно используются при построении математических моделей биомеханики и биофизики [25—28]. Так, специальную группу составляют геометрические фракталы, используя которые можно определить свойства таких самоподобных структур, как, например, кровеносные сосуды млекопитающих и человека, описать такие процессы, как рост трабекулярной кости, регенерация клеток печени и т. п. [25]. Динамические фракталы относятся к отдельному типу и возникают при исследовании нелинейных динамических биосистем [27].

В качестве примера можно привести модель перемещения внешней внедренной массы в биосреде, построенной с использованием дробных производных Герасимова-Капуто и Римана-Лиувилля [29]:

$$e^{Ct} D_t^{\alpha} e^{-Ct} S + W(x)S = -CS + H(x,t),\ 0 < \alpha < 1, \quad (11)$$

где $W(x)$ — оператор Фоккера-Планка и $H(x, t)$ — слагаемое, описывающее изменение внедренной массы.

Модель, описывающая процесс роста биоткани при глиоме при рассмотрении биоткани как изотропной пористой среды с использованием дробной производной Римана-Лиувилля, выглядит так [30]:

$${}_0D_t^{\alpha} g = \exp\left(L\beta \frac{\lambda - g(t)}{g(t)} \right) g(t),\ 0 < \alpha < 1. \quad (12)$$

Здесь модуль Юнга E, постоянная Больцмана k и абсолютная величина T связаны между собой соотношением $L = E/(kT)$, λ — упругость биоткани. Величина параметра β зависит от биохимических реакций изучаемого процесса.

Модель (12) характеризует поведение изотропной функции роста $g(t)$ и используется, например, для изучения изменения свойств и состояния биоткани от доброкачественной стадии до злокачественной. Так, в [30] описаны результаты исследования глиомы низкой (рисунок 2 *а*) и высокой степени (рисунок 2 *б*) злокачественности при следующих физических параметрах:

$$\beta = 1{,}3 \cdot 10^{-26}\ \text{м}^3,\ k = 1{,}30 \cdot 10^{-23},\ T = 298\ \text{K},$$

$$E_1 = 30\ \text{кПа},\ E_2 = 40\text{кПа}.$$

На рисунке 3 (адаптирован из [30]) показано поведение изотропной функции роста $g(t)$ при высокой (серый цвет кривой) и низкой (черный цвет) степенях злокачественности с различными значениями параметра масштабируемости. Результаты получены на основе решения дифференциального уравнения дробного порядка (12).

Гетерогенная динамическая структура биологических мембран существенно усложняет математическое моделирование диффузионных процессов в клетке. Так, например, высокая вязкость биослоя плазматических мембран существенно замедляет процесс латеральной диффузии как белков, так и липидов до субдиффузии [31]. Процессы с наличием аномального режима (субдиффузия, супердиффузия, прыжковая диффузия) в наноструктурах были выявлены при проведении опытов [32].

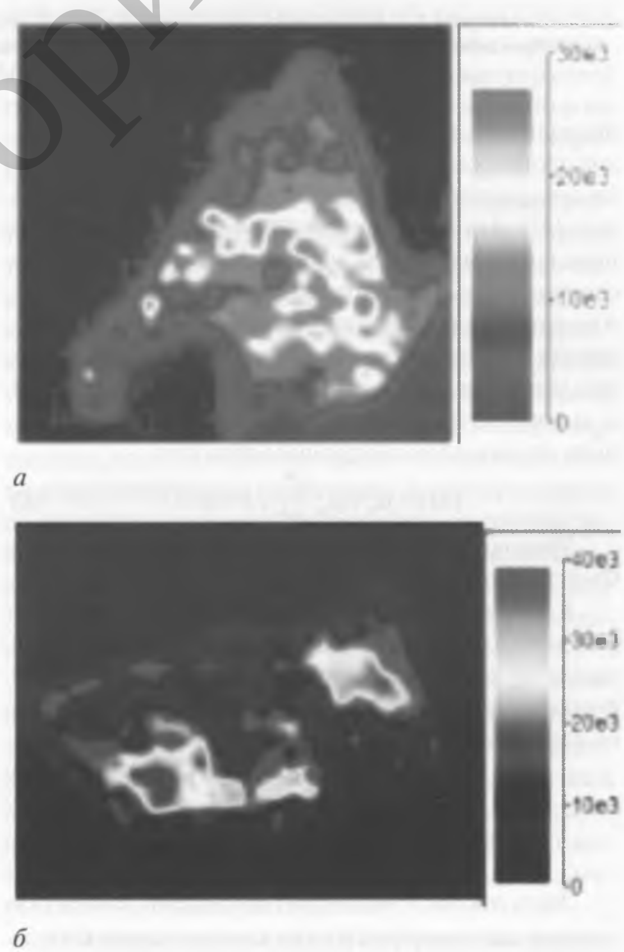


Рисунок 2 — Результаты исследования глиомы (адаптирован из [30]): *а* — глиома низкой степени злокачественности; *б* — глиома высокой степени злокачественности

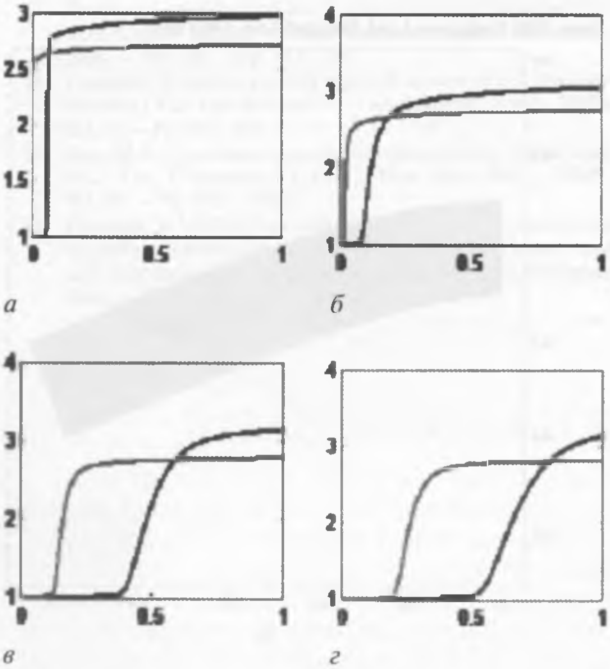


Рисунок 3 — Поведение изотропной функции роста *g*(*t*) при значениях (адаптирован из [30]):
а — $\alpha = 0{,}25$; *б* — $\alpha = 0{,}5$; *в* — $\alpha = 0{,}75$; *г* — $\alpha = 0{,}9$

Простейшая модель аномальной диффузии в одномерном случае, построенная на основе дробной производной Герасимова-Капуто, имеет следующий вид [31]:

$$\frac{\partial^\beta u}{\partial t^\beta} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ 0 < \beta < 1. \tag{13}$$

Вязкоупругие свойства артерий могут быть определены путем проведения экспериментальных исследований релаксации напряжений [28]. Изучение свойств вязкоупругости артерий способствует определению их биомеханической структуры и функционального состояния.

В качестве примера можно привести модифицированную дробную модель Кельвина-Фойгта (5), используемую для описания вязкоупругого состояния артерий [33]:

$$ {}_0D_t^\alpha \varepsilon = \frac{E}{\eta}\left[\eta E_2^{-1}\, {}_0D_t^\alpha \sigma(t) + \sigma(t) - E_1\varepsilon(t)\right],$$

$$E = \frac{E_2}{E_1 + E_2}.$$

В работе [33] изложены результаты тестирования выписанной дробной модели вязкоупругости стандартного линейного тела (19) и показано, что такая модель более адекватно описывает реальные процессы по сравнению с «целочисленной» моделью.

В работах [9, 34—36] показано применение дробных моделей вязкоупругости для решения задач клеточной биомеханики и тканевой инженерии.

Математические модели деформирования материалов с учетом внутренней структуры. Как уже указывалось в предыдущих разделах, структура/микроструктура среды существенным образом влияет на характер ее деформирования и напряженное состояние (композиционные материалы, горные породы, мелкозернистые материалы, наноструктуры и т. д.).

Так, например, новые структуры в породных массивах могут формироваться и проявляться при наступлении предельного состояния. Деформирование такой среды в дальнейшем во многом определяется образовавшейся внутренней структурой. Очевидно, что в этом новом состоянии связь между напряжениями и деформациями отлична от общепринятой в механике деформируемого твердого тела «классической». Следовательно, необходимы новые формы математической записи соотношений между компонентами НДС тела.

Задача построения математической зависимости между компонентами НДС с учетом внутренней структуры представляется весьма актуальной для наноматериалов.

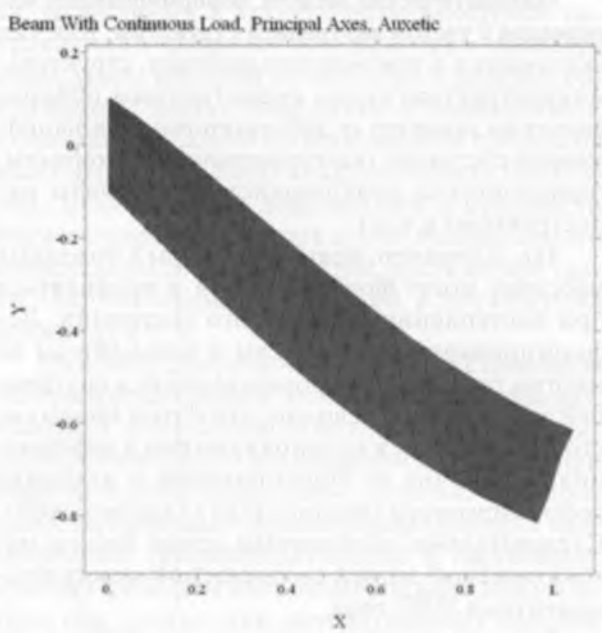
Следует упомянуть и такое новое направление в механике материалов, как создание принципиально новых материалов, способных проявлять программируемые, нелинейные деформационные свойства, вплоть до получения адаптивной (приспособительной) реакции на внешнее воздействие.

Как показано в предыдущем разделе, перспективным при построении механико-математических моделей поведения деформируемых твердых упругих сред с учетом их внутренней структуры является использование аппарата интегро-дифференцирования дробного порядка. Помимо данного направления эффективным представляется вместо «классических» построение «специальных» уравнений, связывающих компоненты НДС среды. Такие уравнения могут быть построены, например, представлением среды в виде элементарных конечных элементов, поведение которых и связи между которыми описываются в свою очередь на основе установленных/принятых законов поведения (см., например, [37—39]).

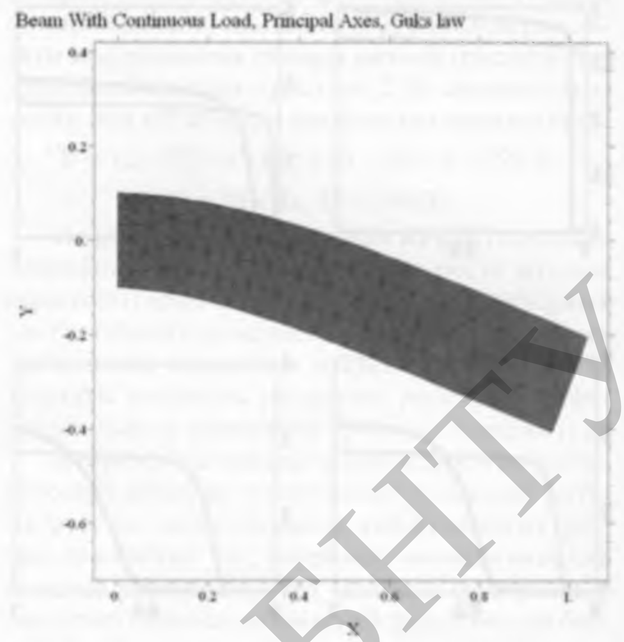
На рисунке 4 в качестве примера представлены результаты сравнительного расчета деформированных форм балки из ауксетичного пеноматериала с отрицательным значением коэффициента Пуассона и балки из изотропного упругого материала с близкими свойствами.

Список литературы

1. Самко, С.Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые приложения / С.Г. Самко, А.А. Килбас, О.И. Маричев. — Минск: Наука и техника, 1987. — 687 с.
2. Podlubny, I. Fractional differential equations. Mathematics in Sciences and Engineering / I. Podlubny. — San Diego, 1999. — 198 p.
3. Bagley, R.L. On the fractional calculus model of viscoelastic behavior / R.L. Bagley, P.J. Torvik // Journal of Rheology. — 1986. — Vol. 30. — Pp. 133—155.



а



б

Рисунок 4 — Деформированное состояние балочной конструкции:
а — из ауксетичного пеноматериала; *б* — для упругого изотропного материала

4. Caputo, M. Vibrations of an infinite plate with a frequency independent Q / M. Caputo // Journal of the Acoustical Society of America. — 1976. — Vol. 60(3). — Pp. 634—639.
5. Caputo, M. A new dissipation model based on memory mechanism / M.Caputo, F.Mainardi // Pure and Applied Geophysics. — 1971. — Vol. 91(1). — Pp. 134—147.
6. Rouse, P.E. The theory of the linear viscoelastic properties of dilute solutions of coiling polymers / P.E. Rouse // Journal of Chemical Physics. — 1953. — Vol. 21. — Pp. 1272—1280.
7. Compte, A., Stochastic foundations of fractional dynamics / A. Compte // Phys. Rev.E. — 1996. — Vol. 53(4). — Pp. 4191—4193.
8. Журавков, М.А. Механика сплошных сред. Теория упругости и пластичности / М.А. Журавков, Э.И. Старовойтов // Учеб. пособие. — Минск: БГУ, 2011. — 543 с.
9. Koeller, R.C. Applications of fractional calculus to the theory of viscoelasticity / R.C. Koeller // Journal of Applied Mechanics. — 1984. — Vol. 51(2). — Pp. 299—307.
10. Friedrich, C. Relaxation and retardation functions of the Maxwell model with fractional derivatives / C. Friedrich // Rheologica Acta. — 1991. — Vol. 30. — Pp. 151—158.
11. Nonnenmacher, T.F. A fractional model for mechanical stress relaxation / T.F. Nonnenmacher and W.G.Glockle // Phil. Mag. Lett. — 1991. — Vol. 64(2). — Pp. 89—93.
12. Heymans, N. Fractal rheological models and fractional differential equations for viscoelastic behavior / N. Heymans, J.-C. Bauwens // Rheologica Acta. — 1994. — Vol. 33(3). — Pp. 210—219.
13. Padovan, J. Diophantinized fractional representations for nonlinear elastomeric media / J. Padovan, J.T. Sawicki // Computers and Structures. — 1998. — Vol. 66. — Pp. 613—626.
14. Generalized viscoelastic models: Their fractional equations with solutions / H. Schiessel [et al.] // Journal of Physics A: Mathematical and General. — 1995. — Vol. 28. — Pp. 6567—6584.
15. Hwang, J.S. Seismic response prediction of high damping rubber bearings fractional derivatives Maxwell model / J.S. Hwang, J.C. Wang // Engineering Structures. — 1998. — Vol. 20(9). — Pp. 849—856.
16. Park, S.W. Analytical modeling of viscoelastic dampers for structural and vibration control / S.W. Park // Int.J. Solids Struct. — 2001. — Vol. 38(44—45). — Pp. 8065—8092.
17. Makris, N. Fractional derivative Maxwell model for viscous dampers / N. Makris, M.C. Constantinou // Journal of Structural Engineering ASCE. — 1991. — Vol. 117(9). — Pp.2708—2724.
18. Работнов, Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций / Ю.Н. Работнов. — М.: Наука, 1966. — 753 с.
19. Мешков, С.И. К описанию внутреннего трения при помощи дробно-экспоненциальных ядер / С.И. Мешков, Г.Н. Пачевская, Т.Д. Шермергор // ПМТФ. — 1966. — № 3.
20. Зеленев, В.М. Затухающие колебания упруго наследственных систем со слабосингулярными ядрами / В.М. Зеленев, С.И. Мешков, Ю.А. Россихин // ПМТФ. — 1970.— № 2. — С. 104—108.
21. Sasso, M. Application of fractional derivative models in linear viscoelastic problems / M. Sasso, G. Palmieri, D. Amodio // Mech. Time-Depend Mater. — 2011. — Vol. 15. — C. 367—387.
22. Can Meral, F. Royston Surface response of a fractional order viscoelastic halfspace to surface and subsurface sources / F. Can Meral, J. Thomas // J. Acoust. Soc. Am. — Vol. 126(6). — 2009. — Pp. 3278—3285.
23. Warlus, S. Dynamic viscoelastic properties of silica alkoxide during the sol-gel transition / S. Warlus, A. Ponton, A. Leslous // Eur. Phys. Journal E. — 2003. — Vol. 12. — Pp. 275—282.
24. Dietrich, L. Analysis of identification methods for the viscoelastic properties of materials / L. Dietrich, K. Turski // Eng. Trans. — 1992. — Vol. 40. — Pp. 501—523.
25. West, B.J. Fractal physiology for physicists: Levy statistics / B.J. West, W. Deering // Phys. Rep. — 1994. — Vol. 246. — Pp. 1—100.
26. West, B.J. Fractal probability density and EEF/ERP time series (Chapter 10) / B.J.West // in Fractal Geometry in Biological Systems / eds. P.M. Iannoccone, M. Khokha. — Boca Raton: CRC. — 1995. — Pp. 267—316.
27. West, B.J. Physics of Fractal Operators / B.J. West, M. Bologna, P. Grigolini. — New York: Springer. — 2003.
28. Fung, Y.C. Biomechanics: Mechanical properties of living tissues / Y.C. Fung. — Springer-Verlag, New York, 1981.
29. Iomin, A. Fractional transport of cancer cells due to self-entrapment by fission / A. Iomin // Mathemat. Modeling of biological systems. Modeling and simulation in science, engineering and technology. — 2007— Part IV. — Pp. 193—203.
30. Palocaren, A. Biomechanical modeling of tumor growth: its relevance to glioma research / A. Palocaren, C. Drapaca // Intern. Journ. Of Num. Analysis and Modeling, Series B. — 2012. — Vol. 3(1). — Pp. 94—108.
31. Metzler, R. The Random walker's guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach / R. Metzler, J. Klafter // Phys. Reports. — 2000. — Vol. 339 — Pp. 1—77.
32. Weiss, M. Anomalous protein diffusion in living cells as seen by fluorescence correlation spectroscopy / M. Weiss, H. Hashimoto, T. Nilsson // Biophys. Journ. — 2002. — Vol. 84. — Pp. 4043—4052.

33. Fractional calculus applied to model arterial viscoelasticity / D.O. Craiem [et al.] // Latin American Applied Research. — 2008. — Vol. 38. — Pp. 141—145.
34. Fractional derivatives embody essential features of cell rheological behavior / V.D. Djordjevic [et al.] // Ann. Biomed. Eng. — 2003. — Vol. 31. — Pp. 692—699.
35. Kiss, M.Z. Viscoelastic characterization of in vitro canine tissue / M.Z. Kiss, T. Varghese, T.J. Hall // Phys. Med. Biol. — 2004. — Vol. 49. — Pp. 4207—4218.
36. Hardung, V. Method for measurement of dynamic elasticity and viscosity of caoutchouc-like bodies, especially of blood vessels and other elastic tissues / V. Hardung // Helv. Physiol. Pharmacol. Acta. — 1952. — Vol. 10. — Pp. 482—498.
37. Плескачевский, Ю.М. Ауксетики: модели и приложения / Ю.М. Плескачевский, С.В. Шилько // Вести НАН Беларуси. — 2003.— № 4. — С. 58—68.
38. Журавков, М.А. Деформирование блочно-слоистых массивов горных пород в окрестности подземных сооружений / М.А. Журавков, П.А. Прохоров // Горная механика. — 2008. — № 2. — С. 3—13.
39. Журавков, М.А. Механико-математические модели поведения деформируемых твердых упругих сред с учетом их внутренней структуры / М.А. Журавков, Т.А. Макаева // Механика машин, механизмов и материалов. — 2012. — № 1. — С. 29—38.

Zhuravkov M.A., Pleskachevsky Yu.M., Romanova N.S.
Some developments for mathematical theory of modern mechanics

Classical development and the formation of some new modern branches in mechanics require continuous improvement and modification of mathematical models and methods to solve the model problems. In this article we consider some developments in mechanics and mathematical models for the description of the mechanical state and different material behaviour and perspectives of fractional calculus for the use in mechanics, and describe the conjugate biophysical and biomechanical problems, the mathematical models of material deformation taking into account their complex heterogeneous structure.

Поступила в редакцию 12.08.2012.