Рыхтуемся да цэнтралізаванага тэсціравання

ЭДС ИНДУКЦИИ В ПРОВОДНИКАХ, ДВИЖУЩИХСЯ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

С. И. Глущенко, К. А. Петров, Т. И. Развина, Ю. В. Развин

Настоящая статья является продолжением публикации "Явление электромагнитной индукции в курсе физики средней школы" [1].

Задачи на тему возникновения ЭДС индукции в проводниках, движущихся в магнитном поле, можно условно разделить на несколько типов, зависящих от характера движения проводников и взаимного расположения векторов их скорости $\vec{v}$ и индукции магнитного поля $\vec{B}$. Как правило, рассматривается движение проводников в однородных магнитных полях с постоянным вектором магнитной индукции $\vec{B}$. Основным действием в таких задачах является вывод на основании закона Фарадея формулы для расчёта индуцируемой в проводнике ЭДС.

Напомним классический вариант такой задачи.

П-образный проводник, находящийся в однородном магнитном поле, замкнут проводящим стержнем *МК* длиной l, который может перемещаться по проводнику, замыкая его противоположные стороны (рис. 1). Однородное магнитное поле с индукцией $\vec{B}$ направлено перпендикулярно плоскости проводника. Если стержень скользит по проводнику со скоростью v, то за время Δt он перемещается на расстояние $\Delta x = v\Delta t$. При этом площадь контура, образованного *П*-образным проводником и проводящим стержнем, изменяется на величину $\Delta S = lv\Delta t$. Соответственно в нём индуцируется ЭДС, определяемая законом Фарадея: $\mathscr{E}_i = -\dfrac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -\dfrac{B\Delta S}{\Delta t} = -\dfrac{Blv\Delta t}{\Delta t} = -Blv$ (1).

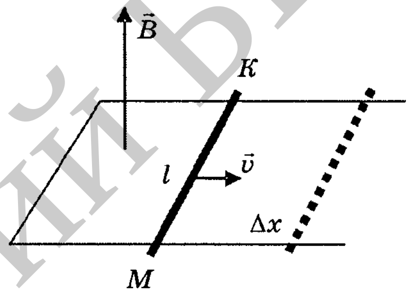

Рисунок 1

Интересно, что это же соотношение можно получить, не пользуясь законом Фарадея. Известно, что на заряженную частицу, движущуюся со скоростью $\vec{v}$ в магнитном поле, действует сила Лоренца $F_Л = qvB\sin\alpha$. Поэтому при движении стержня со скоростью $\vec{v}$ его электроны движутся с этой же скоростью. В случае, изображённом на рисунке 1, $\vec{v} \perp \vec{B}$, на каждый электрон действует сила $F_Л = qvB$, направленная к контакту *К* стержня. Если бы стержень не был в контакте с *П*-образным проводником, то электроны скапливались на контакте *К*, а контакт *М* оказался бы заряженным положительно. В этом замкнутом контуре по часовой стрелке начинает протекать ток. Работа по перемещению единичного положительного заряда q вдоль стержня с одного контакта на другой $A = F_Л \cdot l = qvBl$. ЭДС равна работе по перемещению единичного положительного заряда $\mathscr{E} = \dfrac{qvBl}{q} = Blv$, что совпадает с выражением (1). В эту ЭДС индукции не вносит вклад сила Лоренца, обусловленная скоростью движения электронов при протекании тока (эта скорость противоположна направлению тока).

Если стержень и направление вектора индукции магнитного поля образуют угол α, то возникающая ЭДС индукции $\mathscr{E}_i = -Blv\sin\alpha$.

Рассмотрим ряд конкретных задач с различными условиями движения проводника в постоянном магнитном поле.

Задача 1. *Проводящий стержень МК длиной* $l = 20$ см *движется без трения по металлическим параллельным рельсам, расположенным горизонтально. Вся система помещена в однородное вертикальное магнитное поле индукцией* $B = 0{,}5$ Тл. *Сопротивлением рельсов и стержня можно пренебречь.*

Выделим несколько дополнительных условий, определяющих движение стержня в рассматриваемой схеме.

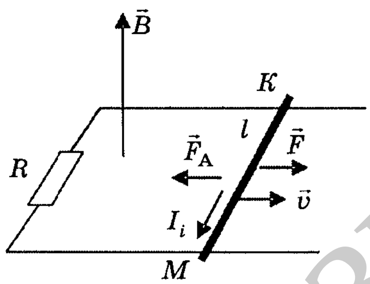

Рисунок 2

а) Рельсы замкнуты на сопротивление $R = 20$ Ом *(рис. 2). Стержень движется со скоростью* $v = 6$ м/с. *Определите ЭДС индукции* $\mathscr{E}_i$, *возникающую при движении стержня, индукционный ток* I_i, *силу* F, *которую необходимо приложить к стержню для его равномерного движения, а также мощность* P, *выделяющуюся на сопротивлении* R.

По формуле (1) определяем возникающую ЭДС индукции $\mathscr{E}_i = |Blv| = 0{,}6$ В. Тогда идукционный ток в рассматриваемом контуре (согласно закону Ома для замкнутой цепи) равен $I_i = \dfrac{\mathscr{E}_i}{R} = \dfrac{Blv}{R} = 30$ мА.

При равномерном движении стержня векторная сумма сил, действующих на него, должна быть равной нулю. Следовательно, сила Ампера $F_A = I_i lB = \dfrac{B^2l^2v}{R}$, направленная влево (см. рис. 2), равна приложенной силе F.

Получаем: $F = \dfrac{B^2l^2v}{R} = 3$ мН.

Мощность P, выделяющаяся на сопротивлении R, определяется по формуле $P = I_i^2 R = \dfrac{\mathscr{E}_i^{\,2}}{R} = 1{,}8$ мВт.

Примечание. Если между стержнем и рельсами существует трение и коэффициент трения равен μ, то для равномерного перемещения стержня следует приложить силу $F = F_A + F_{тр}$. Так как сила трения $F_{тр} = \mu N = \mu mg$ (m — масса стержня), $F_A = I_i lB = \dfrac{B^2l^2v}{R}$, то для равномерного движения стержня к нему необходимо приложить силу $F = \dfrac{B^2l^2v}{R} + \mu mg$.

б) Рельсы замкнуты на конденсатор ёмкостью $C = 1$ мФ *(рис. 3). К середине стержня массой* $m = 140$ мг *приложена сила* $F = 3$ мН. *Определите ускорение стержня, начальная скорость которого равна нулю.*

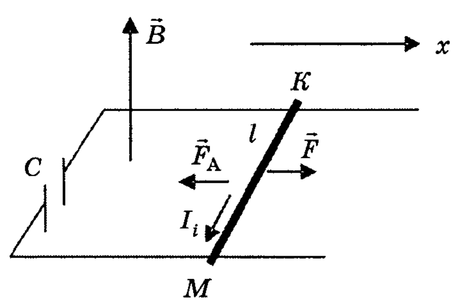

Рисунок 3

В каждый момент времени напряжение на конденсаторе равно возникающей ЭДС индукции $\mathscr{E}_i = \dfrac{q}{C} = Blv$, тогда заряд на обкладках конденсатора $q = BlvC$. Индукционный ток I_i, с одной стороны, заряжает конденсатор, а с другой — приводит к появлению силы Ампера $\vec{F}_{\text{А}}$, действующей на стержень в направлении, противоположном приложенной силе $\vec{F}$. Согласно второму закону Ньютона в проекции на ось Ox: $ma = F - F_{\text{А}} = F - I_i lB$. Силу тока определим как первую производную заряда по времени: $I_i = q' = BlCv' = BlCa$, где $v' = a$ — ускорение стержня. Из выражения $ma = F - B^2 l^2 Ca$

$$a = \frac{F}{m + B^2 l^2 C} = 20\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

в) Рельсы замкнуты на источник тока с ЭДС $\mathscr{E} = 1{,}6$ В *и внутренним сопротивлением* $r = 2$ Ом. *Стержень МК сопротивлением* $R = 20$ Ом *движется со скоростью* $v = 6\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$ *(рис. 4 а, б). Определите напряжение на зажимах источника, мощность, выделяемую в стержне, а также механическую мощность, затрачиваемую на движение стержня.*

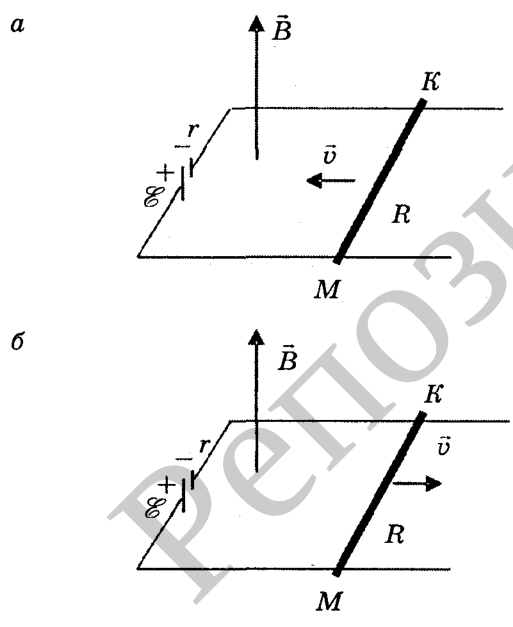

Рисунок 4

Пусть стержень движется **влево** (рис. 4, *а*). В этом случае ЭДС индукции и ЭДС источника оказываются включёнными в одном направлении, ток течёт от контакта M к контакту K и по закону Ома $I_1 = \frac{\mathscr{E} + Blv}{R + r} = 0{,}1$А.

Напряжение на зажимах источника $U_1 = U_{MK} = \mathscr{E} - I_1 r = \frac{\mathscr{E}R - Blvr}{R + r} = 1{,}4$ В.

Мощность тепловых потерь в стержне сопротивлением R:

$$P_1 = I_1^2 R = \left(\frac{\mathscr{E} + Blv}{R + r}\right)^2 R = 0{,}2 \text{ Вт}.$$

Механическая мощность, подводимая к стержню, движущемуся равномерно со скоростью v: $P_{1\text{мех}} = F_1 \cdot v$. Сила $F_1 = F_{\text{А}1} = I_1 lB = \frac{\mathscr{E} + Blv}{R + r} lB$ и $P_{1\text{мех}} = \frac{\mathscr{E} + Blv}{R + r} lBv = 0{,}06$ Вт.

Рассмотрим движение стержня **вправо** (рис. 4, *б*). Ток при этом течёт от K к M, и возникающая ЭДС индукции направлена против ЭДС источника. Тогда ток в контуре $I_2 = \frac{\mathscr{E} - |Blv|}{R + r} = 45$ мА. Соответственно напряжение на зажимах источника $U_2 = U_{MK} = \mathscr{E} - I_2 r = \frac{\mathscr{E}R + Blvr}{R + r} = 1{,}5$ В.

Мощность тепловых потерь в стержне

$$P_2 = I_2^2 R = \left(\frac{\mathscr{E} - |Blv|}{R + r}\right)^2 R = 40 \text{ мВт}.$$

Механическая мощность, подводимая к стержню, движущемуся равномерно со скоростью v:

$P_{2\text{мех}} = F_2 \cdot v$. Сила $F_2 = F_{\text{А}2} = I_2 lB = \frac{\mathscr{E} - |Blv|}{R + r} lB$,

тогда $P_{2\text{мех}} = \frac{\mathscr{E} - Blv}{R + r} lBv = 27$ мВт.

Рассмотренный случай справедлив при условии $\mathscr{E} > Blv$.

Если $Blv > \mathscr{E}$ (ЭДС индукции на концах стержня больше ЭДС источника), источник оказывается включённым на подзарядку. Величина силы тока $I_2' = \frac{Blv - \mathscr{E}}{R + r}$; напряжение на зажимах источника $U_2' = \mathscr{E} + I_2' r = \frac{\mathscr{E}R + Blvr}{R + r}$.

Мощность тепловых потерь в стержне

$$P_2' = I_2'R = \left(\frac{Blv - \mathscr{E}}{R+r}\right)^2 R.$$

Механическая мощность

$$P_{2\text{мех}}' = \frac{\left(Blv - \mathscr{E}\right)Blv}{R+r}.$$

Задача 2. *Два параллельных горизонтально расположенных металлических рельса замкнуты на резисторы сопротивлениями R_1 и R_2. По рельсам равномерно скользит металлический стержень МК. Система находится в вертикальном однородном магнитном поле индукцией $\vec{B}$ (рис. 5). Определите токи в резисторах, если известно, что скорость стержня v и к нему приложена сила $\vec{F}$, как показано на рисунке. Сопротивлением рельсов и стержня пренебречь, трение не учитывать.*

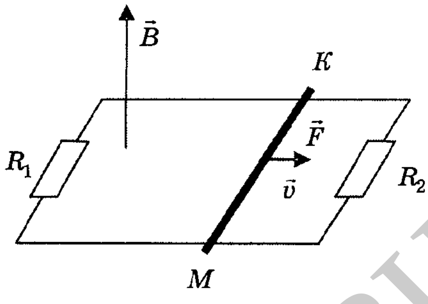

Рисунок 5

При движении металлического стержня в магнитном поле на его концах возникает ЭДС индукции $\mathscr{E}_i = Blv$. Тогда два проводника сопротивлениями R_1 и R_2 оказываются соединёнными параллельно. Эквивалентную схему можно представить в следующем виде (рис. 6):

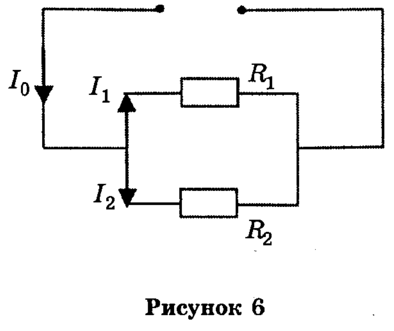

Рисунок 6

Общее сопротивление такой цепи $R_0 = \dfrac{R_1R_2}{R_1+R_2}$. Сила тока в цепи $I_0 = \dfrac{\mathscr{E}_i}{R_0} = \dfrac{Blv(R_1+R_2)}{R_1R_2}$ равна сумме токов в разветвлениях $I_0 = I_1 + I_2$. Так как напряжение U на параллельных участках электрической цепи одинаково и равно $\mathscr{E}_i$: $U = \mathscr{E}_i = Blv$, то $I_1 = \dfrac{Blv}{R_1}$, $I_2 = \dfrac{Blv}{R_2}$. Учитывая равномерное движение стержня под действием приложенной силы $\vec{F}$, можно сказать, что эта сила равна силе Ампера, действующей на стержень с током в магнитном поле, и направлена в противоположную сторону:

$$F = F_\text{A} = I_0lB = \frac{B^2l^2v(R_1+R_2)}{R_1R_2} \Rightarrow Bl = \sqrt{\frac{FR_1R_2}{v(R_1+R_2)}}.$$

Тогда токи в резисторах:

$$I_1 = \sqrt{\frac{FR_1R_2}{v(R_1+R_2)}}\cdot\frac{v}{R_1} = \sqrt{\frac{FR_2v}{R_1(R_1+R_2)}},$$

$$I_2 = \sqrt{\frac{FR_1R_2}{v(R_1+R_2)}}\cdot\frac{v}{R_2} = \sqrt{\frac{FR_1v}{R_2(R_1+R_2)}}.$$

Задача 3. *Горизонтальная проводящая перемычка МК массой m и длиной l может скользить, не отрываясь, без трения по двум вертикальным проводящим рейкам, замкнутым резистором сопротивлением R. Система находится в горизонтальном однородном магнитном поле индукцией $\vec{B}$ (рис. 7). Пренебрегая сопротивлением перемычки и реек, определите установившуюся скорость v перемычки.*

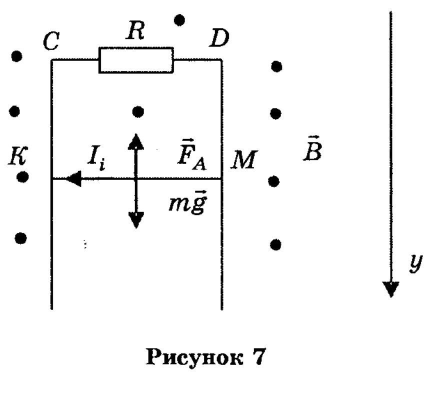

Рисунок 7

Перемычка начинает двигаться под действием силы тяжести. В результате этого происходит увеличение магнитного потока, пронизывающего контур $MKCD$. В рассматриваемом контуре появляется индукционный ток, который приводит к возникновению силы Ампера, действующей на движущуюся в магнитном поле перемычку и направленной против движения перемычки. Уравнение движения перемычки в проекции на ось Oy запишется следующим образом: $ma = mg - F_{\text{А}}$. Сила Ампера $F_{\text{А}} = I_i lB = \frac{\mathscr{E}_i}{R} lB = \frac{B^2 l^2}{R} v$. Установившееся значение скорости движения перемычки определяется из условия, что ускорение a должно стать равным нулю, тогда $F_{\text{А}} = mg$, или $\frac{B^2 l^2}{R} v = mg \Rightarrow v = \frac{mgR}{B^2 l^2}$.

Задача 4. *Два вертикальных металлических стержня расположены на расстоянии l и замкнуты на конденсатор ёмкостью C. Система помещена в однородное горизонтальное магнитное поле с индукцией $\vec{B}$. Вдоль стержней без трения скользит перемычка MK массой m (рис. 8). Пренебрегая сопротивлением перемычки и металлических стержней, определите ускорение перемычки.*

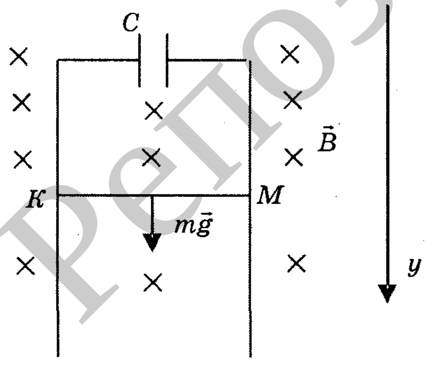

Рисунок 8

Мгновенное значение напряжения U на конденсаторе равно мгновенному значению ЭДС индукции $\mathscr{E}_i$, возникающей в перемычке MK при скольжении её по стержням: $U = \mathscr{E}_i$. При движении вниз с ускорением a мгновенная скорость перемычки $v = a\Delta t$. (Δt — время, прошедшее с начала движения перемычки). Тогда $\mathscr{E}_i = Blv = Bla\Delta t$.

Напряжение на конденсаторе $U = \frac{q}{C} = \frac{I\Delta t}{C}$, где I — мгновенное значение тока зарядки конденсатора, q — заряд на конденсаторе через промежуток времени Δt. Тогда $Bla\Delta t = \frac{I\Delta t}{C} \Rightarrow I = BlCa$. Сила Ампера, действующая на перемычку с током I в магнитном поле, $F_{\text{А}} = IlB = B^2 l^2 Ca$. Из уравнения движения в проекции на ось Oy: $ma = mg - F_{\text{А}}$ или $ma = mg - B^2 l^2 Ca$, ускорение перемычки $a = \frac{mg}{m + B^2 l^2 C}$. Как видно из этого выражения, ускорение перемычки остаётся постоянным во время её скольжения по стержням и не зависит от возникающей в ней ЭДС индукции, индукционного тока и её скорости.

Задача 5. *В однородном горизонтальном магнитном поле индукцией $\vec{B}$ расположены на расстоянии l два вертикальных металлических стержня, замкнутых в верхней части на катушку индуктивностью L. По стержням (рис. 9) без трения начинает скользить проводник массой m. Определите максимальное смещение проводника, его максимальную скорость и период колебаний. Сопротивлением стержней можно пренебречь.*

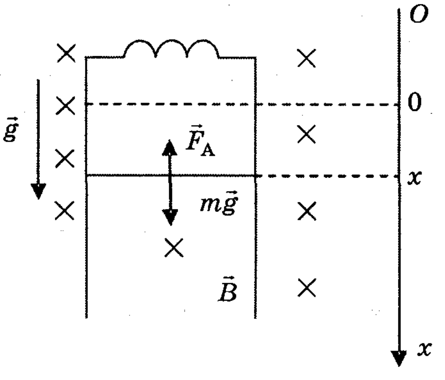

Рисунок 9

Стержень начинает движение под действием силы тяжести $m\vec{g}$ вдоль оси Ox и за малый промежуток времени Δt проходит путь $\Delta x = x$. На концах стержня возникает ЭДС индукции $\mathscr{E}_i$, определяемая скоростью изменения магнитного потока $\mathscr{E}_i = -\dfrac{\Delta\Phi}{\Delta t}$, где изменение магнитного потока $\Delta\Phi = B\Delta S = Bl\Delta x$. Тогда ЭДС индукции $\mathscr{E}_i = -\dfrac{Bl\Delta x}{\Delta t}$ (1). Цепь замкнута, возникающий в ней изменяющийся ток создаёт падение напряжения на катушке индуктивностью L: $U_L = -L\dfrac{\Delta I}{\Delta t}$ (2). Так как сопротивлением стержней и проводника пренебрегаем, то $U_L = \mathscr{E}_i$ или $\dfrac{Bl\Delta x}{\Delta t} = L\dfrac{\Delta I}{\Delta t} \Rightarrow Bl\Delta x = L\Delta I$. Из этого выражения $\Delta I = \dfrac{Bl\Delta x}{L}$ (3).

На проводник с током в магнитном поле действует сила Ампера $F_A = \Delta IlB$, которая с учётом (3) равна $F_A = \dfrac{B^2l^2x}{L}$ и направлена вертикально вверх. Таким образом на проводник действует результирующая сила $F = mg - F_A = mg - \dfrac{B^2l^2x}{L}$ (4). Из этого соотношения можно определить координату x_0, характеризующую положение равновесия стержня $F = 0$: $mg = \dfrac{B^2l^2x_0}{L} \Rightarrow x_0 = \dfrac{mgL}{B^2l^2}$ (5). Из выражений (4) и (5) результирующая сила $F = \dfrac{B^2l^2x_0}{L} - \dfrac{B^2l^2x}{L} = -\dfrac{B^2l^2}{L}(x - x_0)$ (6). Из этого выражения видно, что в процессе движения на проводник действует сила F, прямо пропорциональная смещению проводника $(x - x_0)$ и направленная в сторону положения равновесия. Тогда можно сказать, что под действием этой силы $F = -k(x - x_0)$ на проводник массой m возникнут гармонические колебания с периодом $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$.

В данном случае $k = \dfrac{B^2l^2}{L}$ и проводник будет совершать малые гармонические колебания с периодом $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{mL}{B^2l^2}}$ (7) около положения равновесия — точки с координатой x_0. Если учесть, что проводник начинает движение из координаты $x = 0$, то амплитуда возникающих колебаний $A = x_0 = \dfrac{mgL}{B^2l^2}$ (8). Максимальное смещение проводника из координаты $x = 0$ составит $x_{max} = 2A = \dfrac{2mgL}{B^2l^2}$ (9). В момент прохождения равновесия скорость проводника максимальна и равна $\upsilon_{max} = \dfrac{2\pi}{T}A = \sqrt{\dfrac{B^2l^2}{mL}}\dfrac{mgL}{B^2l^2} = \sqrt{\dfrac{mL}{B^2l^2}}g$ (10).

Рассмотрим другой способ определения этих характеристик. Поскольку трение в системе отсутствует, то воспользуемся законом сохранения энергии: потенциальная энергия проводника в процессе его движения переходит в его кинетическую энергию и в энергию магнитного поля катушки индуктивности.

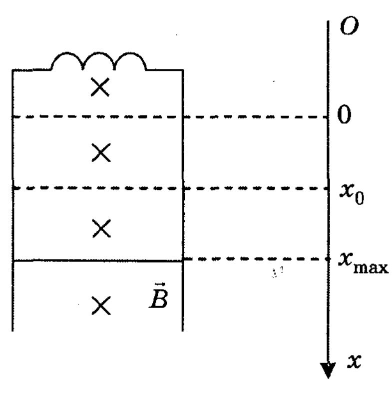

Рисунок 10

Максимальное смещение x_{max} определим из соотношения $mgx_{max} = \dfrac{LI^2}{2}$, где mgx_{max} — потенциальная энергия проводника в начальном положении, $\dfrac{LI^2}{2}$ — энергия магнитного поля в момент максимального смещения, когда скорость проводника станет равной нулю. С учётом (3) $\frac{LI^2}{2}=\frac{LB^2l^2x_{\max}^2}{2L^2}=$ $=\frac{B^2l^2x_{\max}^2}{2L}$. Тогда $mgx_{\max}=\frac{B^2l^2x_{\max}^2}{2L}$. Отсюда $x_{\max}=\frac{2mgL}{B^2l^2}$ (9′), что согласуется с (9).

Проходя положение равновесия x_0, потенциальная энергия проводника mgx_0 (или с учётом (5) $\frac{m^2g^2L}{B^2l^2}$) переходит в максимальную кинетическую энергию $\frac{mv^2}{2}$ и энергию магнитного поля катушки $\frac{LI_0^2}{2}=\frac{LB^2l^2x_0^2}{2L^2}=\frac{B^2l^2x_0^2}{2L}$ (I_0 — сила тока, протекающего в цепи катушки в положении x_0 проводника). С учётом (5) $\frac{LI_0^2}{2}=\frac{m^2g^2L}{2B^2l^2}$. Таким образом, из закона сохранения энергии $\frac{m^2g^2L}{B^2l^2}=\frac{mv_{\max}^2}{2}+\frac{m^2g^2L}{2B^2l^2}\Rightarrow v_{\max}=\sqrt{\frac{mL}{B^2l^2}}g$ (10′). Возникающие колебания характеризуются амплитудой $A=\frac{x_{\max}}{2}=\frac{mgL}{B^2l^2}$ (8′), периодом $T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi A}{v_{\max}}=2\pi\frac{mgL}{B^2l^2\sqrt{\frac{mL}{B^2l^2}}g}=2\pi\sqrt{\frac{mL}{B^2l^2}}$ (7′).

Задача 6. *В однородном горизонтальном магнитном поле индукцией $\vec{B}$ расположены на расстоянии l два вертикальных металлических стержня, замкнутых на конденсатор ёмкостью C. По стержням с высоты h начинает скользить металлическая перемычка MK массой m (рис. 11). Определите, какую скорость будет иметь перемычка, достигнув конденсатора.*

Решим эту задачу, воспользовавшись законом сохранения энергии. При движении перемычки по стержням её потенциальная энергия $E_p=mgh$ переходит в кинетическую энергию $E_k=\frac{mv^2}{2}$ перемычки и элект-

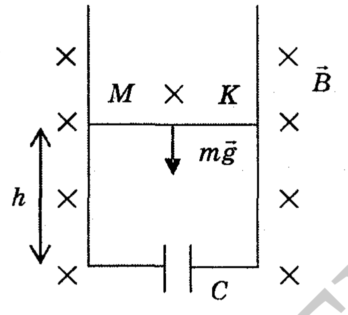

Рисунок 11

рическую энергию $W_{эл}=\frac{C\mathscr{E}_i^2}{2}=\frac{CB^2l^2v^2}{2}$ заряженного конденсатора:

$$mgh=\frac{mv^2}{2}+\frac{CB^2l^2v^2}{2}\Rightarrow v=\sqrt{\frac{2mgh}{m+CB^2l^2}}.$$

Аналогичное решение будет иметь задача, по условию которой вместо конденсатора будет включена катушка индуктивностью L (рис. 12).

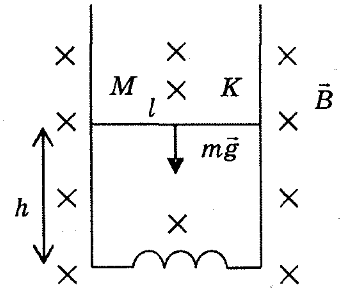

Рисунок 12

При движении перемычки её потенциальная энергия mgh перейдёт в кинетическую энергию $\frac{mv^2}{2}$ перемычки и энергию магнитного поля катушки $W_м=\frac{\Phi^2}{2L}=\frac{(Bhl)^2}{2L}$:

$$mgh=\frac{mv^2}{2}+\frac{(Bhl)^2}{2L}\Rightarrow v=\sqrt{\frac{2mghL-B^2h^2l^2}{mL}}.$$

Задача 7. *Длинный провод, сопротивлением которого можно пренебречь, согнут под углом α и расположен в горизонтальной плоскости. Перпендикулярно биссектрисе угла по проводу без трения скользит проводящий стержень MK. Система помещена в вертикальное однородное магнитное поле* *индукцией $\vec{B}$. Сопротивление единицы длины стержня R_0 (рис. 13). Определите максимальную скорость стержня MK, если к нему прикладывают горизонтальную силу $F = kx$, направленную вдоль биссектрисы угла и увеличивающуюся пропорционально расстоянию x, отсчитываемому от вершины угла, k — известный коэффициент пропорциональности.*

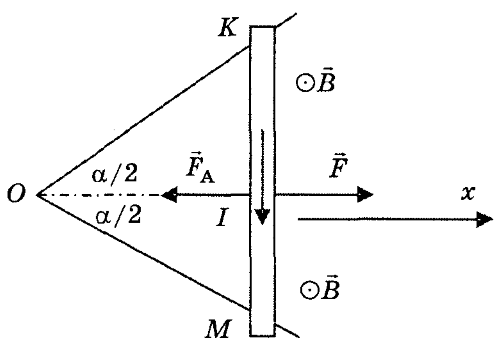

Рисунок 13

При движении стержня под действием силы F в магнитном поле непрерывно меняется площадь контура, ограниченная стержнем и изогнутым проводом. Следовательно, изменяется магнитный поток Ф, пронизывающий контур, что приводит к возникновению в замкнутом контуре ЭДС индукции $\mathscr{E}_i$ и индукционного тока I_i. В некоторый момент времени, когда стержень сместится на расстояние x, площадь контура *MOK* составит $S = x^2 \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$ (1), магнитный поток $\Phi = BS$. Из закона электромагнитной индукции Фарадея $\mathscr{E}_i = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -\Phi'$ (2), где Φ' — производная магнитного потока по времени. С учётом (1) выражение (2) примет вид $\left|\mathscr{E}_i\right| = (Bx^2 \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2})' = 2Bxx' \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$. Так как $x' = v$ — скорость перемещения стержня, окончательно получаем $\mathscr{E}_i = 2Bxv \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$. Для замкнутого проводящего контура сила индукционного тока $I_i = \frac{\mathscr{E}_i}{R} = \frac{2Bxv \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{R_0 2x \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}} = \frac{Bv}{R_0}$ ($R = 2R_0 x \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$ — сопротивление части стержня между точками его контакта с проводом (M и K)).

Согласно правилу Ленца, индукционный ток течёт от точки K к M. На стержень с током I_i в магнитном поле с индукцией $\vec{B}$ действует сила Ампера $F_A = I_i B 2x \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{2B^2 v x \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{R_0}$, направление которой определяется правилом левой руки. Сила Ампера оказывается направленной в сторону, противоположную прикладываемой силе F. Тогда, уравнение динамики движения стержня в проекции на ось Ox имеет вид $F - F_A = ma$. Скорость стержня будет максимальной в тот момент времени, когда его ускорение станет равным нулю. Тогда $F - F_A = 0$, или $kx - \frac{2B^2 v_{\max} x \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{R_0} = 0$, максимальная скорость стержня $v_{\max} = \frac{kR_0}{2B^2 \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}$.

Задача 8. *Проводящая перемычка MK массой m и длиной l начинает скользить по двум наклонным металлическим стержням. Стержни, замкнутые сопротивлением R, находятся в вертикальном однородном магнитном поле и образуют с горизонтом угол α (рис. 14). Коэффициент трения между стержнями и перемычкой μ. Сопротивлением стержней и перемычки пренебречь. Определите максимальную скорость движения перемычки.*

При движении перемычки в магнитном поле (рис. 15) на неё помимо сил тяжести $m\vec{g}$, реакции опоры $\vec{N}$ и трения $\vec{F}_{\text{тр}}$ действует сила Ампера $\vec{F}_A$, обусловленная возникающими ЭДС индукции и индукционным током в контуре *MDCK*. Индукционный ток I течёт в направлении от M к K, сила Ампера направлена горизонтально вправо (направления тока в контуре и силы Ампера определяются правилами Ленца и левой руки соответственно). Магнитный поток, пронизывающий кон-

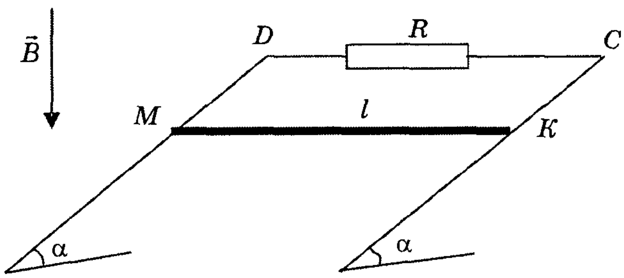

Рисунок 14

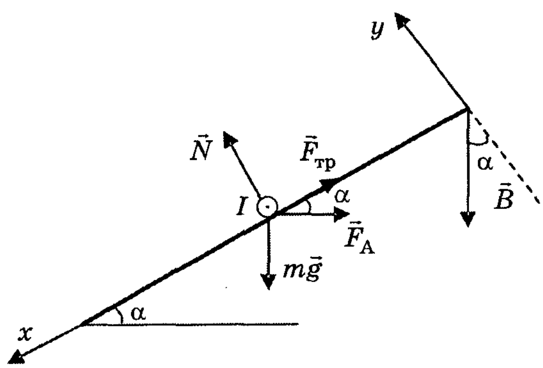

Рисунок 15

тур, $\Phi = B_{\perp}\Delta S = BS\cos\alpha$, ЭДС индукции $\mathscr{E}_i = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -B\frac{\Delta S}{\Delta t}\cos\alpha = -Blv\cos\alpha$. Скорость перемычки максимальна в момент времени, когда её ускорение равно нулю.

Воспользуемся уравнением движения перемычки в проекции на выбранные оси:

$$Ox\colon\ mg\sin\alpha - F_A\cos\alpha - F_{тр} = 0;$$

$$Oy\colon\ N - mg\cos\alpha - F_A\sin\alpha = 0.$$

Умножаем второе уравнение на μ и складываем с первым уравнением почленно. С учётом, что $F_{тр} = \mu N$, получим $mg\sin\alpha - F_A\cos\alpha - \mu mg\cos\alpha - \mu F_A\sin\alpha = 0$.

Из этого выражения сила Ампера $F_A = \frac{mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha}$ (1). С другой стороны, сила Ампера определяется действием магнитного поля на проводник с током I: $F_A = I_i lB = \frac{\mathscr{E}_i lB}{R} = \frac{B^2l^2}{R}v\cos\alpha$ (2). Приравняв правые части выражений (1) и (2), определяем максимальную скорость перемычки: $v_{max} = \frac{mgR(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}{B^2l^2(\cos\alpha + \mu\sin\alpha)\cos\alpha}$.

Задача 9. *По двум параллельным наклонно расположенным проводящим стержням, замкнутым на конденсатор ёмкостью C, скользит проводник МК, масса которого m, длина l. Угол наклона стержней к горизонту α, коэффициент трения между стержнями и проводником μ. Вся система находится в вертикальном однородном магнитном поле индукцией $\vec{B}$ (рис. 16). Определите ускорение проводника.*

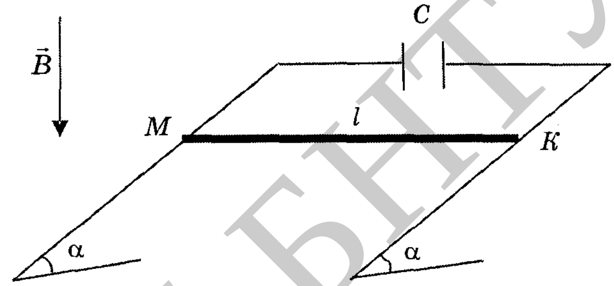

Рисунок 16

На рисунке 17 указаны действующие на проводник силы: тяжести $m\vec{g}$, реакции опоры $\vec{N}$, трения $\vec{F}_{тр}$, Ампера $\vec{F}_A$ (см. задачу 8). Запишем второй закон Ньютона в проекциях на выбранные оси:

$$Ox\colon\ mg\sin\alpha - F_{тр} - F_A\cos\alpha = ma\ (1);$$

$$Oy\colon\ N - mg\cos\alpha - F_A\sin\alpha = 0\ (2).$$

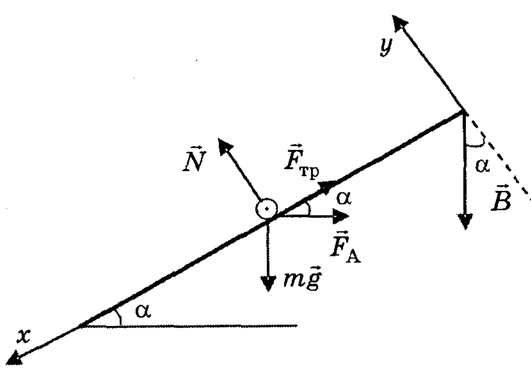

Рисунок 17

Домножив второе выражение на μ и сложив с выражением (1), получим $ma = mg\sin\alpha - F_A\cos\alpha - \mu mg\cos\alpha - \mu F_A\sin\alpha$ (3).

Определим силу Ампера $\vec{F}_A$, действующую на движущийся в магнитном поле проводник с током: $F_A = I_i lB$, где I_i — индукционный ток в контуре, равный $I_i = \frac{\Delta q}{\Delta t} = q'$.

Так как заряд на конденсаторе $q = CU_c = C\mathscr{E}_i = CBlv\cos\alpha$, то $I_i = CBla\cos\alpha$ ($v' = a$ — первая производная скорости по времени — это ускорение). Сила Ампера $F_А = CB^2l^2a\cos\alpha$ (4). С учётом (4) выражение (3) примет вид $ma = mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) - CB^2l^2a\cos\alpha(\cos\alpha + \mu\sin\alpha)$. Отсюда ускорение проводника MK

$$a = \frac{mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}{m + CB^2l^2\cos\alpha(\cos\alpha + \mu\sin\alpha)}.$$

Задача 10. *Металлический стержень длиной* $l = 1{,}5$ м *вращается в горизонтальной плоскости с угловой скоростью* $\omega = 60\,\frac{\text{рад}}{\text{с}}$ *в однородном магнитном поле, индукция которого* $B = 40$ мкТл. *Направление линий магнитной индукции перпендикулярно плоскости вращения стержня. Определите разность потенциалов U, возникающую между концами стержня, если ось вращения проходит: а) через один из концов стержня (рис. 18); б) через середину стержня (рис. 19). в) на расстоянии 1/3 длины от одного из концов стержня (рис. 20).*

При движении металлического проводника в магнитном поле на свободные электроны в проводнике действуют силы Лоренца, при этом электроны начинают смещаться вдоль проводника к одному из его концов. Смещение их происходит, пока напряжённость создаваемого электрического поля не достигнет значения, при котором силы, действующие со стороны электрического поля, не станут равными силам Лоренца. Между концами проводника возникнет разность потенциалов, равная возникшей ЭДС индукции: $U = \mathscr{E}_i$.

а) **Один из способов решения** следующий.

ЭДС индукции $\mathscr{E}_i = -\left|\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\right| = -\frac{B\Delta S}{\Delta t}$ (1), где ΔS — площадь, которую пересекает проводящий стержень при вращении в магнитном поле (см. рис. 18). $\Delta S = N\pi l^2$ (2),

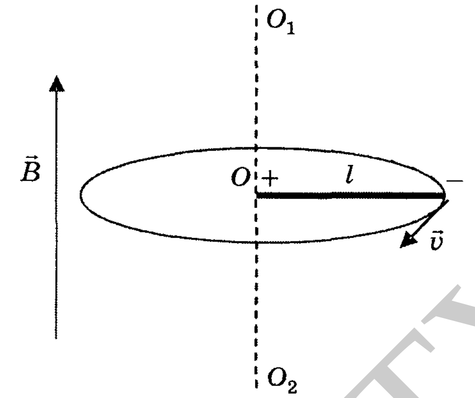

Рисунок 18

где N — число оборотов за время Δt, l — радиус окружности, которую описывает конец стержня. Так как угловая скорость ω связана с числом оборотов N соотношением $\omega = \frac{2\pi N}{\Delta t}$, то $N = \frac{\omega\Delta t}{2\pi}$ (3). Подставив (3) в (2), получим $\Delta S = \frac{\omega l^2\Delta t}{2} \Rightarrow \mathscr{E}_i = \left|-\frac{B\omega l^2}{2}\right| = 5{,}4$ мТл.

Второй способ решения состоит в следующем. Линейная скорость точек стержня равномерно изменяется от 0 до $v = \omega l$. Для расчёта ЭДС индукции берётся среднее значение скорости $v_{ср} = \frac{\omega l}{2}$ и ЭДС индукции $\mathscr{E}_i = \left|-Blv_{ср}\right| = \left|-\frac{Bl^2\omega}{2}\right| = 5{,}4$ мТл.

б)

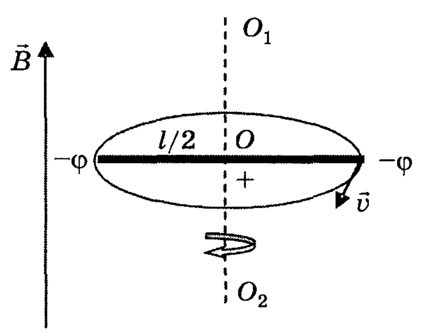

Рисунок 19

Очевидно, что при вращении стержня относительно оси O_1O_2, проходящей через середину стержня, на его концах возникают одинаковые потенциалы и их разность будет равна нулю.

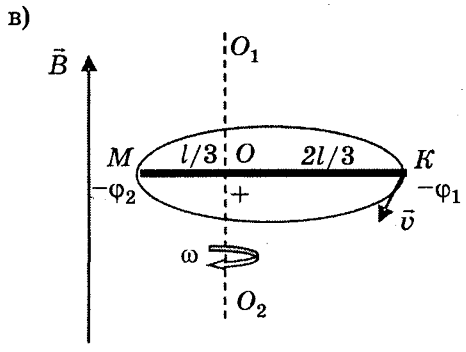

Рисунок 20

В данном случае разности потенциалов между точкой O в центре стержня и точками K и M, находящимися на его концах, равны соответственно $U_1 = \mathscr{E}_{i1} = \dfrac{B(2l/3)^2\omega}{2}$ и $U_2 = \mathscr{E}_{i2} = \dfrac{B(l/3)^2\omega}{2}$. Тогда разность потенциалов между концами стержня $U = U_2 - U_1 = \varphi_1 - \varphi_2 = \dfrac{B\omega}{2}\left(\dfrac{4l^2}{9} - \dfrac{l^2}{9}\right) = \dfrac{Bl^2\omega}{6} = 0{,}9$ мВ.

Задача 11. Плоский конденсатор, площадь каждой из пластин которого S, расстояние между ними d, находится в магнитном поле с индукцией $\vec{B}$. Параллельно пластинам с постоянной скоростью $\vec{v}$ движется поток проводящей жидкости, удельное сопротивление которой ρ (рис. 21). Определите полезную и максимальную мощность, выделяющуюся в виде тепла на внешнем сопротивлении R.

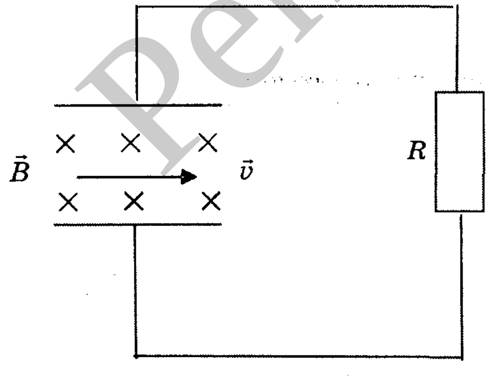

Рисунок 21

При движении проводящей жидкости (электролита) в магнитном поле со скоростью $\vec{v}$ движутся положительные и отрицательные ионы жидкости. На ионы действуют силы Лоренца, направление которых определяется по правилу левой руки: верхняя пластина становится положительной, нижняя отрицательной. Между пластинами конденсатора устанавливается разность потенциалов, равная ЭДС индукции, наводимой при движении проводника (в данном случае проводящей жидкости) в магнитном поле. ЭДС индукции равна $\mathscr{E}_i = Bdv$, сила индукционного тока из закона Ома: $I_i = \dfrac{\mathscr{E}_i}{R_0}$, где R_0 — общее сопротивление рассматриваемой цепи, равное сумме сопротивлений R и жидкости $R_ж = \rho\dfrac{d}{S}$. Мощность, выделяемая на внешнем сопротивлении: $P = I_i^2 R = \left(\dfrac{\mathscr{E}_i}{R_0}\right)^2 R = \left(\dfrac{Bdv}{R + \rho\dfrac{d}{S}}\right)^2 R$. Эта мощность будет максимальна при условии равенства внешнего сопротивления R сопротивлению жидкости $R_ж = \rho\dfrac{d}{S}$. Тогда

$$P_{max} = \frac{\mathscr{E}_i^2 S}{4\rho d} = \frac{(Bdv)^2 S}{4\rho d} = \frac{B^2v^2Sd}{4\rho}.$$

Список использованных источников

1. *Петров, К. А.* Явление электромагнитной индукции в курсе физики средней школы / К. А. Петров, Т. И. Развина // Фізіка. — 2013. — № 1. — С. 3—11.

2. *Черноуцан, А. И.* Физика. Задачи с ответами и решениями / А. И. Черноуцан. — М. : КДУ, 2005. — 352 с.

3. Физика: 3800 задач для школьников и поступающих в вузы. — М. : Дрофа, 2000. — 672 с.