УДК 62-987

А.И. ДУДЯК, д-р техн. наук; В.М. ХВАСЬКО
Белорусский национальный технический университет, г. Минск

КРИТЕРИЙ ПРОЧНОСТИ ДЛЯ ОЦЕНКИ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ МАТРИЦ АППАРАТОВ ВЫСОКОГО ДАВЛЕНИЯ

Наиболее нагруженной частью аппарата высокого давления при синтезе порошков алмаза являются матрицы, которые подвергаются всестороннему неравномерному сжатию. Для оценки прочности таких элементов конструкций необходим критерий, учитывающий свойства твердосплавного материала, из которого изготавливаются матрицы, а также тот факт, что геометрическая интерпретация такого критерия должна представлять функцию, непрерывную во всей области ее определения. Предложен критерий прочности, удовлетворяющий упомянутым свойствам и представляющий собой линейную функцию от компонента тензора напряжений. Таким образом, его можно применять для определения коэффициентов запаса по текучести и запаса по разрушению. Путем сравнения с уже известными критериями прочности была доказана эффективность применения предложенного критерия для расчетов на прочность матриц аппаратов высокого давления.

Ключевые слова: *аппарат высокого давления, критерий прочности, эквивалентное напряжение, предел прочности, октаэдрическое напряжение*

Введение. Для оценки прочности любой инженерной конструкции или детали необходимо определить предельное напряженное состояние материала, из которого она выполнена. Такое предельное напряженное состояние материала соответствует его разрушению либо другим физическим процессам, при которых его эксплуатация невозможна.

В конструкции аппарата высокого давления твердосплавные матрицы находятся в условиях всестороннего неравномерного сжатия, а значит, возникает сложное напряженное состояние. Для оценки сложного напряженного состояния можно применять следующие критерии прочности: Липатова А.Ф., Баландина П.П., Прохоровой А.Н., Дудяка А.И. [1, 2, 3, 4].

Однако приведенные критерии имеют ряд недостатков.

Зависимость, полученная Липатовым А.Ф. при испытаниях ряда хрупких материалов на сжатие при боковом давлении, можно представить в следующем виде [1]:

$$\sigma_1^2 + 2\,\sigma_{\text{пл}}\sigma_1 + \sigma_{\text{ВС}}^2 = \sigma_3^2,$$

где σ_1, σ_3 — главные напряжения, описывающие напряженное состояние материала матрицы в данной точке; $\sigma_{\text{пл}}$ — предел текучести данного материала в идеально пластичном состоянии; $\sigma_{\text{ВС}}$ — предел прочности данного материала при испытании на одноосное сжатие.

Очевидным недостатком критерия Липатова является игнорирование промежуточного значения главного напряжения σ_2, которое оказывает влияние на предельное состояние материала, что доказывается в ряде работ. Область применимости данного критерия ограничивается лишь хрупкими материалами, такими как бетон.

Баландиным П.П. был предложен критерий прочности, представляющий собой линейную функцию от компонента тензора напряжений, которую можно представить в виде [2]:

$$u + B\upsilon = C,$$

где $u = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2$ — величина, пропорциональная второму инварианту тензора напряжений; $\upsilon = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$ — величина, пропорциональная первому тензору напряжений; B, C — постоянные величины, определяемые при простейших испытаниях материала на одноосное растяжение и одноосное сжатие.

После определения постоянных B, C выражение для определения эквивалентных напряжений будет иметь вид [2]:

$$\sigma_{\text{экв}} = \frac{1-\nu}{2}\cdot\upsilon + \sqrt{\left(\frac{1-\nu}{2}\right)^2\cdot\upsilon^2 + \frac{\nu u}{2}},$$

где $\nu = \dfrac{\sigma_{\text{ВР}}}{\sigma_{\text{ВС}}}$, $\sigma_{\text{ВР}}$ — предел прочности материала матрицы при испытании на одноосное растяжение.

Область применимости критерия Баландина ограничивается материалами, для которых выполняется следующее соотношение:

$$\nu_\tau = \frac{\tau_{\text{В}}}{\sigma_{\text{ВР}}} = \frac{1}{\sqrt{3\nu}}, \qquad (1)$$

где $\tau_{\text{В}}$ — предел прочности данного материала при испытании на чистый сдвиг.

Так, для твердого сплава марки ВК-6, который применяется при изготовлении матриц аппаратов высокого давления, значение величины ν_τ, полученное экспериментальным путем, равно 0,233 [5]. Та же величина, рассчитанная по формуле (1), равна 1,4. Очевидно, что для таких материалов, которые неодинаково сопротивляются растяжению и сжатию, критерий Баландина применять нельзя.

Для прочностных расчетов деталей из хрупких материалов Прохорова А.Н. предложила критерий прочности, основанный на том предположении, что энергия предельного напряженного состояния является некоторой функцией величин нормального и касательного октаэдрических напряжений. Критерий имеет следующий вид [3]:

$$u + A\upsilon^2 = C - B\left(\upsilon + K\sqrt{u}\cdot sign\upsilon\right),$$

где A, B, C и K — постоянные величины, определяемые на основании результатов испытаний материала на одноосное растяжение и сжатие, чистый сдвиг и чистое всестороннее сжатие; $\mathrm{sign}\upsilon$ означает, что знак перед радикалом соответствует знаку величины υ.

Выражение эквивалентности, полученное после определения постоянных A, B, C и K, имеет следующий вид [3]:

$$\sigma_{\text{экв}} = \frac{(1-\nu)\cdot(\upsilon + K\sqrt{u}\cdot sign\upsilon)}{2(1+K\sqrt{2})} + \sqrt{\frac{(1-\nu)^2\cdot(\upsilon + K\sqrt{u}\cdot sign\upsilon)^2}{4(1+K\sqrt{2})^2} + \frac{\nu u}{2}},$$

где $K = \dfrac{\sqrt{2\nu\cdot(3\nu\nu_\tau^2 - 1)}}{(1-\nu) - 2\sqrt{\nu\cdot(3\nu\nu_\tau^2 - 1)}}$.

Анализ выражения для определения постоянной K показал, что при определенных значениях величин ν и ν_τ подкоренные выражения могут принимать отрицательные значения, а значит, результаты расчетов с использованием критерия Прохоровой для некоторых материалов могут выражаться комплексными числами, что ограничивает область применимости данного критерия.

Для расчета на прочность деталей из пластичных и твердосплавных материалов можно использовать критерий прочности Дудяка А.И., представляющий собой усовершенствованную линейную функцию от компонента тензора напряжений. Данный критерий можно представить в следующем виде [4]:

$$B\upsilon + (1 + B_1 sign\upsilon)\cdot u = C, \qquad (2)$$

где B, B_1, C — постоянные величины, которые определяются путем испытания материала при одноосных растяжении и сжатии, а также при чистом сдвиге; $\mathrm{sign}\upsilon$ означает, что знак постоянной B_1 соответствует знаку величины υ.

В выражении (2) постоянная B_1 может иметь как положительное, так и отрицательное значение. Для случая, когда $B_1 > 0$, после определения постоянных B, B_1, C выражение для определения эквивалентных напряжений будет иметь вид [4]:

$$\sigma_{\text{экв}} = \frac{3\nu_\tau^2 - 1}{6\nu_\tau^2}\cdot\upsilon + \sqrt{\left(\frac{3\nu_\tau^2 - 1}{6\nu_\tau^2}\right)^2\cdot\upsilon^2 + \frac{u}{6\nu_\tau^2}}. \qquad (3)$$

Критерий Дудяка, соответствующий выражению (3), можно применять для расчетов в области растяжения материала, когда $\upsilon > 0$.

Если $B_1 < 0$, то после определения постоянных B, B_1, C выражение эквивалентности можно представить в виде:

$$\sigma_{\text{экв}} = \frac{1 - 3\nu^2\nu_\tau^2}{6\nu\nu_\tau^2}\cdot\upsilon + \sqrt{\left(\frac{1 - 3\nu^2\nu_\tau^2}{6\nu\nu_\tau^2}\right)^2\cdot u^2 + \frac{u}{6\nu_\tau^2}}. \qquad (4)$$

Критерий (4) можно использовать для прочностных расчетов в области растяжения материала, когда $\upsilon < 0$.

Критерии Дудяка хорошо соответствуют экспериментальным данным, полученным Бриджменом при испытании образцов из различных материалов на растяжение и сжатие [5]. Однако применимость данных критериев усложняется тем, что приходится дважды определять постоянные B, B_1, C и соответствующие эквивалентные напряжения.

Проанализировав все выше изложенные критерии прочности, приходим к выводу о том, что для прочностных расчетов матриц аппаратов высокого давления, выполненных из твердосплавных материалов, можно применять только критерий Дудяка, состоящий фактически из двух критериев, различных для области растяжения и области сжатия материала. Поэтому для упрощения прочностных расчетов в данной работе предлагается критерий, который можно представить в следующем виде:

$$u + A\upsilon + BI = C, \qquad (5)$$

где $I = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1$ — второй инвариант тензора напряжений; A, B, C — постоянные величины, определяемые путем испытания материала на одноосное растяжение, одноосное сжатие и чистый сдвиг.

Данный критерий зависит от величины напряжений, поэтому его можно применять для определения коэффициентов запаса по текучести и запаса по разрушению.

При испытании материала матрицы на одноосные растяжение и сжатие, а также чистый сдвиг были получены следующие выражения для определения постоянных A, B и C:

$$\begin{cases} A = 2(\sigma_{\text{ВС}} - \sigma_{\text{ВР}}), \\ B = \dfrac{2\left(3(\nu_\tau')^2 - \nu\right)}{(\nu_\tau')^2}, \\ C = 2\sigma_{\text{ВР}}\,\sigma_{\text{ВС}}, \end{cases} \qquad (6)$$

где $\nu_\tau' = \dfrac{\tau_{\text{В}}}{\sigma_{\text{ВС}}}$.

После подстановки полученных значений постоянных (6) в критерий прочности (5) и последующих математических преобразований было получено выражение вида:

$$\sigma_{\text{ВР}}^2 - (1-\nu)\upsilon\cdot\sigma_{\text{ВР}} - \frac{\nu\cdot\left(3(\nu_\tau')^2-\nu\right)}{(\nu_\tau')^2}\cdot I - \frac{\nu u}{2} = 0. \quad (7)$$

Полагая в соотношении (7) $\sigma_{\text{ВР}} = \sigma_{\text{ЭКВ}}$ и решая полученное квадратное уравнение относительно эквивалентного напряжения $\sigma_{\text{ЭКВ}}$, находим:

$$\sigma_{\text{ЭКВ}_{1,2}} = \frac{1-\nu}{2}\cdot\upsilon \pm \sqrt{\left(\frac{1-\nu}{2}\right)\cdot\upsilon^2 + \frac{\nu\cdot\left(3(\nu_\tau')^2-\nu\right)}{(\nu_\tau')^2}\cdot I + \frac{\nu u}{2}}. \quad (8)$$

Знак «—» перед радикалом в выражении (8) приводит к отрицательному значению эквивалентных напряжений, что лишено физического смысла. Поэтому окончательно эквивалентные напряжения можно определить из выражения вида:

$$\sigma_{\text{ЭКВ}} = \frac{1-\nu}{2}\cdot\upsilon + \sqrt{\left(\frac{1-\nu}{2}\right)\cdot\upsilon^2 + \frac{\nu\cdot\left(3(\nu_\tau')^2-\nu\right)}{(\nu_\tau')^2}\cdot I + \frac{\nu u}{2}}.$$

Для анализа геометрической интерпретации предложенного критерия прочности получим выражения для определения касательных октаэдрических напряжений $\tau_{\text{ОКТ}}$ в зависимости от величины нормальных октаэдрических напряжений $\sigma_{\text{ОКТ}}$. Для этого используем следующие соотношения [1]:

$$\begin{cases} u = (\sigma_1-\sigma_2)^2 + (\sigma_2-\sigma_3)^2 + (\sigma_3-\sigma_1)^2 = 9\tau_{\text{ОКТ}}^2, \\ \upsilon = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 3\sigma_{\text{ОКТ}}. \end{cases} \quad (9)$$

Подставим соотношения (9) в уравнение (7), в результате получим следующее выражение:

$$\sigma_{\text{ВР}}^2 - 3(1-\nu)\sigma_{\text{ОКТ}}\cdot\sigma_{\text{ВР}} - \frac{\nu\cdot\left(3(\nu_\tau')^2-\nu\right)}{(\nu_\tau')^2}\cdot I - \frac{\nu}{2}\cdot 9\tau_{\text{ОКТ}}^2 = 0. \quad (10)$$

Решая уравнение (10) относительно величины касательного октаэдрического напряжения $\tau_{\text{ОКТ}}$, находим:

$$\tau_{\text{ОКТ}} = \pm\sqrt{\frac{2}{9\nu}\sigma_{\text{ВР}}^2 - \frac{2(1-\nu)}{3\nu}\sigma_{\text{ВР}}\cdot\sigma_{\text{ОКТ}} - \frac{2\left(3(\nu_\tau')^2-\nu\right)}{9(\nu_\tau')^2}\cdot I}. \quad (11)$$

Таким образом, соотношение (11) устанавливает зависимость между касательными и нормальными октаэдрическими напряжениями в области растяжения и сжатия исследуемого материала.

Анализ подкоренного выражения в соотношении (11) показал, что в окрестности нулевых значений нормальных октаэдрических напряжений функция $\tau_{\text{ОКТ}} = f(\sigma_{\text{ОКТ}})$ разрыва не имеет, в отличие от критерия Прохоровой А.Н.

Аналогичным образом были получены выражения для определения величины $\tau_{\text{ОКТ}}$ с помощью критерия Баландина П.П.:

$$\tau_{\text{ОКТ}} = \pm\sqrt{\frac{2}{9\nu}\sigma_{\text{ВР}}^2 - \frac{2(1-\nu)}{3\nu}\sigma_{\text{ВР}}\cdot\sigma_{\text{ОКТ}}}, \quad (12)$$

а также с использованием критериев Дудяка:

$$\tau_{\text{ОКТ}} = \pm\sqrt{\frac{2}{3}\nu_\tau^2\sigma_{\text{ВР}}^2 - \frac{2}{3}(3\nu_\tau^2-1)\sigma_{\text{ВР}}\cdot\sigma_{\text{ОКТ}}}, \quad (13)$$

$$\tau_{\text{ОКТ}} = \pm\sqrt{\frac{2}{3}\nu_\tau^2\sigma_{\text{ВР}}^2 - \frac{2(1-3\nu^2\nu_\tau^2)}{3\nu}\sigma_{\text{ВР}}\cdot\sigma_{\text{ОКТ}}}. \quad (14)$$

Выражение (13) описывает зависимость касательных октаэдрических напряжений от нормальных октаэдрических напряжений в области растяжения материала ($\upsilon \ge 0$, $\sigma_{\text{ОКТ}} \ge 0$), а выражение (14) — в области сжатия материала ($\upsilon \le 0$, $\sigma_{\text{ОКТ}} \le 0$).

Геометрическая интерпретация зависимостей $\tau_{\text{ОКТ}} = f(\sigma_{\text{ОКТ}})$ с использованием предложенного критерия, соответствующего выражению (11), критерия Баландина П.П., соответствующего выражению (12), и критериев Дудяка, соответствующих соотношениям (13) и (14), представлена на рисунке.

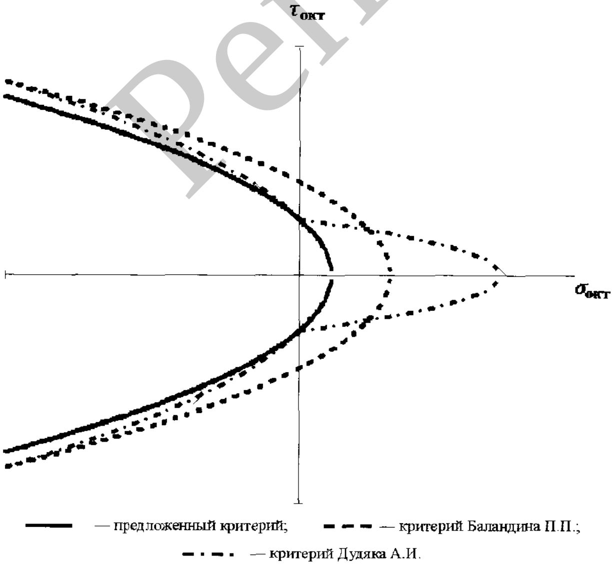

Рисунок — Графическое изображение критериев прочности

Анализ рисунка показал, что предложенный критерий прочности в области растяжения и сжатия материала дает меньшие значения эквивалентных напряжений по сравнению с критерием Баландина и критерием Дудяка, что хорошо соответствует экспериментальным данным, полученным Бриджменом при проведении испытаний на растяжение и сжатие [5].

Выводы. Предложенный критерий можно применять для прочностных расчетов матриц аппаратов высокого давления, которые обычно изготавливаются из твердосплавных материалов таких марок как ВК-6 — ВК-8.

Также предложенный критерий имеет удобную формулировку в виде уравнения (5) и однозначное определение постоянных величин, входящих в это уравнение.

Практическая применимость данного критерия прочности установлена путем сравнения экспериментальных данных, полученных Бриджменом при испытании на прочность образцов из сплавов марок ВК-6 — ВК-8, и расчетных данных, полученных при исследовании критериев Баландина П.П. и Дудяка А.И.

Список литературы

1. Лебедев, А.А. Расчеты на прочность при сложном напряженном состоянии (теории прочности) / А.А. Лебедев. — Киев, 1968. — 67 с.
2. Расчеты на прочность в машиностроении: в 3 т. / С.Д. Пономарев [и др.]. — М.: МАШГИЗ, 1956. — Т. 1: Теоретические основы и экспериментальные методы. Расчеты стержневых элементов конструкций при статической нагрузке. — 884 с.
3. Прохорова, А.Н. Уточненный расчет однородных подшипников: автореф. дис. ... канд. техн. наук / А.Н. Прохорова. — Минск, 1964. — 16 с.
4. Дудяк, А.И. Теоретические основы конструирования пресс-форм высокого давления и технология получения порошков кубического нитрида бора: дис. ... д-ра техн. наук / А.И. Дудяк. — Минск, 1992. — 367 с.
5. Бриджмен, П.В. Исследование больших пластических деформаций и разрыва / П.В. Бриджмен. — М., 1955. — 444 с.

Dudyak A.I., Khvasko V.M.

The strength criterion for the tension estimation of high-pressure apparatus dies

During the diamond dust synthesis the most stressed parts of a high-pressure apparatus are dies. They are subjects to all-around nonuniform compression. The criterion for strength estimation of such elements is required with the next conditions: the high-alloy material properties should be considered, the geometrical interpretation of the criterion should be a continuous function in the all range of definition. In this article the criterion that suits the necessary conditions was proposed. It is a linear function of the stress tensor component. Thus it can be used for the estimation of safety factor on yielding and destruction. The efficiency of the proposed criterion using for the strength calculation of a high-pressure apparatus dies was proved by comparison with the known strength criteria.

Поступила в редакцию 07.06.2011.