МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Белорусский национальный технический университет

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ГЛАВЫ МАТЕМАТИКИ

Практикум

Электронный учебный материал

Минск ◊ БНТУ ◊ 2015

УДК 519.17(075.8)

Авторы:

А. В. Грекова, В. И. Каскевич, А. В. Метельский,
Е. А. Федосик, Н. И. Чепелев

Рецензенты:

А. Н. Исаченко, доцент БГУ, к. ф.-м. н.,
В. В. Павлов, доцент БНТУ, к.ф.-м.н.

Пособие разработано в соответствии с учебной программой курса «Специальные главы математики» для специальностей «Программное обеспечение информационных технологий» и «Информационные системы и технологии» ФИТР БНТУ. Приведены задачи по четырем базовым разделам математики: теории множеств, теории графов, теории чисел и основным алгебраическим структурам. Предлагаемый материал ставит своей целью помочь студентам овладеть твердыми знаниями математических основ, которые позволили бы им успешно ориентироваться в специальной литературе по данной тематике и на основании этого перейти к серьезным приложениям.

Белорусский национальный технический университет
пр-т Независимости, 65, г. Минск, Республика Беларусь
Тел.(017)292-77-52 факс (017)292-91-37
E-mail: mathematics1@bntu.by
http://www.bntu.by/fitr-vm1.html
Регистрационный № БНТУ/ФИТР48-19.2015

ОГЛАВЛЕНИЕ

ОСНОВЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

Занятие 1. Операции над множествами. Алгебра множеств. Декартово произведение множеств

Аудиторные задания

1.1 Верно ли равенство множеств $A = B$, если

а) $A = \{1,\ 2, 3, 4, 5\}$, $\quad B = \{1,\ 3, 5, 2, 4\}$;

б) $A = \{1,\ 2, 3, 4, 5\}$, $\quad B = \{1,\ [2, 3], 4, 5\}$;

в) $A = \{1,\ \{2, 3\}, 4, 5\}$, $\quad B = \{4,\ \{3, 2\}, 1, 5\}$;

г) $A = \{1,\ \{2, 3\}, 4,\ \{5\}\}$, $\quad B = \{1,\ \{2, 3\}, 4, 5\}$.

1.2 Найдите множества $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$ и дайте (в случае бесконечных множеств) их геометрическую интерпретацию, если

а) $A = \{-1, 0, 2, 3, 4\}$, $\quad B = \{-2, 0, 1, 4, 6\}$;

б) $A = [0, 3]$, $\quad B = [1, 5]$;

в) $A = (-\infty, 3]$, $\quad B = [-1, 5]$.

1.3 Пусть F – множество решений уравнения $f(x) = 0$, а G – множество решений уравнения $g(x) = 0$. С помощью операций над множествами представьте множество решений уравнения:

а) $f(x)g(x) = 0$; **б)** $(f(x))^2 + (g(x))^2 = 0$; **в)** $\dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$.

1.4 Найдите множества $A \times B$, $B \times A$, B^2, A^3, $A \times B \times A$ и дайте (в случае бесконечных множеств) их геометрическую интерпретацию, если

а) $A = \{1,\ 2\}$, $\quad B = \{2, 3, 4\}$;

б) $A = [1,\ 2]$, $\quad B = \{2, 3, 4\}$;

в) $A = [1,\ 2]$, $\quad B = [2, 4]$.

1.5 Каким условиям должны удовлетворять множества A и B, чтобы

а) $A \cap B = A \cup B$; **б)** $(A \setminus B) \cup B = A$; **в)** $(A \cup B) \setminus B = A$.

1.6 Пусть A, B и C – произвольные множества. Какие из следующих равенств являются верными:

а) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$; **б)** $A \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus C$;

в) $(A \setminus B) \cup C = (A \cup C) \setminus B$?

1.7 Докажите тождества:

а) $((A \cup B) \cap \overline{C}) \cap ((\overline{A \cup B}) \cap C) = \varnothing$; **б)** $\overline{(A \cap \overline{X}) \cup (B \cap \overline{X})} = (\overline{A} \cup X) \cap (\overline{B} \cup X)$.

1.8 Докажите, что для любых множеств A, B и C

а) если $A = B \bigcup C$, то $A \setminus B \subseteq C$;

б) если $B \subseteq A$, то $(A \setminus B) \bigcup B = A$;

в) $A \setminus B = A \;\Leftrightarrow\; A \bigcap B = \varnothing$.

1.9 Разностная сумма множеств (или сумма по модулю 2) определяется следующим равенством: $A \oplus B = (A \bigcap \overline{B}) \bigcup (\overline{A} \bigcap B)$. Найдите формулы, которые могут служить другими эквивалентными определениями этой операции. Докажите следующие свойства:

а) $A \oplus B = B \oplus C$;

б) $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$;

в) $A \oplus A = \varnothing$.

1.10 В потоке учится 100 студентов. 28 из них изучают английский язык, 30 – немецкий, 42 – французский. При этом известно также, что 8 студентов изучают параллельно английский и немецкий языки, 10 – английский и французский, 5 – немецкий и французский, а 3 студента изучают все три названных языка. Определите, сколько студентов

а) изучают только английский язык;

б) изучают только немецкий язык;

в) изучают только французский язык;

г) не изучают ни одного из названных языков.

Домашние задания

1.11 Верно ли равенство множеств $A = B$, если

а) $A = \{1,\ [2, 3], 4, 5\}$, $B = \{1,\ \{2, 3\}, 4, 5\}$;

б) $A = \{\{1, [2, 3]\}, 4, 5\}$, $B = \{1,\ \{[2, 3], 4\}, 5\}$.

1.12 Найдите множества $A \bigcap B$, $A \bigcup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$ и дайте (в случае бесконечных множеств) их геометрическую интерпретацию, если

а) $A = [0, 3]$, $B = \{-2, 0, 1, 4, 6\}$;

б) $A = [0, 3) \bigcup [5, 7)$, $B = [1, 6]$;

в) $A = \{x \in R \mid x^2 + x - 20 = 0\}$, $B = \{x \in R \mid x^2 - 7x + 12 = 0\}$.

1.13 Пусть U – универсальное множество; A и B – его подмножества. Докажите следующие утверждения:

а) $A \subseteq B \quad \Leftrightarrow \quad \overline{B} \subseteq \overline{A}$;

б) $A \bigcup B = U \quad \Leftrightarrow \quad \overline{A} \subseteq B \quad \Leftrightarrow \quad \overline{B} \subseteq A$;

в) $A \bigcap B = \varnothing \quad \Leftrightarrow \quad A \subseteq \overline{B} \quad \Leftrightarrow \quad B \subseteq \overline{A}$.

1.14 Докажите тождество:

$(A \bigcap B \bigcap X) \bigcup (A \bigcap B \bigcap C \bigcap X \bigcap Y) \bigcup (A \bigcap X \bigcap \overline{A}) = A \bigcap B \bigcap X$.

1.15 Докажите, что для любых множеств A, B и C

а) $A \bigcup B = B \bigcap C \quad \Leftrightarrow \quad A \subseteq B \subseteq C$;

б) $(A \bigcap B) \bigcup C = A \bigcap (B \bigcup C) \quad \Leftrightarrow \quad C \subseteq A$.

1.16 Докажите следующие свойства:

а) $A \oplus \varnothing = A$;

б) $A \bigcap (B \oplus C) = (A \bigcap B) \oplus (A \bigcap C)$;

в) $A \oplus B = \varnothing \quad \Leftrightarrow \quad A = B$.

Ответы: 1.1 а) да; **б)** нет; **в)** да; **г)** да.

1.2 а) $A \bigcap B = \{0,4\}$; $\quad A \bigcup B = \{-2,-1,0,1,2,3,4,6\}$; $\quad A \setminus B = \{-1,2,3\}$; $\quad B \setminus A = \{-2,1,6\}$;

б) $A \bigcap B = [1,3]$; $\quad A \bigcup B = [0,5]$; $\quad A \setminus B = [0,1)$; $\quad B \setminus A = (3,5]$;

в) $A \bigcap B = [-1,3]$; $\quad A \bigcup B = (-\infty,5]$; $\quad A \setminus B = (-\infty,-1)$; $\quad B \setminus A = (3,5]$.

1.3 а) $F \bigcup G$; **б)** $F \bigcap G$; **в)** $F \setminus G$.

1.4 а)

$A \times B = \{(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,3),(2,4)\}$; $\quad B \times A = \{(2,1),(2,2),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2)\}$;

$B^2 = \{(2,2),(2,3),(2,4),(3,2),(3,3),(3,4),(4,2),(4,3),(4,4)\}$;

$A^3 = \{(1,1,1),(1,1,2),(1,2,1),(1,2,2),(2,1,1),(2,1,2),(2,2,1),(2,1,2)\}$;

$A \times B \times A = \{(1,2,1),(1,3,1),(1,4,1),(2,2,1),(2,3,1),(2,4,1),(1,2,2),(1,3,2),(1,4,2),(2,2,2),(2,3,2),(2,4,2)\}$

б)

$A \times B = \{([1,2],2),([1,2],3),([1,2],4)\}$; $\quad B \times A = \{(2,[1,2]),(3,[1,2]),(4,[1,2])\}$;

$A^3 -$ куб: $1 \le x \le 2, 1 \le y \le 2, 1 \le z \le 2$;

$A \times B \times A = \{([1,2],2,[1,2]),([1,2],3,[1,2]),([1,2],4,[1,2])\}$;

в)

$A \times B -$ прямоугольник: $1 \le x \le 2,\ 2 \le y \le 4$; $\quad B \times A -$ прямоугольник: $2 \le x \le 4, 1 \le y \le 2$;

$B^2 -$ квадрат: $2 \le x \le 4,\ 2 \le y \le 4$; $\quad A^3 = -$ куб: $1 \le x \le 2, 1 \le y \le 2, 1 \le z \le 2$;

$A \times B \times A -$ прямоугольный параллелепипед: $1 \le x \le 2,\ 2 \le y \le 4, 1 \le z \le 2$.

1.5 а) $A = B$; **б)** $B \subseteq A$; **в)** $A \bigcap B \ne \varnothing$.

1.6 а) да; **б)** нет; **в)** нет.

1.10 а) 7; **б)** 14; **в)** 24; **г)** 29.

1.11 а) нет; **б)** да.

1.12 а) $A \cap B = \{0,1\}$; $A \cup B = \{-2,[0,3],4,6\}$; $A \setminus B = \{(0,1) \cup (1,3]\}$; $B \setminus A = \{-2,4,6\}$;

б) $A \cap B = \{[1,3) \cup [5,6]\}$; $A \cup B = [0,7)$; $A \setminus B = \{[0,1) \cup (6,7]\}$; $B \setminus A = [3,5)$;

в) $A \cap B = \{4\}$; $A \cup B = \{-5,3,4\}$; $A \setminus B = \{-5\}$; $B \setminus A = \{3\}$.

Занятие 2. Отображения множеств. Бинарные отношения на множествах

Аудиторные задания

2.1 Пусть $\mathbf{R}$ – множество действительных чисел и заданы следующие отображения:

$f:\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2$, $g:\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g(x) = \sin x$;

$h:\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $h(x) = \sin x^2$, $h:\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $k(x) = \sin^2 x$.

Найдите f^2, fg, gf, gh, hk, kf, h^2, k^2, fgh, ghk, gkh, $fghk$, f^4, k^4. Существуют ли среди заданных и найденных отображений равные?

2.2 Пусть $X = \{x_1, x_2, \ldots x_m\}$, $Y = \{y_1, y_2, \ldots y_n\}$. Найдите число всех отображений $X \to Y$. При каких *n* и *m* существует

а) инъективное отображение $X \to Y$;

б) сюръективное отображение $X \to Y$;

в) биективное отображение $X \to Y$?

2.3 Пусть X – конечное множество. Докажите, что отображение $f: X \to X$ сюръективно тогда и только тогда, когда оно инъективно.

2.4 Какие из следующих отображений являются инъективными, сюръективными, биективными:

а) $f:\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 3x - 2$;

б) $f:\mathbf{N} \to \mathbf{N}$, $f(x) = 3x - 2$, (здесь $\mathbf{N}$ – множество натуральных чисел);

в) $f:\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = |x|$;

г) $f:\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2$;

д) $f:\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^3$;

е) $f:\mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$, $f(x) = \ln x$ (здесь $\mathbf{R}_+$ – множество положительных действительных чисел);

ж) $f:\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 2^x + 1$;

з) $f:\mathbf{R} \to \mathbf{R}_+$, $f(x) = 3^x$

Какие из перечисленных отображений обратимы? Для них найдите обратные отображения.

2.5 Пусть $f: X \to Y$ – произвольное отображение. Докажите, что для любых $A \subseteq X$ и $B \subseteq X$:

а) если $A \subseteq B$, то $f(A) \subseteq f(B)$;

б) $f(A \bigcup B) = f(A) \bigcup f(B)$;

в) $f(A \bigcap B) \subseteq f(A) \bigcap f(B)$ (приведите пример, когда неверно обратное включение);

г) $f(A \bigcap B) = f(A) \bigcap f(B)$ тогда и только тогда, когда отображение $f: X \to Y$ – инъективно.

2.6 Пусть $f: X \to X$ – такое отображение, что $f^n = \mathrm{id}_X$ для некоторого натурального n. Докажите, что f – биекция.

2.7 На множестве $X = \{1, 2, 3, ..., 20\}$ задано бинарное отношение σ. Найдите область определения и множество значений этого отношения. Является ли оно функциональным, рефлексивным, антирефлексивным, симметричным, антисимметричным, транзитивным, связным, если для любых $a, b \in X$ по определению $a \sigma b$ означает:

а) $a - b = 8$;

б) $a + b = 18$;

в) $a \cdot b = 24$;

г) $a^2 = b$.

2.8 На множестве натуральных чисел $\mathbf{N}$ задано бинарное отношение p. Найдите область определения и множество значений этого отношения. Является ли оно функциональным, рефлексивным, антирефлексивным, симметричным, антисимметричным, транзитивным, связным, если для любых $n, m \in \mathbf{N}$ по определению npm означает:

а) $m = 3n - 1$;

б) $|n - m| = 8$;

в) $n \le 2m$;

г) НОД$(n, m) = 1$.

2.9 Какими свойствами (рефлексивность, антирефлексивность, симметричность, антисимметричность, транзитивность) обладают следующие отношения:

а) «$\|$» на множестве прямых в пространстве;

б) «$\perp$» на множестве прямых в пространстве;

в) «~» (подобие) на множестве фигур на плоскости;

г) «$\subset$» на множестве подмножеств универсального множества.

2.10 Какие из следующих отношений являются функциональными:

а) $p_1 = \{(x, y) \in [-1, 1] \times [0, 1] \mid x^2 + y^2 = 1\}$;

б) $p_2 = \{(x, y) \in [0, 1] \times [-1, 1] \mid x^2 + y^2 = 1\}$;

в) $p_3 = \{(x, y) \in [-1, 1] \times [-1, 1] \mid x^2 + y^2 = 1\}$;

г) $p_4 = \{(x, y) \in [-1, 1] \times [-1, 0] \mid x^2 + y^2 = 1\}$.

2.11 Что можно сказать об отношениях $\overline{p}$ и p^{-1}, если отношение p

а) рефлексивно; **б)** симметрично; **в)** антисимметрично; г) транзитивно.

2.12 Пусть p и σ – бинарные отношения на множестве натуральных чисел. Найдите σp, $p\sigma$, p^2, σ^2, p^{-1}, σ^{-1}, если

а) $p = \{(1, 2), (2, 3), (2, 4)\}$, $\sigma = \{(1, 2), (3, 2), (3, 4)\}$;

б) $p = \{(1, 2), (1, 5), (2, 4), (3, 4)\}$, $\sigma = \{(1, 3), (3, 2), (3, 1), (2, 6), (3, 7)\}$;

в) $npm \Leftrightarrow m \vdots n$, $n\sigma m \Leftrightarrow n \le m$.

2.13 Пусть p и σ – отношения на множествах X и Y. Докажите, что

а) $(p \cup \sigma)^{-1} = p^{-1} \cup \sigma^{-1}$;

б) $(p \cap \sigma)^{-1} = p^{-1} \cap \sigma^{-1}$;

в) $(p \setminus \sigma)^{-1} = p^{-1} \setminus \sigma^{-1}$.

2.14 Пусть σ – бинарное отношение на множестве X. Докажите, что свойства рефлексивности, симметричности и транзитивности равносильны соответственно:

а) $e \subseteq \sigma$; **б)** $\sigma^{-1} = \sigma$; **в)** $\sigma^2 = \sigma$.

2.15 Докажите, что для любого бинарного отношения p на множестве X отношения $p \cap p^{-1}$ и $p \cup p^{-1}$ являются симметричными.

2.16 Докажите, что бинарное отношение σ тогда и только тогда является отношением эквивалентности, когда

а) $e \subseteq \sigma$; **б)** $\sigma^{-1} \subseteq \sigma$; **в)** $\sigma^2 \subseteq \sigma$.

2.17 Пусть p и σ – отношения частичного порядка на множестве X. Докажите или опровергните, что $p \cap \sigma$ и $p \cup \sigma$ также являются отношениями

а) эквивалентности; **б)** частичного порядка.

Домашние задания

2.18 Какие из следующих отображений являются инъективными, сюръективными, биективными:

а) $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \cos x$;

б) $f:[0,\pi]\to[-1,1]$, $f(x)=\cos x$;

в) $f:[0,1]\to[0,1]$, $f(x)=\sqrt{1-x^2}$;

г) $f:[-2,1)\to(-\infty,\frac{2}{3}]$, $f(x)=\frac{x}{x-1}$.

Какие из перечисленных отображений обратимы? Для них найдите обратные отображения.

2.19 Найти в условиях задачи 2.7:

а) $a^2<b$;

б) $a:b$ (a делится на b);

2.20 Найти в условиях задачи 2.9:

а) «:» (делится на) на множестве **Z** целых чисел;

б) «>» на множестве **R** действительных чисел.

2.21 Какие из следующих отношений являются функциональными:

а) $p_5=\{(x,y)\in[-1,0]\times[-1,0] \mid x^2+y^2=1\}$;

б) $\sigma_1=\{(x,y)\in\mathbf{N}\times\mathbf{N} \mid x-y=5\}$;

в) $\sigma_2=\{(x,y)\in\mathbf{N}\times\mathbf{N} \mid y-x=5\}$.

2.22 Пусть p и σ – отношения на множествах X и Y. Докажите, что

а) $p\subset\sigma \quad\Leftrightarrow\quad p^{-1}\subset\sigma^{-1}$;

б) $(\overline{p})^{-1}=\overline{\rho^{-1}}$.

2.23 Докажите, что если p – рефлексивное и транзитивное отношение на множестве X, то $p\cap p^{-1}$ и $p\cup p^{-1}$ являются отношением эквивалентности.

2.24 Докажите, что бинарное отношение σ тогда и только тогда является отношением частичного порядка, когда

а) $e\subseteq\sigma$; б) $\sigma\cap\sigma^{-1}\subseteq e$; в) $\sigma^2=\sigma$.

Занятие 3. Комбинаторика и мощности множеств

Аудиторные задания

3.1 Сколько существует способов расположить n предметов по кругу?

3.2 Сколько существует способов рассадить за круглым столом n мужчин и n женщин, чтобы мужчины и женщины чередовались?

3.3 Сколько существует способов выбрать из n депутатов комиссию, состоящую из m человек и ее председателя?

3.4 В студенческой группе 30 человек. Сколько существует способов разбить ее на две **а)** равные по численности, **б)** произвольные подгруппы и в каждой подгруппе выбрать старосту?

3.5 Пусть C_n^m – число сочетаний из n элементов по m. Докажите, справедливость следующих формул:

а) $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + ... = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + ... = 2^{n-1}$;

б) $0 \cdot C_n^0 + 1 \cdot C_n^1 + 2 \cdot C_n^2 + ... + n \cdot C_n^n = n \cdot 2^{n-1}$;

в) $1 \cdot C_n^0 + \frac{1}{2} \cdot C_n^1 + \frac{1}{3} \cdot C_n^2 + ... + \frac{1}{n+1} \cdot C_n^n = \frac{1}{n+1}\left(2^{n+1} - 1\right)$.

Перестановки с повторениями

3.6 Сколько различных слов можно получить путем перестановки букв в слове: **а)** МАТЕМАТИКА; **б)** ПЕРЕЕЗД?

3.7 Сколько различных шестизначных чисел можно записать с помощью цифр 1; 1; 1; 2; 2; 2?

Сочетания с повторениями

3.8 В технической библиотеке имеются книги по математике, физике, химии и т.д., всего по 16 разделам науки. Поступили очередные четыре заказа на литературу. Считая, что любой состав заказанной литературы равновозможен, найти число возможных случаев, что заказаны книги из различных разделов науки.

3.9 Сколько существует способов рассадить трех вновь прибывших гостей между семью гостями, уже сидящими за круглым столом? Между семью гостями имеется семь промежутков, в каждый из которых можно посадить любое количество прибывших гостей, т.е. для каждого из трех гостей нужно выбрать один из семи промежутков (не обязательно, разные промежутки для разных гостей).

Размещения с повторениями

3.10 Семь одинаковых шариков случайным образом рассыпаются по 4 лункам (в одну лунку может поместиться любое число шариков). Сколько существует различных способов распределения 7 шариков по 4 лункам?

3.11 Номер автомобиля состоит из двух букв и четырех цифр. Сколько различных номеров можно составить, используя 30 букв и 10 цифр?

3.12 Для мощности объединения двух конечных множеств справедлива формула $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$. Найдите аналогичную формулу для мощности объединения трех конечных множеств.

3.13 **а)** пусть $|X|=n$ и $|Y|=n$. Найдите число биективных отображений $X \to Y$ (см. задачу **2.2 в)**); **б)** Пусть $|X|=n$, а $|Y|=m$, $m \le n$ (**см. 2.2 а)**). Найдите число инъективных отображений $X \to Y$.

3.14 Множество X состоит из 5 элементов. Найдите число разбиений этого множества на непустые подмножества.

3.15 Прямая разбита на отрезки. Какую мощность может иметь полученное множество отрезков?

3.16 Определите мощность множества алгебраических чисел. (Число называется алгебраическим, если оно является корнем некоторого многочлена с целыми коэффициентами.)

Домашние задания

3.17 В карточке лотереи 5 из 35 игрок должен зачеркнуть пять чисел. Сколькими способами можно это сделать?

3.18 В хоккейном турнире участвуют 6 команд. Сколько нужно всего сыграть игр, если каждая команда встретится с остальными командами дважды?

3.19 В урне 6 белых и 4 черных шара. Из урны случайным образом берется пять шаров. Сколько будет различных комбинаций, состоящих из 3 белых и 2 черных шаров?

3.20 Руководство фирмы выбирает из 8 кандидатов трех человек на различные должности (все восемь кандидатов имеют равные шансы). Сколькими способами это можно сделать?

3.21 Из 10 мужчин и 8 женщин выбирают состав работников фирмы. Требуется 6 человек, из них 4 мужчины и 3 женщины. Сколькими способами можно выбрать такой состав сотрудников?

3.22 На окружности выбрано 10 точек. Сколько существует треугольников с вершинами в этих точках?

3.23 Имеется шесть пар перчаток разных размеров. Сколькими способами можно выбрать из них одну перчатку на левую руку и одну на правую так, чтобы эти перчатки были разных размеров?

3.24 Докажите справедливость следующих формул:

а) $C_n^{n-m} = C_n^m$; **б)** $m \cdot C_n^m = n \cdot C_{n-1}^{m-1}$; **в)** $C_n^m + C_n^{m+1} = C_{n+1}^{m+1}$.

3.25 Сколько различных перестановок букв можно сделать в словах:

а) замок; **б)** ротор; **в)** топор; **г)** колокол.

3.26 Имеется множество цифр 1; 2; 2; 3; 3; 3. Сколько различных шестизначных чисел можно составить из этих цифр?

3.27 Сколькими способами можно из 9 человек образовать три комиссии соответственно по четыре, три и два человека в каждой?

Ответы: 3.1 n!; **3.2** $\frac{2(n!)^2}{(2n)!}$; **3.3** mC_n^m; **3.4 а)** 155117520; **3.6 а)** 151200; **б)** 840; **3.7** 20; **3.8** 3876; **3.9** 84; **3.10** 2401; **3.11** 9000000; **3.13 а)** n!; **б)** A_n^m; **3.14** 52; **3.16** Мощность счетного множества $\aleph_0$ (алеф-ноль); **3.17** 324632; **3.18** 30; **3.19** 120; **3.20** 336; **3.21** 6720; **3.22** 120; **3.23** 30; **3.25 а)** 120; **б)** 30; **в)** 60; **г)** 210; **3.26** 60; **3.27** 1260.

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ГРАФОВ

Занятие 4. Основные понятия теории графов. Изоморфизм. Лемма о рукопожатиях

Аудиторные задания

Понятие графа

4.1 Между 9 планетами Солнечной системы введено космическое сообщение. Ракеты летают по следующим маршрутам: Земля – Меркурий, Плутон – Венера, Земля – Плутон, Плутон – Меркурий, Меркурий – Венера, Уран – Нептун, Нептун – Сатурн, Сатурн – Юпитер, Юпитер – Марс и Марс – Уран. Можно ли добраться с Земли до Марса?

4.2 Можно ли, сделав несколько ходов конями из исходного положения, изображенного на рисунке 1, расположить их так, как показано на рисунке 2?

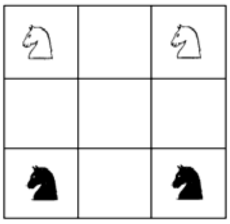


Рисунок 1

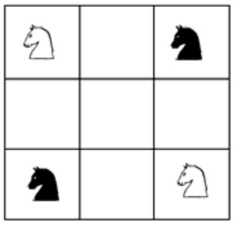


Рисунок 2

4.3 Доска имеет форму креста, который получается, если из квадратной доски 4×4 выкинуть угловые клетки (рисунок 3). Можно ли обойти ее ходом шахматного коня и вернуться на исходное поле, побывав на всех полях ровно по разу?

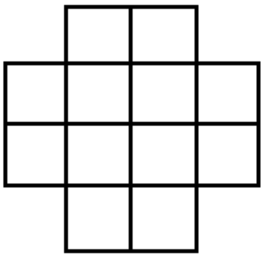


Рисунок 3

Изоморфизм

4.4 Изоморфны ли графы на рисунках 4 и 5 из задачи **4.1**?

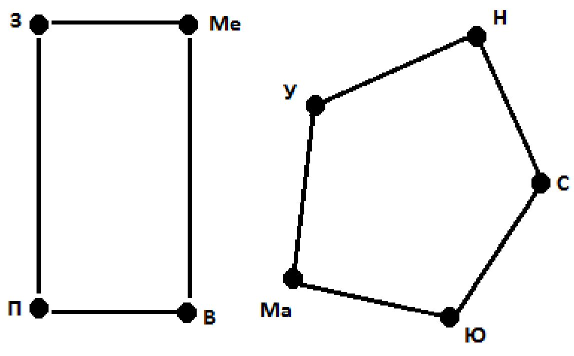


Рисунок 4

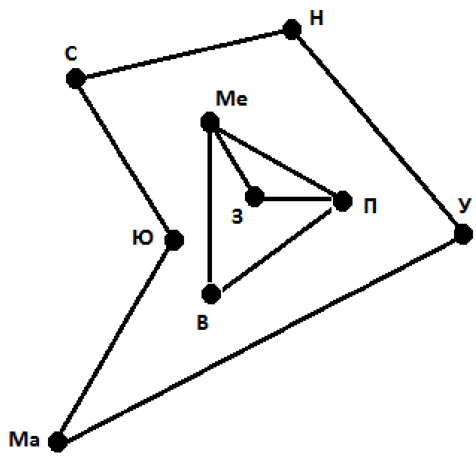


Рисунок 5

4.5 На турнире пяти команд A, B, C, D, E команда A сыграла с B, D и E, кроме того, C сыграла с B и D, а D с E. Правильно ли отражают описанную ситуацию рисунки 6 и7?

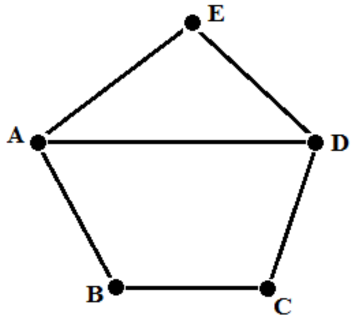


Рисунок 6

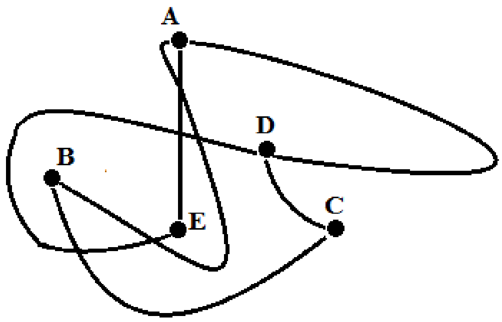


Рисунок 7

4.6 Изоморфны ли следующие графы?

а)

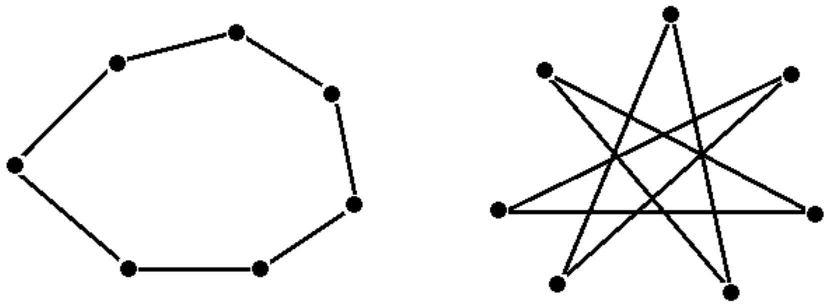


Рисунок 8

б)

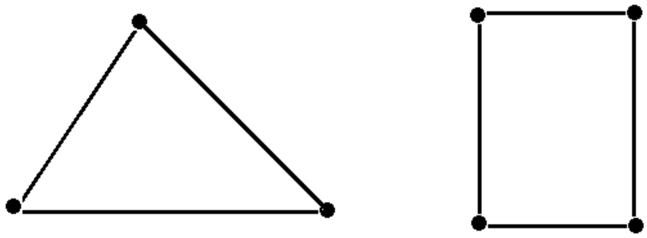


Рисунок 9

в)

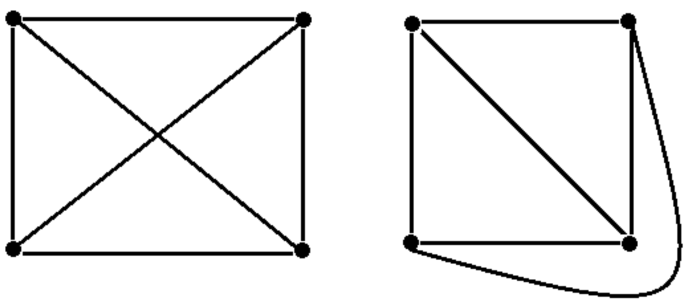


Рисунок 10

г)

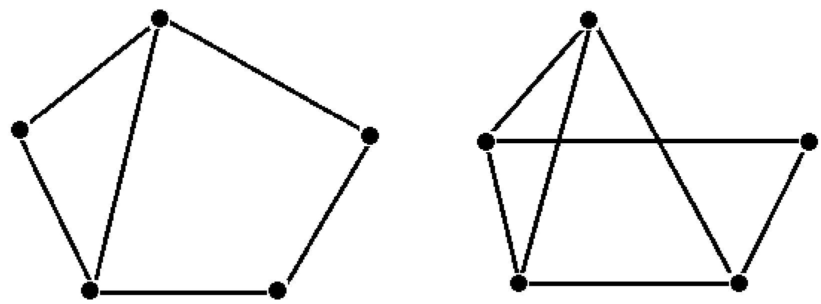


Рисунок 11

Степени вершин и подсчет числа ребер, Лемма о «рукопожатиях»

4.7 В городе Маленьком 15 телефонов. Можно ли их соединить проводами так, чтобы каждый телефон был соединен ровно с пятью другими?

4.8 В государстве 100 городов, а из каждого из них выходит 4 дороги. Сколько всего дорог в государстве?

4.9 Может ли быть в некоторой области 30 городов, чтобы из 9 городов выходили по 3 дороги, из 11 – по 4, из 10 – по 5 дорог?

4.10 В учебной группе 30 человек. Может ли быть так, что 9 из них имеют по 3 друга (в этой группе), 11 – по 4 друга, а 10 – по 5 друзей?

4.11 У короля 19 вассалов. Может ли оказаться так, что у каждого вассала 1, 5 или 9 соседей?

4.12 Студент, приехав из Диснейленда. Рассказал, что там на заколдованном озере имеются 7 островов, с каждого из которых ведет 1, 3 и 5 мостов. Верно ли, что хотя бы один из этих мостов обязательно выходит на берег озера?

4.13 Могут ли степени вершин в графе быть равны:

а) 8, 6, 5, 4, 4, 3, 2, 2; **б)** 6, 6, 6, 5, 5, 3, 2, 2;

в) 7, 7, 6, 3, 3, 2, 2, 2; **г)** 7, 7, 6, 5, 4, 2, 2, 2.

Связные графы

4.14 В стране Семерка 15 городов, каждый из которых соединен дорогами не менее, чем с 7 другими. Докажите, что из любого города можно добраться до любого другого (возможно проезжая через другие города).

4.15 Докажите, что граф с n вершинами, степень каждой из которых не менее $\frac{n-1}{2}$, – связен.

4.16 В Тридевятом царстве лишь один вид транспорта – ковер-самолет. Из столицы выходит 21 ковролиния, из города Дальний – одна, а из всех остальных городов – по 20. Докажите, что из столицы можно долететь в Дальний (возможно, с пересадками).

4.17 В стране из каждого города выходит 100 дорог и от любого города можно добраться до любого другого. Одну дорогу закрыли на ремонт. Можно ли и теперь от любого города добраться до любого другого?

Домашние задания

4.18 В стране Цифра есть 9 городов с названиями 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Путешественник обнаружил, что два города соединены авиалинией в том и только в том случае, если двузначное число, составленное из цифр-названий этих городов, делится на 3. Можно ли добраться из города 1 в город 9?

4.19 Какие из графов на рисунках 13, 14, 15 изоморфны графу из задачи 4.2 (рисунок 12)?

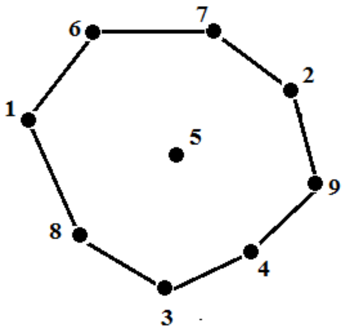


Рисунок 12

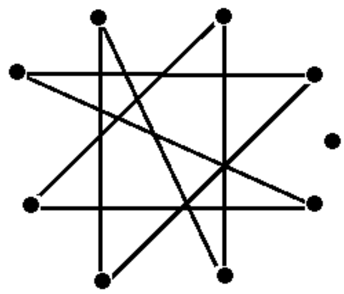


Рисунок 13

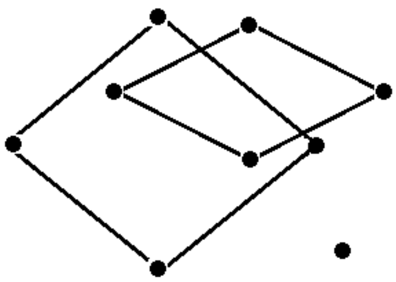


Рисунок 14

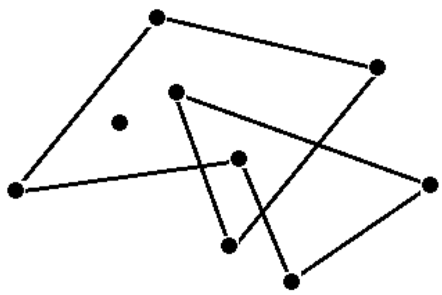


Рисунок 15

4.20 Изоморфны ли следующие графы:

а)

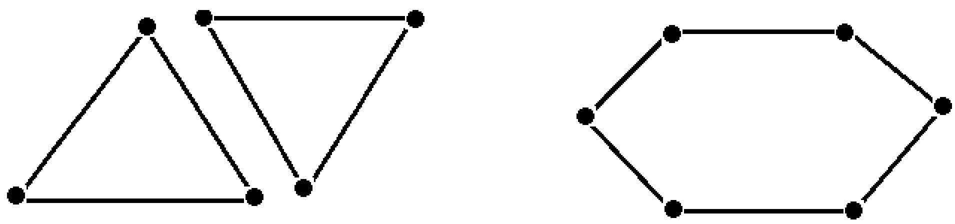


Рисунок 16

б)

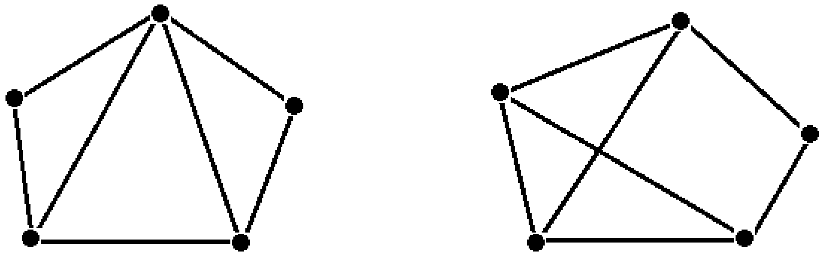


Рисунок 17

в)

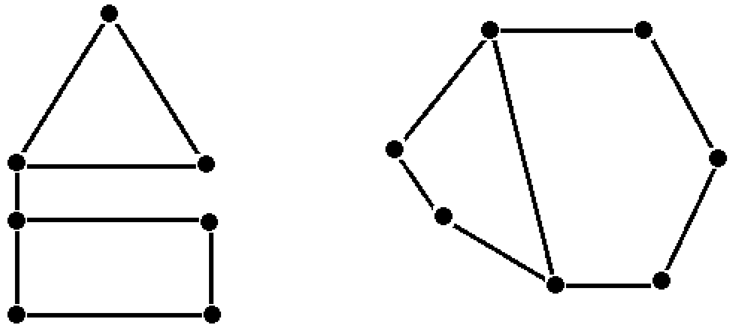


Рисунок 18

4.21 В городе Маленьком 15 телефонов. Можно ли их соединить проводами так, чтобы:

а) каждый телефон был соединен ровно с семью другими?

б) было 4 телефона, каждый из которых соединен с тремя; 8 телефонов, каждый из которых соединен с шестью; 3 телефона, каждый из которых соединен с пятью другими?

4.22 Может ли в государстве, в котором из каждого города выходит 3 дороги, быть ровно 100 дорог?

4.23 Имеется 30 человек, некоторые из них знакомы. Доказать, что число людей, имеющих нечетное число знакомых, четно.

4.24 В некоторой стране из столицы выходит 89 дорог, из города Дальний – 1 дорога, из остальных 1988 городов – по 20 дорог. Можно ли из столицы проехать в город Дальний?

4.25 Могут ли степени вершин в графе быть равны:

а) 7, 7, 6, 5, 4, 2, 2, 1; **б)** 8, 6, 5, 4, 3, 3, 2, 2.

4.26 Из полного 100-вершинного графа выкинули 98 ребер. Остался ли граф связным?

4.27 Из графа K_{50} удалили 1176 ребер. Остался ли граф связным?

Ориентированные графы

4.28 Студент, вернувшись из путешествия, рассказал, что был в краю, где есть несколько озер, соединенных между собой реками. Из каждого озера вытекает три реки, и в каждое озеро впадает четыре реки. Говорил ли студент правду?

4.29 В некоторой стране есть столица и еще 100 городов. Некоторые города (в том числе и столица) соединены дорогами с односторонним движением. Из каждого нестоличного города выходит 20 дорог, и в каждый такой город входит 21 дорога. Докажите, что в столицу нельзя проехать ни из одного города.

Ответы: **4.1** нет; **4.2** нет; **4.3** да; **4.4** да; **4.5** да; **4.6 а)** да; **б)** нет; **в)** да; **г)** нет; **4.7** нельзя; **4.8** 200; **4.9** не может; **4.10** не может; **4.11** не может; **4.12** да. **4.13 а)** да; **б)** нет; **в)** да; **г)** нет; **4.17** да; **4.18** нет; **4.19** на рис. 13 и рис. 15; **4.20 а)** нет; **б)** нет; **в)** нет; **4.21 а)** нельзя; **б)** нельзя; **4.22** не может; **4.23** да; **4.24 а)** да; **б)** нет; **4.26** да; **4.27** да; **4.28** нет.

Занятие 5. Матрицы смежности, инцидентности, Кирхгофа

Аудиторные задания

Матрицы смежности

5.1 Для графа *G* (рисунок 19) записать матрицу смежности:

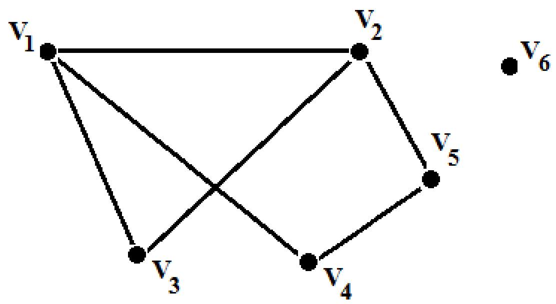


Рисунок 19

5.2 Для орграфа *G* (рисунок 20) записать матрицу смежности:

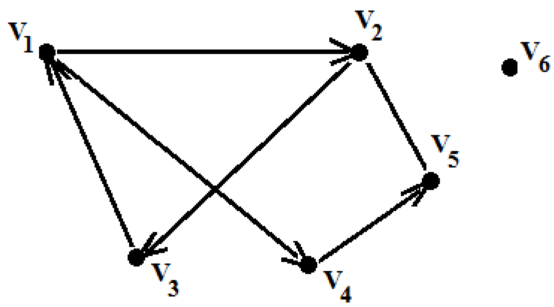


Рисунок 20

5.3 Граф G задан матрицей смежности. Нарисовать заданный граф.

$$M(G)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

5.4 Орграф G задан матрицей смежности. Нарисовать заданный орграф.

$$M(G)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5.5 Задан орграф $G=(V,U)$, где $V=(v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6)$ и $U=\{(v_1,v_2),(v_2,v_3),(v_2,v_6),(v_3,v_5),(v_4,v_2),(v_5,v_4),(v_6,v_1)\}$. Нарисовать заданный орграф. Записать матрицу смежности.

5.6 Для псевдографа G (рисунок 21) записать матрицу смежности.

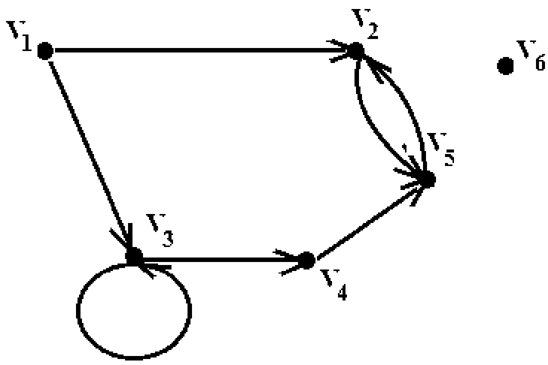


Рисунок 21

Матрицы инцидентности

5.7 Для графа G (рисунок 22) записать матрицу инцидентности:

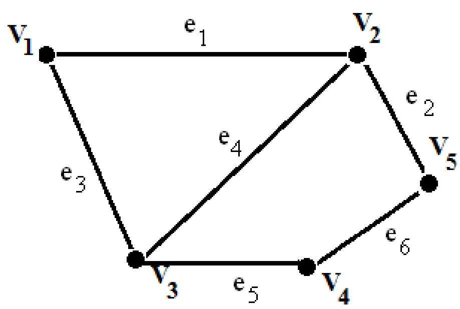


Рисунок 22

5.8 Для графа G (рисунок 23) записать матрицу инцидентности:

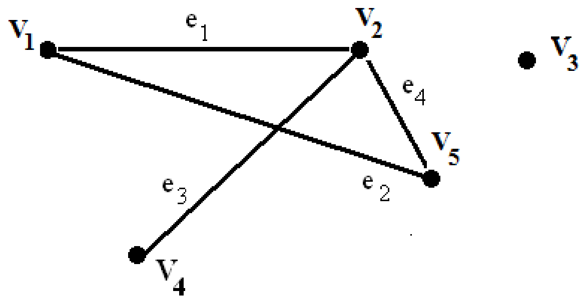


Рисунок 23

5.9 Граф G задан матрицей инцидентности. Нарисовать заданный граф.

$$I(G)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5.10 Для орграфа G дуги пронумерованы следующим образом:

$e_1=(v_1,v_5)$, $e_2=(v_2,v_1)$, $e_3=(v_2,v_4)$, $e_4=(v_2,v_5)$.

Нарисовать заданный орграф. Записать матрицу инцидентности.

5.11 Для псевдографа G (рисунок 24) записать матрицу инцидентности:

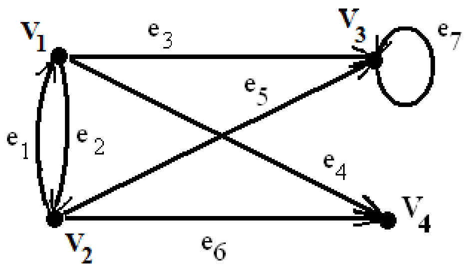


Рисунок 24

Матрицы Кирхгофа

5.12 Для графа G (рисунок 25) записать матрицу Кирхгофа:

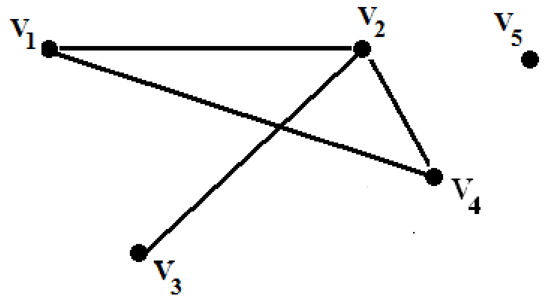


Рисунок 25

5.13 Для графа G (рисунок 26) записать матрицу Кирхгофа:

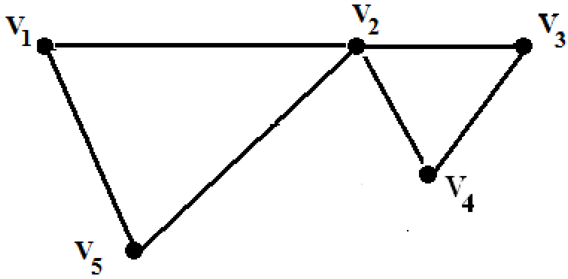


Рисунок 26

5.14 Для матрицы Кирхгофа нарисовать соответствующий граф:

$$K(G)=\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Домашние задания

5.15 Для графа G (рисунок 27) записать матрицу смежности:

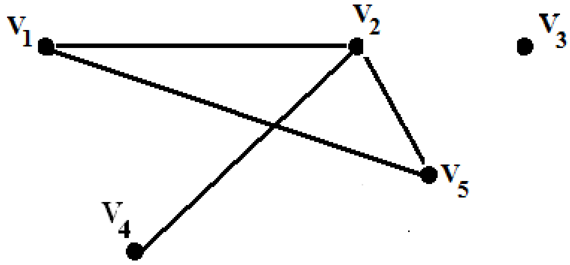


Рисунок 27

5.16 Граф G задан матрицей смежности. Нарисовать заданный граф.

$$M(G)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

5.17 Для графа G (рисунок 28) записать матрицу инцидентности:

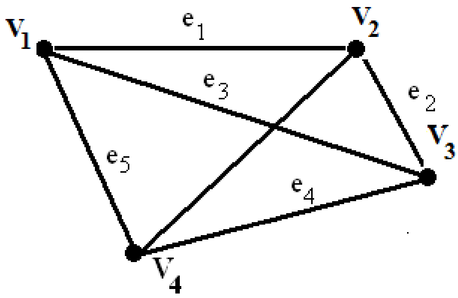


Рисунок 28

5.18 Для орграфа G (рисунок 29) записать матрицу инцидентности:

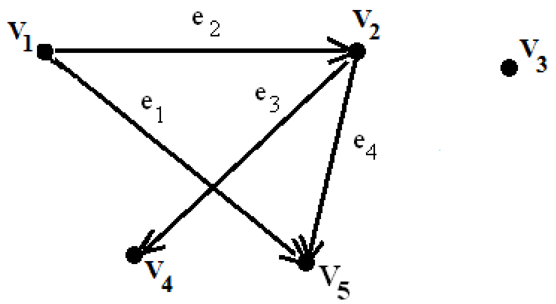


Рисунок 29

5.19 Орграф G задан матрицей смежности. Нарисовать заданный орграф.

$$M(G)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5.20 Для графа G (рисунок 30) записать матрицу Кирхгофа:

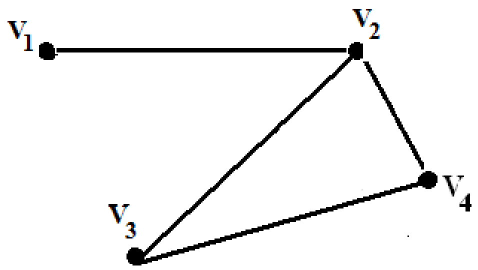
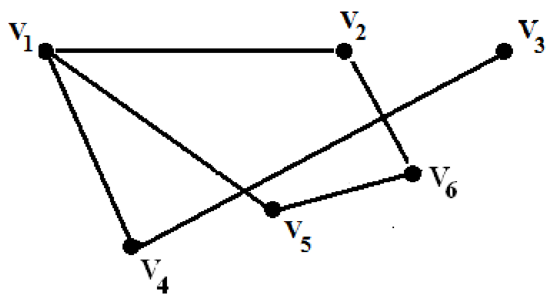
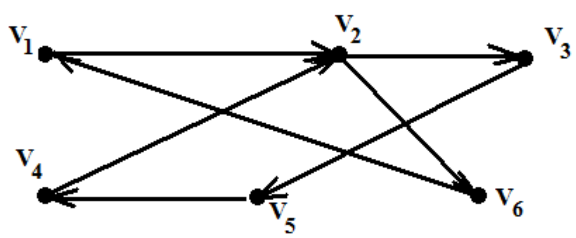


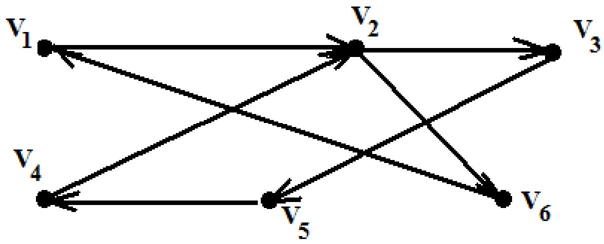
Рисунок 30

Ответы: 5.1 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; **5.2** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;





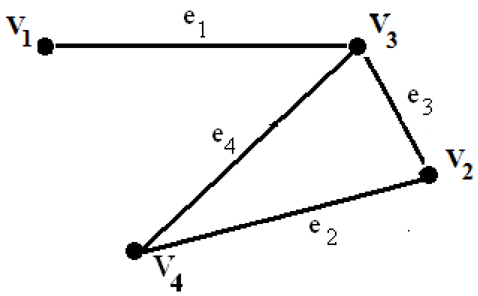
5.3 Рисунок 31; **5.4** Рисунок 32;

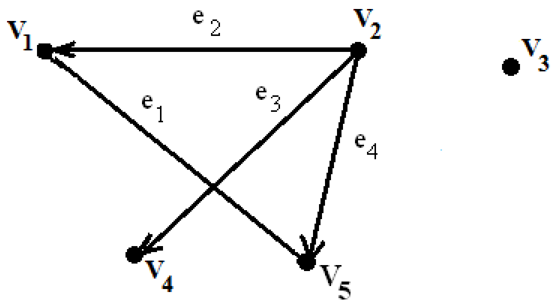


$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5.5 Рисунок 33;

5.6 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; **5.7** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; **5.8** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;





5.9 Рисунок 34;

5.10 Рисунок 35 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$;

5.11 $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$; **5.12** $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

5.13 $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; **5.14**

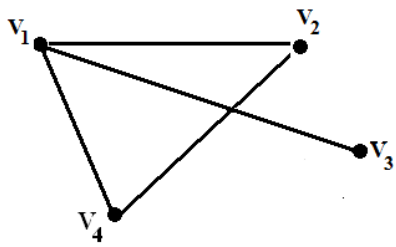


Рисунок 36;

5.15 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; **5.16**

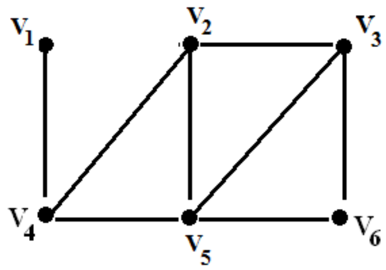


Рисунок 37

5.17 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; **5.18** $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; **5.19**

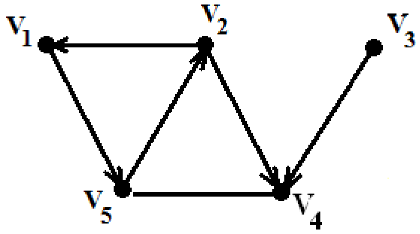


Рисунок 38;

5.20 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Занятие 6. Расстояния в графах

Аудиторные задания

Граф G задан матрицей смежности. Требуется:

а) нарисовать граф;

б) найти степенную последовательность графа G;

в) найти все маршруты в графе G;

определить, является ли граф G связным;

д) найти эксцентриситеты всех вершин графа G;

е) найти радиус $R(G)$ и центры графа G;

ж) найти диаметр $D(G)$ и периферийные центры графа G.

6.1 $M(G)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

6.2 $M(G)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

6.3 Методом поиска в ширину найти удаленности вершин графа G (рисунок 39), радиус $R(G)$, центры графа G, диаметр $D(G)$, периферийные центры графа G.

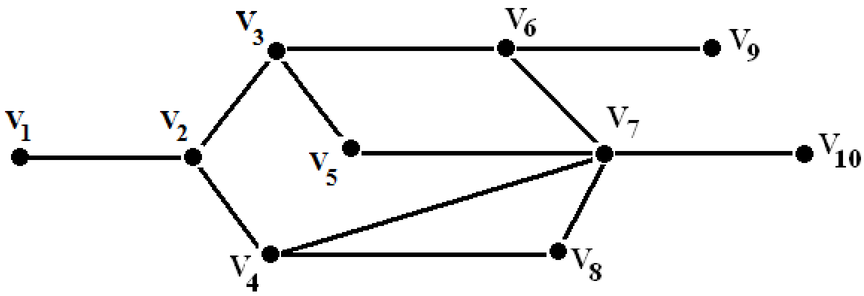


Рисунок 39

Домашние задания

6.4 Найти при условии задач 6.1, 6.2:

$$M(G)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

6.5 Найти при условии задачи 6.3:

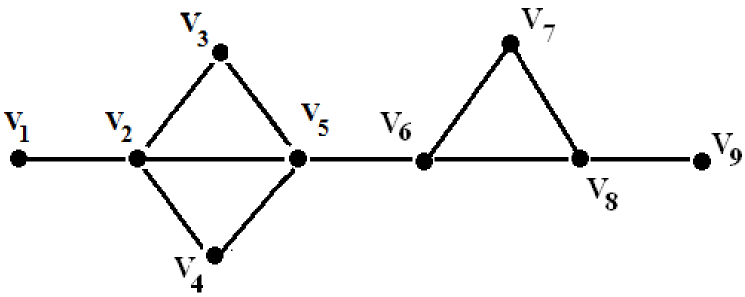


Рисунок 40

Ответы: 6.1 а)

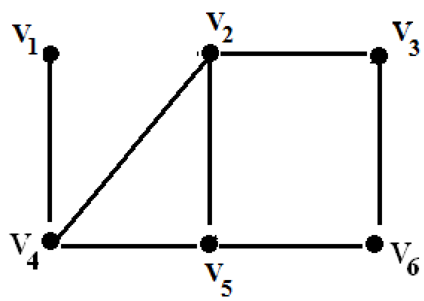
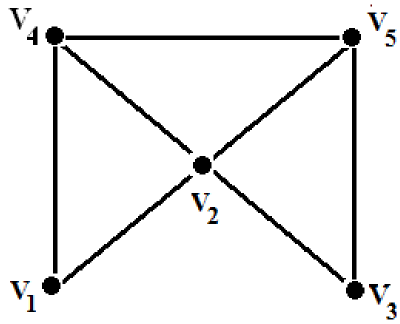


Рисунок 41

б) (1, 3, 2, 3, 3, 2); **г)** да; **д)** $e(1)=3, e(2)=2, e(3)=3, e(4)=2$, $e(5)=2, e(6)=3$;

е) $R(G)=2, v_2, v_4 - v_5$ – центры графа G; **ж)** $D(G)=3, v_1, v_3, v_6$ – периферийные центры графа G;

6.2 а)



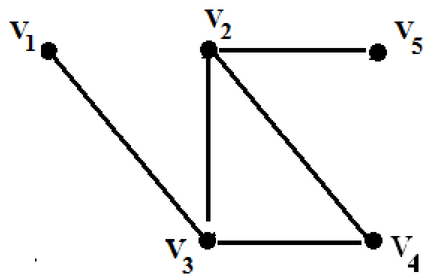
б) (2, 4, 2, 3, 3); **г)** да; **д)** $e(1)=2, e(2)=1$, $e(3)=2, e(4)=2, e(5)=2$;

е) $R(G)=1, v_2$ – центр графа G;

ж) $D(G)=2, v_1, v_3, v_4, v_5$ – периферийные центры графа G;

6.3 $e(v_1)=4, e(v_2)=3, e(v_3)=3, e(v_4)=3, e(v_5)=3, e(v_6)=3$, $e(v_7)=3, e(v_8)=3, e(v_9)=4, e(v_{10})=4$; $R(G)=3$; $v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8$ – центры графа G; $D(G)=4$; v_1, v_9, v_{10} – периферийные центры графа G;

6.4 а)



б) (2, 4, 3, 2, 1); **г)** да;

д) $e(v_1)=2, e(v_2)=1, e(v_3)=2, e(v_4)=2, e(v_5)=2$;

е) $R(G)=1, v_2$ – центр графа G;

ж) $D(G)=2, v_1, v_3, v_4, v_5$ – периферийные центры графа G;

6.5 $e(v_1)=6, e(v_2)=5, e(v_3)=4, e(v_4)=4, e(v_5)=3, e(v_6)=4, e(v_7)=5, e(v_8)=5, e(v_9)=6$, $R(G)=3, v_5$ – центр графа G; $D(G)=6, v_1, v_9$ – периферийные центры графа G.

Занятие 7. Деревья и остовы

Аудиторные задания

7.1 Являются ли деревьями графы:

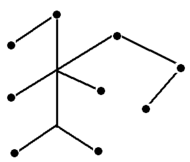


Рисунок 44

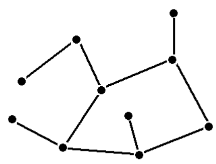


Рисунок 45

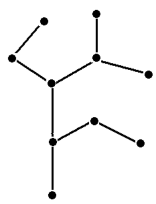


Рисунок 46

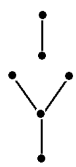


Рисунок 47

7.2 В некоторой стране 101 город, и некоторые из них соединены дорогами. При этом любые два города соединяет ровно один путь. Сколько в этой стране дорог?

7.3 В некоторой стране 30 городов, причем каждый соединен с каждым дорогой. Какое наибольшее число дорог можно закрыть на ремонт так, чтобы из каждого города можно было проехать в каждый?

7.4 Волейбольная сетка имеет вид прямоугольника размером 50х600 клеток. Какое наибольшее число веревочек можно перерезать так, чтобы сетка не распалась на куски?

7.5 Для корневого дерева (рисунок 48) записать его бинарный код, проверить равенство нулей и единиц и формулу длины кода: $2(n–1)$, где n – число вершин.

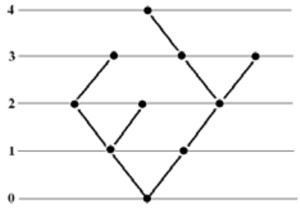


Рисунок 48

7.6 По бинарному коду (11100011111010000111010000) нарисовать корневое дерево.

7.7 Дан граф G (рисунок 49).

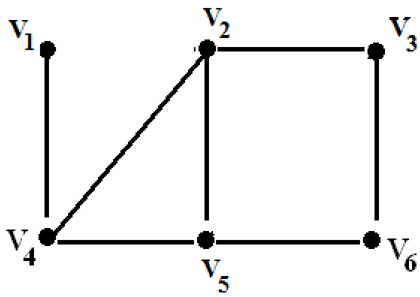


Рисунок 49

а) Найти остов T с максимальным количеством концевых вершин. Нарисовать T как корневое дерево, взяв за корень центр T.

б) Найти цикломатическое число графа G. Найти фундаментальную систему циклов графа G, ассоциированную с остовом T. Сколько циклов существует в графе G?

в) Найти ранг разрезов графа G. Найти фундаментальную систему разрезов графа G, ассоциированную с остовом T. Для каждого из разрезов фундаментальной системы найти количество компонент связности.

г) Является ли граф G двудольным? Если является, то найти его доли.

д) Является ли граф G эйлеровым? Если является, то найти эйлеров цикл. В противном случае найти эйлерову цепь, если она существует.

7.8 Задан орграф $G=(V,U)$, где $V=(v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6)$ и $U=\{(v_1,v_2),(v_2,v_3),(v_2,v_6),(v_3,v_5),(v_4,v_2),(v_5,v_4),(v_6,v_1)\}$. Требуется:

а) Нарисовать орграф.

б) Найти матрицу инцидентности графа G.

в) Определить, является ли орграф G сильносвязным?

г) Определить, является ли орграф *G* эйлеровым? Если является, то найти ориентированный эйлеров цикл. В противном случае найти ориентированную эйлерову цепь, если она существует.

7.9 Пользуясь алгоритмом Краскала, в связном взвешенном графе *G* (рисунок 50) порядка 5 найти остов минимального веса (кратчайший остов).

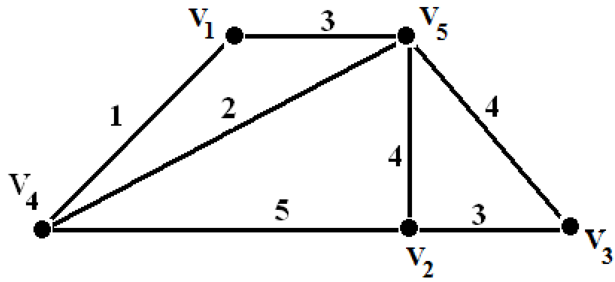


Рисунок 50

Домашние задания

7.10 Как связано в дереве число вершин с числом ребер?

7.11 Докажите, что в дереве есть вершина, из которой выходит ровно одно ребро (такая вершина называется висячей).

7.12 Студент нарисовал на доске 7 графов, каждый из которых является деревом с 6 вершинами. Есть ли среди них два изоморфных графа?

7.13 Для корневого дерева (рисунок 51) записать его бинарный код, проверить равенство нулей и единиц и формулу длины кода: $2(n–1)$, где n – число вершин.

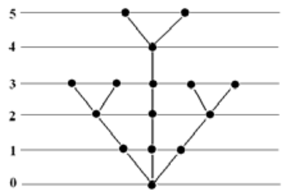


Рисунок 51

7.14 По бинарному коду (1110100011111010000011101000) нарисовать корневое дерево.

7.15 Пользуясь алгоритмом Краскала, в связном взвешенном графе *G* (рисунок 52) порядка 7 найти остов минимального веса (кратчайший остов).

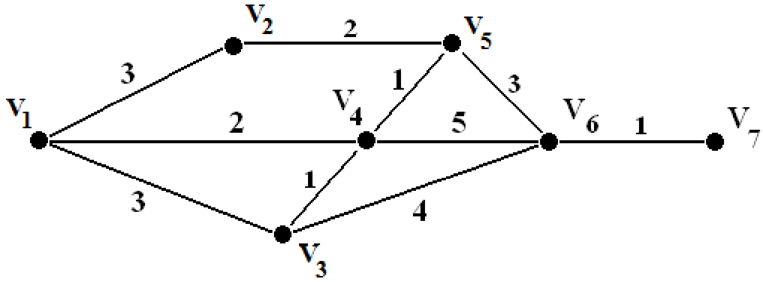


Рисунок 52

Ответы: 7.1 а) да; **б)** нет; **в)** да; **г)** нет; **7.2** 100; **7.3** 406; **7.4** 30000; **7.5** (111001001111001000), $n = 10$, $2(n-1) = 18$;

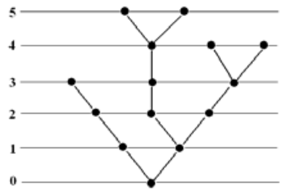
7.6 

Рисунок 53;

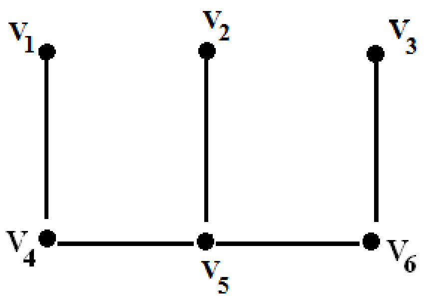
7.7 а) 

Рисунок 54

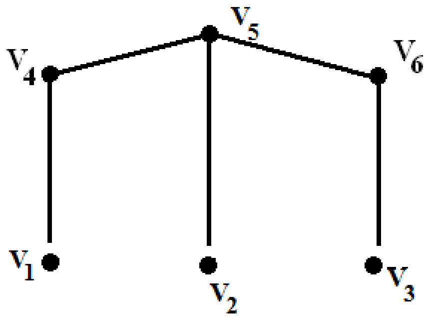
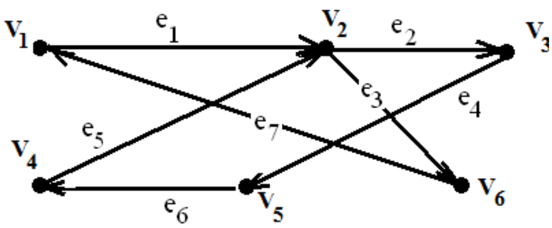


Рисунок 55

б) $\nu(G) = 2$; $C_1 = \{(v_5, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_6), (v_6, v_5)\}$; $C_2 = \{(v_5, v_2), (v_2, v_4), (v_4, v_5)\}$;

в) $\nu^*(G) = 6$; $C_1^* = \{(1,4)\}$, $C_2^* = \{(4,5), (2,4)\}$, $C_3^* = \{(2,5), (2,4), (2,3)\}$, $C_4^* = \{(5,6), (2,3)\}$,

$C_5^* = \{(3,6), (2,3)\}$; **г)** нет (содержит цикл C_2 нечетной длины); **д)** нет, степенная последовательность (1,3,2,3,3,2) содержит 4 нечетные вершины; не содержит эйлеровой цепи;

7.8 а) 

б)

$$I(G) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

Рисунок 56;

в) да; **г)** да; (1,2)(2,3)(3,5)(5,4)(4,2)(2,6)(6,1); **7.9** (1,4)(4,5)(5,2)(2,3);

7.10 в дереве число вершин на 1 больше числа ребер; **7.12** да;

7.13 (11101000111110100000111101000), n=15, 2(n–1)=28;

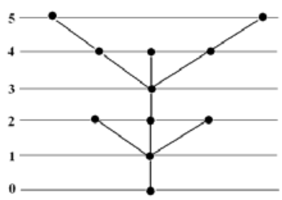
7.14 

Рисунок 57; **7.15** (1,4)(4,5)(5,6)(6,7).

Занятие 8. Эйлеровы графы. Критерий эйлеровости.
Планарные графы. Формула Эйлера
Аудиторные задания

8.1 *Задача о кёнигсбергских мостах.*

На схеме (рисунок 58) изображено расположение семи мостов на реке Прегель в городе Кёнигсберге в 30-х годах XVIII века. Исторически первая задача теории графов была сформулирована Эйлером: можно ли совершить прогулку, пройдя по каждому мосту ровно один раз?

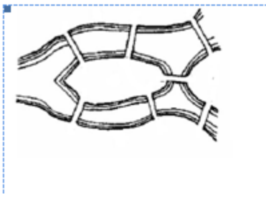


Рисунок 58

8.2 Имеется группа островов, соединенных мостами так, что от каждого острова можно добраться до любого другого. Турист обошел все острова, пройдя по каждому мосту ровно один раз. На острове Троекратном он побывал трижды. Сколько мостов ведет с Троекратного, если турист

а) не с него начал и не на нем закончил?

б) с него начал, но не на нем закончил?

в) с него начал и на нем закончил?

8.3 Можно ли прогуляться по парку и его окрестностям (рисунок 59) так, чтобы при этом перелезть через каждый забор ровно один раз?

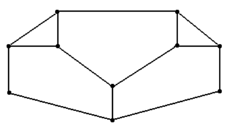
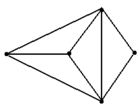


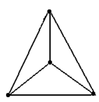
Рисунок 59

8.4 Можно ли нарисовать граф, изображенный: а) на рисунке 60; б) на рисунке 61, не отрывая карандаш от бумаги и проводя каждое ребро один раз?



а)

Рисунок 60



б)

Рисунок 61

8.5 **а)** Дан кусок проволоки длиной 120 см. Можно ли не ломая проволоки, изготовить каркас куба с ребрами 10 см?

б) Какое наименьшее число раз придется ломать проволоку, чтобы все же изготовить требуемый каркас?

8.6 Можно ли нарисовать фигуру (рисунок 62), именуемую саблями (знаком) Магомета, не отрывая карандаша от бумаги и не повторяя линий?

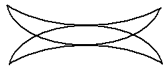


Рисунок 62

8.7 Является ли граф, имеющий 5 вершин, каждая из которых соединена ребром с любой другой, планарным?

8.8 Является ли граф, имеющий 10 вершин, степень каждой из которых равна 5, планарным?

8.9 В стране Озерная 7 озер, соединенных между собой 10 каналами, причем от любого озера можно доплыть до любого другого. Сколько в этой стране островов?

8.10 Является ли двудольный граф $K_{3,3}$ планарным?

Домашние задания

8.11 Можно ли начертить, не отрывая карандаша от бумаги (одним росчерком)

а) квадрат с диагоналями?

б) шестиугольник со всеми диагоналями?

8.12 Является ли эйлеровым граф (рисунок 63)? Если да, указать эйлеров цикл.

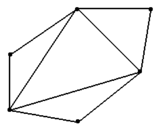


Рисунок 63

8.13 Можно ли составить решетку, изображенную на рисунке 64:

а) из 5 ломаных длины 8?

б) из 8 ломаных длины 5?

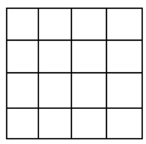


Рисунок 64

8.14 Можно ли построить три дома, вырыть три колодца и соединить тропинками каждый дом с каждым колодцем так, чтобы тропинки не пересекались?

8.15 Докажите, что в плоском графе есть вершина, степень которой не превосходит 5.

8.16 В квадрате отметили 20 точек и соединили их непересекающимися отрезками друг с другом и с вершинами квадрата так, что квадрат разбился на треугольники. Сколько получилось треугольников?

Указание: соотношение ребер P и граней $Г$ $3(Г–1)+4=2P$.

Ответы: 8.1 нельзя; **8.2 а)** 6; **б)** 7; **в)** 6; **8.**3 нельзя; **8.4 а)** можно; **б)** нельзя; **8.5 а)** нельзя; **б)** не менее трех; **8.6** можно; **8.7** нет; **8.8** нет; **8.9** 4; **8.10** нет; **8.11 а)** нельзя; **б)** нельзя; **8.12** да, (1,2,3,4,5,6,4,2,6,1); **8.13 а)** нельзя; **б)** можно; **8.14** нельзя; **8.16** 42.

Занятие 9. Раскраски графов. Хроматическое число графа

Аудиторные задания

Раскраска вершин графа. Правильно раскрасить вершины графов и указать хроматические числа графов $\chi(G)$:

9.1 а)

Рисунок 65

б)

Рисунок 66

в) Чему равно хроматическое число простой цепи P_n?

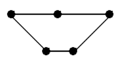
9.2 а) 

Рисунок 67

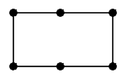
б) 

Рисунок 68

в) Чему равно хроматическое число простого цикла C_n?

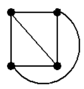
9.3 а) 

Рисунок 69

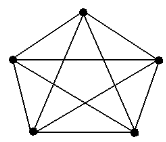
б) 

Рисунок 70

в) Чему равно хроматическое число полного графа K_n?

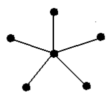
9.4 а) 

Рисунок 71

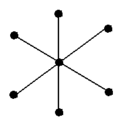
б) 

Рисунок 72

в) Чему равно хроматическое число звездного графа $K_{1,n}$?

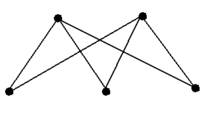
9.5 а) 

Рисунок 73

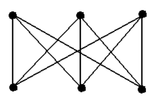
б) 

Рисунок 74

в) Чему равно хроматическое число двудольного графа $K_{n,m}$?

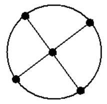
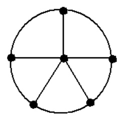
9.6 а)  **б)** 

Рисунок 75 Рисунок 76

в) Чему равно хроматическое число колеса W_n?

9.7 Какой граф: **а)** 1-хроматический? **б)** 2-хроматический (бихроматический)?

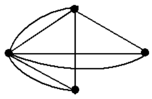
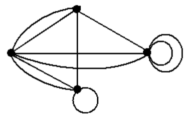
9.8 а)  **б)** 

Рисунок 77 Рисунок 78

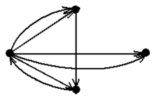
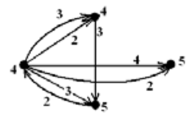
в)  **г)** 

Рисунок 79 Рисунок 80

д) Влияют ли на правильную раскраску вершин и хроматическое число кратные ребра, петли, ориентация ребер, веса вершин и ребер?

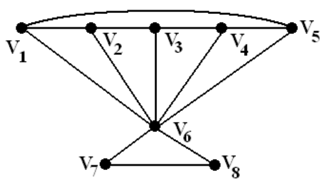
9.9 

Рисунок 81

9.10 Указать правильную раскраску вершин и найти хроматическое число графа Петерсена:

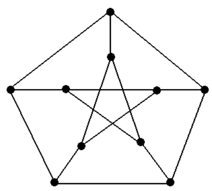


Рисунок 82

9.11 Изобразить схематично географическую карту Республики Беларусь и граничащих государств. Указать правильную раскраску географической карты. Какое минимальное число красок для этого необходимо?

Раскраска ребер графа. Указать правильную раскраску ребер графов и их реберно-хроматические числа $\chi_e(G)$:

9.12 Из задачи **9.1 а)**, **б)** , **в)**.

9.13 Из задачи **9.2 а)**, **б)** , **в)**.

9.14 Из задачи **9.3 а)**, **б)**.

9.15 Из задачи **9.4 а)**, **б)** , **в)**.

9.16 Из задачи **9.5 а)**, **б)**.

9.17 Из задачи **9.6 а)**, **б)**.

Домашние задания

Правильно раскрасить вершины графов и указать хроматическое число графов $\chi(G)$***:***

9.18 а)

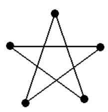


Рисунок 83

б)

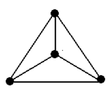


Рисунок 84

в)

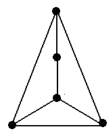


Рисунок 85

г)

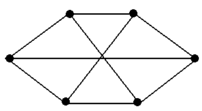


Рисунок 86

д)

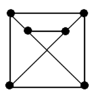


Рисунок 87

е)

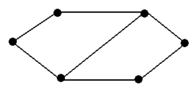


Рисунок 88

ж)

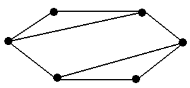


Рисунок 89

з)

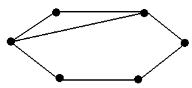


Рисунок 90

9.19 Указать правильную раскраску ребер графов и их реберно-хроматические числа $\chi_e(G)$ из задачи **9.18 а) – з)**.

Ответы: 9.1 а) 2; **б)** 2; **в)** $\chi(P_n) = 2$; **9.2 а)** 3; **б)** 2; **в)** $\chi(C_n) = \begin{cases} 2, \ n = 2k, \\ 3, \ n = 2k+1 \end{cases}$; **9.3 а)** 4; **б)** 5; **в)** $\chi(K_n) = n$; **9.4 а)** 2; **б)** 2; **в)** $\chi(K_{1,2}) = 2$; **9.5 а)** 2; **б)** 2; **в)** $\chi(K_{n,m}) = 2$; **9.6 а)** 3; **б)** 4; **в)** $\chi(W_n) = \begin{cases} 3, \ n = 2k, \\ 4, \ n = 2k+1 \end{cases}$; **9.7 а)** пустой; **б)** двудольный и непустой; **9.8 а)** 3; **б)** 3; **в)** 3; **г)** 4; **д)** нет; **9.9** 4; **9.10** 3; **9.11** 4; **9.12 а)** 2; **б)** 2; **в)** $\chi_e(P_n) = 2$; **9.13 а)** 3; **б)** 2;

в) $\chi_e(C_n) = \begin{cases} 2, n = 2k, \\ 3, n = 2k+1 \end{cases}$; **9.14 а)** 3; **б)** 5; **9.15 а)** 5; **б)** 6; **в)** $\chi_e(K_{1,n}) = n$; **9.16 а)** 3; **б)** 4; **9.17 а)** 4; **б)** 5; **9.18 а)** 3; **б)** 4; **в)** 3; **г)** 2; **д)** 2; **е)** 2; **ж)** 3; **з)** 3; **9.19 а)** 3; **б)** 4; **в)** 4; **г)** 4; **д)** 4; **е)** 3; **ж)** 4; **з)** 3.

Занятие 10. Сети и потоки в сетях

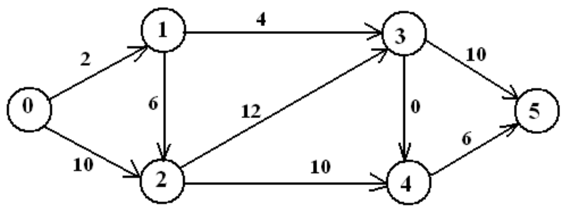
Аудиторные задания

Дана сеть (см. соответствующий рисунок). Найти:

а) время выполнения проекта;

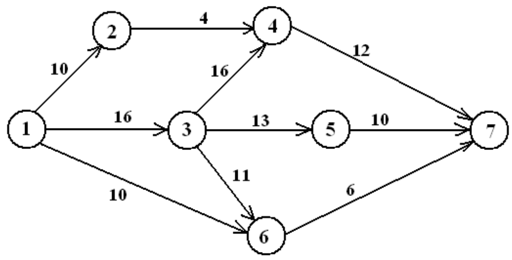
б) критический путь;

в) резервы времени.



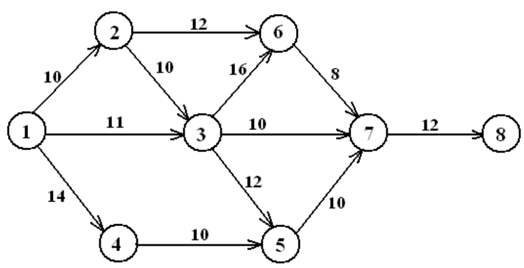
10.1

Рисунок 91



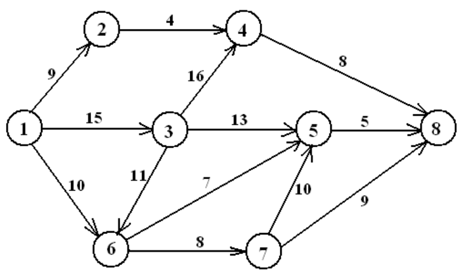
10.2

Рисунок 92



10.3

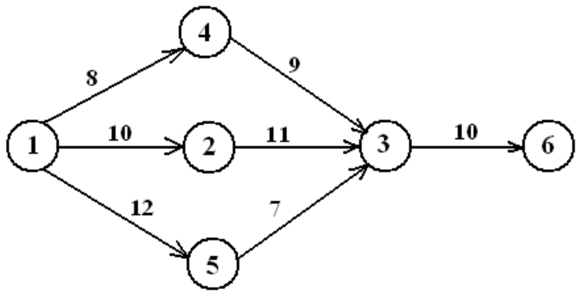
Рисунок 93



10.4

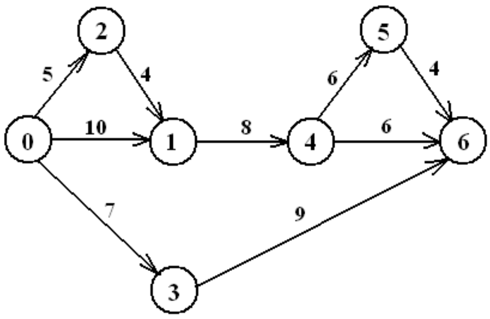
Рисунок 94

Домашние задания



10.5

Рисунок 95



10.6

Рисунок 96

Ответы: 10.1 а) 32; **б)** (0,2,3,5); **в)** $\tau(1)=2, \tau(4)=4$; **10.2 а)** 44; **б)** (1,3,4,7); **в)** $\tau(2)=18, \tau(5)=5, \tau(6)=9$; **10.3 а)** 56; **б)** (1,2,3,6,7,8); **в)** $\tau(5)=2, \tau(4)=10$; **10.4 а)** 39; **б)** (1,3,4,8); **в)** $\tau(2)=18, \tau(5)=6, \tau(6)=6, \tau(7)=6$; **10.5 а)** 31; **б)** (1,2,3,6); **в)** $\tau(4)=4, \tau(5)=2$; **10.6 а)** 28; **б)** (0,1,4,5,6); **в)** $\tau(2)=1, \tau(3)=2$.

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ЧИСЕЛ

Занятие 11. Делимость в кольце целых чисел

Аудиторные задания

11.1 С помощью алгоритма Евклида найти наибольший общий делитель целых чисел:

а) 84 и 35; **б)** 174 и 38; **в)** 216 и 66; **г)** 324 и 126.

11.2 **а)** Найти первые семь простых чисел Мерсенна $M_p = 2^p - 1$, соответствующих значениям $p = 2,3,5,7,13,17,19$;

б) Чему равно восьмое простое число Мерсенна? Кто и когда его нашел?

в) Кто и когда нашел девятое простое число Мерсенна?

г) Какое наибольшее простое число Мерсенна известно на конец XX века?

11.3 **а)** Найти первые пять простых чисел Ферма (m=0,1,2,3,4) $F_m = 2^{2^m} + 1$;

б) Найти F_5. Является ли это число простым?

в) Известны ли другие простые числа Ферма?

11.4 Запишите приближенную формулу функции $\pi(x)$, выражающую число простых чисел от 2 до x.

11.5 Найти канонические разложения целых чисел:

а) 27720; **б)** 3003; **в)** 8925; **г)** 13566.

11.6 При помощи канонических разложений найти НОД(a, b), НОК(a, b):

а) a=525, b=385; **б)** a=231, b=455; **в)** a=198, b=462.

Домашние задания

11.7 С помощью алгоритма Евклида найти наибольший общий делитель целых чисел:

а) 210 и 561; **б)** 2310 и 312; **в)** 2145 и 945

11.8 Найти канонические разложения целых чисел:

а) 4788; **б)** 15015; **в)** 215441; **г)** 33263.

11.9 При помощи канонических разложений найти НОД(a, b), НОК(a, b):

а) a=462, b=418; **б)** a=11305, b=24955; **в)** a=330, b=1463.

Ответы: 11.1 а) 7; **б)** 2; **в)** 6; **г)** 18;

11.2 а) 3, 7, 31, 127, 8191, 131071, 524287; **б)** M_{31}=2147483647; Л.Эйлер, 1750 г.;

в) M_{61}=2305843009213693951; Русский математик-самоучка, сельский священник Пермской губернии И. М. Первушин, 1883 г.; **г)** $2^{6972593} - 1$;

11.3 а) F_0=3; F_1=5; F_2=17; F_3=257; F_4=65537; **б)** нет, F_5=429467297=641·6700417; **в)** нет; **11.4** $\pi(x) \approx \frac{x}{\ln x}$; **11.5 а)** $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$; **б)** $3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$; **в)** $3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 17$; **г)** $2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 17 \cdot 19$; **11.6 а)** НОД=35, НОК=5775; **б)** НОД=7, НОК=15015; **в)** НОД=6, НОК=1386; **11.7 а)** 3; **б)** 6; **в)** 15; **11.8 а)** $2^2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 19$; **б)** $3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$; **в)** $17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29$; **г)** $29 \cdot 31 \cdot 37$;

11.9 а) НОД=22, НОК=8778; **б)** НОД=35, НОК=8060465; **в)** НОД=11, НОК=43890.

Занятие 12. Сравнения и их применение. Функция Эйлера

Аудиторные задания

12.1 Дано $a \equiv b(\mathrm{mod}\, m)$. Записать еще не менее пяти чисел, сравнимых с a по тому же модулю m:

а) $33 \equiv 3(\mathrm{mod}\, 5)$; **б)** $17 \equiv 11(\mathrm{mod}\, 3)$.

12.2 Дано $23 \equiv 2(\mathrm{mod}\, 7), 16 \equiv 9(\mathrm{mod}\, 7)$. Найти их:

а) сумму; **б)** разность; **в)** произведение; **г)** возвести в квадрат каждое сравнение. Результаты проверить по определению $a \equiv b(\mathrm{mod}\, m)$.

12.3 Упростить:

а) $77 \equiv 33(\mathrm{mod}\, 22)$; **б)** $143 \equiv 26(\mathrm{mod}\, 117)$; **в)** $35 \equiv 21(\mathrm{mod}\, 14)$.

12.4 Найти остаток от деления

а) 39^{29} на 31; **б)** 23^{19} на 19.

12.5 Следствие из малой теоремы Ферма гласит: если $a^{m-1} \neq 1(\mathrm{mod}\, m)$ для некоторого натурального $a, 1 < a < m-1$, то число m – составное. Пользуясь этим следствием, при a=2 показать, что числа 19, 23 – простые, а 20, 22 – составные.

12.6 Нечетное натуральное число называется псевдопростым по основанию 2, 1<2<m–1, если $2^{m-1} \equiv 1(\mathrm{mod}\, m)$. Пользуясь результатами задачи **12.5**, показать, что числа 19, 23 также псевдопрстые по основанию 2.

12.7 Найти значения функции Эйлера:

а) φ(59); **б)** φ(67); **в)** φ(6561); **г)** φ(2048);

д) φ(187); **е)** φ(437); **ж)** φ(1575); **з)** φ(1764).

Домашние задания

12.8 Дано $27 \equiv 2(\mathrm{mod}\, 5), 19 \equiv 4(\mathrm{mod}\, 5)$. Найти их:

а) сумму; **б)** разность; **в)** произведение; **г)** возвести в квадрат каждое сравнение. Результаты проверить по определению $a \equiv b(\mathrm{mod}\, m)$.

12.9 Упростить:

а) $125 \equiv 20 \pmod{15}$; **б)** $26 \equiv 6 \pmod{4}$; **в)** $102 \equiv 51 \pmod{34}$.

12.10 Найти остаток от деления 28^{21} на 17.

12.11 Найти значения функции Эйлера:

а) $\varphi(47)$; **б)** $\varphi(53)$; **в)** $\varphi(15625)$; **г)** $\varphi(2401)$;

д) $\varphi(143)$; **е)** $\varphi(299)$; **ж)** $\varphi(14553)$; **з)** $\varphi(44100)$.

Ответы: **12.1** **а)** например, $33 \equiv 8 \pmod{5} \equiv 13 \pmod{5} \equiv 18 \pmod{5} \equiv 23 \pmod{5} \equiv$ $\equiv 28 \pmod{5} \equiv -2 \pmod{5}$;

б) например, $17 \equiv 14 \pmod{3} \equiv 20 \pmod{3} \equiv 23 \pmod{3} \equiv 26 \pmod{3} \equiv 29 \pmod{3} \equiv -1 \pmod{3}$;

12.2 **а)** $39 \equiv 11 \pmod{7}$; **б)** $7 \equiv -7 \pmod{7}$; **в)** $368 \equiv 18 \pmod{7}$; **г)** $529 \equiv 4 \pmod{7}$; $256 \equiv 81 \pmod{7}$;

12.3 а) $7 \equiv 3 \pmod{2}$; **б)** $11 \equiv 2 \pmod{9}$; **в)** $5 \equiv 3 \pmod{2}$; **12.4 а)** 4; **б)** 4;

12.7 а) 58; **б)** 66; **в)** 4374; **г)** 1024; **д)** 160; **е)** 396; **ж)** 720; **з)** 504;

12.8 **а)** $46 \equiv 6 \pmod{5}$; **б)** $8 \equiv -2 \pmod{5}$; **в)** $513 \equiv 8 \pmod{5}$; **г)** $729 \equiv 4 \pmod{5}$; $361 \equiv 16 \pmod{5}$;

12.9 а) $25 \equiv 4 \pmod{3}$; **б)** $13 \equiv 3 \pmod{2}$; **в)** $6 \equiv 3 \pmod{2}$; **12.10** 10;

12.11 а) 46; **б)** 52; **в)** 12500; **г)** 2058; **д)** 120; **е)** 264; **ж)** 7560; **з)** 10080.

ОСНОВНЫЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ

Занятие 13. Основные понятия теории групп

Аудиторные задания

13.1 Исследуйте свойства операции * на множестве M. Какую алгебраическую структуру образует это множество относительно данной операции?

а) $M = R, a * b = \sin a \cdot \sin b$;

б) $M = N, a * b = a^b$;

в) $M = N, a * b = \text{НОД}(a, b)$;

г) $M = N, a * b = a$;

д) $M = Q \setminus \{0\}, a * b = 2ab$.

13.2 Определите, какую структуру образует следующее множество относительно указанной операции:

а) множество векторов в трехмерном пространстве с операцией векторное произведение;

б) множество векторов в трехмерном пространстве с операцией сумма векторов;

в) множество векторов в трехмерном пространстве с операцией скалярное произведение;

г) множество всех отображений $f : X \to X$ с операцией произведение (композиция отображений);

д) множество биективных отображений $f : X \to X$ с операцией произведение (композиция) отображений;

е) множество A_n четных подстановок из n элементов относительно операции произведения подстановок;

ж) множество всех отношений на множестве X с операцией произведения отношений;

з) множество верхних треугольных матриц порядка n с действительными элементами относительно операции сложения (умножения) матриц;

и) множество диагональных матриц порядка n с действительными элементами относительно операции сложения (умножения) матриц;

к) множество невырожденных квадратных матриц порядка n с действительными элементами относительно операции произведения матриц.

13.3 Пусть B^n – n-я декартова степень множества $B\{0,1\}$. Задайте на B^n бинарную операцию так, чтобы получилась группа.

13.4 Докажите, что если в группе G

а) выполняется тождество $a^2=1$, то G коммутативно;

б) не более четырех элементов, то G коммутативна.

Определение. Пусть $(G,\cdot)$ и $(H,\cdot)$ – две группы. Всякое отображение $\varphi : G \to H$, сохраняющее операции, то есть обладающее свойством $\varphi(g_1 g_2) = \varphi(g_1) \cdot \varphi(g_2)$, называется *гомоморфизмом* из группы G в группу H.

Гомоморфизм $\varphi : G \to H$ называется *инъективным*, если для произвольных $g_1 g_2 \in G$ из условия $g_1 \neq g_2$ следует неравенство $\varphi(g_1) \neq \varphi(g_2)$.

Гомоморфизм $\varphi : G \to H$ называется *сюръективным*, если для всякого $h \in H$ найдется прообраз – такой элемент $g \in G$, что $\varphi(g) = h$.

Группы G и H называются *изоморфными*, если существует инъективный и сюръективный гомоморфизм из одной группы в другую.

13.5 Докажите, что следующие группы изоморфны:

а) $(2Z,+)$ и $(3Z,+)$;

б) $(R,+)$ и $(R_+,\cdot)$;

в) $(Z_4,+)$ и $\left(Z_5^*,\cdot\right)$;

г) симметрическая группа S_n и группа множества квадратных матриц порядка n с целыми элементами и определителем ±1 относительно операции произведения матриц..

13.6 Какое из следующих числовых множеств образует кольцо (поле) относительно обычных операций сложения и умножения:

а) множество nZ-целых чисел, кратных n;

б) множество рациональных чисел, в несократимой записи которых знаменатели являются степенями фиксированного числа p;

в) множество действительных чисел вида $x + y\sqrt{2}$, где $x, y \in Q$.

13.7 Какие из указанных множеств матриц образуют кольцо (поле) относительно обычных операций сложения и умножения матриц:

а) множество вещественных симметрических матриц порядка n;

б) множество вещественных ортогональных матриц порядка n;

в) множество верхних треугольных матриц порядка n.

13.8 Какие из следующих множеств образуют кольцо (поле) относительно указанных операций:

а) множество функций вещественного переменного, непрерывных на отрезке $[a,b]$, относительно обычных операций сложения и умножения;

б) множество функций вида $f : R \to R$, относительно обычной операции сложения и композиции (в качестве умножения);

в) множество монотонных функций вещественного переменного, непрерывных на отрезке $[a,b]$, относительно обычных операций сложения и умножения;

г) множество функций $f(x)$ вещественного переменного, обладающих свойством $f(2)=0$, относительно обычных операций сложения и умножения;

д) множество многочленов с действительными коэффициентами, относительно обычных операций сложения и умножения.

13.9 Докажите, что поле множества вещественных матриц вида $\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$ изоморфно полю комплексных чисел C.

13.10 Докажите, что поле $(R,+,\cdot)$ изоморфно полю $(R,+,*)$, где * обозначает операцию $a*b=2ab$.

13.11 Докажите, что поле $(R^2,+,*)$ с операциями, определенными следующим образом: $(a,b)+(c,d)=(a+c,\, b+d)$ и $(a,b)*(c,d)=(ac-bd,\, dc+ad)$, изоморфно полю комплексных чисел C с обычными операциями сложения и умножения.

Домашние задания

13.12 Исследуйте свойства операции * на множестве M. Какую алгебраическую структуру образует это множество относительно данной операции?

а) $M = 3Z = \{3a \mid a \in Z\}$, $a * b = a + b$;

б) $M = \{Z \in C \mid |z| = 1\}$, $a * b = a \cdot b$;

в) $M = (0,1]$, $a * b =$ дробная часть $(a+b)$.

13.13 Определите, какую структуру образует следующее множество относительно указанной операции:

а) множество квадратных матриц порядка n с целыми элементами и определителем ±1 относительно операции произведения матриц;

б) множество квадратных матриц порядка n, у которых в каждой строчке и каждом столбце ровно один ненулевой элемент, равный 1, относительно операции произведения матриц;

в) множество всех подмножеств универсального множества U с операцией пересечения (объединение, разностная сумма) множеств.

13.14 Какое из следующих числовых множеств образует кольцо (поле) относительно обычных операций сложения и умножения:

а) множество комплексных чисел вида $x+yi$, где $x, y \in Z$;

б) множество комплексных чисел вида $x+yi$, где $x, y \in Q$?

13.15 Какие из указанных множеств матриц образуют кольцо (поле) относительно обычных операций сложения и умножения матриц:

а) множество квадратных матриц порядка *n*, у которых последняя строка – нулевая;

б) множество вещественных матриц вида $\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$?

13.16 Какие из следующих множеств образуют кольцо (поле) относительно указанных операций:

а) множество многочленов четных степеней с действительными коэффициентами, относительно обычных операций сложения и умножения;

б) множество всех подмножеств универсального множества *U* относительно операций разностной суммы и пересечения множеств;

в) множество всех подмножеств универсального множества *U* относительно операций объединения и пересечения множеств.

Занятие 14. Подстановки. Симметрическая группа

Аудиторные задания

14.1 Пусть $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Найти:

а) fg;

б) gf; коммутативны ли подстановки f и g?

в) $f^{-1}, f^{-1}f, ff^{-1}$;

г) $g^{-1}, g^{-1}g, gg^{-1}$;

д) Записать f и g в виде произведения циклов.

14.2 Пусть $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

а) Коммутативны ли подстановки f и g?

б) Найти $g^{-1}, g^{-1}g, gg^{-1}$.

в) Записать g в виде цикла.

14.3 Записать в виде произведения циклов:

а) $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 7 & 6 & 8 \end{pmatrix}$; **б)** $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 4 & 5 & 3 & 1 & 7 & 9 & 6 & 8 \end{pmatrix}$;

в) разложить подстановки из **а)** и б) в произведение транспозиций.

14.4 Разрешима ли задача в «игре в 15»?

а)

3	4	1	2
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

Рисунок 97

б)

2	1	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

Рисунок 98

Домашние задания

14.5 Пусть $f=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&1&2\end{pmatrix}$, $g=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}$. Найти:

а) fg;

б) gf;

в) $f^{-1}, f^{-1}f, ff^{-1}$;

г) $g^{-1}, g^{-1}g, gg^{-1}$;

д) записать f и g в виде произведения циклов;

е) коммутативны ли подстановки f и g?

14.6 Записать в виде произведения циклов:

а) $f=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\2&3&4&5&1&7&6\end{pmatrix}$; **б)** $g=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9\\2&3&1&5&4&6&8&9&7\end{pmatrix}$.

Ответы: **14.1** **а)** $fg=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\5&1&4&3&2\end{pmatrix}$; **б)** $gf=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\5&3&4&2&1\end{pmatrix}$; нет; **в)** $f^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\4&3&1&5&2\end{pmatrix}$; e; e; **г)** $g^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\4&1&5&2&3\end{pmatrix}$; e; e; **д)** $f=(1\ \ 3\ \ 2\ \ 5\ \ 4)$, $g=(124)(35)$; **14.2** **а)** $fg=gf=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\5&1&4&2&3\end{pmatrix}$; да; **б)** $g^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\5&1&4&2&3\end{pmatrix}$; e; e; **в)** $(1\ \ 3\ \ 4\ \ 3\ \ 5)$; **14.3** **а)** (12345)(67)(8); **б)** (12435)(6798); **в)** $f=(15)(14)(13)(12)(67)$, $g=(15)(14)(13)(12)(68)(69)(67)$; **14.4** **а)** да; **б)** нет; **14.5** **а)** $fg=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&2&4\end{pmatrix}$; **б)** $gf=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&2&3\end{pmatrix}$; **в)** $f^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&2&1\end{pmatrix}$; e; e;

г) $g^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 1 & 2 & 3\end{pmatrix}; e; e$; **д)** $f=(1423), g=(1234)$; **е)** нет; **14.6 а)** $f=(12345)(67)$; **б)** $g=(123)(45)(6)(789)$.

Занятие 15. Делимость в кольце многочленов

Аудиторные задания

15.1 Найти наибольший общий делитель многочленов $f(x)$ и $g(x)$, используя алгоритм Эвклида:

а) $f(x)=x^3-5x^2-8x+12, \quad g(x)=x^2+4x-5$;

б) $f(x)=x^4+5x^3+5x^2-5x-6, \quad g(x)=x^3-3x^2-10x+24$.

15.2 Разложить многочлен на произведение линейных и квадратичных множителей:

а) $x^4+x^3-x^2+x-2$;

б) $x^5-15x^4+85x^3-225x^2+274x-120$.

15.3 Представить многочлены в виде произведения неприводимых полиномов:

а) $x^4+2x^3+x^2+x+1$; **б)** $x^5+x^4+2x^3+2x^2+2x+1$.

Домашние задания

15.4 Найти наибольший общий делитель многочленов $f(x)$ и $g(x)$, используя алгоритм Эвклида: $f(x)=x^3+6x^2+11x+6, \quad g(x)=x^2-3x-4$.

15.5 Разложить многочлен на произведение линейных и квадратичных множителей:

а) $x^4+x^3-x^2+15x$;

б) $x^4-x^3+2x^2+22x-6$.

15.6 Представить многочлены в виде произведения неприводимых полиномов:

а) $x^4+2x^3+2x^2+x$;

б) $x^5+2x^4+x^3+x+1$.

Ответы: **15.1 а)** $x+1$; **б)** $x+3$; **15.2 а)** $(x-1)(x+2)(x^2+1)$; **б)** $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)$; **15.3 а)** $(x+1)(x^3+x^2+1)$; **б)** $(x^2+x+1)(x^3+x+1)$; **15.4** $x+1$; **15.5 а)** $x(x+3)(x^2-2x+5)$; **б)** $(x-2)(x+3)(x^2-2x+10)$; **15.6 а)** $x(x+1)(x^2+x+1)$; **б)** $(x+1)(x^4+x^3+1)$.

ПЕРЕЧЕНЬ УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИХ ПОСОБИЙ

1. Каскевич, В.И. Элементы прикладной математики . Методическое пособие / В.И. Каскевич. – Мн., 2000. – 100 с.

2. Липницкий, В.А. Современная прикладная алгебра.Математические основы защиты информации от помех и несанкционированного доступа. Учебное пособие / В.А. Липницкий. – Минск: БГУИР, 2005. – 88 с.

3. Каскевич В.И. Специальные главы высшей математики. Основы теории множеств. Элементы теории графов [Электронный ресурс] : [учебное пособие для специальности 1-40 01 01 «Программное обеспечение информационных технологий»] / В.И. Каскевич, Е.А. Федосик, кол. авт. Белорусский национальный технический университет, кафедра «Высшая математика N1». – Электрон. дан. – БНТУ, 2010. – 9,9 усл. эл. листа.

4. Каскевич, В.И. Специальные главы математики. Основы теории чисел. Основные алгебраические структуры [Электронный ресурс] / В.И. Каскевич, Е.А. Федосик, Н.И. Чепелев, кол. авт. Белорусский национальный технический университет, кафедра «Высшая математика N1» . – Электрон. дан. – БНТУ, 2011. – 4 усл. эл. листа.