Белорусский национальный технический университет
Факультет информационных технологий и робототехники
Кафедра высшей математики № 1

СОГЛАСОВАНО	СОГЛАСОВАНО
Заведующая кафедрой	Декан факультета
_______ Катковская И. Н.	_______ Трофименко Е. Е.
__ мая 2015 г.	__ мая 2015 г.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС ПО УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ

МАТЕМАТИКА. ЧАСТЬ 3

для специальностей:

1-53 01 01 – Автоматизация технологических процессов и производств

1-53 01 02 – Автоматизированные системы обработки информации

1-53 01 05 – Автоматизированные электроприводы

1-53 01 06 – Промышленные роботы и робототехнические комплексы

1-54 01 02 – Методы и приборы контроля качества и диагностики состояния объектов

1-55 01 01 – Интеллектуальные приборы, машины, технологии и производства

1-55 01 02 – Интегральные сенсорные системы

1-70 02 01 – Промышленное и гражданское строительство

1-31 03 02 – Механика

1-36 01 01 – Технология машиностроения

1-36 01 03 – Технологическое оборудование машиностроительного производства

1-36 01 04 – Оборудование и технологии высокоэффективных процессов обработки материалов

1-36 01 07 – Гидропневмосистемы мобильных и технологических машин

1-36 11 01 – Подъемно-транспортные, строительные, дорожные машины и оборудование

1-44 01 01 – Организация перевозок и управление на автомобильном и городском транспорте

1-44 01 02 – Организация дорожного движения

Составители: Воронович Галина Константиновна, Габасова Ольга Рафаиловна, Грекова Анна Валентиновна, Зубко Ольга Леонидовна, Катковская Ирина Николаевна, Лебедева Галина Ивановна, Мартыненко Игнат Михайлович, Марцинкевич Василий Станиславович, Романюк Георгий Александрович, Сагарда Елена Васильевна, Федосик Евгений Анатольевич.

Рассмотрено и утверждено
на заседании совета факультета информационных технологий
и робототехники 23 апреля 2015 г., протокол № 8

ПЕРЕЧЕНЬ МАТЕРИАЛОВ

Электронный учебно-методический комплекс по учебной дисциплине «МАТЕМАТИКА. Часть 3» состоит из следующих разделов:

– кратких теоретических материалов по курсу математики третьего семестра обучения;

– материалов для проведения практических занятий по учебной дисциплине;

– материалов для текущей и итоговой аттестации;

– вспомогательных материалов.

Теоретический раздел ЭУМК содержит материалы для теоретического изучения учебной дисциплины в объеме, установленном учебным планом по специальности.

Практический раздел ЭУМК содержит материалы для проведения практических занятий в аудитории и заданий для самостоятельной работы.

Раздел контроля знаний ЭУМК содержит материалы текущей и итоговой аттестации, позволяющие определить соответствие результатов учебной деятельности обучающихся требованиям образовательных стандартов высшего образования и учебно-программной документации, и представлен типовыми расчетами по темам учебной дисциплины и тестами.

Вспомогательный раздел ЭУМК содержит программу дисциплины, экзаменационные вопросы, перечень учебно-методических пособий, рекомендуемых к использованию в образовательном процессе.

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Цели ЭУМК: ЭУМК предназначен для изучения дисциплины «МАТЕМАТИКА». Он содержит набор методических материалов по этой дисциплине.

Особенности структурирования и подачи учебного материала: ЭУМК состоит из четырех частей.

Теоретический раздел содержит набор методических материалов по этому предмету: рекомендаций студенту для работы с дисциплиной, кратких теоретических материалов, посвященных изложению в наглядном виде основных определений, свойств, формул и теорем, сопровождающихся подробными примерами.

Практический раздел содержит практикум по дисциплине, состоящий из материалов для проведения аудиторных занятий по математике. Каждое занятие содержит задачи для домашней работы с ответами.

Раздел контроля знаний содержит типовые расчеты, тесты для организации текущего контроля знаний студентов и контрольные работы для студентов заочного отделения.

Вспомогательный раздел содержит программу дисциплины, перечень экзаменационных вопросов, список рекомендуемой литературы.

Рекомендации по организации работы с ЭУМК: конспект лекций в ЭУМК представляет собой гипертекстовый pdf-документ, предоставляющий возможность навигации по содержанию документа. Все задачи в практикуме снабжены ответами, которые могут быть использованы для самоконтроля. В конце каждого раздела практикума предложены типовые расчеты, предназначенные для самостоятельного выполнения. Тестовые задания при текущем контроле могут быть выполнены как в аудитории, так и в компьютерной системе тестирования.

Белорусский национальный технический университет

Факультет информационных технологий и робототехники

Кафедра высшей математики № 1

КУРС ЛЕКЦИЙ
ПО УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ МАТЕМАТИКА. ЧАСТЬ 3

Минск БНТУ 2015

ОГЛАВЛЕНИЕ

1 ЧИСЛОВЫЕ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ. СХОДИМОСТЬ

1.1 Числовые ряды

Определение 1.1. Пусть $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$, где $u_n = f(n)$ – бесконечная числовая последовательность. Выражение

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \tag{1.1}$$

называют *числовым рядом*, числа $u_1, u_2, \ldots$ – *членами* ряда, $u_n = f(n)$ – *общим членом ряда*.

Определение 1.2. Сумма первых n членов ряда называется *n-ой частичной суммой ряда*

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} u_i = u_1 + u_2 + \ldots + u_n\,. \tag{1.2}$$

Определение 1.3. Ряд называется *сходящимся*, если существует $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, где S – *сумма ряда*. Если $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не существует или $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, то ряд называют *расходящимся*.

Свойства числовых рядов

1. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится и сумма ряда равна S, то и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a u_n$, где $a = \text{const}$, также сходится и его сумма равна aS.

2. Если сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ с суммой S_1 и сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ с суммой S_2, то сходятся и ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$, причем суммы их соответственно равны $S_1 \pm S_2$.

3. Если к ряду добавить или отбросить конечное число членов, то полученный и исходный ряды сходятся или расходятся одновременно.

Пример 1.1. Найти сумму ряда: $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots$.

Решение. Общий член ряда $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$. Следовательно:

$$S_n = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1};$$

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

Пример 1.2. Исследовать сходимость ряда:

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^n + \ldots, \quad a \neq 0. \qquad (1.3)$$

Решение. Это ряд *геометрической прогрессии* с n-ой частичной суммой $S_n = \dfrac{a\left(1-q^n\right)}{1-q}$. Рассмотрим $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$.

1. Если $|q| < 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a\left(1-q^n\right)}{1-q} = \dfrac{a}{1-q}$.

2. Если $|q| > 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a\left(1-q^n\right)}{1-q} = \infty$.

3. Если $q = 1$, то $S_n = a + a + \ldots + a = an$, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} (a \cdot n) = \infty$.

4. Если $q = -1$, то $S_n = a - a + a - a \ldots + (-1)^{n-1} a$ и не существует $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$.

Значит, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} aq^n$ при $|q| < 1$ сходится и при $|q| \geq 1$ – расходится.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^\alpha}$ называется *обобщенным гармоническим* и сходится при $\alpha > 1$. Доказательство будет приведено ниже.

Теорема 1.1 (необходимый признак сходимости). *Если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *сходится, то* $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

Доказательство. Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, и $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, тогда $\lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1} = S$. Рассмотрим $u_n = S_n - S_{n-1}$. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = S - S = 0$.

Следствие 1.1. Если $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ – расходится.

Пример 1.3. Исследовать сходимость ряда: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+3}{3n+2}$.

Решение. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+3}{3n+2} = \dfrac{1}{3}$, то есть $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$, то ряд расходится (по необходимому признаку сходимости).

Теорема 1.2 (первый признак сравнения). *Пусть даны два знакоположительных ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$. *Если выполняется* $u_n \leq v_n$ *для всех натуральных* n, *то:* ***1)*** *если сходится* *ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$*, то сходится и ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$*;* ***2)*** *если ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *расходится, то расходится и ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$.

Доказательство. Пусть S_n^u, S_n^v – частичные суммы рядов $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ соответственно. Из условия $u_n \le v_n$ следует $S_n^u \le S_n^v$. Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ сходится, и его сумма равна S_2, то есть $\lim_{n\to\infty} S_n^v = S_2$. Поскольку члены ряда положительны, то $S_n^u \le S_n^v < S_2$. Значит, последовательность $S_1^u, S_2^u, S_3^u, \ldots$ монотонно возрастает и ограничена сверху. По признаку существования предела последовательность $S_1^u, S_2^u, S_3^u, \ldots$ имеет предел $\lim_{n\to\infty} S_n^u = S_1$, то есть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ – сходится.

Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится. Так как это знакоположительный ряд, то $\lim_{n\to\infty} S_n^u = \infty$. Поскольку $S_n^u \le S_n^v$, то $\lim_{n\to\infty} S_n^v = \infty$, то есть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} S_n^v$ расходится.

Замечание. Теорема справедлива и в случае, когда неравенство $u_n \le v_n$ выполняется только начиная с некоторого $n \in \mathbf{N}$.

Пример 1.4. Исследовать сходимость ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{6^n + 4}$.

Решение. Так как $a_n = \frac{3^n}{6^n + 4} < \frac{3^n}{6^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n = b_n$.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ сходится (ряд геометрической прогрессии с $q < 1$). Следовательно, сходится и исходный ряд по первому признаку сравнения.

Теорема 1.3 (второй (предельный) признак сравнения). *Пусть даны два знакоположительных ряда* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *и* $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$*. Если существует отличный от нуля предел* $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = A$, $0 < A < \infty$*, то эти ряды сходятся или расходятся одновременно.*

Доказательство. По определению предела последовательности

Из $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = A$ следует $\left|\frac{u_n}{v_n} - A\right| < \varepsilon$, то есть

$$(A-\varepsilon)\cdot v_n < u_n < (A+\varepsilon)\cdot v_n \tag{1.4}$$

для любого ε и $n > N_\varepsilon$. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, то из левой части неравенства (1.4) и теоремы о первом признаке сравнения следует сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(A-\varepsilon)v_n$, то есть сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ (согласно первому свойству числовых рядов).

Если же ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится, то из правой части неравенства (1.4) и теоремы о первом признаке сравнения следует расходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(A+\varepsilon)v_n$, то есть расходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$.

Пример 1.5. Исследовать сходимость ряда: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{3n+4}$.

Решение. $u_n = \frac{\sqrt{n}}{3n+4}$. Возьмем для сравнения ряд с $v_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, являющийся расходящимся (обобщенный гармонический с $\alpha = 1/2 < 1$).

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n}}{3n+4} : \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{3} \neq 0$. Следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{3n+4}$ расходится по второму признаку сравнения.

Теорема 1.4 (признак Даламбера). *Пусть ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *– знакоположительный, и существует предел* $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = l$. *Тогда ряд сходится при* $l < 1$ *и расходится при* $l > 1$.

Доказательство. По определению предела последовательности $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = l$ следует $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n} - l\right| < \varepsilon$ для любого $\varepsilon > 0$ и $n > N_\varepsilon$, то есть

$$l - \varepsilon < \frac{u_{n+1}}{u_n} < \varepsilon + l\,. \tag{1.5}$$

Пусть $l < 1$, тогда можно подобрать ε так, чтобы $l + \varepsilon = q < 1$. Из правой части (1.5) получаем $u_{n+1} < u_n(\varepsilon + l) = u_n \cdot q < u_{n-1}\cdot q^2 < \ldots < u_1 \cdot q^n = v_n$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_1 \cdot q^n$ – сходится (ряд геометрической прогрессии с $q<1$). Значит, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится по первому признаку сравнения.

Пусть $l>1$, тогда можно подобрать ε так, чтобы $l-\varepsilon>1$. Из левой части (1.5) следует, что $\frac{u_{n+1}}{u_n}>1$, то есть $u_{n+1}>u_n$. Значит, последовательность (u_n) возрастает и $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$. Условие необходимого признака сравнения не выполняется, значит, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится.

Замечания.

1. Признак Даламбера работает и в случае, когда $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\infty$.

2. Если $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l=1$, то ряд может быть как сходящимся, так и расходящимся.

Пример 1.6. Исследовать сходимость ряда: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(n+1)!}$.

Решение. $u_n=\frac{3^n}{(n+1)!}$, $u_{n+1}=\frac{3^{n+1}}{(n+2)!}$; $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{3^{n+1}}{(n+2)!}}{\frac{3^n}{(n+1)!}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n+2}=0<1$.

Значит, исходный ряд сходится по признаку Даламбера.

Теорема 1.5 (радикальный признак Коши). *Пусть дан знакоположительный ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *и существует* $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=l$. *Тогда ряд сходится при* $l<1$ *и расходится при* $l>1$.

Доказательство. По определению предела последовательности из $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=l$ следует $\left|\sqrt[n]{u_n}-l\right|<\varepsilon$, то есть

$$l-\varepsilon<\sqrt[n]{u_n}<\varepsilon+l. \tag{1.6}$$

для любого ε и $n>N_\varepsilon$.

Пусть $l<1$,тогда можно подобрать ε так, чтобы $l+\varepsilon=q<1$. Из правой части (1.6) получаем $\sqrt[n]{u_n}<q$ или $u_n<q^n$. Поскольку ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$ сходится при $q<1$, то по первому признаку сравнения сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$. Пусть $l>1$, тогда можно подобрать ε так, чтобы

$l-\varepsilon=q>1$. Из левой части (1.6) получаем $\sqrt[n]{u_n}>q$ или $u_n>q^n$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}q^n$ расходится при $q>1$ и, следовательно, расходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$.

Замечание. Признак Коши применим и в случае $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\infty$.

Пример 1.7. Исследовать сходимость ряда: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n+2}{n}\right)^{n^2}$.

Решение. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\dfrac{n+2}{n}\right)^{n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+2}{n}\right)^{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^{\frac{n}{2}\cdot 2}=e^2>1$. Значит, исходный ряд расходится по признаку Коши.

Теорема 1.6. *Пусть дан знакоположительный ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$. *Если его члены могут быть представлены как значения некоторой монотонно убывающей на промежутке* $[1,+\infty]$ *функции* $f(x)$ *так, что* $f(n)=u_n,\, n\in\mathbf{N}$, *то интеграл* $\int\limits_1^{+\infty}f(x)dx$ *и ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ *сходятся или расходятся одновременно.*

Пример 1.8. Исследовать на сходимость обобщенный гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\alpha}}$.

Решение. Функция $f(x)=\dfrac{1}{x^{\alpha}}$ монотонно убывает на $[1,+\infty]$ и $f(n)=\dfrac{1}{n^{\alpha}}=u_n$.

При $\alpha=1$ $\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{1}{x}dx=\lim\limits_{\alpha\to\infty}\ln x=\infty$.

При $\alpha\neq 1$ $\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{1}{x^{\alpha}}dx=\lim\limits_{a\to\infty}\int\limits_1^{a}x^{-\alpha}dx=\lim\limits_{a\to\infty}\dfrac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_1^a=\lim\limits_{a\to\infty}\left(\dfrac{a^{1-\alpha}}{1-\alpha}-\dfrac{1}{1-\alpha}\right)=\begin{cases}\dfrac{-1}{1-\alpha}, & \alpha>1\\ \infty, & \alpha<1.\end{cases}$.

Значит, согласно интегральному признаку, обобщенный гармонический ряд сходится при $\alpha>1$, расходится при $\alpha\le 1$.

1.2 Знакопеременные ряды

Определение 1.4. *Знакопеременным* (*знакочередующимся*) рядом называется ряд, члены которого поочередно имеют то положительные, то отрицательные знаки, то есть ряд вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$, где все $u_n>0$.

Теорема 1.7 (признак Лейбница). *Знакочередующийся ряд сходится, если абсолютные величины его членов монотонно убывают, а общий член стремится к нулю, то есть если выполняются следующие условия:*

1) $u_1 > u_2 > u_3 > \dots$ *и* ***2)*** $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

Доказательство. Рассмотрим частичную сумму четного порядка, то есть

$S_{2m} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \dots + (u_{2m-1} - u_{2m})$.

В силу первого условия теоремы каждая из скобок положительна. Значит, S_{2m} растет с увеличением значения m. Перепишем эту же частичную сумму так:

$S_{2m} = u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - \dots - (u_{2m-2} - u_{2m-1}) - u_{2m}$.

Здесь так же значения в скобках положительны. Следовательно, S_{2m} ограничена сверху, то есть $S_{2m} < u_1$. Значит, по теореме о пределе монотонной последовательности

$\lim\limits_{m\to\infty} S_{2m} = S$.

Рассмотрим частичную сумму нечетного порядка, то есть $S_{2m-1} = S_{2m} - u_{2m}$.

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, то $\lim\limits_{m\to\infty} u_{2m} = 0$ и $\lim\limits_{m\to\infty} S_{2m-1} = \lim\limits_{m\to\infty} (S_{2m} - u_{2m}) = S$.

Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, то есть S и будет суммой ряда.

Замечание. Так как S_{2m} приближается к S возрастая, а S_{2m-1} приближается к S убывая $(S_{2m-1} = u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - \dots - (u_{2m-2} - u_{2m-1}))$, то $S_{2m} < S < S_{2m-1}$. В частности,

$$0 < S < u_1. \tag{1.7}$$

Рассмотрим n-ый остаток ряда, то есть $R_n = (-1)^n (u_{n+1} - u_{n+2} + u_{n+3} - \dots)$. Сумма в скобках в силу (1.7) меньше u_{n+1}. Значит, остаток ряда имеет знак первого своего члена и меньше его по модулю.

Определение 1.5. Знакопеременный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$. Сходящийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ называется условно сходящимся, если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ расходится.

Свойства знакопеременных рядов

1) Знакопеременный ряд сходится, если сходится ряд из модулей.

2) Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится абсолютно, то ряд, полученный любой перестановкой бесконечного множества его членов, сходится абсолютно и имеет ту же сумму, что и исходный ряд.

3) Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится условно, то при перестановке бесконечного множества его членов сумма ряда может измениться. При некоторых перестановках можно получить расходящийся ряд.

Пример 1.9. Исследовать сходимость знакочередующегося ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\ln(n+1)}$.

Решение. Рассмотрим ряд из модулей $\frac{1}{\ln(n+1)}$; $\overline{u}_n = \frac{1}{\ln(n+1)} > \frac{1}{n+1} = \overline{v}_n$. Так как $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ расходится (гармонический ряд), то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+1)}$ расходится.

Исследуем ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\ln(n+1)}$, используя признак Лейбница:

1) $\overline{u}_n = \frac{1}{\ln(n+1)} < \frac{1}{\ln(n+2)} = \overline{u}_{n+1}$ для любого натурального n, то есть последовательность $(\overline{u}_n)$ монотонно убывает;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \overline{u}_n = 0$. Значит, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\ln(n+1)}$ сходится условно.

Пример 1.10. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^{n-1}}{(n-1)!}$.

Решение. Рассмотрим ряд из модулей $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{(n-1)!}$; $\overline{u}_n = \frac{2^{n-1}}{(n-1)!}$, $\overline{u}_{n+1} = \frac{2^n}{n!}$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\overline{u}_{n+1}}{\overline{u}_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n \cdot (n-1)!}{n! \cdot 2^{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} = 0 < 1$$

Значит, ряд из модулей сходится по признаку Даламбера, а исходный знакочередующийся ряд сходится абсолютно.

1.3 Функциональные ряды

Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots \tag{1.8}$$

называется *функциональным*, если его члены являются функциями от x.

Давая x определенные числовые значения, мы получаем различные числовые ряды, которые могут оказаться сходящимися или расходящимися.

Совокупность тех значений x, при которых функциональный ряд сходится, называют *областью сходимости* этого ряда.

Функциональный ряд называется *сходящимся на некотором множестве*, если он сходится в любой точке этого множества.

Функциональный ряд (1.8) называется *абсолютно сходящимся на множестве* X, если на нем сходится ряд из модулей его членов:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)| = |u_1(x)| + |u_2(x)| + \ldots + |u_n(x)| + \ldots \tag{1.9}$$

Поскольку каждой точке x сходимости ряда (1) ставится в соответствие определенное значение суммы ряда, то сумма сходящегося на множестве X функционального ряда (1) является функцией переменной x. Обозначим эту функцию через $S(x)$, тогда

$$S(x) = \lim_{n \to \infty} S_n(x), \tag{1.10}$$

где $S_n(x)$ – n-я *частичная сумма ряда* (1), то есть

$$S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x). \tag{1.11}$$

Остатком функционального ряда (1.8) после n-го члена (или n-м остатком) называется ряд, полученный из данного отбрасыванием n его первых членов.

Отметим, что функциональный ряд (1) и любой его остаток на множестве X одновременно сходятся или расходятся.

Пусть функциональный ряд (1.8) сходится на множестве X, $S(x)$ – его сумма, $S_n(x)$ – его n-я частичная сумма. Тогда на множестве X сходится и остаток данного ряда. Сумму остатка обозначим через $r_n(x)$:

$$r_n(x) = u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + u_{n+3}(x) + \ldots. \tag{1.12}$$

Очевидно, для всех $x \in X$

$$S(x) = S_n(x) + r_n(x). \tag{1.13}$$

Отсюда следует, что для всех $x \in X$

$$\lim_{n \to \infty} r_n(x) = 0. \tag{1.14}$$

Функциональный ряд (1) называется *равномерно сходящимся на множестве X*, если для любого числа $\varepsilon > 0$ можно указать такой номер $N = N(\varepsilon)$, что при $n > N$ и всех $x \in X$ выполняется неравенство

$$|S(x) - S_n(x)| < \varepsilon \text{ или } |r_n(x)| < \varepsilon. \tag{1.15}$$

Критерий равномерной сходимости функционального ряда (критерий Коши) выражается теоремой, приводимой без доказательства.

Теорема 1.8. *Функциональный ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *равномерно сходится на множестве X тогда и только тогда, когда для любого числа* $\varepsilon > 0$ *существует такой номер* $N = N(\varepsilon)$, *что при* $n > N$ *, любом натуральном* p *и всех* $x \in X$ *выполняется неравенство*

$$|u_n(x) + u_{n+1}(x) + \ldots + u_{n+p}(x)| < \varepsilon \text{ или } \sum_{k=n}^{n+p} |u_k(x)| < \varepsilon. \tag{1.16}$$

Достаточный признак равномерной сходимости функционального ряда выражается следующей теоремой Вейерштрасса.

Теорема 1.9 (теорема Вейерштрасса). *Если члены функционального ряда* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *определены на множестве X и по модулю не превосходят соответствующих членов сходящегося числового ряда с положительными членами* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n > 0$, *то есть для всех* $x \in X$

$$|u_n(x)| \le a_n, \quad n = 1,2,3,\ldots, \tag{1.17}$$

то этот функциональный ряд равномерно сходится на множестве X.

Доказательство. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n > 0$ сходится, то в соответствии с критерием Коши для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер *N*, что $\sum_{k=n}^{n+p} a_n < \varepsilon$ для всех $n > N$ и любых целых $p \ge 0$.

Отсюда и из условия (10) следует, что для всех $n > N$ и $x \in X$

$$\left| \sum_{k=n}^{n+p} |u_k(x)| \right| \le \sum_{k=n}^{n+p} |u_k(x)| \le \sum_{k=n}^{n+p} a_k < \varepsilon$$

Это и означает, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно на множестве *X*.

Замечание. Функциональный ряд, удовлетворяющий условиям теоремы Вейерштрасса, называется *мажорируемым*, соответствующий числовой ряд называется *мажорантным*.

Пример 1.11. Исследовать, равномерно ли сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^3}$.

Решение. Так как при любом x $\left|\frac{\sin nx}{n^3}\right| \le \frac{1}{n^3}\ (n=1,2,3,\ldots)$ и сходится числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$, то данный функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^3}$ сходится равномерно в интервале $(-\infty,+\infty)$.

Свойства равномерно сходящихся рядов

Равномерно сходящиеся ряды обладают важными свойствами, которые выражаются следующими теоремами.

Теорема 1.10. *Если ряд* $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ *равномерно сходится в промежутке X, на котором его члены* $u_n(x)$ *непрерывны, то и сумма ряда* $S(x)$ *непрерывна в этом промежутке.*

Доказательство. Зафиксируем произвольное значение $x_0 \in X$. Если $S_n(x)$ – n-я частичная сумма данного ряда, $r_n(x)$ – остаток ряда после n-го члена, то $S(x)=S_n(x)+r_n(x),\ S(x_0)=S_n(x_0)+r_n(x_0),$. Вычитая почленно второе равенство из первого, получим $S(x)-S(x_0)=S_n(x)-S_n(x_0)+r_n(x)-r_n(x_0)$, откуда

$$|S(x)-S(x_0)| \le |S_n(x)-S_n(x_0)|+|r_n(x)|+|r_n(x_0)|. \tag{1.18}$$

Поскольку $u_n(x)$ – функции, непрерывные в промежутке X, то и любая их конечная сумма $S_n(x)$ также непрерывна в этом промежутке. Задав любое число $\varepsilon>0$, можно указать такое $\delta>0$, что при $|x-x_0|<\delta$ будет выполняться неравенство $|S_n(x)-S_n(x_0)|<\frac{\varepsilon}{3}$. Так как ряд сходится равномерно, то для любого $\varepsilon>0$ можно указать такой номер $N=N(\varepsilon)$, что при всех $n>N$ и всех $x\in X$ выполняется неравенство $|r_n(x)|<\frac{\varepsilon}{3}$, в частности, $|r_n(x_0)|<\frac{\varepsilon}{3}$.

Итак, для любого $\varepsilon>0$ можно указать такое $\delta>0$, что при всех x таких, что $|x-x_0|<\delta$, выполняется неравенство

$$|S(x)-S(x_0)|<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon,\quad |S(x)-S(x_0)|<\varepsilon.$$

Это и означает, что функция $S(x)$ непрерывна в точке x_0.

Теорема 1.11. *Если функции* $u_n(x)$ *непрерывны на отрезке* $[a,b]$ *и ряд* $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=S(x)$ *равномерно сходится на* $[a,b]$, *то ряд, полученный интегрированием членов данного ряда,* *также сходится равномерно на* $[a,b]$*, причем*

$$\int_{x_0}^{x}\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)dt=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{x_0}^{x}u_n(t)dt=\int_{x_0}^{x}S(t)dt. \tag{1.19}$$

где $a\le x_0\le x\le b$.

Доказательство. Пусть $S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}u_k(x)$, $r_n(x)=S(x)-S_n(x)$, $\rho_n=\sup_{x\in[a,b]}|r_n(x)|$, тогда в соответствии с условием $\rho_n\to 0$ при $n\to\infty$.

Так как

$$\left|\int_{x_0}^{x}S(t)dt-\sum_{k=1}^{n}\int_{x_0}^{x}u_k(t)dt\right|=\left|\int_{x_0}^{x}S(t)dt-\int_{x_0}^{x}\sum_{k=1}^{n}u_k(t)dt\right|=$$

$$=\left|\int_{x_0}^{x}S(t)dt-\int_{x_0}^{x}S_n(t)dt\right|=\left|\int_{x_0}^{x}[S(t)-S_n(t)]dt\right|\le$$

$$\le\int_{x_0}^{x}|S(t)-S_n(t)|dt\le(b-a)\rho_n\to 0 \quad \text{при} \quad n\to\infty$$

то выполняется (1.19)

Теорема 1.12. *Пусть функции* $u_n(x)$ *определены на отрезке* $[a,b]$ *и имеют на нем непрерывные производные* $u_n'(x)$*. Если на этом отрезке сходится ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots \tag{1.20}$$

и равномерно сходится ряд, составленный из производных:

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x)=u_1'(x)+u_2'(x)+\ldots+u_n'(x)+\ldots, \tag{1.21}$$

то сумма $S(x)$ *ряда (1.20) имеет производную, равную сумме ряда (1.21), то есть*

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x)=\left[\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\right]'. \tag{1.22}$$

Доказательство. Сумму ряда (1.21) обозначим через $f(x)$:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x). \tag{1.23}$$

Так как ряд (1.21) сходится равномерно на отрезке $[a,b]$, то $f(x)$ – непрерывная функция. В соответствии с теоремой 1.11 ряд (1.21) можно интегрировать почленно:

$$\int_a^x f(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^x u_n'(t)dt \quad (a \le x \le b).$$

Применяя теорему Ньютона-Лейбница, получаем

$$\int_a^x f(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty}[u_n(x)-u_n(a)] = S(x)-S(a), \text{ откуда } S(x)=\int_a^x f(t)dt + S(a).$$

На основании теоремы, утверждающей, что если подынтегральная функция непрерывна, то производная определенного интеграла с переменным верхним пределом существует и равна значению подынтегральной функции для этого предела, то есть $S'(x)=f(x)$. Отсюда и из равенства (1.23) следует равенство (1.22), которое означает, что ряд можно почленно дифференцировать.

Пример 1.12. Определить область сходимости функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^{2n}}$.

Решение. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^{2n}} = \frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}+\ldots+\frac{1}{x^{2n}}+\ldots$.

Члены ряда образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $q=\frac{1}{x^2}$. Как мы знаем, геометрическая прогрессия сходится, если $|q|<1$, и расходится, если $|q|\ge 1$. Поэтому данный ряд сходится для тех значений *x*, при которых $\frac{1}{x^2}<1$, или $x^2>1$. Таким образом, наш ряд сходится для всех точек *x*, при которых $|x|>1$. Область сходимости данного ряда состоит из двух бесконечных интервалов $(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$.

1.4 Степенные ряды

Частным случаем функциональных рядов являются степенные ряды.

Степенным рядом называется ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \ldots, \tag{1.24}$$

где *a* и коэффициенты ряда $a_0, a_1, a_2 \ldots$ – постоянные. В частности, при $a=0$ степенной ряд имеет вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots. \tag{1.25}$$

Ряд (1.24) сводится к ряду (1.25) заменой переменной по формуле $x-a=X$.

Теорема 1.13 (Абеля). *Если степенной ряд* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *сходится при некотором значении* $x_0 \neq 0$, *то он абсолютно сходится при любом x, для которого* $|x| < |x_0|$.

Доказательство. По условию $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ сходится, поэтому $\lim_{n\to\infty} a_n x_0^n = 0$. Следовательно, существует такое число $c > 0$, что для всех *n* выполняется неравенство

$$\left|a_n x_0^n\right| < c. \tag{1.26}$$

Так как

$$\left|a_n x^n\right| = \left|a_n x_0^n \left(\frac{x}{x_0}\right)^n\right| = \left|a_n x_0^n\right| \left|\frac{x}{x_0}\right|^n < cq^n, \quad q = \left|\frac{x}{x_0}\right|$$

и ряд $\sum_{n=0}^{\infty} cq^n$ сходится при $|q| < 1$, то сходится абсолютно и данный ряд при $\left|\frac{x}{x_0}\right| < 1$ или при $|x| < |x_0|$.

Следствие. Если степенной ряд расходится при некотором значении x_1, то он расходится и при любом *x*, для которого $|x| > |x_1|$. Действительно, допустив противное (ряд сходится при значении *x* таком, что $|x| > |x_1|$), по теореме Абеля получим, что ряд сходится и при значении x_1, что противоречит условию.

Из теоремы Абеля следует, что если степенной ряд сходится при $x_0 \neq 0$, то он сходится при любом *x* из интервала $(-|x_0|, |x_0|)$; если расходится при $x = x_1$, то расходится вне интервала $(-|x_1|, |x_1|)$, то есть при $x < -|x_1|$ и $x > |x_1|$.

Радиусом сходимости степенного ряда (1.25) называется число *R* такое, что при $|x| < R$ ряд сходится, а при $|x| > R$ расходится.

Интервалом сходимости ряда (1.25) называется интервал $(-R, R)$, где *R* – радиус сходимости. Существование радиуса сходимости можно доказать с помощью теоремы Абеля.

Замечание. Если ряд (1.25) сходится в единственной точке, то считают $R = 0$; если ряд сходится при любом *x*, то полагают $R = \infty$.

Найдем выражение радиуса сходимости степенного ряда (1.25) через его коэффициенты. Применим признак Даламбера к исследованию сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \left|a_n x^n\right|$, составленного из модулей членов ряда (1.25). Предположим, что $a_n \neq 0$ и существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{R}, \tag{1.27}$$

тогда

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|a_{n+1}x^{n+1}\right|}{\left|a_n x^n\right|} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right||x| = \frac{|x|}{R}.$$

Следовательно, ряд сходится при $|x| < R$ и расходится при $|x| > R$, то есть R – радиус сходимости данного ряда. Из соотношения (1.27) следует, что радиус сходимости степенного ряда (1.25) определяется формулой

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|. \tag{1.28}$$

если этот предел существует.

Формулой (1.28) выражается и радиус сходимости ряда (1.24), интервалом сходимости этого ряда является интервал $(a - R, a + R)$.

Замечание. Применив к ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left|a_n x^n\right|$ признак сходимости Коши, получим для радиуса сходимости степенного ряда (1.25) формулу

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}. \tag{1.29}$$

Пользоваться формулами (1.28) и (1.29) следует весьма осторожно, так как пределы, стоящие в правых частях этих формул, часто не существуют. Так, например, если бесконечное множество коэффициентов a_n обращается в нуль (это, в частности, имеет место, если ряд содержит члены только с четными или только с нечетными степенями x), то пользоваться указанными формулами нельзя. В связи с этим рекомендуется при определении интервала сходимости применять признаки Даламбера или Коши непосредственно.

Пример 1.13. Найти область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n\cdot 2^n}. \tag{1.30}$$

Решение. Рассмотрим ряд, составленный из абсолютных величин членов ряда (1.30):

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|x-2|^n}{n\cdot 2^n}. \tag{1.31}$$

Применим признак Даламбера: $a_n = \dfrac{|x-2|^n}{n\cdot 2^n}$, $\quad a_{n+1} = \dfrac{|x-2|^{n+1}}{(n+1)\cdot 2^{n+1}}$;

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{|x-2|^{n+1}\cdot n\cdot 2^n}{|x-2|^n\cdot(n+1)\cdot 2^{n+1}} = \frac{|x-2|}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = \frac{|x-2|}{2}$$

По при знаку Даламбера ряд (1.31) сходится, если $\dfrac{|x-2|}{2} < 1$, и расходится, если $\dfrac{|x-2|}{2} > 1$. Следовательно, и ряд (1.30) сходится, если $\dfrac{|x-2|}{2} < 1$, и расходится, если $\dfrac{|x-2|}{2} > 1$.

Поэтому ряд (1.30) сходится в интервале $0 < x < 4$.

Исследуем сходимость ряда (1.30) в точках $x = 0$ и $x = 4$, то есть на концах интервала сходимости.

При $x = 0$ получаем условно сходящийся знакочередующийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$.

При $x = 4$ получаем расходящийся гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$.

Итак, ряд (7) сходится для всех *x*, удовлетворяющих условию $0 \le x < 4$.

Пример 1.14. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-3)^n}{n\cdot 5^n}$.

Решение. По формуле (5) имеем

$$R = \lim_{n\to\infty}\frac{1/\left(n\cdot 5^n\right)}{1/\left((n+1)\cdot 5^{n+1}\right)} = 5,$$

то есть интервал сходимости $-5 < x-3 < 5$ или $-2 < x < 8$. В точке $x = -2$ получаем условно сходящийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$, а в точке $x = 8$ – расходящийся гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$.

Таким образом, область сходимости ряда есть полуинтервал $[-2{,}8)$.

1.5 Ряд Тейлора (Маклорена)

Как известно, что если функция $f(x)$ имеет в некоторой окрестности точки x_0 производные до (n+1) порядка включительно, то для неё справедлива формула Тейлора:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x), \qquad (1.32)$$

где $R_n(x)$ – остаточный член формулы Тейлора, который можно, в частности, записать в форме Лагранжа $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, x_0<\xi<x, \xi=x_0+\theta(x-x_0), 0<\theta<1$.

Формулу (5.1) можно записать в виде

$f(x)=P_n(x)+R_n(x),$

где $P_n(x)=f(x_0)+\dfrac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\dfrac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ называется *многочленом Тейлора*.

Если функция $f(x)$ имеет производные всех порядков в окрестности точки x_0, то n в (1.32) можно брать сколь угодно большим. Предположим, что $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$. Тогда, переходя к пределу в рассматриваемой окрестности, получим бесконечный ряд, который называется *рядом Тейлора для функции* $f(x)$ в точке x_0.

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots \tag{1.33}$$

Равенство (1.33) справедливо только в том случае, если $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$. Если $R_n(x)\neq 0$, то ряд Тейлора данную функцию не представляет, хотя он может сходиться к какой-то другой функции.

Определение. *Рядом Маклорена* называется частный случай ряда Тейлора, если $x_0=0$:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots$$

Теорема 5.13. *Если функция $f(x)$ разложима в ряд Тейлора, то это представление единственно.*

Если для функции формально записан ряд Тейлора, то, чтобы доказать, что написанный ряд представляет данную функцию достаточно найти интервал сходимости для данного ряда, то есть исследовать его как степенной ряд.

1.6 Разложение элементарных функций в степенной ряд

1. $f(x)=e^x$

$f(0)=1,\ f'(x)=e^x,\ f'(0)=1$ и т.д.

Подставим найденные производные в (1.33):

$$e^x\sim 1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots$$

Найдем $R: R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_n}{c_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{(n+1)!}{n!}\right|=\infty$. Следовательно, полученный ряд сходится в интервале $(-\infty,\infty)$. Таким образом,

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots,\ x\in(-\infty,\infty).$$

2. $f(x)=\sin x$

$f(0)=0,\ f'(x)=\cos x\ f'(0)=1,\ f''(x)=-\sin x,\ f''(0)=0,\ f'''(x)=-\cos x,\ f'''(0)=-1$ и т. д.

Подставим найденные производные в (1.33):

$$\sin x\sim 1-\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots.$$

Найдем $R: R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_n}{c_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{(2n+3)!}{(2n+1)!}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}|2n+3|=\infty$. Следовательно, полученный ряд сходится в интервале $(-\infty,\infty)$. Таким образом,

$$\sin x=1-\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots,\ x\in(-\infty,\infty).$$

3. $f(x)=\cos x$

$f(0)=1,\ f'(x)=-\sin x\ f'(0)=0,\ f''(x)=-\cos x,\ f''(0)=-1,\ f'''(x)=\sin x,\ f'''(0)=0$ и т.д.

Подставим найденные производные в (1.33):

$$\cos x\sim 1-\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}+\ldots.$$

Найдем $R: R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_n}{c_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{(2n+2)!}{(2n)!}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}|2n+2|=\infty$. Следовательно, полученный ряд сходится в интервале $(-\infty,\infty)$. Таким образом,

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+2)!}+\ldots,\ x\in(-\infty,\infty).$$

4. $f(x)=(1+x)^\alpha$.

$f(0)=1,\ f'(x)=\alpha(1+x)^{\alpha-1},\ f'(0)=\alpha,\ f''(x)=\alpha\cdot(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2},\ f''(0)=\alpha(\alpha-1)$ и т.д.

Подставим найденные производные в (1.33):

$$(1+x)^\alpha\sim 1-\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\ldots.$$

Найдем $R: R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_n}{c_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)(n+1)!}{n!\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)(\alpha-n)}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{(n+1)}{\alpha-n}\right|=1$. Следовательно, полученный ряд сходится в интервале $(-1,1)$. Таким образом,

$$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\ldots, \tag{1.34}$$

$$x\in\begin{cases}[-1,1],\alpha\ge 0,\\(-1,1],-1<\alpha<0,\\(-1,1),\alpha\le -1.\end{cases}$$

Ряд (1.34) называется *биномиальным*, так как если $\alpha=n\in N$, то полученный ряд представляет собой формулу бинома Ньютона:

$$(1+x)^{\alpha}=1+\frac{n}{1!}x+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{n(n-1)(n-2)\ldots\cdot 1}{n!}x^n.$$

5. $f(x)=\ln(1+x)$.

Положим в формуле (1.34) $\alpha=-1$:

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2+\ldots+(-1)^n x^{n-1}+\cdots.$$

Интегрируя почленно в пределах от 0 до *x*, получим:

$$\int_0^x\frac{dx}{1+t}=\int_0^x\left(1-t+t^2-\ldots+(-1)^n t^{n-1}+\cdots\right)dx.$$

$$\ln|1+t\|_0^x=\left(t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}-\ldots+(-1)^n\frac{t^n}{n}+\cdots\right)\Bigg|_0^x.$$

Сделав подстановку, окончательно получим

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^n\frac{x^n}{n}+\ldots,$$

который сходится абсолютно при $x\in(-1,1)$ (по свойству степенных рядов о почленном интегрировании).

При разложении функций в ряд Тейлора используются также формулы суммы геометрической прогрессии

$$1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots=\frac{1}{1-x}, \tag{1.35}$$

$$1-x+x^2-\ldots+(-1)^n x^n+\ldots=\frac{1}{1+x}, \tag{1.36}$$

которые справедливы для всех x, для которых $|x|<1$.

Пример 1.15. Разложить ниже приведенные функции в ряд по степеням x, используя разложения основных элементарных функций. Указать область сходимости полученного ряда.

а) $f(x)=\sqrt{9-x^2}$. Преобразуем данное выражение: $f(x)=3\left(1-\frac{x^2}{9}\right)^{1/2}$. Воспользуемся разложением $f(x)=(1+x)^{\alpha}$, положив $x=\frac{-x^2}{9}, \alpha=\frac{1}{2}$:

$$\sqrt{9-x^2}=3\left(1+\frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{9}\right)+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}\left(-\frac{x^2}{9}\right)^2+\ldots+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}\left(-\frac{x^2}{9}\right)^n+\ldots\right),$$

который будет сходиться при $\left|\frac{x^2}{9}\right|<1$.

б) $f(x)=\ln(2+x)$. Преобразуем данную функцию: $\ln(2+x)=\ln 2\left(1+\frac{x}{2}\right)$.

Воспользуемся разложением для функции $f(x)=\ln(1+x)$, положив $x=\frac{x}{2}$:

$\ln(2+x)=\ln 2+\ln\left(\frac{x}{2}-\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{8}-\ldots+(-1)^n\frac{x^n}{2^n}+\ldots\right)$, который сходится для всех $x\in(-2;2)$.

в) $f(x)=1/(x+2),\ x_0=3$.

Воспользуемся формулой (1.36), предварительно преобразовав исходное выражение:

$$\frac{1}{x+2}=\frac{1}{x-3+5}=\frac{1/5}{1+\left(\frac{x-3}{5}\right)}=\frac{1}{5}\left(1-\frac{x-3}{5}+\left(\frac{x-3}{5}\right)^2-\ldots+(-1)^n\left(\frac{x-3}{5}\right)^n+\ldots\right),$$

который сходится при $\left|\frac{x-3}{5}\right|<1 \Leftrightarrow x\in(-2,8)$.

1.7 Применение рядов в приближенных вычислениях

1.7.1. Приближенное вычисление определенных интегралов

Ряды часто применяют для приближенного вычисления определенных интегралов, когда нахождение первообразной затруднительно.

Рассмотрим интеграл $\int_a^b f(x)dx$. Пусть подынтегральная функция разлагается в степенной ряд по степеням x, интервал сходимости полученного ряда включает в себя отрезок $[a,b]$. Тогда исходная подынтегральная функция будет представлять собой сумму (разность) степенных функций. Воспользовавшись свойством почленного интегрирования степенных рядов, вычислить исходный интеграл не составит труда. Для оценки погрешности вычислений проводят оценку остатка ряда. Если полученный после интегрирования ряд является знакочередующимся, то для оценки остатка ряда можно воспользоваться признаком Лейбница, согласно которому остаток ряда не превосходит первого отброшенного члена. Для знакоположительного ряда обычно находят новый ряд с большими членами, который бы легко суммировался и в качестве оценки остатка ряда используют величину остатка нового ряда.

Пример 1.16. Вычислить интеграл $\int_0^{1/4} \frac{\sin x}{x} dx$ с точностью $\varepsilon = 0{,}00001$.

Воспользуемся разложением функции $f(x) = \sin x$ в ряд Маклорена:

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \ldots .$$

Этот ряд сходится $\forall x \in R$. Интегрируя его почленно, найдем

$$\int_0^{1/4} \frac{\sin}{x} dx = \int_0^{1/4} \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \ldots\right) dx = x - \frac{x^3}{24} + \frac{x^5}{600} - \frac{x^7}{35280} + \ldots \Big|_0^{1/4} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4^3 \cdot 24} + \frac{1}{4^5 \cdot 600} -$$

$$- \frac{1}{4^7 \cdot 35280} + \ldots = 0{,}25 - 0{,}00087 + 0{,}0000016 - \ldots .$$

Полученный ряд является знакочередующимся. Третий член по модулю меньше заданной точности. Значит, достаточно взять два слагаемых

$$\int_0^{1/4} \frac{\sin}{x} dx \approx 0{,}25 - 0{,}00087 = 0{,}24913.$$

1.7.2. Интегрирование дифференциальных уравнений с помощью рядов

Интегрирование многих дифференциальных уравнений не приводится к квадратурам, а их решения не выражаются в элементарных функциях. Решения некоторых из этих уравнений могут быть представлены в виде степенных рядов, сходящихся в определенных интервалах. В таких случаях ряд, являющийся решением дифференциального уравнения, можно найти или *методом неопределенных коэффициентов* или методом, основанным на *применении ряда Тейлора*.

1) *Метод неопределенных коэффициентов.*

Пример 1.17. Найти в виде степенного ряда решение дифференциального уравнения $y'' - xy = 0, y(0) = 1, y'(0) = 0$.

Решение. Записываем искомое решение в виде ряда по степеням x, так как $x_0 = 0$

$$y = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + C_4 x^4 + C_4 x^5 + C_6 x^6 + C_7 x^7 \ldots + . \tag{1.37}$$

Находим производные

$$y' = C_1 + 2C_2x + 3C_3x^2 + 4C_4x^3 + 5C_4x^4 + 6C_6x^5 + 7C_7x^6 + \ldots$$

$$y'' = 2C_2 + 6C_3x \ \ + 12C_4x^2 + 20C_4x^3 + 30C_6x^4 + 42C_7x^5 + \ldots$$

Подставляя найденные производные в исходное уравнение, находим

$$2C_2 + 6C_3x \ \ + 12C_4x^2 + 20C_4x^3 + 30C_6x^4 + 42C_7x^5 + \ldots =$$
$$= xC_1 + 2C_2x^2 + 3C_3x^3 + 4C_4x^4 + 5C_4x^5 + 6C_6x^6 + 7C_7x^7 + \ldots.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим систему для определения коэффициентов $C_i, i = \overline{1, n}$:

$$\begin{cases} 2C_2 = 0, \\ 6C_3 = C_0, \\ 12C_4 = C_1, \\ 20C_5 = C_2, \\ 30C_6 = C_3, \\ 42C_7 = C_4, \\ \ldots\ldots \end{cases}$$

Используя начальные условия для $y(0), y'(0)$, находим $y(0) = 1 = C_0, y'(0) = 0 = C_1$. Решая систему, получаем $C_2 = 0, C_3 = \dfrac{1}{6}, C_4 = 0, C_5 = 0,\ C_6 = \dfrac{1}{180}, C_7 = 0, \ldots$. Подставив найденные коэффициенты в (6.1), получим искомое решение дифференциального уравнения

$$y = 1 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{180}x^6 + \ldots, x \in R.$$

2) *Метод, основанный на применении ряда Тейлора.*

Пример 1.18. Найти первые четыре члена разложения в ряд решения уравнения $y' = x^2 + y^2$, $y(0) = \dfrac{1}{2}$.

Решение будем искать в виде ряда Маклорена

$$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \ldots. \tag{1.38}$$

Найдем выражения для двух последующих производных, дифференцируя исходное уравнение:

$$y'' = 2x + 2yy', y''' = 2 + 2y'y' + 2yy'' \ .$$

Вычислим значения этих производных при $x = 0, y(0) = \dfrac{1}{2}$. Имеем

$$y'(0) = 0 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}, y''(0) = 2 \cdot 0 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4}, y'''(0) = 2 + 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{19}{8}.$$

Подставляя найденные значения в (1.38), получаем

$$y(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}x+\frac{1}{8}x^2+\frac{19}{48}x^3+\ldots.$$

2 РЯД ФУРЬЕ. ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ

2.1 Ортогональная и ортонормированная система функций. Тригонометрическая система функций

Определение 2.1. Система функций $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}=\{\varphi_0(x);\varphi_1(x);\varphi_2(x);\ldots;\varphi_n(x);\ldots\}$, заданных на отрезке $[a;b]$, называется *ортогональной на* $[a;b]$, если существуют конечные интегралы

$$\int_a^b \varphi_m(x)\varphi_n(x)dx=\begin{cases}0, & \text{если} \quad m\neq n,\\ d_n\neq 0, & \text{если} \quad m=n.\end{cases} \tag{2.1}$$

Определение 2.2. Если в последнем равенстве будет $d_n=1$ для $\forall n=0,1,2,\ldots$, то ортогональная система функций $\{\varphi_n(x)\}$ называется *ортонормированной на отрезке* $[a;b]$.

Лемма 2.1. Система функций $\{1;\cos x;\sin x;\cos 2x;\sin 2x;\sin 3x;\cos 3x;\ldots\}$, называемая *тригонометрической системой*, является *ортогональной* на отрезке $[-\pi;\pi]$.

Доказательство. Очевидно, что интеграл вида (2.1) для функций из тригонометрической системы существует. Покажем выполнение условий (2.1) в данном случае:

$$\int_{-\pi}^{\pi}1\cdot\sin nx\cdot dx=-\frac{1}{n}\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi}=-\frac{1}{n}\left(\cos\pi n-\cos(-\pi n)\right)=-\frac{1}{n}\left(\cos\pi n-\cos\pi n\right)=0;\ n\in N.$$

Аналогично

$$\int_{-\pi}^{\pi}1\cdot\cos nx\cdot dx=\frac{1}{n}\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi}=\frac{1}{n}\sin\pi n-\frac{1}{n}\sin(-\pi n)=\frac{1}{n}(0-0)=0;\ n\in N;$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cdot\sin nx\cdot dx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}\sin 2nx\cdot dx=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2n}\cdot\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi}=0;\ n\in N; \tag{2.2}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cdot\cos mx\cdot dx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(\sin(n+m)x+\sin(n-m)x)dx=\ldots=0;\quad n,m\in N,\quad n\neq m;$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cdot\sin mx\cdot dx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(\cos(n-m)x-\cos(n+m)x)dx=\ldots=0;\quad n,m\in N,\quad n\neq m;$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cdot\cos mx\cdot dx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(\cos(n-m)x+\cos(n+m)x)dx=\ldots=0;\quad n,m\in N,\quad n\neq m.$$

В свою очередь интегралы от квадратов функций из тригонометрической системы равны:

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1^2 \cdot dx = 2\pi; \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx \cdot dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (1-\cos 2nx)\cdot dx = \ldots = \pi;$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx \cdot dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (1+\cos 2nx)\cdot dx = \ldots = \pi; \quad n \in N. \tag{2.3}$$

Итак, ортогональность тригонометрической системы доказана.

Следствие 2.1. Система функций

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}; \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}; \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}; \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}; \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}; \ldots\right\}, \tag{2.4}$$

называемая *нормированной тригонометрической системой*, является *ортонормированной* на отрезке $[-\pi;\pi]$.

Доказательство. То, что система (2.4) ортогональна, следует из равенств (2.2), которые не изменятся, если обе их части разделить на $\sqrt{2\pi}$ или $\sqrt{\pi}$.

Из равенств (2.3) следует, что если вместо функции (2.1) взять $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$; вместо $\cos nx$ – функцию $\frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}$; вместо $\sin nx$ – функцию $\frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}$, то справа в равенствах, полученных из (2.3), везде будут единицы. Значит, ортонормированность системы (2.4) доказана.

Замечание. 2.1. Свойством ортогональности могут обладать не только тригонометрические функции. Например, на отрезке $[-1;1]$ ортогональной системой функции является система $\{P_0(x); P_1(x); P_2(x); P_3(x); \ldots\}$ так называемых *многочленов Лежандра*, играющих важную роль в математике и физике:

$$P_0(x)=1;\ P_1(x)=x;\ P_2(x)=\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2};\ P_3(x)=\frac{5}{2}x^3-\frac{3}{2}x;\ P_4(x)=\frac{1}{8}\left(35x^4-30x^2+3\right);\text{ и т.д.}$$

2.2 Тригонометрический ряд Фурье для функций с периодом $T = 2\pi$. Основные теоремы. Разложение в ряд Фурье четных и нечетных функций на отрезке $[-\pi,\pi]$

Определение 2.3. Функциональный ряд вида

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=\frac{a_0}{2}+a_1\cos x+b_1\sin x+a_2\cos 2x+b_2\sin 2x+\ldots \tag{2.5}$$

называется *тригонометрическим рядом на отрезке* $[-\pi,\pi]$. Очевидно, что если ряд (2.5) сходится, то его сумма $S(x)$ есть периодическая функция с периодом 2π, поскольку $\sin nx$ и $\cos nx$ $(n \in N)$ являются *периодическими* с периодом 2π.

Поставим *задачу*:

1) Пусть задана некоторая периодическая функция $f(x)$ с периодом $T = 2\pi$. При каких условиях $f(x)$ можно записать в виде суммы тригонометрического ряда (2.5), то есть

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)? \tag{2.6}$$

2) В каких точках $x \in R$ верно равенство (2.6)?

Ответ на эти вопросы дает следующая теорема:

Теорема 2.1 (Дирихле; достаточное условие разложимости функции в ряд Фурье). *Пусть* 2π*-периодическая функция* $f(x)$ *на отрезке* $[-\pi, \pi]$ *удовлетворяет двум условиям:*

1) $f(x)$ *– кусочно-непрерывна, то есть непрерывна или имеет конечное число точек разрыва первого рода;*

2) $f(x)$ *– кусочно-монотонна, то есть либо монотонна на всем отрезке, либо этот отрезок можно разбить на конечное число промежутков так, что на каждом из них функция монотонна.*

Тогда

1) *в точках непрерывности функции* $f(x)$ *верно равенство (2.6) (называемое* ***формулой разложения*** $f(x)$ ***в ряд Фурье****), то есть сумма* $S(x)$ *ряда (2.6) совпадает с функцией* $f(x)$*:* $S(x) = f(x)$*;*

2) *коэффициенты ряда (2.6) (– так называемые* ***коэффициенты Фурье****) находятся по формулам*

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx; \tag{2.7}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx; \tag{2.8}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx, \quad n \in N, \tag{2.9}$$

(– формулы Фурье);

3) *в каждой точке* x_0 *разрыва функции* $f(x)$ *верно равенство*

$$S(x_0) = \frac{f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)}{2},$$

то есть сумма ряда равна среднему арифметическому пределов $f(x)$ *слева и справа в этой точке.*

Замечание 2.2:

1) Теорема Дирихле дает *лишь достаточное условие* разложимости $f(x)$ в ряд Фурье; необходимым это условие не является: существуют функции, разложимые в ряд Фурье, но не удовлетворяющие условиям Дирихле.

2) Условиям Дирихле удовлетворяет большинство функций, которые встречаются в математике и ее приложениях.

Доказательство формул (2.7) – (2.9) для коэффициентов Фурье.

а) Проинтегрируем обе части равенства (2.6) на отрезке $[-\pi,\pi]$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \int_{-\pi}^{\pi}\cos nxdx + b_n \int_{-\pi}^{\pi}\sin nxdx \right).$$

Ранее (формулы (2.2)) мы получили, что все интегралы в последнем равенстве, кроме $\int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot dx = 2\pi$, равны нулю. Поэтому

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{a_0}{2}\cdot 2\pi = a_0\cdot\pi,$$ откуда следует равенство (2.7).

б) Для доказательства формулы (2.8) умножим обе части равенства (2.6) на $\cos kx,\quad k\in N$ и проинтегрируем обе части полученного равенства на отрезке $[-\pi,\pi]$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kxdx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos kxdx + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cdot\cos kx\cdot dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cdot\cos kx\cdot dx \right); \qquad (2.10)$$

Из формул (2.2) и (2.3), доказанных ранее, следует, что справа в последнем равенстве все интегралы равны нулю, кроме

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cdot\cos kx\cdot dx = \pi \text{ при } k=n.$$

Тогда из равенства (2.10) имеем:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx = a_n\cdot\pi,$$

откуда следует равенство (2.8).

в) Формула (2.9) доказывается аналогично формуле (2.8): для этого обе части равенства (2.6) надо умножить на $\sin kx,\quad k\in N$, после чего проинтегрировать на отрезке $[-\pi,\pi]$.

Пример 2.1. Разложить в ряд Фурье функцию:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \text{при} \quad x\in(-\pi;0);\\ x, & \text{при} \quad x\in(0;\pi);\\ 2\pi - \text{период}. \end{cases}.$$

Решение. Искомое *разложение имеет вид* (2.6); коэффициенты Фурье ищем *по формулам* (2.7) – (2.9):

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}xdx=\frac{1}{\pi}\cdot\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^{\pi}=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi^2}{2}=\frac{\pi}{2};$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}x\cdot\cos nxdx=\otimes\left|\begin{array}{l}\text{интегрируем по частям}\\ x=u(x);\quad dx=du(x);\\ dv(x)=\cos nxdx;\quad v(x)=\dfrac{1}{n}\cdot\sin nx\end{array}\right|\otimes=\quad;$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(x\cdot\frac{1}{n}\sin nx\Big|_0^{\pi}-\int\limits_0^{\pi}\frac{1}{n}\sin nxdx\right)=\frac{1}{\pi}\left(0-\frac{1}{n}\int\limits_0^{\pi}\sin nxdx\right)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{n^2}\cos nx\Big|_0^{\pi}=$$

$$=\frac{\cos\pi n-\cos 0}{\pi n^2}=\frac{(-1)^n-1}{\pi n^2},\quad n\in N\,.$$

Аналогично получается коэффициент $b_n=\dfrac{(-1)^{n+1}}{\pi n^2},\quad n\in N\,.$

Полученные коэффициенты Фурье a_0, a_n и b_n подставим *в формулу* (2.6):

$$f(x)=\frac{\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n-1}{\pi n^2}\cdot\cos nx+\frac{(-1)^{n+1}}{\pi n^2}\cdot\sin nx\right),\qquad(2.11)$$

где x – точки непрерывности $f(x)$.

Замечание 2.3. Для полноты иллюстрации теоремы Дирихле сравним графики функции $f(x)$ (рис. 2.1) и суммы $S(x)$ соответствующего $f(x)$ ряда Фурье (2.11):

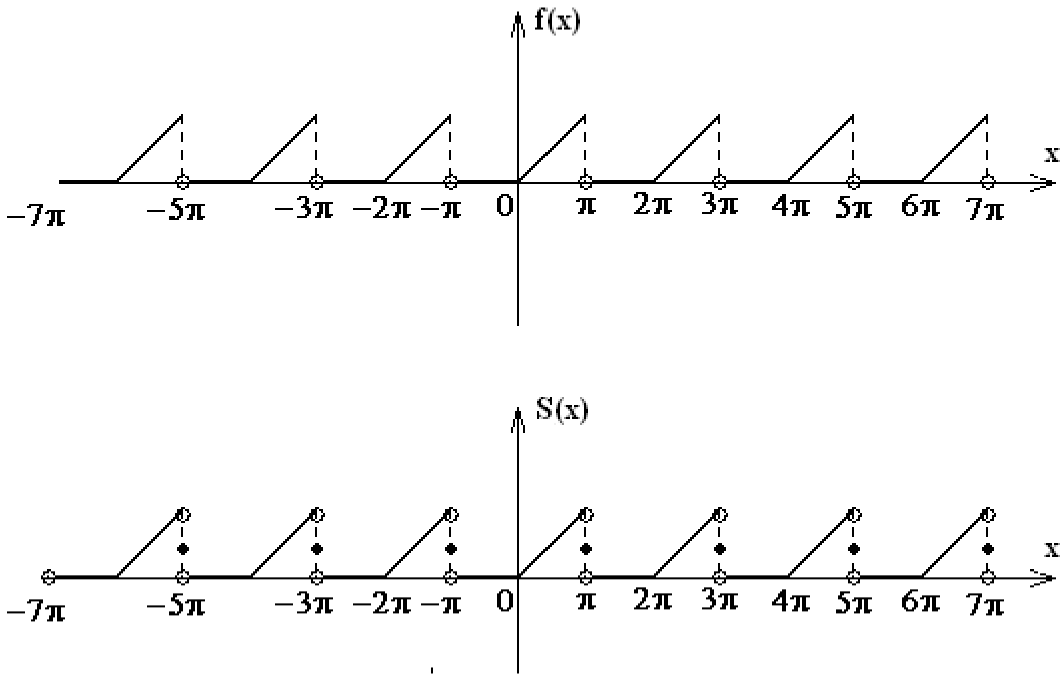


Рисунок 2.1

Приведем следующие два утверждения, позволяющие в ряде случаев *упрощать поиск коэффициентов Фурье*:

Лемма 2.2. Интеграл от периодической функции $\varphi(x)$ по любому отрезку длиной в период T всегда имеет одно и то же значение:

$$\int_a^{a+T} \varphi(x)dx = \int_b^{b+T} \varphi(x)dx, \tag{2.12}$$

(здесь a, b – любые числа; $b > a$ для определенности).

Доказательство. Покажем на оси OX отрезки интегрирования:

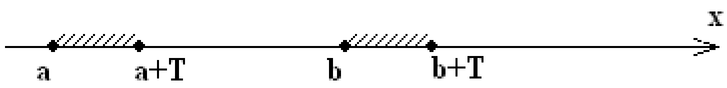


Рисунок 2.2

$$\int_b^{b+T} \varphi(x)dx = \int_a^{b+T} \varphi(x)dx - \int_a^{b} \varphi(x)dx = \int_a^{a+T} \varphi(x)dx + \int_{a+T}^{b+T} \varphi(x)dx - \int_a^{b} \varphi(x)dx =$$

$$= \otimes \left| \begin{array}{l} \text{во II интеграле} - \text{замена переменной} \\ x = \xi + T; \quad \xi \in [a;b]; \quad dx = d\xi \end{array} \right| \otimes = \int_a^{a+T} \varphi(x)dx + \left(\int_a^{b} \varphi(\xi + T)d\xi - \int_a^{b} \varphi(x)dx \right) =$$

$$= \otimes \left| \varphi(\xi + T) \equiv \varphi(\xi) \quad \text{в силу периодичности} \right| \otimes = \int_a^{a+T} \varphi(x)dx + \left(\int_a^{b} \varphi(\xi)d\xi - \int_a^{b} \varphi(x)dx \right) =$$

$$= \otimes \left| \text{два последних интеграла равны} \right| \otimes = \int_a^{a+T} \varphi(x)dx.$$

Равенство (2.12) доказано.

Замечание 2.4. Лемма 2.2 позволяет упрощать поиск коэффициентов Фурье путем *выбора оптимального отрезка интегрирования* в конкретных примерах.

Лемма 2.3. Пусть $\varphi(x)$ – интегрируемая функция на *симметричном отрезке* $[-a;a]$, a – число, $a > 0$. Тогда:

1) если $\varphi(x)$ – *нечетная* функция, то

$$\int_{-a}^{a} \varphi(x)dx = 0; \tag{2.13}$$

2) если $\varphi(x)$ – *четная* функция, то

$$\int_{-a}^{a} \varphi(x)dx = 2\int_0^{a} \varphi(x)dx. \tag{2.14}$$

Доказательство.

1) Дано: $\varphi(x)$ – нечетная функция. Тогда

$$\int_{-a}^{a}\varphi(x)dx=\int_{-a}^{0}\varphi(x)dx+\int_{0}^{a}\varphi(x)dx=\otimes\left|\begin{array}{l}\text{в I интеграле – замена}\\ x=-\xi;\quad dx=-d\xi;\\ \text{если}\quad x\in[-a;0],\quad\text{то}\quad\xi\in[a;0]\end{array}\right|\otimes=$$

$$=\int_{a}^{0}\varphi(-\xi)(-d\xi)+\int_{0}^{a}\varphi(x)dx=\otimes\left|\begin{array}{l}\text{для нечетной функции:}\\ \varphi(-\xi)=-\varphi(\xi)\end{array}\right|\otimes=-\int_{a}^{0}\varphi(\xi)(-d\xi)+\int_{0}^{a}\varphi(x)dx=$$

$$=\int_{a}^{0}\varphi(\xi)d\xi+\int_{0}^{a}\varphi(x)dx=-\int_{0}^{a}\varphi(x)dx+\int_{0}^{a}\varphi(x)dx=0.$$

Итак, равенство (2.13) доказано.

3) Равенство (2.14) доказывается аналогично.

Теорема 2.2 (о разложении в ряд Фурье *четных и нечетных* функций).

Пусть 2π*-периодическая функция* $f(x)$ *удовлетворяет условиям теоремы Дирихле. Тогда:*

1) *Если* $f(x)$ *–* ***четная****, то ее разложение в ряд Фурье таково:*

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nxdx, \qquad (2.15)$$

где коэффициенты Фурье

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)dx;\quad a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nxdx,\quad n\in N. \qquad (2.16)$$

2) *Если* $f(x)$ *–* ***нечетная****, то ее разложение в ряд Фурье имеет вид:*

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nxdx, \qquad (2.17)$$

где

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nxdx,\quad n\in N. \qquad (2.18)$$

Доказательство. Если функция $f(x)$ – четная, то $f(x)\cos nx$ – четная тоже, поскольку $\cos nx$ – четная функция; а $f(x)\sin nx$ – нечетная функция, так как $\sin nx$ – нечетная.

Если же $f(x)$ – нечетная функция, то $f(x)\cos nx$ – тоже нечетная, а $f(x)\sin nx$ – четная функция.

То есть из формул (2.7) – (2.9) и леммы 2.3 получаем справедливость формул (2.15) – (2.18).

Замечание 2.4. Ряды (2.15) и (2.17) *называются рядами Фурье по косинусам и синусам* соответственно (или – *неполными тригонометрическими рядами*).

Пример 2.2. Разложить в ряд Фурье функцию:

$$f(x)=\begin{cases} x, & x\in(-\pi;\pi); \\ 2\pi - \text{период.} \end{cases}.$$

Решение. Функция $f(x)$, очевидно, удовлетворяет условиям Дирихле и является *нечетной*. Тогда по последней теореме будет

$$a_0 = 0; \quad a_n = 0; \quad n\in N;$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx dx = \frac{2}{\pi}\left(-\frac{x}{n}\cos nx\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n^2}\sin nx\Big|_0^{\pi}\right) = \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi}{n}\right)\cos\pi n = \frac{2}{n}\cdot(-1)^{n+1},\ n\in N.$$

Ряд Фурье – неполный, он содержит только синусы:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}\cdot(-1)^{n+1}\cdot\sin nx = 2\left(\frac{\sin x}{1}-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-\ldots\right).$$

Равенство (2.19) верно в точках непрерывности функции $f(x)$, то есть $x\neq\pi+2\pi k$, где k – целые числа.

2.4 Разложение в ряд Фурье функции с произвольным периодом

Пусть дана функция $f(x)$, заданная на промежутке $[-l,l]$ с периодом $2l$. Разложим эту функцию в ряд Фурье, для чего сделаем замену:

$$x=\frac{l}{\pi}\cdot t; \quad x\in[-l,l]; \quad t\in[-\pi,\pi].$$

Тогда функция $f\left(\frac{l}{\pi}\cdot t\right)$, аргумента t, – периодическая с периодом 2π, удовлетворяющая условиям теоремы разложения. Следовательно, ее можно разложить в ряд Фурье:

$$f\left(\frac{l}{\pi}\cdot t\right)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nt + b_n\sin nt,$$

где

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi}\cdot t\right)dt, \qquad a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi}\cdot t\right)\cos ntdt, \qquad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi}\cdot t\right)\sin ntdt .$$

Переходя в этих формулах к старой переменной x, полагая

$$t=\frac{\pi}{l}x, \quad dt=\frac{\pi}{l}dx, \quad t=\pi\Rightarrow x=l, \quad t=-\pi\Rightarrow x=-l,$$

получаем

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)+b_n\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \tag{2.20}$$

где

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx\,, \tag{2.21}$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx\,, \tag{2.22}$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx\,. \tag{2.23}$$

Замечание. Все остальные положения, которые имели место для рядов Фурье от периодической функции с периодом 2π, остаются справедливыми и для рядов Фурье от периодической функции с периодом 2*l*.

Пример 2.3. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию $f(x)=|x|$, с периодом 2*l*, на отрезке $[-l,l]$.

Решение. Функция $f(x)=|x|$ – четная, значит, $b_n = 0$. Ее график имеет вид

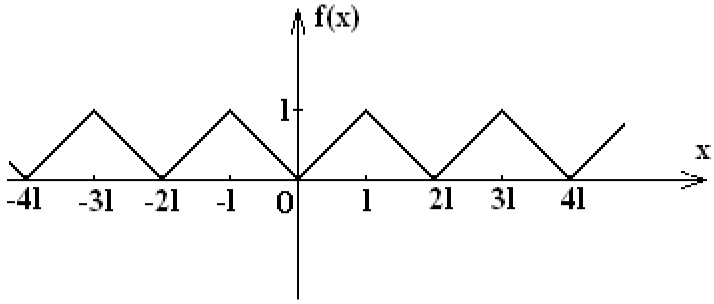


Рисунок 2.3

Учитывая, что функция $f(x)=|x|$ является симметричной, находим:

$$a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx = \frac{2}{l}\int_0^l xdx = \frac{2}{l}\cdot\frac{l^2}{2} = l,$$

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx = \frac{2}{l}\int_0^l x\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx = \begin{bmatrix} x=u & dx=du \\ dv=\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx & v=\frac{l}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\end{bmatrix} =$$

$$= \frac{2}{l}\left[\frac{xl}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\Bigg|_0^l - \frac{l}{n\pi}\int_0^l \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx\right] = \frac{2}{l}\left(\frac{l}{n\pi}\right)^2\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\Bigg|_0^l = \frac{2l}{n^2\pi^2}\left[\cos(n\pi)-\cos 0\right] =$$

$$= \frac{2l}{n^2\pi^2}\left[(-1)^n - 1\right].$$

Тогда $f(x)=|x|$ на отрезке $[-l,l]$ представлена в виде следующего ряда Фурье:

$$|x| = \frac{l}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2l}{n^2\pi^2}\left[(-1)^n - 1\right]\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right).$$

Учитывая, что $(-1)^n - 1 = \begin{cases} 0, & \text{при} \quad n = 2k \\ -2, & \text{при} \quad n = 2k+1 \end{cases}$ окончательно получаем:

$$|x| = \frac{l}{2} - \frac{4l}{n^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos\left(\frac{(2k+1)\pi x}{l}\right)}{(2k+1)^2}.$$

Рассмотрим теперь разложение функции в ряд Фурье, заданной на полуинтервале $[0,\pi]$. Пусть функция $f_1(x)$ задана на отрезке $[0,\pi]$ и ее требуется разложить в тригонометрический ряд. Мы можем произвольно продолжить функцию $f_2(x)$ на отрезке $[-\pi,0]$, но так, чтобы продолженная функция $f_1(x)$ на отрезке $[0,\pi]$ совпадала с функцией $f_2(x)$ на отрезке $[-\pi,0]$. Получили функцию $F(x) = \begin{cases} f_2(x), & x \in [-\pi,0] \\ f_1(x), & x \in [0,\pi] \end{cases}$.

Разлагая функцию $F(x)$ на отрезке $[-\pi,\pi]$ в ряд Фурье, получаем искомый ряд, представляющий в интервале $[0,\pi]$ функцию $f_1(x)$. При этом совершенно неважно, что этот ряд на отрезке $[-\pi,0]$ представляет совершенно другую функцию, по существу отличную от $f_1(x)$.

Если функцию $f_1(x)$ продолжить на отрезок $[-\pi,0]$ четно, то есть график функции продолжить симметрично относительно оси Oy, то вновь полученная функция $F(x)$ в этом случае будет четной и ее ряд Фурье будет состоять только из косинусов. Если же $f_1(x)$ продолжить на отрезок $[-\pi,0]$ нечетно, то есть график ее продолжить симметрично относительно начала координат, то вновь получившаяся функция будет состоять только из синусов.

Вывод. Если функцию $f_1(x)$, заданную на отрезке $[0,\pi]$ можно разложить в ряд Фурье, то таких ее разложений существует бесконечное множество. Значит, можно составить сколько угодно сходящихся рядов, представляющих на отрезке $[0,\pi]$ одну и ту же функцию $f(x)$, а на отрезке $[-\pi,0]$ – самые разнообразные функции.

Пример 2.4. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$ на отрезке $[0,\pi]$ по косинусам.

Решение. Чтобы функцию $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$, заданную на отрезке $[0,\pi]$ разложить в ряд Фурье по косинусам, необходимо доопределить функцию четным образом на отрезке $[-\pi,0]$, то есть

$$f(x) = \frac{\pi - |x|}{2}.$$

Ее график симметричен относительно оси *Oy*

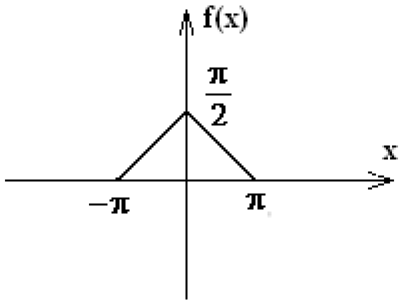


Рисунок 2.4

Найдем коэффициенты ряда Фурье a_0 и a_n, учитывая симметрию:

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{l}\frac{\pi-x}{2}dx=\frac{2}{\pi}\left[\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}dx-\frac{1}{2}\int_0^{\pi}xdx\right]=\frac{2}{\pi}\left[\frac{\pi^2}{2}-\frac{\pi^2}{4}\right]=\frac{\pi}{2},$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\pi-x}{2}\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\left[\pi\int_0^{\pi}\cos nxdx-\int_0^{\pi}x\cos nxdx\right]=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{n}\sin nx\Big|_0^{\pi}-\left(\frac{x\sin nx}{n}\Big|_0^{\pi}-\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin nxdx\right)\right]=\frac{1}{\pi}\left(\frac{-\cos nx}{n^2}\Big|_0^{\pi}\right)=\frac{1}{n^2\pi}\left(1-(-1)^n\right).$$

Тогда $f(x)=\dfrac{\pi-x}{2},\quad x\in[0,\pi]$ представима в виде следующего ряда Фурье:

$$\frac{\pi-x}{2}=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left[1-(-1)^n\right]}{n^2}\cos nx$$

Учитывая, что $1-(-1)^n=\begin{cases}0, & n=2k\\ 2, & n=2k+1\end{cases}$ окончательно получаем:

$$\frac{\pi-x}{2}=\frac{\pi}{4}+\frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\cos((2k+1)x).$$

2.5 Интеграл Фурье

Пусть функция $f(x)$ определена и абсолютно интегрируема на бесконечном интервале $(-\infty;+\infty)$, то есть существует

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx=Q.$$

И пусть функция $f(x)$ такова, что она разлагается на любом интервале $[-l,l]$ в ряд Фурье

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right),$$

где

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\cos\left(\frac{n\pi t}{l}\right)dt$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\sin\left(\frac{n\pi t}{l}\right)dt$$

Подставляя в ряд Фурье выражения a_n и b_n, получаем

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)dt + \frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\int_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{n\pi t}{l}dt\right)\cdot\cos\frac{n\pi x}{l} + \left(\int_{-l}^{l} f(t)\sin\frac{n\pi t}{l}dt\right)\cdot\sin\frac{n\pi x}{l}\right] = \\ &= \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)dt + \frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-l}^{l} f(t)\left[\cos\frac{n\pi t}{l}\cdot\cos\frac{n\pi x}{l} + \sin\frac{n\pi t}{l}\cdot\sin\frac{n\pi x}{l}\right]dt. \end{aligned} \tag{2.24}$$

Учитывая, что $\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha - \beta)$, окончательно получим:

$$f(x) = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)dt + \frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{n\pi(t-x)}{l}dt\right). \tag{2.25}$$

Обозначим $\alpha_1 = \frac{\pi}{l}$; $\alpha_2 = \frac{2\pi}{l}$; ...; $\alpha_n = \frac{\pi n}{l}$. Тогда

$$f(x) = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)dt + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_{-l}^{l} f(t)\cos(\alpha_n(t-x))dt\right)\cdot d\alpha, \tag{2.26}$$

где $d\alpha = \alpha_n - \alpha_{n-1} = \frac{\pi}{l}$. При $l \to \infty$ первый член в правой части $\to 0$. Действительно

$$\left|\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)dt\right| \le \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}|f(t)|dt < \frac{1}{2l}\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|dt = \frac{1}{2l}Q \to 0$$

при $l \to \infty$.

Если $f(x)$ – кусочно-монотонна на каждом конечном интервале и ограничена на бесконечном интервале, а также удовлетворяет условию

$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|f(x)dx| = Q$, то при $l \to \infty$ формула (1) примет вид

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos(\alpha(t-x))dt\right)\cdot d\alpha. \tag{2.27}$$

Выражение, стоящее справа, – интеграл Фурье для функции $f(x)$. Равенство (2.27) имеет место с любым периодом, где функция $f(x)$ непрерывна. Интеграл Фурье функции $f(x)$ сходится к этой функции всюду, кроме, быть может, точек разрыва x_k, где он дает значение, равное $\frac{1}{2}\left[\lim\limits_{x \to x_{k-0}} f(x) + \lim\limits_{x \to x_{k+0}} f(x)\right]$.

Преобразуем внутренний интеграл, стоящий в правой части равенства (2.27), для чего раскроем скобки по формуле

$\cos(\alpha(t-\alpha)) = \cos\alpha t\cos\alpha x + \sin\alpha t\sin\alpha x$.

Вынося в (2.27) $\cos\alpha x$ и $\sin\alpha x$ за знаки интегралов, вычисляемых по t, получаем

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\alpha t dt\right]\cdot\cos\alpha x\cdot d\alpha+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin\alpha t dt\right]\cdot\sin\alpha x\cdot d\alpha . \qquad (2.28)$$

Каждый из интегралов по t существует, так как $f(t)$ абсолютно интегрируема на интервале $(-\infty;+\infty)$, следовательно, абсолютно интегрируемы и функции $f(t)\cos\alpha t$ и $f(t)\sin\alpha t$.

Обозначим

$$A(\alpha)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\alpha t dt;\quad B(\alpha)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin\alpha t dt . \qquad (2.29)$$

Тогда (2.28) примет вид

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}[A(\alpha)\cdot\cos\alpha x+B(\alpha)\cdot\sin\alpha x]\cdot d\alpha . \qquad (2.30)$$

Частные случаи

1) Если $f(t)$ – четная функция, то $f(t)\cos\alpha t$ – четная функция, а $f(t)\sin\alpha t$ – нечетная. В этом случае

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\alpha t dt = 2\int_{0}^{+\infty}f(t)\cos\alpha t dt,\quad \int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin\alpha t dt = 0 .$$

Формула (2.28) примет вид

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\left(\int_{0}^{+\infty}f(t)\cos\alpha t dt\right)\cos\alpha x d\alpha . \qquad (2.31)$$

2) Если $f(t)$ – нечетная функция, то $f(t)\cos\alpha t$ – нечетная функция, а $f(t)\sin\alpha t$ – четная. Тогда формула (2.28) примет вид

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\left(\int_{0}^{+\infty}f(t)\sin\alpha t dt\right)\sin\alpha x d\alpha . \qquad (2.32)$$

3) С помощью формул Эйлера $e^{iy}=\cos y+i\sin y,\ e^{-iy}=\cos y-i\sin y$ или $\cos y=\dfrac{e^{iy}+e^{-iy}}{2}$; $\sin y=\dfrac{e^{iy}-e^{-iy}}{2i}$ из формул (2.30) получается комплексная форма интеграла Фурье:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-i\alpha x}d\alpha\int_{0}^{\infty}f(t)e^{i\alpha t}dt\,. \tag{2.33}$$

Пример 2.5. Представить функцию $f(x)=\begin{cases}0, & \text{при} \quad x<0\\ \pi x, & \text{при} \quad 0\le x\le 2\\ 0, & \text{при} \quad x>2\end{cases}$ в виде интеграла Фурье.

Решение. Найдем коэффициенты $A(\alpha)$ и $B(\alpha)$ по формулам(2.29):

$$A(\alpha)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\alpha t dt=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\infty}^{0}0\cdot\cos\alpha t dt+\pi\int_{0}^{2}t\cdot\cos\alpha t dt+\int_{2}^{0+\infty}0\cdot\cos\alpha t dt\right]=$$

$$=\left(\frac{t\sin\alpha t}{\alpha}+\frac{\cos\alpha t}{\alpha^2}\right)\Bigg|_{t=0}^{2}=\frac{2\sin 2\alpha}{\alpha}+\frac{\cos 2\alpha}{\alpha^2}-\frac{1}{\alpha^2}=\frac{2\alpha\sin 2\alpha+\cos 2\alpha-1}{\alpha^2};$$

$$B(\alpha)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin\alpha t dt=\int_{0}^{2}t\cdot\sin\alpha t dt=\left(\frac{-t\cos\alpha t}{\alpha}+\frac{\sin\alpha t}{\alpha^2}\right)\Bigg|_{0}^{2}=$$

$$=\frac{-2\cos 2\alpha}{\alpha}+\frac{\sin 2\alpha}{\alpha^2}=\frac{\sin 2\alpha-2\alpha\cos 2\alpha}{\alpha^2}.$$

Тогда $f(x)$ примет вид:

$$f(x)=\int_{0}^{+\infty}\frac{(2\alpha\sin 2\alpha+\cos 2\alpha-1)\cos\alpha x+(\sin 2\alpha-2\alpha\cos 2\alpha)\sin\alpha x}{\alpha^2}d\alpha\,.$$

Это равенство справедливо, то есть полученный интеграл сходится к функции $f(x)$ на всей числовой оси, кроме точки $x=2$, в которой эта функция разрывна. В точке $x=2$ интеграл равен $\frac{1}{2}\left[\lim\limits_{x\to 2-0}0+\lim\limits_{x\to 2+0}\pi x\right]=\pi$, тогда как $f(2)=2\pi$.

Решение будет короче, если воспользоваться комплексной формой (2.33) интеграла Фурье:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-i\alpha x}d\alpha\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{i\alpha t}dt=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-i\alpha x}d\alpha\int_{0}^{2}te^{i\alpha t}dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{te^{i\alpha t}}{i\alpha}-\frac{e^{i\alpha t}}{i^2\alpha^2}\right)\Bigg|_{0}^{2}e^{-i\alpha x}d\alpha=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{2i\alpha}(1-2i\alpha)-1}{\alpha^2}\Bigg|e^{-i\alpha x}d\alpha.$$

Естественно, что представление данной функции интегралом Фурье в комплексной форме и полученное до этого представление ее интегралом Фурье в обычной форме, отличаются только по форме и могут быть преобразованы одно в другое с помощью формул Эйлера.

3 ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ (ТФКП)

3.1 Основные понятия. Функция комплексной переменной (ФКП). Основные элементарные ФКП

3.1.1 Области в комплексной плоскости

Пусть ***C*** – комплексная плоскость.

Определение 3.1. Пусть точки $z = x + iy$ и $z_0 = x_0 + iy_0$ принадлежат ***C***, тогда *расстояние* между точками z и z_0 вычисляется по формуле

$$\rho(z_0; z) = |z - z_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}\,. \tag{3.1}$$

Известно, что уравнение окружности с центром в точке $(x_0; y_0)$ и радиусом R имеет вид: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$, тогда, исходя из равенства (3.1), уравнение окружности с центром в точке z_0 и радиусом R имеет вид:

$$|z - z_0| = R\,. \tag{3.2}$$

Значит, множество точек комплексной плоскости, удовлетворяющих неравенству

$$|z - z_0| \le R \tag{3.3}$$

определяет круг с центром в точке z_0 и радиусом R.

Определение 3.2. ε-*окрестность точки* z_0 – это множество точек комплексной плоскости ***C***, удовлетворяющих неравенству

$$|z - z_0| < \varepsilon\,. \tag{3.4}$$

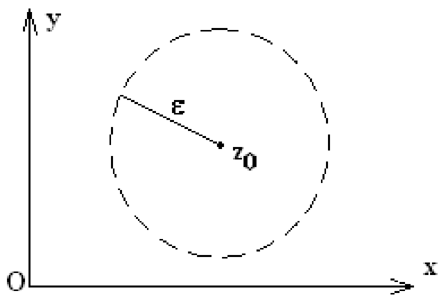


Рисунок 3.1

Рассмотрим множество $D \subset$ ***C*** точек $z = x + iy$ комплексной плоскости.

Определение 3.3. Точка $z \in D$ называется *внутренней точкой* множества D, если существует ε-окрестность точки z, целиком содержащаяся в D.

Точка $z_1 \in D$ называется *граничной точкой* множества D, если в любой ε-окрестность точки z_1 существуют точки, как принадлежащие, так и не принадлежащие множеству D.

Совокупность всех граничных точек множества D называется *границей* множества D.

Определение 3.4. Множество D называется *открытым*, если все его точки – внутренние.

Множество D с присоединенной к нему границей называется *замкнутым*.

Определение 3.5. Пусть $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ – действительные непрерывные функции переменной $t, t \in [t_1; t_2]$. Тогда уравнение $z(t) = \varphi(t) + i\psi(t), t \in [t_1; t_2]$ является *параметрическим уравнением непрерывной кривой* L в комплексной плоскости $\mathbf{C}$. Если $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ имеют непрерывные производные, причем $(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 \neq 0, t \in [t_1; t_2]$, то кривая L называется *гладкой*.

Определение 3.6. Множество D называется *связным*, если две любые его точки можно соединить гладкой кривой, полностью состоящей из точек множества D.

Определение 3.7. *Областью* называется открытое связное множество D.

Пример 3.1.

а) $|z + i| < 1$ – открытый круг с центром в точке $z_0 = -i$ и радиусом 1 – область.

б) $\mathrm{Im}\, z \cdot \mathrm{Re}\, z < 0 \Rightarrow y \cdot x < 0$ – не является областью, так как нарушено условие связности.

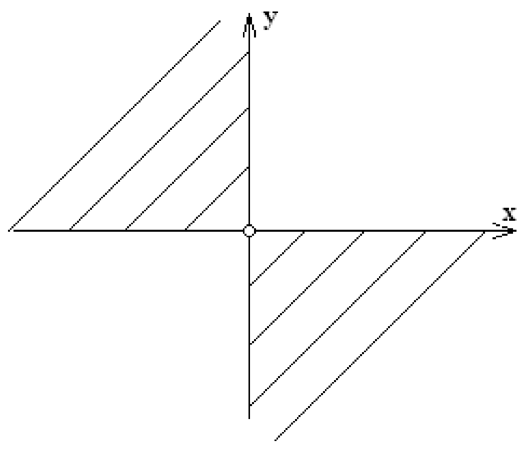


Рисунок 3.2

Определение 3.8. Область с присоединенной к ней границей называется *замкнутой* и обозначается $\overline{D}$.

Определение 3.9. Область D называется *односвязной*, если ее граница является связным множеством. В противном случае область D называется *многосвязной*.

Пример 3.2. Описать следующие множества:

а) $|z+2|<2$ – открытый круг с центром в точке $z_0=-2$ и радиусом 2 – область.

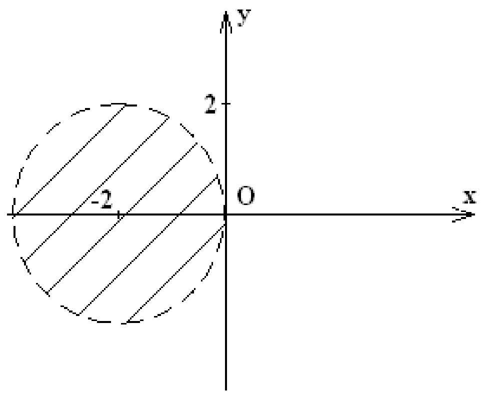


Рисунок 3.3

б) $0 \le \operatorname{Re} z \le 2$ – полоса, расположенная между прямыми $0 \le x \le 2,\ x=0,\ x=2$, – не является областью, так как нарушено условие открытости.

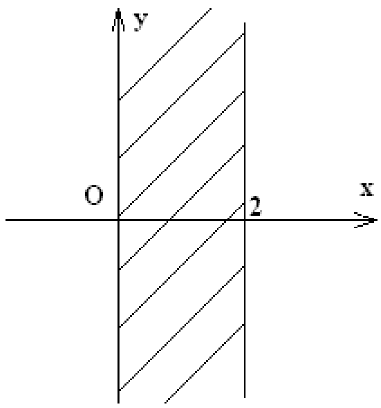


Рисунок 3.4

Определение 3.10. Комплексная плоскость $\boldsymbol{C}$, содержащая точку $z=\infty$ называется *расширенной комплексной плоскостью* и обозначается $\overline{\boldsymbol{C}}$.

3.1.2 Определение функции комплексной переменной (ФКП). Предел и непрерывность ФКП

Определение 3.11. Если каждому комплексному числу *z*, принадлежащему области *D*, поставлено в соответствие некоторое комплексное число ω, то говорят, что в области *D* определена *функция комплексного переменного*.

$$\omega = f(z). \tag{3.5}$$

Область *D* называется *областью определения функции* $f(z)$.

Множество *E* всех значений ω, которое $f(z)$ принимает при $z \in D$ называется *множеством значений функции* $f(z)$.

Пусть $z = x + iy$ и $\omega = u + iv$, тогда $\omega = f(z) = f(x+iy) = u(x;y) + iv(x;y)$, причем

$$\operatorname{Re} f(z) = u(x;y) \text{ – \textit{действительная часть} } f(z). \tag{3.6}$$

$$\operatorname{Im} f(z) = v(x;y) \text{ – \textit{мнимая часть} } f(z). \tag{3.7}$$

Таким образом, задание функции (3.5) равносильно заданию двух функций (3.6) и (3.7) от двух действительных переменных.

Определение 3.12. Функция $\omega = f(z)$ называется *однозначной* (*однолистной*) в области *D*, если для любых $z_1 \in D$ и $z_2 \in D$ таких, что $z_1 \neq z_2$ верно $f(z_1) \neq f(z_2)$.

Определение 3.13. Говорят, что в области определена *многозначная функция* $\omega = f(z)$, если любому $z \in D$ поставлено в соответствие несколько комплексных чисел ω.

Пример 3.3. Вычислить $f(2+3i)$, если $f(z) = x^2 - y^2 i$.

Решение. $f(z) = x^2 - y^2 i = [x = 2,\ y = 3] = 2^2 - 3^2 \cdot i = 4 - 9i$.

Пример 3.4. Найти действительную и мнимую части функции $f(z) = 2iz^2 + \bar{z}$.

Решение. Пусть $z = x + iy$, тогда

$$\begin{aligned} f(z) &= 2i(x+iy)^2 + (x-iy) = 2i\left(x^2 - y^2 + 2xyi\right) + x - iy = 2ix^2 - 2iy^2 - 4xy + x - iy = \\ &= (x - 4xy) + i\left(2x^2 - 2y^2 - y\right) \end{aligned}.$$

Значит, $\operatorname{Re} f(z) = x - 4xy$; $\operatorname{Im} f(z) = 2x^2 - 2y^2 - y$.

Пример 3.5. Вычислить $f(i)$, если $\omega = f(z) = \sqrt{2} + \sqrt{z}$.

Решение. $|i| = 1;\ \arg i = \pi/2$, тогда

$$\omega_k = \sqrt{2} + \cos\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{2}\right),\ k = 0,1;$$

$$\omega_k = \sqrt{2} + \cos\left(\frac{\pi}{4} + \pi k\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + \pi k\right),\ k = 0,1; \quad .$$

$$\omega_0 = \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\omega_1 = \sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Значению $z = i$ соответствуют два значения функции: ω_0 и ω_1, значит, функция $f(z) = \sqrt{2} + \sqrt{z}$ – многозначная.

Определение 3.14. Число $A \neq \infty$ называется *пределом функции* $f(z)$ при $z \to z_0$, если для $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех *z*, удовлетворяющих неравенству $0 < |z - z_0| < \delta$, выполнено неравенство $|f(z)-A|<\varepsilon$ и обозначается

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=A.$$

Определение 3.15. Число $A=\infty$ называется пределом функции $f(z)$ при $z\to z_0$, если для $\forall R>0 \quad \exists\delta(\varepsilon)>0$ такое, что для всех z, удовлетворяющих неравенству $0<|z-z_0|<\delta$, выполнено неравенство $|f(z)|>R$ и обозначается

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=\infty.$$

Замечание. Выражение $z\to z_0$ означает, что $z\to z_0$ по любому пути от z до z_0. Существование предела по фиксированному пути от точки $z\to z_0$ до z_0 не означает существования предела функции $f(z)$ при $z\to z_0$.

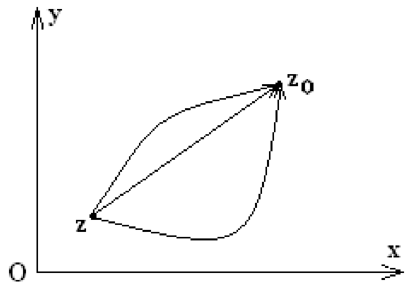


Рисунок 3.5

Теорема 3.1. *Если существует* $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A+iB$*, то существуют* $\lim\limits_{z\to z_0} u(x,y)=A$ *и* $\lim\limits_{z\to z_0} v(x,y)=B$.

Определение 3.16. Пусть функция $f(z)$ определена в точке z_0 и ее окрестности. Функция $f(z)$ называется *непрерывной в конечной точке* z_0, если $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$.

Определение 3.17. Если функция $f(z)$ непрерывна в каждой точке области D, то она называется *непрерывной в области* D.

Точками разрыва называют точки, в которых нарушаются условия непрерывности функции.

На основании теоремы имеет, что если $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A+iB=f(z_0)$, то $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y)=u(x_0;y_0)$ и $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y)=v(x_0;y_0)$.

Следовательно, если $f(z)$ непрерывна в конечной точке z_0, то $u(x,y)$ и $v(x,y)$ непрерывны в точке $(x_0;y_0)$.

Известные теоремы для непрерывности функций действительного переменного справедливы и для ФКП.

Пример 3.6. Вычислить $\lim\limits_{z\to -1+2i}\dfrac{z^2+2z+5}{z+1-2i}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{z\to -1+2i}\dfrac{(z+1-2i)(z+1+2i)}{z+1-2i}=4i$.

3.1.3 Основные элементарные ФКП

Под элементарными ФКП понимаются обычно следующие функции:

1) $f(z)=az+b,\ (a,b\in \mathbf{C})$ – линейная функция;

2) $f(z)=z^n,\ (n\in \mathbf{C})$ – степенная функция;

3) $f(z)=\dfrac{az+b}{cz+d},\ (a,b,c,d\in \mathbf{C})$ – дробно-линейная функция;

4) $f(z)=\dfrac{a_0z^n+a_1z^{n-1}+\ldots+a_n}{b_0z^m+b_1z^{m-1}+\ldots+b_m}$ – общая рациональная функция;

5) $f(z)=\dfrac{1}{2}\left(z+\dfrac{1}{z}\right)$ – функция Жуковского.

6) Показательная функция $\omega=e^z$.

Пусть $z=x+iy$, тогда

$$\omega=e^z=e^{x+iy}=e^x\cdot e^{iy}=e^x(\cos y+i\sin y). \tag{3.8}$$

Из формулы (3.8) очевидно, что

$$\left|e^z\right|=e^x;\quad \arg e^z=y. \tag{3.9}$$

Свойства показательной функции

а) $e^{z_1+z_2}=e^{z_1}\cdot e^{z_2}$;

$e^{z_1+z_2}=e^{x_1+iy_1+x_2+iy_2}=e^{x_1+iy_1}\cdot e^{x_2+iy_2}=e^{z_1}\cdot e^{z_2}$;

б) $e^{z_1-z_2}=\dfrac{e^{z_1}}{e^{z_2}}$;

в) $e^z=e^{z+2\pi ki},\quad k\in Z$;

$e^{z+2\pi ki}=e^{x+iy+2\pi ki}=e^{x+i(y+2\pi k)}=e^x(\cos(y+2\pi k)+i\sin(y+2\pi k))=e^x(\cos y+i\sin y)=e^z$.

Следовательно, функция $\omega=e^z$ является периодической с чисто мнимым периодом 2πi. Тогда

$$\mathrm{Arg}\, e^z = y + 2\pi k. \qquad (3.10)$$

г) Функция $\omega = e^z$ непрерывна при $z \in \boldsymbol{C}$.

7) Логарифмическая функция $\omega = \mathrm{Ln}\, z$.

Данная функция определяется как функция, обратная показательной. Число ω называется *логарифмом числа z*, если $e^{\omega} = z$.

Пусть $z = re^{-i\varphi}$, а $\omega = u + iv$, тогда $e^{u+iv} = r \cdot e^{i\varphi}$. Значит, $v = \varphi + 2\pi k, \quad r = e^u \Rightarrow u = \ln r = \ln|z|$. Следовательно,

$$\omega = \mathrm{Ln}\, z = \ln|z| + i(\varphi + 2\pi k) = \ln|z| + i(\arg z + 2\pi k), \quad k \in Z. \qquad (3.11)$$

Формула (3.11) показывает, что логарифмическая функция комплексного аргумента имеет бесконечно много значений, то есть является многозначной. Выражение при $k = 0$:

$\ln z = \ln|z| + i \arg z$ – *главное значение логарифмической функции.* (3.12)

Тогда

$$\mathrm{Ln}\, z = \ln z + 2\pi k i. \qquad (3.13)$$

Свойства логарифмической функции

а) $\mathrm{Ln}(z_1, z_2) = \mathrm{Ln}\, z_1 + \mathrm{Ln}\, z_2$;

б) $\mathrm{Ln}\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = \mathrm{Ln}\, z_1 - \mathrm{Ln}\, z_2$;

в) $\mathrm{Ln}\, z^n = n \cdot \mathrm{Ln}\, z, \quad n \in \boldsymbol{N}$;

г) $\mathrm{Ln}\, z^{\frac{1}{n}} = \dfrac{1}{n} \cdot \mathrm{Ln}\, z, \quad n \in \boldsymbol{N}$.

8) Тригонометрические функции:

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}; \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2i}; \quad \mathrm{tg}\, z = \frac{\sin z}{\cos z}; \quad \mathrm{ctg}\, z = \frac{\cos z}{\sin z}. \qquad (3.14)$$

Функции $\sin z$ и $\cos z$ имеют период 2π, функции $\mathrm{tg}\, z$ и $\mathrm{ctg}\, z$ имеют период π. Все известные тригонометрические тождества для тригонометрических функций действительного аргумента остаются в силе и для тригонометрических функций (3.14).

9) Обратные тригонометрические функции определяются как функции, обратные по отношению к тригонометрическим.

Число ω называется арксинусом числа z, если $z = \sin \omega$ и обозначается

$\omega = \mathrm{Arcsin}\, z$.

Значит, $z = \sin \omega = \dfrac{e^{i\omega} - e^{-i\omega}}{2i}$ или $e^{2i\omega} - 2ize^{i\omega} - 1 = 0$.

Решая это уравнение относительно $e^{i\omega}$, получаем: $e^{i\omega} = iz + \sqrt{1 - z^2}$, тогда

$e^{i\omega} = \mathrm{Ln}\left(iz + \sqrt{1-z^2}\right)$. Таким образом,

$$\omega = \mathrm{Arcsin}\, z = -i\,\mathrm{Ln}\left(iz + \sqrt{1-z^2}\right). \qquad (3.15)$$

Аналогично определяются другие обратные тригонометрические функции:

$$\begin{aligned} &\mathrm{Arccos}\, z = -i\,\mathrm{Ln}\left(z + \sqrt{1-z^2}\right); \\ &\mathrm{Arctg}\, z = -\frac{i}{2}\mathrm{Ln}\frac{1+iz}{1-iz}; \\ &\mathrm{Arcctg}\, z = \frac{i}{2}\mathrm{Ln}\frac{z-i}{z+i}. \end{aligned} \qquad (3.16)$$

10) Гиперболические функции:

$$\mathrm{sh}\, z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}; \quad \mathrm{ch}\, z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}; \quad \mathrm{th}\, z = \frac{\mathrm{sh}\, z}{\mathrm{ch}\, z}; \quad \mathrm{cth}\, z = \frac{\mathrm{ch}\, z}{\mathrm{sh}\, z}.. \qquad (3.17)$$

Функции $\mathrm{sh}\, z$ и $\mathrm{ch}\, z$ – периодические с периодом $2\pi i$; $\mathrm{th}\, z$ и $\mathrm{cth}\, z$ имеют период πi.

Связь между гиперболическими и тригонометрическими функциями

$$\begin{aligned} &\mathrm{sh}\, z = -i \sin iz; \\ &\mathrm{ch}\, z = \cos iz; \\ &\mathrm{th}\, z = -i\,\mathrm{tg}\, iz; \\ &\mathrm{cth}\, z = -i\,\mathrm{ctg}\, iz. \end{aligned} \qquad (3.18)$$

11) Общая степенная функция $\omega = z^a, \quad a \in \boldsymbol{C}$.

$\omega = z^a = e^{a\,\mathrm{Ln}\, z}$ – многозначная функция.

Главное значение – $e^{a \ln z}$.

Если $a = \frac{1}{n}, \quad n \in N$, то получаем $\omega = z^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \cdot e^{i\frac{\arg z + 2\pi k}{n}}, \quad k \in [0, n-1]$.

12) Общая показательная функция $\omega = a^z, \quad a \in \boldsymbol{C}$

$\omega = a^z = e^{z\,\mathrm{Ln}\, a}, \quad a \in \boldsymbol{C}$ – многозначная функция.

Главное значение – $e^{z \ln a}$.

Пример 3.7. Вычислить значение функции $\omega = \mathrm{Ln}\, z$ в точке $z_0 = -1 + i$.

Решение. $|z_0| = |-1+i| = \sqrt{2}; \quad \arg z_0 = \frac{3\pi}{4}$, тогда

$$\omega(z_0) = \mathrm{Ln}\, z_0 = \ln|z_0| + i(\arg z_0 + 2\pi k) = \mathrm{Ln}\sqrt{2} + i\left(\frac{3\pi}{4} + 2\pi k\right), \quad k \in Z.$$

Пример 3.8. Вычислить значение функции $\omega = z^i$ в точке $z_0 = 3i$.

Решение.

$$\omega = z^i = e^{i\,\mathrm{Ln}\,z}; \quad \omega(z_0) = (3i)^i = e^{i\,\mathrm{Ln}(3i)};$$

$$\mathrm{Ln}(3i) = \ln|3i| + i(\arg(3i) + 2\pi k) = \ln 3 + i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right),$$

тогда $\omega(z_0) = e^{i\left(\ln 3 + i\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)\right)} = e^{-\frac{\pi}{2}-2\pi k + i\ln 3} = e^{-\frac{\pi}{2}-2\pi k}\cdot(\cos(\ln 3) + i\sin(\ln 3)), \quad k \in Z$.

3.2 Производная ФКП. Условия Коши-Римана. Аналитические функции

Пусть функция $\omega = f(z)$ комплексного переменного определена в некоторой окрестности точки z_0. $\Delta\omega = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)$ – приращение функции $f(z)$; Δz – приращение аргумента.

Определение 3.18. *Производной функции* $f(z)$ в точке z_0 называется конечный предел отношения приращения функции $\Delta\omega$ к приращению аргумента Δz при стремлении Δz к нулю, то есть

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}. \tag{3.19}$$

Если функция $\omega = f(z)$ имеет производную в точке z_0, то говорят, что функция *дифференцируема в точке* z_0.

Если функция $\omega = f(z)$ определена в области $D \subset \boldsymbol{C}$ и в каждой точке этой области $f(z)$ дифференцируема, то говорят, что $\omega = f(z)$ *дифференцируема в области D*.

Выразим приращение функции $\Delta\omega = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)$ через приращение функций $u = u(x;y)$ и $v = v(x;y)$: $\omega = f(z) = u(x;y) + iv(x;y)$ и $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$.

Тогда

$$\begin{aligned}\Delta\omega = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = [u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) + iv(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)] - \\ - [u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0)] = [u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)] + \\ + i[v(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)] = \Delta u + i\Delta v,\end{aligned}$$

где $\Delta u = u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)$; $\quad \Delta v = v(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)$.

Значит, формулу (3.19) можно переписать в виде:

$$f'(z_0) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\Delta\omega}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x + i\Delta y}. \tag{3.20}$$

Выясним, при каких условиях ФКП будет дифференцируемой в данной точке.

Теорема 3.2. *Для того, чтобы* $f(z) = u(x;y) + iv(x;y)$ *была дифференцируема в точке* $z_0 = x_0 + iy_0$*, необходимо и достаточно, чтобы функции* $u(x;y)$ *и* $v(x;y)$ *были дифференци-*

руемы в точке $(x_0; y_0)$ и в этой точке выполнялись условия Коши-Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y};\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{3.21}$$

При этом для производной $f'(z_0)$ справедливы формулы

$$f'(z_0)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}+i\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}. \tag{3.22}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть функция $\omega = f(z)$ дифференцируема в точке z_0. Тогда существует конечный предел

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta\omega}{\Delta z}.$$

Данный предел существует и не зависит от закона стремления Δz к нулю.

Пусть $\Delta y = 0,\ \Delta x\to 0$, значит,

$$f'(z_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}+i\frac{\Delta v}{\Delta x}\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+i\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Так как $f'(z_0)$ существует, то $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial v}{\partial x}$ тоже существуют.

Пусть $\Delta x = 0,\ \Delta y\to 0$, значит,

$$f'(z_0)=\lim_{\Delta y\to 0}\left(\frac{\Delta u+i\Delta v}{i\Delta y}\right)=\lim_{\Delta y\to 0}\left(\frac{\Delta u}{i\Delta y}+\frac{\Delta v}{\Delta y}\right)=-i\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta y}+\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta y}=-i\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}.$$

Так как $f'(z_0)$ существует, то существуют $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial v}{\partial y}$.

Но предел (3.19) не должен зависеть от закона стремления Δz к нулю, значит,

$$\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=-i\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}.$$

Тогда $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}$, что и требовалось доказать.

Достаточность. Пусть теперь выполняются равенства (3.21) и $u(x;y)$ и $v(x;y)$ дифференцируемы в точке $(x_0;y_0)$. Это означает, что

$$\Delta u=\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y+\alpha\cdot|\Delta z|,\quad \Delta v=\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial v}{\partial y}\Delta y+\beta\cdot|\Delta z|,\ \lim_{\Delta z\to 0}\alpha=0,\quad \lim_{\Delta z\to 0}\beta=0$$

Тогда $\Delta\omega=\Delta u+i\Delta v=\dfrac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\dfrac{\partial u}{\partial y}\Delta y+i\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}\Delta x+\dfrac{\partial v}{\partial y}\Delta y\right)+(\alpha+i\beta)\cdot|\Delta z|$.

Используя условия Коши-Римана, заменим $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ на $\dfrac{\partial v}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ на $-\dfrac{\partial v}{\partial x}$, получаем:

$$\Delta\omega=\frac{\partial v}{\partial y}\Delta x-\frac{\partial v}{\partial x}\Delta y+i\left(\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial v}{\partial y}\Delta y\right)+(\alpha+i\beta)\cdot|\Delta z|=$$
$$=\frac{\partial v}{\partial y}(\Delta x+i\Delta y)+\frac{\partial v}{\partial x}(-\Delta y+i\Delta x)+(\alpha+i\beta)\cdot|\Delta z|=$$
$$=\frac{\partial v}{\partial y}(\Delta x+i\Delta y)+i\frac{\partial v}{\partial x}(\Delta x+i\Delta y)+(\alpha+i\beta)\cdot|\Delta z|=\frac{\partial v}{\partial y}\Delta z+i\frac{\partial v}{\partial x}\Delta z+(\alpha+i\beta)\cdot|\Delta z|,$$

тогда $f'(z_0)=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta\omega}{\Delta z}=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\cdot\frac{\Delta z}{\Delta z}+i\frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\Delta z}{\Delta z}+\frac{(\alpha+i\beta)\cdot|\Delta z|}{\Delta z}\right)=\frac{\partial v}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial x}$, что и требовалось доказать.

Для функций комплексного переменного сохраняются все правила дифференцирования функции действительного переменного:

1) $(f(z)+g(z))'=f'(z)+g'(z)$;

2) $(f(z)\cdot g(z))'=f'(z)g(z)+f(z)g'(z)$;

3) $\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)'=\frac{f'(z)g(z)-f(z)g'(z)}{g^2(z)}$;

4) $(f(g(z)))'=f'(g(z))\cdot g'(z)$.

Пример 3.9. Выяснить, являются ли следующие функции дифференцируемыми:

а) $f(z)=\sin 2z+3z$ **;**

Решение. Найдем действительную и мнимую части $f(z)$:

$$f(z)=\sin 2z+3z=\frac{1}{2i}\left(e^{2zi}-e^{-2zi}\right)+3z=\frac{1}{2i}\left(e^{(2x+2iy)i}-e^{-(2x+2iy)i}\right)+3(x+iy)=$$
$$=\frac{1}{2i}\left(e^{-2y+2xi}-e^{2y-2xi}\right)+3x+3iy=$$
$$=\frac{1}{2i}\left(e^{-2y}(\cos 2x+i\sin 2x)-e^{2y}(\cos 2x-i\sin 2x)\right)+3x+3iy=$$
$$=-\frac{1}{2}e^{-2y}\cos 2x+\frac{1}{2}e^{-2y}\sin 2x+\frac{1}{2}ie^{2y}\cos 2x+\frac{1}{2}e^{2y}\sin 2x+3x+3iy=$$
$$=\frac{1}{2}\sin 2x\left(e^{-2y}+e^{2y}\right)+3x+i\left(\frac{1}{2}\cos 2x\left(e^{2y}-e^{-2y}\right)+3y\right).$$

Тогда $u(x,y)=\frac{1}{2}\sin 2x\left(e^{-2y}+e^{2y}\right)+3x;\quad v(x,y)=\frac{1}{2}\cos 2x\left(e^{2y}-e^{-2y}\right)+3y$.

Проверим выполнение условий Коши-Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\cos 2x\left(e^{-2y}+e^{2y}\right)+3,\quad \frac{\partial v}{\partial y}=\cos 2x\left(e^{2y}+e^{-2y}\right)+3,$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}=\sin 2x\left(-e^{-2y}+e^{2y}\right),\quad \frac{\partial v}{\partial x}=\sin 2x\left(e^{2y}-e^{-2y}\right).$$

Очевидно, что $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$.

Значит, $f(z)=\sin 2z+3z$ дифференцируема при $z\in \mathbf{C}$ и

$$f'(z)=\cos 2x\left(e^{2y}+e^{-2y}\right)+3+i\left(\sin 2x\left(e^{2y}-e^{-2y}\right)\right)=$$
$$=e^{2y}(\cos 2x+i\sin 2x)+e^{-2y}(\cos 2x-i\sin 2x)+3=2\cos 2z+3.$$

б) $f(z)=\bar{z}+2z+5$;

Решение. Найдем действительную и мнимую части $f(z)$:

$f(z)=x-iy+2x+2iy+5=3x+iy+5$, тогда $u(x,y)=3x+5;\quad v(x,y)=y$.

Проверим выполнение условий Коши-Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=3,\quad \frac{\partial v}{\partial y}=1;\quad \frac{\partial u}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial v}{\partial x}=0\ .$$

Очевидно, что условия не выполняются, значит, функция не дифференцируема при $z\in \mathbf{C}$.

Аналитические ФКП

Введем понятие аналитической функции комплексного переменного.

Определение 3.19. Функция $\omega=f(z)$ – однозначная и дифференцируемая в каждой точке области *D*, называется *аналитической* (*регулярной* или *голоморфной*) в этой области.

Либо $\omega=f(z)$ называется *аналитической в области D*, если в области *D* u'_x, u'_y, v'_x, v'_y существуют и непрерывны и выполнены условия Коши-Римана .

Пример 3.10.

а) Функция $f(z)=\sin 2z+3z$ аналитическая при $\forall z\in \mathbf{C}$.

б) Функция $f(z)=\bar{z}+2z+5$ не является аналитической при $\forall z\in \mathbf{C}$.

Выясним, любая ли функция $f(x,y)$ может служить действительной или мнимой частью некоторой аналитической функции.

Пусть дана функция $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ – аналитическая в некоторой области *D*. Следовательно, в точке $(x,y)\in D$ выполнены условия Коши-Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y};\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Тогда $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}$. Значит, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Rightarrow\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$. Аналогично $\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$ и $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=-\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$. Значит, $\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=-\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\Rightarrow\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=0$.

Получили, что функции $v = v(x, y)$ и $u = u(x, y)$ должны удовлетворять одному и тому же дифференциальному уравнению с частными производными второго порядка, называемому *уравнением Лапласа*:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \qquad (3.23)$$

Определение 3.20. Функция $u = u(x, y)$, удовлетворяющая уравнению Лапласа, называется *гармонической функцией.*

Вывод. Действительная и мнимая части аналитической функции являются *гармоническими функциями*.

Определение 3.21. Две гармонические функции, удовлетворяющие условиям Коши-Римана, называются *взаимно сопряженными*.

Пусть функция $u = u(x, y)$ – гармоническая. Построим аналитическую функцию $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$.

На основании условий Коши-Римана – $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$. Отсюда $v = \int \frac{\partial u}{\partial x} dy + \varphi(x)$. Так как $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$, то $\frac{\partial}{\partial x}\left(\int \frac{\partial u}{\partial x} dy\right) + \varphi'(x) = -\frac{\partial u}{\partial y}$. Тогда $\varphi'(x) = -\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\int \frac{\partial u}{\partial x} dy\right)$. Откуда $\varphi'(x) = g(x)$ и $\varphi(x) = \int g(x)dx + C$. Значит, $v = v(x, y)$ найдена и функция $f(z)$ построена.

Пример 3.11. Построить, если возможно, аналитическую функцию

$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, для которой функция $v = 3e^x \sin y$ является мнимой частью.

Решение. Проверим, является ли функция $v = 3e^x \sin y$ гармонической.

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 3e^x \sin y \Rightarrow \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 3e^x \sin y; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 3e^x \cos y \Rightarrow \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -3e^x \sin y.$$

Очевидно, что функция $v(x, y)$ – гармоническая.

На основании условий Коши-Римана

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} \Rightarrow u = \int \frac{\partial v}{\partial y} dx + \varphi(y) = \int 3e^x \cos y dx + \varphi(y) = 3e^x \cos y + \varphi(y).$$

Так как $\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x}$, то $-3e^x \sin y + \varphi'(y) = -3e^x \sin y; \quad \varphi'(y) = 0; \quad \varphi(y) = C$.

Значит, $u(x, y) = 3e^x \cos y + C$.

Получили $f(z) = 3e^x \cos y + C + i \cdot 3e^x \sin y = 3e^x (\cos y + i \cdot \sin y) + C = 3e^z + C$.

Геометрический смысл аргумента и модуля производной

Пусть функция $\omega = f(z)$ аналитична в области D, $z_0 \in D$, $\omega_0 = f'(z_0) \neq 0$, $z = z_0 + \Delta z$, $\omega = \omega_0 + \Delta\omega$.

По определению производной $f'(z_0) = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{\Delta\omega}{\Delta z}$. Тогда

$$|f'(z_0)| = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{|\Delta\omega|}{|\Delta z|} = k. \tag{3.24}$$

Следовательно, $|f'(z_0)|$ есть предел отношения бесконечно малого расстояния между отображенными точками ω_0 и ω к бесконечно малому расстоянию между первоначальными точками z_0 и z. В силу аналитичности функции $f(z)$ в точке z_0 предел (3.24) не зависит от стремления Δz к нулю. Следовательно, предел (3.24) – один и тот же во всех направлениях, выходящих из точки z_0. По этой причине $|f'(z_0)|$ можно рассматривать геометрически как *коэффициент растяжения в точке* z_0 *при отображении* $\omega = f(z)$. При это м если $|f'(z_0)| > 1$, то в достаточно малой окрестности точки z_0 расстояние между точками при отображении $\omega = f(z)$ увеличивается и происходит растяжение, если же $|f'(z_0)| < 1$, то отображение приведет к сжатию.

Выясним, за что отвечает $\arg f'(z_0)$.

$$\alpha = \arg f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \arg\frac{\Delta\omega}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0}(\arg\Delta\omega - \arg\Delta z) = \Phi - \varphi.$$

Значит, $\arg f'(z_0)$ *есть угол, на который необходимо повернуть касательную к кривой l в точке* z_0 *для того, чтобы получить направление касательной к кривой L в точке* ω_0.

В силу аналитичности $f(z)$ в точке z_0 угол поворота α один и тот же для всех кривых l, проходящих через z_0.

Определение 3.21. Отображение окрестности точки z_0 на окрестность точки ω_0, осуществляемое аналитической функцией $\omega = f(z)$, $f'(z_0) \neq 0$, обладает в точке z_0 свойством сохранения углов (*консерватизмом*) и постоянством растяжений. Такое отображение называется *конформным отображением в точке* z_0.

Пример 3.12. Найдите угол поворота α и коэффициент растяжения k при отображении с помощью аналитической функции $f(z) = 4z^2 + 8iz$ в точке $z_0 = 1$.

Решение. Так как $f(z) = 4z^2 + 8iz$ – аналитическая функция в точке $z_0 = 1$, то

$f'(z) = 8z + 8i, \quad f'(z_0) = f'(1) = 8 + 8i$, тогда

$$K = |f'(z)| = |f'(1)| = |8 + 8i| = \sqrt{64 + 64} = 8\sqrt{2};$$

$$\alpha = \arg f'(z_0) = \operatorname{arctg}\frac{8}{8} = \operatorname{arctg} 1 = \pi / 4.$$

3.3 Основные интегральные теоремы функции комплексной переменной

3.3.1 Интеграл от функции комплексной переменной

Пусть в области D комплексной плоскости определена однозначная и непрерывная функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ и l – кусочно-гладкая ориентированная кривая в D с начальной точкой A и конечной точкой B. Кривую l разобьем на части точками $A = z_0 < z_1 < z_2 < \ldots < z_n = B$, взятыми в порядке следования по l от A до B. В каждой «элементарной дуге» $\overset{\frown}{z_{k-1} z_k}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ выберем точку c_k и составим интегральную сумму

$$\sum_{k=1}^{n} f(c_k) \Delta z_k, \text{ где } \Delta z_k = z_k - z_{k-1}. \tag{3.24}$$

Если существует конечный предел интегральной суммы (3.24) при $\Delta = \max \Delta z \to 0$ $(n \to \infty)$, не зависящий ни от способа разбиения кривой l на части, ни от выбора точек $c_k \in \overset{\frown}{z_{k-1} z_k}$, то он называется интегралом от функции $f(z)$ по кривой l и обозначается $\int\limits_l f(z) dz$.

Итак, по определению,

$$\int\limits_l f(z) dz = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k) \Delta z_k. \tag{3.25}$$

Покажем, что если l – гладкая кривая, а $f(z)$ – непрерывная и однозначная функция, то интеграл (3.25) существует. Действительно, пусть $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z = x + iv$, $c_k = \bar{x}_k + i\bar{y}_k$. Тогда $f(c_k) = u(\bar{x}_k, \bar{y}_k) + iv(\bar{x}_k, \bar{y}_k)$, $\Delta z_k = (x_k + iy_k) - (x_{k-1} + iy_{k-1}) = \Delta x_k + i\Delta y_k$. Поэтому

$$\sum_{k=1}^{n} f(c_k) \Delta z_k = \sum_{k=1}^{n} \left(u(\bar{x}_k, \bar{y}_k) + iv(\bar{x}_k, \bar{y}_k)\right)(\Delta x_k + i\Delta y_k) =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \left(u(\bar{x}_k, \bar{y}_k) \Delta x_k - v(\bar{x}_k, \bar{y}_k) \Delta y_k\right) + i \sum_{k=1}^{n} \left(v(\bar{x}_k, \bar{y}_k) \Delta x_k + u(\bar{x}_k, \bar{y}_k) \Delta y_k\right).$$

Обе суммы, находящиеся в правой части последнего равенства, являются интегральными суммами для соответствующих криволинейных интегралов. При сделанных предположениях о кривой l и функции $f(z)$ пределы этих сумм существуют. Поэтому после перехода к пределу (в последнем равенстве) при $\Delta \to 0$ получим:

$$\int_l f(z)dz = \int_l udx - vdy + i\int_l vdx + udy\,. \tag{3.26}$$

Формула (3.26) показывает, что вычисление интеграла от функции комплексного переменного сводится к вычислению криволинейных интегралов от действительных функций действительных переменных.

Формулу (3.26) можно записать в удобном для запоминания виде:

$$\int_l f(z)dz = \int_l (u+iv)(dx+idy). \tag{3.27}$$

Если $x = x(t),\ y = y(t)$, где $t_1 \le t \le t_2$ – параметрические уравнения кривой l, то $z = z(t) = x(t) + iy(t)$ называют комплексным параметрическим уравнением кривой l, формула (3.27) преобразуется в формулу

$$\int_l f(z)dz = \int_{t_1}^{t_2} f(z(t))z'(t)dt\,. \tag{3.28}$$

Действительно, считая $z(t)$ непрерывной и дифференцируемой функцией, получаем

$$\int_l f(z)dz = \int_l (u+iv)(dx+idy) = \int_{t_1}^{t_2}(u+iv)(x_i'+iy_i')dt = \int_{t_1}^{t_2} f(z(t))z'(t)dt\,.$$

Основные свойства интеграла от функции комплексной переменной

1) $\int_l dz = z_n - z_0$.

$$\sum_{k=1}^{n}\Delta z_k = \Delta z_1 + \Delta z_2 + \ldots + \Delta z_n = z_1 - z_0 + z_2 - z_1 + \ldots + z_n - z_{n-1} = z_n - z_0\,.$$

2) *Линейность.*

$\int_l (a_1 f_1(z) \pm a_2 f_2(z))dz = a_1\int_l f_1(z)dz \pm a_2\int_l f_2(z)dz,\quad a_1, a_2$ – комплексные числа.

3) *Аддитивность.*

$\int_l f(z)dz = \int_{l_1} f(z)dz + \int_{l_2} f(z)dz$, где $l = l_1 + l_2$, то есть интеграл по всему пути l равен сумме интегралов по его частям l_1 и l_2.

4) $\int_l f(z)dz = -\int_{l^-} f(z)dz$, то есть при перемене направления пути интегрирования интеграл изменяет свой знак на противоположный (в других обозначениях кривой: $\int_{AB} = -\int_{BA}$).

5) *Оценка модуля интеграла.* Если $|f(z)| \le M$ во всех точках кривой l, то

$\left|\int\limits_l f(z)dz\right| \le Ml$, где l – длина кривой l.

Действительно, $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta z_k\right| \le \sum\limits_{k=1}^{n}\left|f(c_k)\Delta z_k\right| \le M\sum\limits_{k=1}^{n}\left|\Delta z_k\right| \le Ml$, где $\sum\limits_{k=1}^{n}\left|\Delta z_k\right|$ – длина ломаной $z_0 z_1 z_2 \ldots z_n$, вписанной в кривую l.

Все приведенные свойства интеграла функции комплексной переменной непосредственно вытекают из его определения (3.24) и представления (3.28).

Пример 3.14. Вычислить интеграл $I = \int\limits_{AB}(1+i-2\bar{z})dz$, где AB – часть параболы $\int\limits_l y = x^2$ от точки $A=0$ до точки $B=1+i$.

Решение. Для вычисления интеграла используем формулу (3.26). Перепишем подынтегральную функцию в виде $f(z)=1+i-2\bar{z}=1+i-2(x-iy)=(1-2x)+i(1+2y)$. Здесь

$$u=1-2x, v=1+2y;\quad I=\int\limits_{AB}(1-2x)dx-(1+2y)dy+i\int\limits_{AB}(1+2y)dx-(1-2x)dy.$$

Так как AB – парабола $y=x^2$, то для параболы имеем $dy=2xdx,\ 0\le x\le 1$.

$$I=\int\limits_0^1\left(1-2x-\left(1+2x^2\right)2x\right)dx+i\int\limits_0^1\left(1+2x^2+(1-2x)2x\right)dx=$$

$$\int\limits_0^1\left(1-4x-4x^3\right)dx+i\int\limits_0^1\left(1+2x-2x^2\right)dx=\left(x-2x^2-x^4\right)\Big|_0^1+i\left(x+x^2-\frac{2}{3}x^3\right)\Bigg|_0^1=-2+\frac{4}{3}i.$$

3.3.2 Теорема Коши для односвязной области

Для формулировки и доказательства теоремы Коши приведем некоторые определения.

Определение 3.1. Область D называется *односвязной*, если внутренность любой замкнутой кривой, принадлежащей области D, состоит только из точек данной области (область без «дыр»). Область D с присоединенной к ней границей называется *замкнутой областью*.

Определение 3.2. Однозначная комплексная функция $f(z)$ называется аналитической в точке z, если она дифференцируема (выполнены условия Коши-Римана) как в самой точке z, так и в некоторой ее окрестности. Функция $f(z)$ называется аналитической в области D, если она аналитична в каждой точке этой области.

Теорема 3.3 (Коши). *Если функция $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ аналитична в односвязной замкнутой области D с границей Γ, то*

$$\oint_{\Gamma} f(z)dz = 0. \qquad (3.29)$$

Доказательство теоремы приведем для случая, когда частные производные $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial y}$ функции $f(z) = u + iv$ непрерывны в области D (это достаточные условия дифференцируемости функции $f(z)$). По формуле (3.26)

$$\oint_{\Gamma} f(z)dz = \oint_{\Gamma} udx - vdy + i\oint_{\Gamma} vdx + udy.$$

Применим к каждому криволинейному интегралу по замкнутому контуру в правой части последнего равенства формулу Грина:

$$\oint_{\Gamma} Pdx + Qdy = \iint_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy.$$

$$\oint_{\Gamma} f(z)dz = \iint_{D} \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dxdy + i\iint_{D} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dxdy.$$

Учитывая, что для аналитической функции $f(z) = u + iv$ в области D выполняются условия Коши-Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial y}, \text{ получим } \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = 0; \quad -\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

откуда следует формула (3.29).

Пример 3.15. Вычислить интегралы (обход контуров – против часовой стрелки):

а) $\displaystyle\oint_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{z^3}{z-3i} dz$; **б)** $\displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{z^{2z}}{4+z^2} dz$.

Решение.

а) Единственная особая точка (нарушается аналитичность) подынтегральной функции $z = 3i$ находится вне области $|z| < \frac{1}{2}$. По теореме Коши интеграл равен нулю.

б) Особые точки $z = 2i, z = -2i$ вне области $|z| < 1$, интеграл равен нулю.

3.3.3 Теорема Коши для многосвязной области

Теорема 3.4. *Пусть* $f(z)$ *– аналитическая функция в замкнутой многосвязной области D с границей* $\Gamma \bigcup_{k=1}^{n} \gamma_k$, *где Г – внешний контур области D, а* γ_k *– замкнутые непересекающиеся контуры, расположенные внутри D. Тогда*

$$\oint\limits_{\Gamma} f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \oint\limits_{\gamma_k} f(z)dz . \tag{3.30}$$

Доказательство. Рассмотрим для определенности трехсвязную область *D*, ограниченную внешним контуром Г и внутренними контурами γ_1 и γ_2. Выберем положительное направление обхода контуров: при обходе область *D* остается слева. Проведем две линии (два разреза) *AB*, соединяющие контуры Г и γ_1 и *CD*, соединяющий Г и γ_2. Тогда, добавив к границе области *D* отрезки *AB*, *BA*, *CD* и *DC* (каждый из разрезов проходится дважды в противоположных направлениях), область *D* превратим в односвязную. По теореме 3.3

$$\oint\limits_{\Gamma} + \int\limits_{AB} + \oint\limits_{\gamma_1^-} + \int\limits_{BA} + \int\limits_{CD} + \oint\limits_{\gamma_2^-} + \int\limits_{CD} = 0, \tag{3.31}$$

где γ_1^-, γ_2^- – контуры, имеющие ориентацию, противоположную ориентации контура Г, то есть он ориентирован по часовой стрелке. Так как

$$\int\limits_{AB} = -\int\limits_{BA}; \quad \int\limits_{CD} = -\int\limits_{DC}; \quad \oint\limits_{\gamma_1^-} = -\oint\limits_{\gamma_1}; \quad \oint\limits_{\gamma_2^-} = -\oint\limits_{\gamma_2},$$

то из равенства (3.31) получим

$$\oint\limits_{\Gamma} f(z)dz = \oint\limits_{\gamma_1} f(z)dz + \oint\limits_{\gamma_2} f(z)dz,$$

то есть формулу (3.30) для трехсвязной области.

3.3.4 Интеграл с переменным верхним пределом. Первообразная и неопределенный интеграл. Формула Ньютона-Лейбница

Из теоремы (3.3) (Коши) следует, что если $f(z)$ – аналитическая функция в односвязной области *D*, то интеграл от нее не зависит от формы пути интегрирования, а зависит лишь от начальной точки z_0 и конечной точки *z* пути интегрирования. Действительно, пусть Γ_1 и Γ_2 – две кривые в области *D*, соединяющие z_0 и *z*. По теореме Коши

$$\oint\limits_{\Gamma_1+\Gamma_2^-} f(z)dz = 0, \text{ то есть } \int\limits_{\Gamma_1} f(z)dz + \int\limits_{\Gamma_2^-} f(z)dz = 0 \text{ или}$$

$$\int\limits_{\Gamma_1} f(z)dz - \int\limits_{\Gamma_2} f(z)dz = 0, \text{ откуда } \int\limits_{\Gamma_1} f(z)dz = \int\limits_{\Gamma_2} f(z)dz .$$

В таких случаях, когда интеграл зависит только от начальной точки и конечной точки пути интегрирования, пользуются обозначением $\int\limits_{\Gamma} f(z)dz = \int\limits_{z_0}^{z} f(z)$. Если здесь зафиксировать точку z_0, а *z* изменять, то интеграл с переменным верхним пределом $\int\limits_{z_0}^{z} f(z)$ будет функцией от z. Обозначим эту функцию через $F(z)$: $F(z)=\int\limits_{z_0}^{z} f(z)dz$.

Можно доказать, что если функция $f(z)$ аналитична в односвязной области D, то функция $F(z)$ также аналитична в D, причем

$$F'(z)=\left(\int\limits_{z_0}^{z} f(z)dz\right)' = f(z). \tag{3.32}$$

Функция $F(z)$ называется первообразной для функции $f(z)$ в области D, если $F'(z)= f(z)$.

Можно показать, что если $F(z)$ есть некоторая первообразная для $f(z)$, то совокупность всех первообразных $f(z)$ определяется формулой $F(z)+C$, где $C=\text{const}$.

Совокупность всех первообразных функций $f(z)$ называется неопределенным интегралом от функции $f(z)$ и обозначается символом

$\int f(z)dz$, то есть

$$\int f(z)dz = F(z)+C, \text{ где } F'(z)= f(z). \tag{3.33}$$

Методы вычисления неопределенных интегралов от аналитических функций в комплексном анализе те же, что и в действительном. Так, например, справедливы формулы:

$$\int e^z dz = e^z + C; \quad \int z^n dz = \frac{z^{n+1}}{n+1} + C,\ n \neq -1; \quad \int \frac{dz}{z} = Lnz + C;$$
$$\int \sin z dz = -\cos z + C; \quad \int \cos z dz = \sin z + C; \quad \dots$$

Пусть $F(z)$ является первообразной для функции $f(z)$ в односвязной области D. Тогда интеграл $\int\limits_{z_0}^{z} f(z)$ согласно (3.32) также является первообразной для $f(z)$. По формуле (3.33) $\int\limits_{z_0}^{z} f(z)= F(z)+C$. При $z=z_0$ отсюда $\int\limits_{z_0}^{z_0} f(z)= F(z_0)+C$, то есть $0 = F(z_0)+C, C=-F(z_0)$. Тогда

$$\int\limits_{z_0}^{z} f(z)= F(z)-F(z_0). \tag{3.34}$$

Полученная формула называется формулой Ньютона-Лейбница.

Пример 3.16. Вычислить интеграл $I=\int\limits_{l}\left(\sin z + z^5\right)dz$, где l – ломаная, соединяющая точки $z_0 = 0,\ z_1 = 1$ и $z_2 = 2i$.

Решение. Так как $\sin z + z^5$ – аналитическая функция на всей комплексной плоскости, то интеграл I зависит только от начальной точки $z_0 = 0$ и конечной точки $z_2 = 2i$ ломаной, то есть

$$I = \int_0^{2i} \left(\sin z + z^5\right) dz = \left(-\cos z + \frac{z^6}{6}\right)\Bigg|_0^{2i} = -\cos 2i + \frac{(2i)^6}{6} + \cos 0 =$$

$$= -\frac{e^{i2i} + e^{-i2i}}{2} + \frac{32}{3}\left(i^2\right)^3 + 1 = -\frac{e^2 + e^{-2}}{2} - \frac{32}{3} + 1 = -\mathrm{ch}\,2 - \frac{29}{3}.$$

3.3.5 Интегральная формула Коши

Для доказательства интегральной формулы Коши нам понадобится, в том числе решение следующей задачи.

Пример 3.17. Вычислить интеграл $I = \oint_{\Gamma} (z - z_0)^m dz$, где Γ – окружность радиуса R с центром в точке z_0, обходимая против часовой стрелки, m – произвольное целое число.

Решение. Параметрические уравнения окружности $\Gamma\ (x - x_0)^2 + (x - x_0)^2 = R^2$ есть $x = x_0 + R\cos t,\ y = y_0 + R\sin t$, где $0 \le t \le 2\pi$. Следовательно,

$z = x + iy = x_0 + R\cos t + i(y_0 + R\sin t) = (x_0 + iy_0) + R(\cos t + i\sin t) = z_0 + \mathrm{Re}^{it}$. Отсюда $z - z_0 = \mathrm{Re}^{it},\ dz = i\,\mathrm{Re}^{it}\,dt$. Тогда $\oint_{\Gamma} (z - z_0)^m dz = \int_0^{2\pi} \left(\mathrm{Re}^{it}\right)^m i\,\mathrm{Re}^{it}\,dt = iR^{m+1}\int_0^{2\pi} e^{i(m+1)t} dt$.

Рассмотрим два случая:

1) пусть $m = -1$. Тогда $I = i\int_0^{2\pi} dt = 2\pi i$.

2) $m \ne -1$ $\quad I = \dfrac{iR^{m+1}}{i(m+1)} e^{i(m+1)t}\Bigg|_0^{2\pi} = \dfrac{R^{m+1}}{m+1}\left(e^{2\pi i(m+1)} - e^0\right) = 0$, так как функция e^z имеет период 2πi. Или иначе: $e^{2\pi i(m+1)} - e^0 = \cos 2\pi(m+1) + i\sin 2\pi(m+1) - 1 = 1 + 0 - 1 = 0$.

Таким образом:

$$\oint_{\Gamma} (z - z_0)^m dz = \begin{cases} 2\pi i,\ m = -1 \\ 0, \quad m \ne -1 \end{cases} \tag{3.35}$$

Интегральная формула Коши является одной из важнейших функций комплексной переменной. Она позволяет находить значения аналитической функции $f(z)$ в любой точке

z_0, лежащей внутри области *D* через ее значения на границе этой области.

Теорема 3.5. *Пусть* $f(z)$ *– аналитическая функция в замкнутой односвязной ориентированной области D с границей Г. Тогда для любой внутренней точки* $z_0 \in D$

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{f(z)}{z - z_0} dz, \tag{3.36}$$

где интегрирование по контуру Г *производится в положительном направлении (то есть против часовой стрелки).*

Интеграл, находящийся в правой части равенства (*3.36*) *называется* ***интегралом Коши****, а сама эта формула называется* ***интегральной формулой Коши****.*

Доказательство. Пусть z_0 – внутренняя точка области *D*. Подынтегральная функция интеграла Коши $\dfrac{f(z)}{z - z_0}$ аналитична в замкнутой области *D*, кроме точки z_0. Так как z_0 – внутренняя точка *D*, то можно построить окружность γ с центром в точке z_0, взяв радиус ρ столь малым, чтобы данная окружность была расположена внутри области (чтобы γ не пересекала Г), то есть круг $|z - z_0| \le \rho$ и его граница γ принадлежала области *D*. Получим двухсвязную область, ограниченную контурами Г и γ, в которой функция $\dfrac{f(z)}{z - z_0}$ аналитична.

По теореме 3.4 Коши для многосвязной области

$$\begin{aligned} &\oint_\Gamma \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \oint_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \oint_\gamma \frac{(f(z) - f(z_0)) + f(z_0)}{z - z_0} dz = \\ &= \oint_\gamma \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz + f(z_0) \oint_\gamma \frac{dz}{z - z_0}. \end{aligned} \tag{3.37}$$

Второй интеграл в правой части равенства согласно формуле (3.35) примера 3.17 равен 2πi. Оценим первый интеграл по модулю. Так как $f(z)$ – аналитическая функция, то она дифференцируема, а из дифференцируемости следует ее непрерывность. По определению непрерывности для любого ε > 0 можно указать δ > 0, такое, что $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$, если только $\rho = |z - z_0| < \delta$. Тогда при ρ < δ, учитывая свойство модуля интеграла, получаем

$$\left| \oint_\gamma \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz \right| \le \oint_\gamma \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|} dz < \frac{\varepsilon}{\rho} \cdot \oint_\gamma dz = \frac{\varepsilon}{\rho} \cdot 2\pi\rho = 2\pi\varepsilon.$$

Вследствие произвольности ε, так как ε может быть выбран сколь угодно малым, а левая часть последнего неравенства не зависит от ε, то оцениваемый интеграл равен нулю. Тем самым равенство (3.14) приобретет вид

$$\oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{z-z_0} dz = 2\pi i f(z_0),$$

равносильный формуле (3.36). Теорема доказана.

Из теоремы 3.5 и интегральной теоремы Коши для многосвязной области 3.25 следует

Теорема 3.6. *Пусть* $f(z)$ *– аналитическая функция в замкнутой многосвязной области D с внешним контуром* Γ *и внутренними непересекающимися между собой контурами* γ_k*, каждый из контуров обходится так, чтобы область D оставалась слева. Тогда для любой внутренней точки* $z_0 \in D$ *справедлива интегральная формула Коши для многосвязной области.*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma + \bigcup\limits_{k=1} \gamma_k^-} \frac{f(z)}{z-z_0} dz \text{ или } f(z_0) = \oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{z-z_0} dz - \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^{n} \oint_{\gamma_k} \frac{f(z)}{z-z_0} dz. \tag{3.38}$$

При помощи интегральных формул Коши (3.36), (3.38) можно вычислять интегралы по замкнутым контурам (обход контуров – против часовой стрелки).

Пример 3.18. Вычислить интеграл $I = \oint\limits_{|z-1|=1} \frac{z^2+1}{z^2-1} dz$.

Решение. Функция $(z^2+1)/(z^2-1)$ имеет две особые точки $z = \pm 1$. Так как точка $z=-1$ лежит вне окружности $\Gamma: |z-1|=1$, а точка $z=1$ – внутри нее, то представим подынтегральную функцию в виде $\frac{z^2+1}{z^2-1} = \frac{z^2+1}{z+1} \cdot \frac{1}{z-1} = \frac{f(z)}{z-1}$, где $f(z) = \frac{z^2+1}{z+1}$. По формуле Коши (3.36)

$$I = 2\pi i \cdot f(1) = 2\pi i \left(\frac{z^2+1}{z+1} \right)\Bigg|_{z=1} = 2\pi i \cdot \frac{2}{2} = 2\pi i.$$

Пример 3.19. Вычислить интеграл $I = \oint\limits_{|z|=3} \frac{\cos z dz}{z^2+z-2}$.

Решение. Подынтегральная функция $\frac{\cos z}{z^2+z-2} = \frac{\cos z}{(z+2)(z-1)}$ внутри окружности $|z|=3$ имеет две особые точки: $z_1 = -2$ и $z_2 = 1$. Окружим их непересекающимися окружностями γ_1 и γ_2, лежащими внутри круга $|z|<3$. В результате получим трехсвязную область. По теореме 3.4 Коши для многосвязной области

$$\oint_{\gamma_1} \frac{\cos z dz}{(z+2)(z-1)} + \oint_{\gamma_2} \frac{\cos z dz}{(z+2)(z-1)}.$$

К этим интегралам применим интегральную формулу Коши (3.36)

$$I=\oint\limits_{\gamma_1}\frac{\cos z/(z-1)}{z+2}dz+\oint\limits_{\gamma_2}\frac{\cos z/(z+2)}{z-1}dz=2\pi i\left(\left.\frac{\cos z}{z-1}\right|_{z=-2}+\left.\frac{\cos z}{z+2}\right|_{z=1}\right)=\frac{2}{3}\pi i(\cos 1-\cos 2).$$

3.3.6 Бесконечная дифференцируемость аналитических функций

Пусть D – односвязная область с границей Γ и z_0 – внутренняя точка D. Придадим приращение Δz таким образом, чтобы точка $z_0+\Delta z$ принадлежала области D. Если $f(z)$ – аналитическая в D функция, то, согласно формуле (3.36)

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma}\frac{f(z)}{z-z_0}dz;\quad f(z_0+\Delta z)=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma}\frac{f(z)}{z-(z_0+\Delta z)}dz.$$

Отсюда

$$\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}=\frac{1}{\Delta z}\cdot\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma}f(z)\left(\frac{1}{z-(z_0+\Delta z)}-\frac{1}{z-z_0}\right)dz=$$
$$=\frac{1}{\Delta z}\cdot\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma}f(z)\frac{z-z_0-z+z_0+\Delta z}{(z-z_0)(z-(z_0+\Delta z))}dz=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma}\frac{f(z)}{(z-z_0)(z-(z_0+\Delta z))}dz.$$

Отсюда

$$f'(z_0)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma}\frac{f(z)}{(z-z_0)(z-(z_0+\Delta z))}dz.$$

Опуская обоснование предельного перехода под знаком интеграла, из последнего равенства получим

$$f'(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma}\frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz. \tag{3.39}$$

Это формула Коши для $f'(z)$.

Повторяя приведенные выше рассуждения и исходя из формулы (3.39), получаем

$$f''(z_0)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f'(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}=\frac{2\cdot 1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma}\frac{f(z)}{(z-z_0)^3}dz. \tag{3.40}$$

Повторяя этот процесс дифференцирования, можно получить формулу для n-ой производной функции $f(z)$:

$$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz,\quad n=0,1,2,\dots, \tag{3.41}$$

где $f^{(0)}(z_0)=f(z_0)$.

Эту же формулу (3.41) можно получить из интегральной формулы Коши (3.36) последовательным дифференцированием интеграла по параметру z_0.

Из формулы (3.41) можно получить формулу для вычисления интегралов

$$\oint_{\Gamma}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz=\frac{2\pi i}{n!}f^{(n)}(z_0). \qquad (3.42)$$

Пример 3.20. Вычислить интегралы (обход контуров – против часовой стрелки):

а) $I=\oint\limits_{|z|=1}\frac{\operatorname{sh}^2 z}{z^3}dz$; **б)** $I=\oint\limits_{|z+i|=1}\frac{\sin z}{(z+i)^3}dz$.

Решение.

а) Используем формулу (3.42) для производных аналитической функции при $n=2$. Получим

$$I=\frac{2\pi i}{2!}f\left(\operatorname{sh}^2 z\right)''\Big|_{z=0}=\pi i(2\operatorname{sh}z\operatorname{ch}z)'\Big|_{z=0}=\pi i(\operatorname{sh}2z)'\Big|_{z=0}=2\pi i\operatorname{ch}2z\Big|_{z=0}=2\pi i;$$

б)

$$I=\oint\limits_{|z+i|=1}\frac{\sin z}{(z+i)^3}dz=\frac{2\pi i}{2!}(\sin z)''\Big|_{z=-i}=\pi i(\cos z)'\Big|_{z=-i}=-\pi i\sin z\Big|_{z=-i}=$$

$$=\pi i\sin i=\pi i\frac{e^{i^2}-e^{-i^2}}{2i}=\pi\frac{e^{-1}-e^{1}}{2}=-\pi\operatorname{sh}1.$$

3.3.7 Теорема Лиувилля. Основная теорема алгебры

Как известно, методы теории функций комплексной переменной широко используются в других разделах математики. В частности, например, при доказательстве основной теоремы алгебры. Основная теорема алгебры называется так потому, что основное содержание алгебры XVII – XVIII веков сводится к решению уравнений. Основная теорема алгебры была доказана впервые в XVII веке французским математиком Жирором, строгое же доказательство было дано в 1799 г. немецким математиком Гауссом.

При доказательстве основной теоремы алгебры нам потребуется теорема Лиувилля.

Теорема 3.7 (Лиувилля). *Пусть* $f(z)$ *– аналитическая функция, ограниченная на всей комплексной плоскости. Тогда* $f(z)$ *– постоянная функция.*

Доказательство. Пусть z_0 – произвольная точка комплексной плоскости, а $\gamma:|z-z_0|=R$ – окружность радиуса R с центром z_0. По интегральной формуле (3.39) для производной имеем

$$f'(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz.$$

Так как существует константа M, что $f(z)\le M$ для любых z, то

$$\left|\frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\right|=\frac{|f(z)|}{\left|(z-z_0)^2\right|}\le\frac{M}{R^2}$$ и тогда

$$|f'(z_0)| = \left|\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz\right| \le \frac{1}{2\pi}\frac{M}{R^2}\left|\oint\limits_\gamma dz\right| = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{M}{R^2}\cdot 2R = \frac{M}{R}.$$

Так как $R > 0$ – любое положительное число, отсюда при $R \to \infty$ получим $|f'(z_0)| = 0$, а значит и $f'(z_0) = 0$ для любых z. Так как $f(z_0) = u + iv$, $f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} - i\frac{\partial v}{\partial y} = 0$, то $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$. Следовательно $u = \text{const}, v = \text{const}$, то есть $f(z)$ – постоянная функция. Теорема доказана.

Теорема 3.8 (основная теорема алгебры). *Всякий многочлен*

$$P_n(z) = c_0 z^n + c_1 z^{n-1} + \ldots + c_{n-1}z + c_n, \quad c_0 \ne 0, \quad n \ge 1,$$

имеет по крайней мере один корень.

Доказательство. Проведем доказательство от противного. Предположим, что многочлен $P_n(z)$ не имеет корней. Тогда функция $f(z) = \frac{1}{P_n(z)}$ является аналитической во всей комплексной плоскости. Но $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = 0$, так как $\lim\limits_{z\to\infty} P_n(z) = \infty$, что значит для любого $\varepsilon > 0$ существует $R > 0$, что для любых $z, |z| > R$ следует $|f(z)| < \varepsilon$. В замкнутом круге $|z| \le R$ функция $f(z)$ – непрерывная как функция аналитическая в этом круге. Из непрерывности в замкнутом круге следует ограниченность функции $f(z)$ в этом круге. Существует $M_1 = \text{const}$, что $|f(z)| \le M_1$ для любых z из данного круга $|z| \le R$. Полагая $M = \max(\varepsilon, M_1)$, получим $|f(z)| \le M$ для любых z. А тогда в силу теоремы Лиувилля 3.7 имеем $f(z) = \text{const}$, что противоречит определению функции $f(z)$. Это свидетельствует о том, что многочлен $P_n(z)$ имеет по крайней мере один корень. Теорема доказана.

Следствие. Всякое алгебраическое уравнение *n*-ой степени, коэффициенты которого – действительные или комплексные числа, имеет *n* корней, действительных или комплексных, если *k*-кратный корень считать за *k* корней.

Часто именно это следствие называют основной теоремой алгебры.

3.4. Ряды в комплексной области

3.4.1 Числовые ряды

Определение 3.24. Числовым комплексным рядом называется выражение вида

$$z_1 + z_2 + \ldots + z_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} z_n, \tag{3.43}$$

где $z_n = x_n + iy_n$ – комплексные числа.

Определение 3.25. Сумма $S_n = z_1 + z_2 + \ldots + z_n$ называется n-ой частичной суммой ряда.

Определение 3.26. Числовой комплексный ряд (3.43) называется сходящимся, если сходится последовательность S_n его частичных сумм. Число $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ называется суммой ряда.

Очевидно, что ряд (3.43) сходится тогда и только тогда, когда сходится каждый из рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n + \ldots \tag{3.44}$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n = y_1 + y_2 + \ldots + y_n + \ldots. \tag{3.45}$$

При этом $S = S_1 + iS_2$, где S_1 – сумма ряда (3.44), а S_2 – сумма ряда (3.45). Это означает, что исследование сходимости ряда с комплексными числами сводится к исследованию сходимости рядов (3.44) и (3.45) с действительными членами.

В теории рядов с комплексными членами основные определения, многие теоремы и их доказательства аналогичны соответствующим определениям и теоремам из теории рядов с действительными членами. Приведем некоторые из них.

Остатком ряда (4.43) называется ряд

$$r_n = z_{n+1} + z_{n+2} + \ldots = \sum_{k=n+1}^{\infty} z_k = \sum_{k=n+1}^{\infty} x_k + i \sum_{k=n+1}^{\infty} y_k .$$

Необходимый признак сходимости ряда. Если ряд (3.43) сходится, то его общий член z_n при $n \to \infty$ стремится к нулю

$$\lim_{n\to\infty} z_n = 0 .$$

Комплексный ряд (3.43) называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| = |z_1| + |z_2| + \ldots + |z_n| + \ldots. \tag{3.46}$$

Теорема 3.9. *Если сходится ряд (3.46), то ряд (3.43) сходится абсолютно (из абсолютной сходимости комплексного ряда следует его сходимость).*

Доказательство. По условию ряд с общим членом $|z_n| = \sqrt{x_n^2 + y_n^2}$ сходится. Тогда в силу очевидных неравенств $|x_n| \le \sqrt{x_n^2 + y_n^2}$ и $|y_n| \le \sqrt{x_n^2 + y_n^2}$ и на основании признака сравнения сходятся ряды $\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|$ и $\sum_{n=1}^{\infty}|y_n|$. Отсюда следует сходимость рядов (3.44) и (3.45), а значит, и абсолютная сходимость ряда (3.43). Теорема доказана.

Если ряд абсолютно сходится и имеет сумму S, то ряд, полученный из него перестановкой членов, также сходится и имеет ту же сумму S, что и исходный ряд.

Абсолютно сходящиеся ряды можно почленно складывать и перемножать.

При исследовании на сходимость рядов с комплексными членами применимы все известные из действительного анализа признаки сходимости знакопостоянных рядов, в частности, признак Даламбера: если существует $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| = l$, то при $l<1$ ряд (3.43) сходится абсолютно, а при $l>1$ – расходится.

Пример 3.21. Исследовать сходимость ряда

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n(3+i)^n}{5^n}$; **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2-i)^n}{3^n}$.

Решение.

а) Рассмотрим ряд, составленный из модулей членов исходного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n|3+i|^n}{5^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\sqrt{10^n}}{5^n}.$$

Применяя к последнему ряду признак Даламбера, получим

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)\sqrt{10^{n+1}}}{5^{n+1}} : \frac{n\sqrt{10^n}}{5^n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\cdot\frac{\sqrt{10}}{5} = \frac{\sqrt{10}}{5} \approx 0{,}632 < 1.$$

Следовательно, исходный ряд сходится абсолютно.

б) Рассмотрим ряд, составленный из модулей членов заданного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|2-i|^n}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{5^n}}{3^n}.$$

Применяя к последнему ряду радикальный признак Коши, получим

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{\sqrt{5^n}}{3^n}} = \frac{\sqrt{5}}{3} \approx 0{,}745 < 1.$$

Следовательно, исходный ряд сходится абсолютно.

3.4.2 Функциональные комплексные ряды

Функциональным комплексным рядом называется ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(z)= f_1(z)+ f_2(z)+\ldots+ f_n(z)+\ldots, \qquad (3.47)$$

где $f_1(z), f_2(z),\ldots, f_n(z),\ldots$ – функции комплексной переменной, заданные на некотором множестве комплексных чисел.

Сумма $S_n(z)=\sum_{k=1}^{n} f_k(z)= f_1(z)+ f_2(z)+\ldots+ f_n(z)$ называется n-ой частичной суммой ряда (3.47).

Определение 3.27. Ряд (3.47) называется сходящимся к сумме $f(z)$, если $\lim_{n\to\infty} S_n(z)= f(z)$.

Другими словами, сходимость ряда (3.47) к $f(z)$ означает, что для любого $\varepsilon>0$ можно указать такой номер $N=N(\varepsilon, z)$, что при всех

$$n\ge N \quad |S_n(z)- f(z)|<\varepsilon. \qquad (3.48)$$

Множество D точек z, в которых функциональный ряд сходится, называется областью сходимости этого ряда.

Если ряд (3.47) сходится к сумме $f(z)$, то

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)= f_1(z)+ f_2(z)+\ldots+ f_n(z)+ f_{n+1}(z)+\ldots=S_n(z)+r_n(z),$$

где $r_n(z)= f_{n+1}(z)+ f_{n+2}(z)+\ldots= f(z)-S_n(z)$ называется остатком ряда (3.47).

Из неравенства (3.48) следует, что ряд (3.47) сходится в точке z тогда и только тогда, когда $\lim_{n\to\infty} r_n(z)=0$.

Ряд (3.47) называется равномерно сходящимся в области D к сумме $f(z)$, если для любого $\varepsilon>0$ можно указать такой номер $N=N(\varepsilon)$, что при всех $n\ge N$

$|f(z)-S_n(z)|=|r_n(z)|<\varepsilon$, для любых $z\in D$.

Теорема 3.10 (признак Вейерштрасса). *Если члены ряда (3.47) удовлетворяют неравенствам* $|f_n(z)|\le a_n$, *для любых* $z\in D$, $n=1,2,\ldots$, *где* $a_n\ge 0$, *а ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится, то ряд (3.47) сходится равномерно в D.*

Доказательство этой теоремы повторяет доказательство аналогичного признака для действительных функциональных рядов.

Пример 3.22. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^2}$ и показать, что в этой области ряд сходится равномерно.

Решение. Воспользуемся признаком Даламбера. Имеем $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{z^{n+1}n^2}{(n+1)^2 z^n}\right| = |z|$. Следовательно, в круге $|z|<1$ ряд сходится. На границе круга, то есть при $|z|=1$, получаем сходящийся ряд: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$. Значит, исходный ряд сходится в замкнутом круге $|z|\le 1$. Но так как для всех $|z|\le 1$

$$|f_n(z)| = \frac{|z|^n}{n^2} \le \frac{1}{n^2},$$

то исходный ряд в круге $|z|\le 1$ сходится абсолютно и равномерно.

Комплексные равномерно сходящиеся функциональные ряды обладают следующими *свойствами*.

1. Пусть члены ряда (3.47) являются в области D аналитическими функциями и этот ряд сходится равномерно в D к сумме $f(z)$. Тогда $f(z)$ – аналитическая в D функция. Это свойство следует из теоремы Вейерштрасса.

2. Пусть члены равномерно сходящегося в области D ряда (3.47) являются аналитическими функциями в D и этот ряд сходится к $f(z)$ в D равномерно. Тогда ряд (3.47) можно интегрировать почленно вдоль любой кривой l, расположенной в D, причем

$$\int\limits_l \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)\right)dz = \sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_l f_n(z)dz .$$

3. Пусть ряд (3.47) аналитических в D функций сходится в каждой точке области D, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n'(z)$ сходится в D равномерно. Тогда ряд (3.47) можно почленно дифференцировать в D, причем

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(z).$$

Доказательства свойств 2 и 3 аналогичны доказательствам теорем о почленном дифференцировании и интегрировании равномерно сходящихся действительных функциональных рядов.

При определении области сходимости комплексных функциональных рядов можно пользоваться признаками Коши или Даламбера. Если существует

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|f_n(z)|} = L(z) \text{ или } \lim_{n\to\infty}\left|\frac{f_{n+1}(z)}{f_n(z)}\right| = L(z),$$

то ряд (3.47) сходится абсолютно при $L(z)<1$ и расходится при $L(z)>1$.

Пример 3.23. Найти область абсолютной сходимости рядов ($z \in C$):

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(z-2)^n}$;**б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(z-i)^n}$.

Решение.

а) Применим радикальный признак Коши:

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{(z-2)^n}}=\frac{1}{|z-2|}<1$, откуда $|z-2|>1$, то есть исходный ряд сходится абсолютно вне круга радиуса 1 с центром в точке 2. На окружности $|z-2|=1$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1^n}$, очевидно, расходится.

б) Применяя признак Даламбера, запишем неравенство

$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(n+1)(z-i)^n}{(z-i)^{n+1}n}\right|=\frac{1}{|z-i|}<1$, откуда заключаем, что исходный ряд сходится абсолютно вне круга радиуса 1 с центром в точке *i*, то есть при $|z-i|>1$. На окружности $|z-i|=1$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n$, очевидно, расходится.

3.4.3 Степенные ряды в комплексной области

Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}c_n(z-z_0)^n=c_0+c_1(z-z_0)+c_2(z-z_0)^2+\ldots, \tag{3.49}$$

где $c_n=a_n+ib_n,\, a_n, b_n\in R;\; z_0=x_0+iy_0;\; z=x+iy$, называется комплексным степенным рядом или рядом по степеням $z-z_0$. Подстановкой $z-z_0=Z$ ряд (3.49) сводится к ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}c_nz^n=c_0+c_1z+c_2z^2+\ldots. \tag{3.50}$$

Ряд (3.50) при одних значениях аргумента *z* может сходится, при других – расходится. Совокупность всех значений *z*, при которых ряд (3.50) сходится, называется областью сходимости этого ряда.

Область сходимости степенного ряда устанавливает

Теорема 3.11 (Абеля). *Если степенной ряд (3.50) сходится при* $z=z_0\neq 0$ *(в точке* z_0*), то он абсолютно сходится при всех значениях z, удовлетворяющих условию* $|z|<|z_0|$. *Во всяком круге меньшего радиуса* $|z|<q<|z_0|$ *ряд (3.50) сходится равномерно.*

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы Абеля в действительном анализе.

Следствие. Если ряд (3.50) расходится при $z = z_0$, то он расходится при всех значениях z, удовлетворяющих условию $|z| > |z_0|$ (то есть вне круга радиуса $|z_0|$ с центром в начале координат.

Из теоремы Абеля следует существование числа $R = |z_0|$ такого, что при всех значениях z, удовлетворяющих неравенству $|z| < R$, степенной ряд (4.8) абсолютно сходится. Неравенству $|z| < R$ удовлетворяют точки комплексной области, лежащие внутри круга радиуса R с центром в точке $z = 0$.

Величина $|z_0| = R$ называется радиусом сходимости ряда (3.50), а круг $|z| < R$ – кругом сходимости ряда. В круге $|z| < R$ ряд (3.50) сходится, вне этого круга – расходится; на окружности $|z_0| = R$ могут располагаться как точки сходимости, так и точки расходимости ряда. Принято считать, что $R = 0$, когда ряд (3.50) сходится в одной точке $z = 0$; $R = \infty$, когда ряд сходится на всей комплексной плоскости.

Для ряда (3.49) кругом сходимости является круг $|z - z_0| < R$ с центром в точке $z = z_0$.

Радиус сходимости ряда (3.50) можно вычислить по формулам

$R = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{c_n}{c_{n+1}}\right|$ или $R = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}}$, получаемым после применения признака Даламбера

или радикального признака Коши к ряду из модулей членов исходного ряда.

Приведем без доказательств некоторые *свойства степенного ряда*.

1. Сумма степенного ряда внутри круга его сходимости есть аналитическая функция.

2. Степенной ряд внутри круга сходимости можно почленно дифференцировать и интегрировать любое число раз. Полученный при этом ряд имеет тот же радиус сходимости, что и исходный ряд.

Пример 3.24. Найти области абсолютной сходимости и области равномерной сходимости следующих рядов:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n z^n$; **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(z-1)^n}{n^2 \cdot 2^n}$.

Решение.

а) Найдем радиус сходимости ряда:

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\dfrac{n+1}{n}}=1$. Тогда круг сходимости $|z|<1$. На границе – окружности $|z|=1$ получаем ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n$, который расходится, так как общий член ряда не стремится к нулю: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=e\neq 0$, то есть не выполняется необходимый признак сходимости ряда. Итак, область абсолютной сходимости исходного ряда – круг $|z|<1$, область равномерной сходимости – круг $|z|\le r<1$.

б) Найдем радиус сходимости ряда: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^2\cdot 2^{n+1}}{n^2\cdot 2^n}=2$. Тогда круг сходимости $|z-1|<2$ – круг радиуса 2 с центром в точке $z=1$. На границе – окружности $|z-1|=2$ получаем сходящийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$.

Таким образом, исходный ряд сходится абсолютно и равномерно в замкнутом круге $|z-1|\le 2$.

3.4.4 Ряд Тейлора

Аналитическую функцию в каждой внутренней точке области аналитичности можно разложить в степенной ряд, подобный ряду Тейлора для действительных функций.

Теорема 3.12. *Пусть функция $f(z)$ аналитична в замкнутой односвязной области D с границей* Γ *и a – внутренняя точка области D. Тогда справедливо разложение*

$$f(z)=f(a)+f'(a)(z-a)+\frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n+\ldots, \tag{3.51}$$

причем ряд (3.51) сходится в круге $|z-a|<\delta$, где δ – расстояние от точки a до контура Γ.

Доказательство. Пусть γ – окружность с центром в a и радиусом $\rho<\delta$. Согласно интегральной формуле Коши (3.36)

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\frac{f(z)}{z-z_0}dz. \tag{3.52}$$

Так как z принадлежит окружности γ, то $|z-a|=\rho$. Отсюда при $|z_0-a|<\rho=|z-a|$ (z_0 – внутренняя точка окружности γ) имеем $\left|\dfrac{z_0-a}{z-a}\right|<1$. Тогда

$$\frac{1}{z-z_0}=\frac{1}{(z-a)-(z_0-a)}=\frac{1}{(z-a)(1-(z_0-a)/(z-a))}=\frac{1}{z-a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z_0-a}{z-a}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z_0-a)^n}{(z-a)^{n+1}}.$$

Здесь использована формула суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем $|q|=\left|\frac{z_0-a}{z-a}\right|<1$. Согласно признаку Вейерштрасса (теорема 3.10), полученный ряд в правой части последнего равенства сходится равномерно; по свойству равномерно сходящихся рядов его можно почленно интегрировать. Подставив $\frac{1}{z-z_0}$ в формулу (3.52) и проинтегрировав почленно, получим

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\frac{(z_0-a)^n f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{f(z)dz}{(z-a)^{n+1}}\right)(z_0-a)^n=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{n!}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{f(z)dz}{(z-a)^{n+1}}\right)(z_0-a)^n.$$

Отсюда с учетом формулы (3.41) (где $z_0=a$) для производной n-го порядка функции $f(z)$ получаем

$$f(z_0)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z_0-a)^n .$$

Так как z_0 – произвольная внутренняя точка области *D*, из последнего равенства следует (3.51). Теорема доказана.

Ряд (3.51) называется рядом Тейлора функции $f(z)$ в окрестности точки $z=a$. При $a=0$ он превращается в ряд Маклорена

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n . \qquad (3.53)$$

Итак, всякая функция $f(z)$, аналитическая в круге $|z-a|<\delta$, разлагается в сходящийся в этом круге степенной ряд

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z-a)^n . \qquad (3.54)$$

Коэффициенты C_n ряда определяются формулами

$$C_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(a)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{f(z)dz}{(z-a)^{n+1}}, \qquad (3.55)$$

где γ – окружность $|z-a|=\rho<\delta$, δ – расстояние от центра разложения $z=a$ до ближайшей особой точки функции $f(z)$ в области *D*.

Докажем единственность разложения аналитической функции $f(z)$ в ряд Тейлора. Допустим, что функция $f(z)$ в круге $|z-a|<\delta$ представлена другим степенным рядом

$$f(z)=b_0+b_1(z-a)+b_2(z-a)^2+\ldots+b_n(z-a)^n+\ldots.$$

Является ли этот ряд рядом Тейлора функции $f(z)$?

Последовательно дифференцируя почленно этот ряд бесконечное число раз, получим:

$$f'(z)=b_1+2b_2(z-a)+3b_3(z-a)^2+\ldots+nb_n(z-a)^{n-1}+\ldots,$$
$$f''(z)=2b_2+3\cdot 2b_3(z-a)+\ldots+n(n-1)b_n(z-a)^{n-2}+\ldots,$$
$$f'''(z)=3\cdot 2b_3+\ldots+n(n-1)(n-2)b_n(z-a)^{n-3}+\ldots,$$

…………………………………………………………

$$f^{(n)}(z)=n!b_n+(n+1)!b_{n+1}(z-a)+\ldots,$$

…………………………………………

Полагая в этих равенствах, а также в исходном ряде $z=a$, получаем

$$b_0=f(a),\quad b_1=f'(a),\quad b_2=\frac{f''(a)}{2!},\quad \ldots,\quad b_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!},\quad \ldots.$$

Сравнивая найденные коэффициенты b_n ряда с коэффициентами ряда (4.12), которые по формуле (3.54) определяются $C_n=\dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$, устанавливаем, что $b_n=C_n$ $(n=0,1,2,\ldots)$, а это означает, что указанные ряды совпадают. Отсюда следует

Теорема 3.13. *Если степенной ряд по степеням* $z-a$ *сходится к аналитической функции в круге* $|z-a|<\delta$*, то он является рядом Тейлора.*

Приведем разложения некоторых элементарных функций в ряд Тейлора (Маклорена):

$$e^z=1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\ldots+\frac{z^n}{n!}+\ldots$$
$$\sin z=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\ldots+(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots$$
$$\cos z=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}+\ldots$$
$$\ln(1+z)=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\ldots+(-1)^n\frac{z^{n+1}}{n+1}+\ldots$$
$$(1+z)^\alpha=1+\frac{\alpha}{1!}z+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}z^2+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)}{n!}z^n+\ldots$$

Первые три разложения справедливы во всех точках комплексной плоскости, последние два – в круге $|z|<1$.

Пример 3.25. Заменив z на iz в разложении функции e^z, получим:

$$e^{iz}=1+\frac{iz}{1!}+\frac{(iz)^2}{2!}+\frac{(iz)^3}{3!}+\ldots+\frac{(iz)^n}{n!}+\ldots=$$

$$=\left(1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}+\ldots\right)+i\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\ldots+(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots\right)=\cos z+i\sin z\,,$$

то есть формулу Эйлера $e^{iz}=\cos z+i\sin z$.

Пример 3.26. Разложить в ряд Тейлора в окрестности точки $a=0$ функцию $f(z)=\frac{1}{z}+e^{-z}$.

Решение.

$$\frac{1}{1+z}=1-z+z^2-z^3+\ldots-(-1)^n z^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}z^n,\quad |z|<1;$$

$$e^{-z}=1-\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}-\frac{z^3}{3!}+\ldots-(-1)\frac{z^n}{n!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{n!},\quad z\in C.$$

Просуммировав равенства, получим

$$f(z)=\frac{1}{1+z}+e^{-z}=2-2z+\left(1+\frac{1}{2!}\right)z^2-\left(1+\frac{1}{3!}\right)z^3+\ldots+(-1)^n\left(1+\frac{1}{n!}\right)z^n+\ldots=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(1+\frac{1}{n!}\right)z^n.$$

Этот ряд сходится в круге $|z|<1$.

3.4.5 Ряд Лорана

Обобщением ряда Тейлора является ряд Лорана, в который разлагается аналитическая функция в некотором кольце.

Теорема 3.14. *Функция $f(z)$, аналитическая в кольце $\rho<|z-a|<R$, разлагается внутри него в сходящийся ряд*

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z-a)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_{-n}}{(z-a)^n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n(z-a)^n\,. \qquad (3.56)$$

Коэффициенты этого ряда вычисляются по формулам:

$$C_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{f(z)dz}{(z-a)^{n+1}};\quad C_{-n}=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}f(z)(z-a)^{n+1}dz\,, \qquad (3.57)$$

где $\gamma-$ окружность $|z-a|=r;\quad \rho<r<R$.

Доказательство теоремы проводится рассуждениями, аналогичными доказательству теоремы о разложении аналитической функции в степенной ряд Тейлора (при необходимости его можно опустить).

Пусть z_0 – произвольная внутренняя точка кольца $\rho < |z-a| < R$. Построим концентрическое с ним кольцо $\rho_1 < |z-a| < R_1$ радиусами ρ_1 и R_1, $\rho < \rho_1 < R_1 < R$ такое, что точка z_0 расположена внутри него. Обозначим меньшую окружность внутреннего кольца *l*, а большую – *L*. Так как функция $f(z)$ аналитична в замкнутом кольце $\rho_1 \le |z-a| \le R_1$, то по интегральной формуле Коши для многосвязной области (3.38)

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{f(z)dz}{z-z_0} - \frac{1}{2\pi i}\oint_l \frac{f(z)dz}{z-z_0}. \tag{3.58}$$

Так как $|z-a| = R_1$, для $z \in L$ и $|z-a| = \rho_1$ для $z \in l$, то для любой точки *z* кольца $\rho_1 \le |z-a| \le R_1$ справедливы неравенства:

$$\begin{aligned} &|z_0 - a| < |z-a| = R_1 \Rightarrow \left(\left|\frac{z_0-a}{z-a}\right| = q_1 < 1\right), \quad z \in L; \\ &(\rho_1 = |z-a| < |z_0-a|) \Rightarrow \left(\left|\frac{z-a}{z_0-a}\right| = q_2 < 1\right), \quad z \in l. \end{aligned} \tag{3.59}$$

Учитывая это, получим (используя формулу суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии):

$$\begin{aligned} &(z \in L) \Rightarrow \frac{1}{z-z_0} = \frac{1}{(z-a)-(z_0-a)} = \frac{1}{(z-a)(1-(z_0-a)/(z-a))} = \\ &= \frac{1}{z-a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z_0-a}{z-a}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z_0-a)^n}{(z-a)^{n+1}}; \end{aligned} \tag{3.60}$$

$$\begin{aligned} &(z \in l) \Rightarrow \frac{1}{z-z_0} = \frac{1}{(z-a)-(z_0-a)} = -\frac{1}{(z_0-a)(1-(z-a)/(z_0-a))} = \\ &= -\frac{1}{z_0-z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{z_0-a}\right)^n = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-a)^{n-1}}{(z_0-a)^n}. \end{aligned} \tag{3.61}$$

Как следует из первого соотношения (3.59), ряд (3.60) сходится равномерно в круге $|z-a| < R_1$. Аналогично из второго соотношения (3.59) следует, что ряд (3.61) сходится равномерно вне окружности $|z-a| > \rho_1$. Таким образом, оба ряда (3.60) и (3.61) сходятся в кольце $\rho_1 < |z-a| < R_1$. Подставив ряды (3.60) и (3.61) в равенство (3.58) и почленно проинтегрировав, получим

$$\begin{aligned} f(z_0) &= \frac{1}{2\pi i}\oint_L \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z_0-a)^n}{(z-a)^{n+1}} f(z)dz + \frac{1}{2\pi i}\oint_l \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-a)^{n-1}}{(z_0-a)^n} f(z)dz = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\oint_L \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(z)dz}{(z-a)^{n+1}}\right)(z_0-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\oint_l \sum_{n=1}^{\infty} f(z)(z-a)^{n-1}dz\right)\frac{1}{(z_0-a)^n} = \end{aligned}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z_0 - a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{-n}}{(z_0 - a)^n}, \quad \text{где} \quad C_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z)dz}{(z-a)^{n+1}}; \; C_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \oint_l f(z)(z-a)^{n-1} dz.$$

В этих формулах, согласно интегральной формуле Коши для многосвязной области (3.38) в качестве контура интегрирования можно взять окружность $|z_0 - a| = r,\ \rho_1 < r < R_1$. Поскольку ρ_1 можно взять сколь угодно близким к ρ, а R_1 – к R, то последний ряд сходится во всем кольце $\rho < |z - a| < R$. В силу того, что z_0 – произвольная внутренняя точка этого кольца, справедливы формулы (3.56), (3.57). Теорема доказана.

Ряд (3.56) называется рядом Лорана функции $f(z)$ в окрестности точки $z = a$, при этом ряд $\sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-a)^n$ называют правильной или регулярной частью Лорана, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{-n}}{(z-a)^n}$ – его главной частью. Правильная часть ряда Лорана есть степенной ряд, сходящийся в круге $|z - a| < R$, а главная часть представляет собой ряд, сходящийся при $|z - a| > \rho$, то есть вне круга радиусом ρ с центром в точке a.

Ряд Тейлора для аналитической в окрестности точки a функции $f(z)$ является частным случаем ряда Лорана, так как в этом случае коэффициенты

$$C_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma f(z)(z-a)^{n-1} dz = 0, \quad n = 1,2,\ldots,$$

согласно интегральной теореме Коши. Следовательно, ряд Лорана аналитической в окрестности точки a функции $f(z)$ состоит лишь из правильной его части, то есть представляет собой ряд Тейлора.

Теорема 3.15. *Разложение в ряд Лорана функции $f(z)$, аналитической в кольце D: $\rho < |z - a| < R$, единственно.*

Доказательство. Предположим противное – функция $f(z)$ имеет два разложения:

$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n (z-a)^n$ и $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C'_n (z-a)^n$. Тогда

$0 \equiv \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n (z-a)^n - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C'_n (z-a)^n = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (C_n - C'_n)(z-a)^n$, для любых $z \in D$. Умножив это тождество на $(z-a)^{k-1}$, где k – любое целое число, и проинтегрировав по окружности γ: $|z - a| < r, \quad \rho < r < R$, получим

$$\oint_{\gamma}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(C_n-C'_n\right)\left(z-a\right)^{n+k-1}dz=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(C_n-C'_n\right)\oint_{\gamma}\left(z-a\right)^{n+k-1}dz\equiv 0\,.$$

Отсюда с учетом равенства (3.35) получим $\left(n=-k\right)$

$$\left(C_{-k}-C'_{-k}\right)2\pi i\equiv 0\Rightarrow C_{-k}\equiv C'_{-k},\quad k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots\,.$$

Теорема доказана.

Замечание. Вычисление контурных интегралов по формулам (3.57), как правило, достаточно затруднительно. Поэтому для разложения функций в ряды Лорана используются искусственные приемы. На практике используют известные разложения основных элементарных функций; дробь вида $\dfrac{1}{z-z_0}$ разлагается в ряд, являющийся рядом геометрической прогрессии; дробь вида $\dfrac{1}{\left(z-z_0\right)^k}$, где $k>1$ – целое, разлагается в ряд, который получается из ряда геометрической прогрессии последовательным дифференцированием $\left(k-1\right)$ раз; сложная дробь представляется в виде суммы простейших дробей.

Приведем примеры разложения функций в ряд Лорана.

Пример 3.27. Найти разложения указанных функций в ряды Лорана по степеням $z-z_0$ и установить области сходимости полученных разложений:

а) $z^2e^{\frac{1}{z}}$, $z_0=0$; **б)** $\dfrac{1}{z\left(1-z\right)}$, $z_0=0$; **в)** $f\left(z\right)=\dfrac{1}{\left(z-2\right)\left(z+3\right)}$, $z_0=2$.

Решение.

а) Используем известное разложение

$$e^z=1+z+\frac{z^2}{2!}+\ldots+\frac{z^n}{n!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!},\quad 0<\left|z\right|<+\infty\,.$$

Заменив z на $\dfrac{1}{z}$, получим $e^{\frac{1}{z}}=1+\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{2!z^2}+\ldots+\dfrac{1}{n!z^n}+\ldots=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!z^n}$. Тогда

$$z^2e^{\frac{1}{z}}=z^2+z+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!z}+\ldots+\frac{1}{n!z^{n-2}}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!z^{n-2}},\quad 0<\left|z\right|<+\infty\,.$$

б) $\dfrac{1}{z\left(1-z\right)}=\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{1-z}$ (используем формулу суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии) = $\dfrac{1}{z}+1+z+\dfrac{z^2}{2!}+\ldots+\dfrac{z^n}{n!}+\ldots=\dfrac{1}{z}+\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!},\quad 0<\left|z\right|<1$.

в) $f\left(z\right)=\dfrac{1}{\left(z-2\right)\left(z+3\right)}=\dfrac{1}{5}\left(\dfrac{1}{z-2}-\dfrac{1}{z+3}\right)=\dfrac{1}{5}\left(\dfrac{1}{z-2}-\dfrac{1}{5+\left(z-2\right)}\right)$.

В круге

$$0<|z-2|<5 \quad 5+(z-2)=5\left(1+\frac{z-2}{5}\right)\Rightarrow -\frac{1}{5}+\frac{1}{1+\dfrac{z-2}{5}}=-\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-2)^n}{5^n},$$

$$f(z)=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{z-2}-\frac{1}{25}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{5^n}(z-2)^n=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{z-2}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{5^{n+2}}(z-2)^n.$$

При $|z-2|>5 \quad 5+(z-2)=(z-2)\left(1+\dfrac{5}{z-2}\right)\Rightarrow$

$$-\frac{1}{5+(z-2)}=-\frac{1}{(z-2)}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{5}{z-2}}=-\frac{1}{z-2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 5^n}{(z-2)^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}5^n}{(z-2)^{n+1}}\Rightarrow$$

$$f(z)=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{z-2}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}5^{n-1}}{(z-2)^{n+1}}=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{z-2}-\frac{1}{5(z-2)}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 5^{n-1}}{(z-2)^{n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 5^n}{(z-2)^{n+1}}.$$

Итак,

$$f(z)=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{z-2}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{5^{n+2}}(z-2)^n,\quad 0<|z-2|<5,\quad f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 5^n}{(z-2)^{n+1}},\quad |z-2|>5.$$

3.4.6 Поведение функции в бесконечно удаленной точке

На комплексной плоскости существует лишь одна бесконечно удаленная точка $z=\infty$. Ее окрестностью является внешность круга с центром в начале координат произвольного, сколь угодно большого радиуса *R*. Если ввести подстановку $z=\dfrac{1}{w}$ (или $w=\dfrac{1}{z}$), окрестность точки $z=\infty$ плоскости C_z перейдет в окрестность точки $w=0$ плоскости C_w. Таким образом, изучение поведения функции $f(z)$ в окрестности точки $z=\infty$ сводится к изучению поведения функции $f\left(\dfrac{1}{z}\right)$ в окрестности точки $z=0$.

Пусть функция $f(z)$ аналитична в окрестности точки $z=\infty$. Тогда функция $f\left(\dfrac{1}{z}\right)$ аналитична в окрестности точки $z=0$. Разложим $f\left(\dfrac{1}{z}\right)$ в этой окрестности в ряд Лорана:

$$f\left(\frac{1}{z}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n z^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_{-n}}{z^n}. \tag{3.62}$$

Здесь $\sum\limits_{n=0}^{\infty}C_n z^n$ – правильная часть; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{C_{-n}}{z^n}$ – главная часть этого разложения.

Заменив в разложении (3.62) z на $\frac{1}{z}$, C_n на a_{-n}, получим ряд

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_{-n}}{z^n}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n z^n, \tag{3.63}$$

который называется разложением функции $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки. При этом ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n z^n$ называется главной частью ряда Лорана (4.21), а ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_{-n}}{z^n}$ – его правильной частью.

Таким образом, главная часть ряда Лорана (3.63) содержит положительные степени z, а правильная – нулевую и отрицательные степени z.

Пример 3.28. Найти разложения указанных функций в ряды Лорана по степеням и установить области сходимости полученных разложений:

а) $z\cos\frac{2}{z^3}$; **б)** $z^3 e^{\frac{1}{z}}$.

Решение.

а) Воспользуемся известным разложением

$$\cos z=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}+\ldots+(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}.$$

Тогда

$$\cos\frac{2}{z^3}=1-\frac{2^2}{2!z^6}+\frac{2^4}{4!z^{12}}-\frac{2^6}{6!z^{18}}+\ldots+(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!z^{6n}}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!z^{6n}},$$

$$z\cos\frac{2}{z^3}=z-\frac{2^2}{2!z^5}+\frac{2^4}{4!z^{11}}-\frac{2^6}{6!z^{17}}+\ldots+(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!z^{6n-1}}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n}}{(2n)!z^{6n-1}}.$$

Главная часть ряда Лорана в окрестности точки $z=\infty$ содержит только одно слагаемое z, а правильная часть содержит бесконечное число слагаемых (все остальные).

б) $e^z=1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\ldots+\frac{z^n}{n!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$

$$e^{\frac{1}{z}}=1+\frac{1}{1!z}+\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{3!z^3}+\frac{1}{4!z^4}\ldots+\frac{1}{n!z^n}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!z^n}$$

$$z^3e^{\frac{1}{z}}=z^3+z^2+\frac{z}{2}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!z}\ldots+\frac{1}{n!z^{n-3}}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!z^{n-3}}$$

Главная часть ряда Лорана в окрестности точки $z=\infty$ содержит четыре первых слагаемых, а правильная часть – бесконечное число слагаемых.

3.5 Нули аналитической функции. Изолированные особые точки

Точка $z = z_0$ называется нулем кратности k функции $f(z)$ аналитической в точке $z = z_0$, если $f(z_0) = 0,\ f'(z_0) = 0,\ f''(z_0) = 0, \ldots,\ f^{(k-1)}(z_0) = 0,\ f^{(k)}(z_0) \neq 0$. Если $k = 1$, то точка $z = z_0$ называется простым нулем функции $f(z)$.

Пусть точка $z = z_0$ является нулем кратности k, тогда разложение $f(z)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $z = z_0$ будет иметь вид:

$$f(z) = C_k(z - z_0)^k + C_{k+1}(z - z_0)^{k+1} + C_{k+2}(z - z_0)^{k+2} + \ldots, \text{ где } C_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} \neq 0 .$$

Теорема 3.16. *Для того, чтобы функции* $f(z)$ *имела в точке* $z = z_0$ *нуль k-го порядка, необходимо и достаточно, чтобы она была представлена в виде* $f(z) = (z - z_0)^k \varphi(z)$, *где* $\varphi(z_0)$ *аналитична в точке* $z = z_0$ *и* $\varphi(z_0) \neq 0$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $z = z_0$ – нуль кратности k функции $f(z)$. Тогда разложение $f(z)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $z = z_0$ имеет вид:

$$\begin{aligned} f(z) &= C_k(z - z_0)^k + C_{k+1}(z - z_0)^{k+1} + C_{k+2}(z - z_0)^{k+2} + \ldots = \\ &= (z - z_0)^k \left(C_k + C_{k+1}(z - z_0) + C_{k+2}(z - z_0)^2 + \ldots\right) = (z - z_0)^k \varphi(z), \end{aligned}$$

где $\varphi(z) = C_k + C_{k+1}(z - z_0) + C_{k+2}(z - z_0)^2 + \ldots$ аналитична в точке $z = z_0$ и $\varphi(z_0) = C_k \neq 0$, что и требовалось доказать.

Достаточность. Пусть $f(z) = (z - z_0)^k \varphi(z)$, где $\varphi(z)$ аналитична в точке $z = z_0$ и $\varphi(z_0) \neq 0$. Так как $\varphi(z)$ аналитична в точке $z = z_0$, она может быть разложена в окрестности точки z_0 в ряд Тейлора:

$$\varphi(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \ldots, \quad a_0 = \varphi(z_0) \neq 0 .$$

Тогда

$$\begin{aligned} f(z) &= (z - z_0)^k \left(a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \ldots\right) = \\ &= a_0(z - z_0)^k + a_1(z - z_0)^{k+1} + a_2(z - z_0)^{k+2} + \ldots . \end{aligned}$$

Отсюда следует, в силу единственности разложения в ряд Тейлора,

$f(z_0) = 0,\ f'(z_0) = 0,\ \ldots,\ f^{(k-1)}(z_0) = 0,\ f^{(k)}(z_0) = a_0 \neq 0$, то есть $z = z_0$ нуль k-го порядка, что и требовалось доказать.

Точка $z = z_0$ называется изолированной особой точкой функции $f(z)$, если $f(z)$ аналитична в кольце $0 < |z - z_0| < R$, то есть аналитична в некоторой окрестности точки z_0, за исключением самой точки z_0.

Пусть $z = z_0$ – изолированная особая точка функции $f(z)$. Тогда в кольце $0 < |z - z_0| < R$ $f(z)$ может быть разложена в ряд Лорана:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{-n}}{(z - z_0)^n}.$$

Точка $z = z_0$ называется устранимой особой точкой функции $f(z)$, если разложение в ряд Лорана не содержит главной части, то есть имеет вид:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n.$$

Точка $z = z_0$ называется полюсом, если разложение в ряд Лорана содержит в главной части конечное число членов, то есть имеет вид:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n + \frac{C_{-1}}{z - z_0} + \frac{C_{-2}}{(z - z_0)^2} + \ldots + \frac{C_{-m}}{(z - z_0)^m},$$

где $C_{-m} \neq 0, C_{-(m+1)} = 0, C_{-(m+2)} = 0$ и т.д.

При этом, если $m = 1$, то $z = z_0$ называется полюсом первого порядка, если $m > 1$, то полюсом m-го порядка.

Точка $z = z_0$ называется существенно особой, если главная часть ряда Лорана содержит бесконечное число членов.

Рассмотрим поведение функции $f(z)$ в окрестности изолированной особой точки каждого типа.

Пусть $z = z_0$ – устранимая особая точка. Тогда разложение $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности этой имеет вид:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n = C_0 + C_1 (z - z_0) + C_2 (z - z_0)^2 + \ldots + C_n (z - z_0)^n + \ldots.$$

Во всех точках круга $0 < |z - z_0| < R$ указанный ряд сходится к $f(z)$, а в точке $z = z_0$ к числу C_0. Если принять $f(z_0) = C_0$, то разложение будет справедливо в круге $|z - z_0| < R$. Очевидно, что в достаточно малой окрестности точки $z = z_0$ $f(z)$ будет ограниченной,то есть $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = C$, где C – конечное число.

Пусть $z = z_0$ – полюс m-го порядка. Тогда разложение $f(z)$ в ряд Лорана в окорестности этой точки имеет вид:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z-z_0)^n+\frac{C_{-1}}{z-z_0}+\frac{C_{-2}}{(z-z_0)^2}+\ldots+\frac{C_{-m}}{(z-z_0)^m}=$$
$$=C_0+C_1(z-z_0)+C_2(z-z_0)^2+\ldots+C_n(z-z_0)^n+\frac{C_{-1}}{z-z_0}+\frac{C_{-2}}{(z-z_0)^2}+\ldots+\frac{C_{-m}}{(z-z_0)^m}=\frac{1}{(z-z_0)^m}\times$$
$$\times\Big(C_0(z-z_0)^m+C_1(z-z_0)^{m+1}+\ldots+C_n(z-z_0)^{m+n}+\ldots+C_{-1}(z-z_0)^{m-1}+C_{-2}(z-z_0)^{m-2}+C_{-m}\Big)=$$
$$=\frac{1}{(z-z_0)^m}\varphi(z),$$
где $\lim\limits_{z\to z_0}\varphi(z)=C_{-m}\neq 0$.

Найдем $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=\lim\limits_{z\to z_0}\frac{1}{(z-z_0)^m}\varphi(z)=\infty$.

Пусть $z=z_0$ – существенно особая точка. Поведение $f(z)$ в окрестности этой точки устанавливает следующая теорема.

Теорема 3.17 (Сохоцкого Ю.В.). *Если* $z=z_0$ *существенно особая точка функции* $f(z)$*, то для любого числа А существует такая последовательность* $\{z_n\}$ *значений аргумента,стремящаяся к* z_0*, для которой последовательность соответствующих значений функции* $\{f(z_n)\}$ *стремится к А.*

Из этой теоремы следует, что $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)$ не существует.

Таким образом, мы получили:

если $z=z_0$ – устранимая особая точка, то $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=C$, где C – конечное число;

если $z=z_0$ – полюс, то $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=\infty$;

если $z=z_0$ – существенно особая точка, то $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)$ не существует.

Верны и обратные утверждения:

если $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=C$, где C – конечное число, то z_0 – устранимая особая точка;

если $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=\infty$, то z_0 – полюс;

если $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)$ не существует, то z_0 – существенно особая точка.

Следующая теорема позволит легко определить порядок полюса.

Теорема 3.18. *Для того, чтобы особая точка* $z=z_0$ *была полюсом* m*-го порядка функции* $f(z)$ *необходимо и достаточно, чтобы в некоторой окрестности этой точки* *функции* $f(z)$ *могла быть представлена в виде* $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{(z-z_0)^m}$, *где* $\varphi(z)$ *аналитична в точке* $z=z_0$ *и* $\varphi(z_0)\neq 0$.

Следствие. Особая точка $z=z_0$ является полюсом m-го порядка тогда и только тогда, когда существует конечный предел $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)(z-z_0)^m \neq 0$.

Существует связь между нулем и полюсом функции.

Теорема 3.19. *Функция* $f(z)$ *имеет в точке* $z=z_0$ *полюс m-го порядка тогда и только тогда, когда функция* $\dfrac{1}{f(z)}$ *имеет в этой точке нуль m-го порядка.*

Пример 3.28. Определить порядок нуля для функций

a) $f(z)=z^5-z^4+4z^3-4z^2$; **b)** $f(z)=e^{z^2}-1-z^2$; **c)** $f(z)=\sin^2 z-1+\cos z$.

Решение.

a) $f(z)=z^5-z^4+4z^3-4z^2$. Разложим многочлен на множители:

$$z^4(z-1)+4z^2(z-1)=(z-1)\left(z^4+4z^2\right)=(z-1)z^2\left(z^2+4\right)=(z-1)z^2(z-2i)(z+2i).$$

Нулями функции являются точки $z_1=1,\ z_2=0,\ z_3=2i,\ z_4=-2i$.

Для определения порядка нуля, воспользуемся теоремой 17.1.

Для точки $z_1=1$ и из равенства $f(z)=(z-1)\varphi(z)$, где $\varphi(1)\neq 0$ получаем, что $z_1=1$ – нуль первого порядка.

Для точки $z_2=0$ из равенства $f(z)=z^2\varphi(z)$, где $\varphi(0)\neq 0$ получаем, что $z_2=0$ – нуль второго порядка.

Для точки $z_{3,4}=\pm 2i$ аналогично находим, что это нули первого порядка.

b) $f(z)=e^{z^2}-1-z^2$. Нулем функции является точка $z=0$.

Для определения порядка нуля разложим функцию в ряд Тейлора:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(z^2\right)^n}{n!}-1-z^2=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{n!}-1-z^2=1+\frac{z^2}{1!}+\frac{z^4}{2!}+\ldots-1-z^2=\frac{z^4}{2!}+\frac{z^6}{6!}+\ldots$$

Так как в полученном разложении коэффициенты $C_0=C_1=C_2=C_3=0, C_4\neq 0$, заключаем, что точка $z=0$ является нулем четвертого порядка.

c) $f(z)=\sin^2 z-1+\cos z$. Точка $z=0$ – нуль функции $f(z)$. Для определения порядка нуля найдем производные функции:

$$f'(z)=2\sin z\cos z-\sin z,\quad f'(0)=0,$$

$$f''(z)=(\sin 2z-\sin z)'=2\cos 2z-\cos z,\quad f''(0)=1\neq 0$$

Отсюда следует, что $z=0$ – нуль первого порядка.

Пример 3.29. Определить особые точки и их тип для функций:

a) $f(z)=\dfrac{\sin z}{z}$; **b)** $f(z)=e^{\frac{1}{z}}$; **c)** $f(z)=\dfrac{1-\cos z}{z^3}$.

Решение.

a) $f(z)=\dfrac{\sin z}{z}$. Разложим $f(z)$ в окрестности изолированной особой точки $z=0$ в ряд Лорана:

$$\frac{\sin z}{z}=\frac{1}{z}\cdot\sin z=\frac{1}{z}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{z(2n+1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n+1)!}$$

Так как ряд Лорана не содержит главной части, то $z=z_0$ – устранимая особая точка.

b) $f(z)=e^{\frac{1}{z}}$. Разложим $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности изолированной особой точки $z_0=0$:

$$f(z)=e^{\frac{1}{z}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n n!}.$$

Так как главная часть ряда Лорана содержит бесконечное число членов, то z_0 – существенно особая точка.

c) $f(z)=\dfrac{1-\cos z}{z^3}$. Разложим $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности изолированной особой точки $z_0=0$:

$$f(z)=\frac{1}{z^3}(1-\cos z)=\frac{1}{z^3}\left(1-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}\right)=\frac{1}{z^3}\left(1-1+\frac{z^2}{2!}-\frac{z^4}{4!}+\ldots\right)=$$

$$\frac{1}{z^3}\left(\frac{z^2}{2!}-\frac{z^4}{4!}+\ldots\right)=\frac{1}{z2!}-\frac{z}{4!}+\ldots.$$

Так как главная часть ряда Лорана содержит только один член $\dfrac{1}{z2!}$, то $z_0=0$ – полюс первого порядка.

Пример 3.30. Определить тип особой точки функций:

a) $f(z)=\dfrac{z+3}{(z-1)^2}$; **b)** $f(z)=\dfrac{1}{\sin^2 z-1+\cos z}$.

Решение.

a) $f(z)=\dfrac{z+3}{(z-1)^2}$. Проверим, является ли особая точка $z_0=1$ полюсом. Для этого воспользуемся теоремой 3.18.

$f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{(z-1)^2}$, где $\varphi(z)=z+3$ аналитична в точке $z=1, \varphi(1)=4\neq 0$. Следовательно, $z=1$ – полюс второго порядка.

b) $f(z)=\dfrac{1}{\sin^2 z-1+\cos z}$. В примере 3.28 (c) мы получили, что $z=0$ – нуль первого порядка для функции $f(z)=\sin^2 z-1+\cos z$. Следовательно, согласно теореме 3.19 $z=0$ – полюс первого порядка для функции $f(z)=\dfrac{1}{\sin^2 z-1+\cos z}$.

3.6 Вычеты

Пусть z_0 – изолированная особая точка функции $f(z)$, то есть $f(z)$ аналитична в некотором кольце $0<|z-z_0|<R$. Вычетом функции $f(z)$ в точке $z=z_0$ называется комплексное число, равное значению интеграла $\dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_L f(z)dz=\operatorname*{Res}\limits_{z=z_0} f(z)$, где L – контур, целиком принадлежащий кольцу $0<|z-z_0|<R$, ориентированный в положительном направлении и содержащий в себе точку z_0. Разложим $f(z)$ в кольце $0<|z-z_0|<R$ в ряд Лорана:

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n(z-z_0)^n,$$

коэффициенты которого находятся по формуле

$$C_n=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_L \frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n-1}}d\xi,\quad n=0,\pm1,\pm2,$$

где L – произвольный контур, целиком принадлежащий кольцу $0<|z-z_0|<R$, ориентированный в положительном направлении и содержащий в себе точку z_0.

Сравнивая эти формулы, получаем

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)=C_{-1}. \tag{3.64}$$

В частности, если z_0 – устранимая особая точка, то $\operatorname*{Res}\limits_{z=z_0} f(z)=0$, так как $C_{-1}=0$.

Укажем другие способы нахождения вычета, не разлагая функцию $f(z)$ в ряд Лорана.

Пусть $z=z_0$ – полюс первого порядка, то есть разложение в ряд Лорана в окрестности точки $z = z_0$ имеет вид:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n + \frac{C_{-1}}{z - z_0}.$$

Умножим обе части равенства на ($z - z_0$):

$$f(z)(z - z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^{n+1} + C_{-1}.$$

Найдем $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)(z - z_0) = \lim\limits_{z \to z_0} \left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^{n+1} + C_{-1} \right) = C_{-1}$.

Таким образом,

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = C_{-1} = \lim_{z \to z_0} f(z)(z - z_0). \tag{3.65}$$

Пусть z_0 – полюс порядка $m > 1$, то есть разложение $f(z)$ в ряд Лорана имеет вид:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n + \frac{C_{-1}}{z - z_0} + \frac{C_{-2}}{(z - z_0)^2} + \ldots + \frac{C_{-m}}{(z - z_0)^m}, \quad C_{-m} \neq 0.$$

Умножим обе части равенства на $(z - z_0)^m$:

$$f(z)(z - z_0)^m = \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^{n+m} + C_{-1}(z - z_0)^{m-1} + C_{-2}(z - z_0)^{m-2} + \ldots + C_{-m}.$$

Дифференцируя последнее равенство ($m - 1$) раз, получаем:

$$\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left(f(z)(z - z_0)^m \right) = (m-1)! + m! C_0 (z - z_0) + \ldots.$$

Переходя к пределу при $z \to z_0$, находим:

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = C_{-1} = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left(f(z)(z - z_0)^m \right). \tag{3.66}$$

Из формулы 3.65 можно получить удобную форму для нахождения вычета для полюса первого порядка, если $f(z)$ представима в виде $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{g(z)}$, где $\varphi(z), g(z)$ аналитичны в точке $z = z_0$, $\varphi(z_0) \neq 0,\ g(z_0) \neq 0,\ g'(z_0) \neq 0$.

А именно:

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z \to z_0} \frac{\varphi(z)(z - z_0)}{g(z)} = \lim_{z \to z_0} \frac{\varphi(z)}{\dfrac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0}} = \frac{\varphi(z)}{g'(z_0)}. \tag{3.67}$$

Теорема 3.20 (основная теорема о вычетах). *Пусть функция* $f(z)$ *аналитична в замкнутой области* $\overline{D}$ *за исключением конечного числа особых точек* $z_k \in D, \quad k = 1, \ldots n$, *тогда справедливо равнство:*

$$\oint\limits_L f(z)dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z),\ L\ \textit{– граница области D.}$$

Пример 3.31. Найти вычеты следующих функций в особых точках:

a) $f(z)=z^3\cdot e^{\frac{1}{z}}$; **b)** $f(z)=\dfrac{\sin z}{z}$; **c)** $f(z)=\sin\left(1+\dfrac{1}{z}\right)$.

Решение.

a) $f(z)=z^3\cdot e^{\frac{1}{z}}$. Особой точкой является точка $z_0=0$. Разложим $f(z)$ в ряд Лорана:

$$f(z)=z^3\cdot e^{\frac{1}{z}}=z^3\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n\cdot n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{3-n}}{n!}=z^3+z^2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}z^{-1}+\ldots$$

$\operatorname*{Res}\limits_{z=0} f(z)=C_{-1}=\dfrac{1}{4!}=\dfrac{1}{24}$.

b) Особой точкой является $z_0=0$. В примере 3.29 (а) мы установили, что $z_0=0$ является устранимой особой точкой. Следовательно, $\operatorname*{Res}\limits_{z=0} f(z)=0$.

c) $f(z)=\sin\left(1+\dfrac{1}{z}\right)$. Особой точкой является точка $z_0=0$. Разложим $f(z)$ в ряд Лорана:

$$f(z)=\sin\left(1+\frac{1}{z}\right)=\sin 1\cdot\cos\frac{1}{z}+\cos 1\cdot\sin\frac{1}{z}=\sin 1\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^{2n}(2n)!}\right)+\cos 1\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^{2n+1}(2n+)!}\right)=$$

$$=\sin 1\left(1-\frac{1}{2!z^2}+\ldots\right)+\cos 1\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{3!z^3}+\ldots\right)=\sin 1+\cos 1\cdot\frac{1}{z}-\frac{\sin 1}{2!}\cdot\frac{1}{z^2}+\ldots\ .$$

Следовательно, $\operatorname*{Res}\limits_{z=0} f(z)=C_{-1}=\cos 1$.

Пример 3.32. Найти вычеты следующих функций в особых точках:

a) $f(z)=\dfrac{z+2}{z^2-2z-3}$; **b)** $f(z)=\dfrac{z+2}{(z+1)^2(z-3)}$; **c)** $f(z)=\dfrac{z^3}{z^2-1}$.

Решение.

a) $f(z)=\dfrac{z+2}{z^2-2z-3}=\dfrac{z+2}{(z+1)(z-3)}$. Особыми точками функции являются $z_0=-1$, $z_1=3$. Точки z_0 и z_1 являются полюсами I порядка. Для нахождения вычетов воспользуемся формулой 18.2:

$$\operatorname*{Res}_{z=-1} f(z)=\lim_{z\to-1}\left(\frac{z+2}{(z+1)(z-3)}\cdot z+1\right)=\lim_{z\to-1}\frac{z+2}{z-3}=-\frac{1}{4}.$$

$$\operatorname*{Res}_{z=3} f(z) = \lim_{z\to 3}\left(\frac{z+2}{(z+1)(z-3)}\cdot(z-3)\right) = \lim_{z\to 3}\frac{z+2}{z+1} = \frac{5}{4}.$$

b) $f(z) = \dfrac{z+2}{(z+1)^2(z-3)}$. Особой точкой функции является точка $z_0 = -1$, которая есть полюс второго порядка. Воспользуемся формулой 3.66.

$$\operatorname*{Res}_{z=-1} f(z) = \frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to -1}\left(\frac{z+2}{(z+1)^2}\cdot(z+1)^2\right)' = \lim_{z\to -1}(z+2)' = 1.$$

c) $f(z) = \dfrac{z^3}{z^2-1}$. Особыми точками функции являются $z_0 = 1$, $z_0 = -1$, которые являются полюсами первого порядка. Воспользуемся формулой 3.67: $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{g(z)}$, где

$$\varphi(z) = z^3,\ g(z) = z^2 - 1,\ \varphi(1) \neq 0,\ \varphi(-1) \neq 0,\ g(1) = 0,\ g(0) = 0,\ g'(1) \neq 0,\ g'(0) = 0$$

$$\operatorname*{Res}_{z=1} f(z) = \frac{\varphi(1)}{g'(1)} = \left(\frac{z^3}{2z}\right)_{z=1} = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname*{Res}_{z=-1} f(z) = \frac{\varphi(-1)}{g'(-1)} = \left(\frac{z^3}{2z}\right)_{z=-1} = \frac{1}{2}.$$

Пример 3.33. Вычислить следующие интегралы, пользуясь основной теоремой о вычетах:

a) $\oint\limits_{|z|=1} z^3 \cdot e^{\frac{1}{z}} dz$; **b)** $\oint\limits_{|z-1|=2} \sin\left(1+\frac{1}{z}\right)dz$.

Решение.

a) $\oint\limits_{|z|=1} z^3 \cdot e^{\frac{1}{z}} dz$. Особой точкой $f(z) = z^3 \cdot e^{\frac{1}{z}}$ является точка $z = 0$, которая лежит внутри контура. Следовательно, по теореме 18.1 $\oint\limits_{|z|=1} z^3 \cdot e^{\frac{1}{z}} dz = 2\pi i \cdot \operatorname*{Res}_{z=0} f(z)$. Но $\operatorname*{Res}_{z=-1} f(z) = \dfrac{1}{24}$ (см. пример 3.31 а). Следовательно, $\oint\limits_{|z|=1} z^3 \cdot e^{\frac{1}{z}} dz = 2\pi i \cdot \dfrac{1}{24} = \dfrac{1}{12}\pi i$.

b) $\oint\limits_{|z-1|=2} \sin\left(1+\frac{1}{z}\right)dz$. Особой точкой $f(z) = \sin\left(1+\dfrac{1}{z}\right)$ является точка $z = 0$, которая лежит внутри контура. Следовательно, по теореме 3.20:

$$\oint\limits_{|z-1|=2} \sin\left(1+\frac{1}{z}\right)dz = 2\pi i \cdot \operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = 2\pi i \cdot \cos 1$$ (см. пример 3.31 c).

Пример 3.34. Вычислить следующие интегралы, пользуясь основной теоремой о вычетах:

a) $\displaystyle\oint\limits_{|z-1|=1} \frac{e^z}{(z+1)^3(z-1)}dz$; **b)** $\displaystyle\oint\limits_{|z|=1} \frac{\operatorname{ctg} z}{(4z-\pi)}dz$.

Решение.

a) $\displaystyle\oint\limits_{|z-1|=1} \frac{e^z}{(z+1)^3(z-1)}dz$. Особыми точками функции $f(z)=\dfrac{e^z}{(z+1)^3(z-1)}$ являются точки $z_0=-1;\, z_0=1$. Из этих точек только точка $z=1$ лежит внутри контура. Поэтому, $\displaystyle\oint\limits_{|z-1|=1} \frac{e^z}{(z+1)^3(z-1)}dz = 2\pi i \cdot \operatorname*{Res}_{z=1} f(z)$ (по теореме 3.31). Точка $z_0=1$ является полюсом I порядка $f(z)=\dfrac{e^z}{(z+1)^3(z-1)}$. Следовательно,

$$\operatorname*{Res}_{z=1} f(z) = \lim_{z\to 1}\left(\frac{e^z}{(z+1)^3(z-1)}(z-1)\right) = \lim_{z\to 1}\frac{e^z}{(z+1)^3} = \frac{e^1}{8}.$$ Значит,

$$\oint\limits_{|z-1|=1} \frac{e^z}{(z+1)^3(z-1)}dz = \frac{2\pi i \cdot e}{8} = \frac{\pi e}{4} i.$$

b) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=1} \frac{\operatorname{ctg} z}{(4z-\pi)}dz$. Особыми точками функции $f(z)=\dfrac{\operatorname{ctg} z}{(4z-\pi)}$ являются точки

$$z_0=\frac{\pi}{4},\ z_1=0,\ z_3=\pi,\ z_4=-\pi,\ z_5=2\pi,\ \ldots;\quad z=k\pi,\quad n=0,\pm1,\pm2,\ldots.$$

Внутри контура лежат только две точки $z_0=\dfrac{\pi}{4},\ z_1=0$, которые являются полюсами первого порядка. Следовательно, по теореме 3.31:

$$\oint\limits_{|z|=1} \frac{\operatorname{ctg} z}{(4z-\pi)}dz = 2\pi i \cdot \left(\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=\frac{\pi}{4}} f(z)\right).$$

Вычеты найдем, пользуясь формулой 3.67

$$f(z)=\frac{\varphi(z)}{g(z)},\ \text{где}\ \varphi(z)=\operatorname{ctg} z,\quad g(z)=4z-\pi,\quad \varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)\neq 0,\quad g\left(\frac{\pi}{4}\right)=0,\quad g'\left(\frac{\pi}{4}\right)=4\neq 0.$$

$$\operatorname*{Res}_{z=\frac{\pi}{4}} f(z) = \frac{\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)}{g'\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{4}.$$

$z = 0$; $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{g(z)}$, где $\varphi(z) = \dfrac{\cos z}{4z - \pi}$, $\quad g(z) = \sin z, \quad \varphi(0) \neq 0, \quad g(0) = 0, g'(0) = 1$.

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = \frac{\varphi(0)}{g'(0)} = \frac{-\frac{1}{\pi}}{1} = -\frac{1}{\pi}$$

Окончательно, $\displaystyle\oint\limits_{|z|=1} \frac{\operatorname{ctg} z}{(4z - \pi)} dz = 2\pi i \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{\pi} \right)$.

4 ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Операционное исчисление является одной из частей математического анализа. Его методы широко используются при решении практических задач в электронике, физике, автоматике, телемеханике и т.д.

Операционное исчисление позволяет существенно упростить решение различных задач. Например, при решении задач математического анализа трудной задачей является интегрирование функций. Чтобы обойти эти трудности применяются методы операционного исчисления, основой которых является некоторое интегральное преобразование функций действительной переменной, котороя позволяет дифференцирование над этими функциями заменить алгебраическими операциями над их интегральным преобразованием. В результате этого значиельно упрощается решение дифференциальных уравнений, которые приводятся к стандартному методу независимо от вида уравнения.

4.1 Преобразование Лапласа. Оригинал и изображение

Рассмотрим комплексную функцию переменной t:

$$f(t) = u(t) + iv(t),$$

где $u(t)$ и $v(t)$ – функции переменной t. Функция $f(t)$ удовлетворяет трем условиям:

1) функция $f(t)$ определена при $t \geq 0$, а при $t < 0$ $f(t) = 0$;
2) функция $f(t)$ непрерывна или кусочно-непрерывна, т.е. в любом конечном интервале она имеет конечное число точек разрыва I-го рода и конечное число точек экстремума. Внутри же любого частичного интервала она непрерывна и стремится к определенным пределам при стремлении изнутри интервала к ее границам;
3) для любого $t \geq 0$ существуют такие постоянные числа M и $S_0 \geq 0$, что $|f(t)| \leq M \cdot e^{S_0 t}$.

Определение 4.1. Функции $f(t)$, удовлетворяющие указанным трем условиям, называются начальными функциями или ***оригиналом***.

Например:

а) функция

$$f(t) = \begin{cases} \sigma, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

является оригиналом, так как она непрерывна при $t \geq 0$ и может быть представлена в виде

$$\sigma = \sigma \cdot e^{0 \cdot t};$$

б) функция $f(t)=\begin{cases}\dfrac{t}{t-5}, & t\geq 0\\ 0, & t<0\end{cases}$ не является оригиналом, так как при $t=5$ она имеет точку разрыва II-го рода.

Изображение

Рассмотрим произведение функции $f(t)$ на комплексную функцию e^{-pt}, где

$$p=s+iw,\quad s>0, \tag{4.1}$$

$$f(t)\cdot e^{-pt}. \tag{4.2}$$

Функция (4.2) является комплексной функцией действительной переменной. Возьмем интеграл от этой функции

$$I=\int\limits_0^\infty f(t)\cdot e^{-pt}dt. \tag{4.3}$$

Записанный интеграл абсолютно сходится при $S>S_0$.

Теорема 4.1. *Если интеграл* $\int\limits_0^\infty |f(x)|dx$ *сходится, то сходится и интеграл* $\int\limits_0^\infty f(x)dx$ *и он называется абсолютно сходящимся.*

Покажем абсолютную сходимость интеграла (4.3).

Применяя формулу Эйлера, получим

$$e^{-pt}=e^{-(S+iw)t}=e^{-St}\cdot e^{-iwt}=e^{-St}(\cos wt+i\sin wt).$$

Тогда (4.3) примет вид

$$I=\int\limits_0^\infty e^{-St}(\cos wt+i\sin wt)f(t)dt=\int\limits_0^\infty e^{St}\cos wtf(t)dt-i\int\limits_0^\infty e^{-St}f(t)\sin wtdt=I_1-iI_2.$$

Докажем абсолютную сходимость интегралов I_1 и I_2.

Имеем, $|I_1|=\left|\int\limits_0^\infty e^{-St}\cos wt\cdot f(t)dt\right|\leq\int\limits_0^\infty\left|e^{-St}\cos wt\cdot f(t)\right|dt=\int\limits_0^\infty e^{-St}|\cos wt|\cdot f(t)dt$.

С учетом того, что $|\cos wt|=1$ и $|f(t)|\leq Me^{-S_0t}$, получаем:

$$|I_1|\leq\int\limits_0^\infty e^{-St}\cdot Me^{S_0t}dt=M\int\limits_0^\infty e^{-(St-S_0t)}dt=-\frac{M}{S-S_0}e^{-(S-S_0)t}\Big|_0^\infty=\frac{M}{S-S_0},\text{ где } M>0, S_0>0.$$

А это означает, что интеграл I_1 сходится абсолютно.

Аналогично доказывается абсолютная сходимость интеграла I_2.

Итак, интеграл (4.3) существует и определяет некоторую функцию от *p*, которую обозначим $F(p)$:

$$F(P)=\int_0^\infty e^{-Pt} f(t)dt\,. \tag{4.4}$$

Функция $F(p)$ (4.4) называется *Лапласовым изображением* или просто изображением для оригинала $f(t)$:

$F(p)\to f(t)$ или $L\{f(t)\}=F(p)$.

Интеграл $\int_0^\infty e^{-pt} f(t)dt$ называется интегралом Лапласа. Поэтому операционное исчисление является теорией преобразования Лапласа. Ценность операционного ичисления состоит в том, что дифференцированию оригинала соответствует умножение его изображения на P, а интегрированию интеграла соответствует деление его изображения на P.

Примеры. Найти изображения оригиналов, пользуясь определением изображения.

4.1. $f(t)=\sin t$.

Решение. По определению имеем:

$$F(p)=L\{\sin t\}=\int_0^\infty e^{-pt}\sin t dt=\left|\begin{matrix} u=e^{-pt} & \Rightarrow & du=-pe^{-pt}dt \\ dv=\sin t dt & & v=-\cos t\end{matrix}\right|=$$

$$=-e^{-pt}\cos t\Big|_0^\infty-\int_0^\infty \cos t\cdot p\cdot e^{-pt}dt=-e^{-pt}\cos t\Big|_0^\infty-p\int_0^\infty \cos t e^{-pt}dt=$$

$$=\left|\begin{matrix} u=e^{-pt} & \Rightarrow & du=-pe^{-pt}dt \\ dv=\cos t dt & & v=\sin t\end{matrix}\right|=1-p\left(e^{-pt}\sin t\Big|_0^\infty+\int_0^\infty pe^{-pt}\sin t dt\right)=1-p^2\int_0^\infty e^{-pt}\sin t dt.$$

Получили уравнение относительно исходного интеграла:

$$\int_0^\infty e^{-pt}\sin t dt=1-p^2\int_0^\infty e^{-pt}\sin t dt\,.$$

Откуда $\left(1+p^2\right)\int_0^\infty e^{-pt}\sin t dt=1,\quad \int_0^\infty e^{-pt}\sin t dt=\dfrac{1}{1+P^2}$.

Следовательно, $F(p)=L\{\sin t\}=\dfrac{1}{1+P^2}$.

4.2. $f(t)=e^{\alpha t}$.

Решение.

$$F(p)=L\left\{e^{\alpha t}\right\}=\int_0^\infty e^{-pt}\cdot e^{\alpha t}dt=\int_0^\infty e^{(\alpha-p)t}dt=\frac{1}{\alpha-p}\int_0^\infty e^{(\alpha-p)t}d(\alpha-p)t=$$

$$=\frac{1}{\alpha-p}e^{(\alpha-p)t}\Big|_0^\infty=\frac{1}{\alpha-p}\left(e^{(\alpha-p)\cdot\infty}-e^{(\alpha-p)\cdot 0}\right)=\frac{1}{\alpha-p}\cdot(-1)=\frac{1}{p-\alpha}.$$

Получили, что изображение $F(p)=L\{e^{\alpha t}\}=\dfrac{1}{p-\alpha}$.

Теорема 4.2 (единственности). *Если две непрерывные функции* $f(t)$ *и* $\varphi(t)$ *имеют одно и то же изображение* $F(p)$, *то эти функции тождественно равны.*

Эта теорема имеет большое значение, так как если при решении практической задачи удалось каким-либо способом найти изображение, а по этому изображению нашли его оригинал, то на основании сформулированной теоремы утверждаем, что найденный оригинал и есть решение задачи, и других решений нет.

Для нахождения изображений и оригиналов используется соответствующая таблица. Она получена на основе определения изображения и основных теорем операционного исчисления.

Таблица оригиналов и их изображений

№	$f(t)$	$F(p)$	№	$f(t)$	$F(p)$
1.	1	$1/p$	13.	$e^{\alpha t}\cos wt$	$\dfrac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2+w^2}$
2.	t	$1/p^2$	14.	$e^{-\alpha t}\cos wt$	$\dfrac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2+w^2}$
3.	t^2	$2/p^3$	15.	$\mathrm{sh}\alpha t$	$\dfrac{\alpha}{p^2-\alpha^2}$
4.	t^n	$\dfrac{n!}{p^{n+1}}$	16.	$\mathrm{ch}\alpha t$	$\dfrac{p}{p^2-\alpha^2}$
5.	$\sin t$	$\dfrac{1}{p^2+1}$	17.	$e^{\alpha t}\,\mathrm{ch}\,wt$	$\dfrac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2-w^2}$
6.	$\cos t$	$\dfrac{p}{p^2+1}$	18.	$e^{\alpha t}\,\mathrm{sh}\,wt$	$\dfrac{w}{(p-\alpha)^2-w^2}$
7.	$\sin\alpha t$	$\dfrac{\alpha}{p^2+\alpha^2}$	19.	$\sin(wt\pm\varphi)$	$\dfrac{w}{p^2+w^2}\cdot e^{\pm\frac{p\varphi}{w}}$
8.	$\cos\alpha t$	$\dfrac{p}{p^2+\alpha^2}$	20.	$\cos(wt\pm\varphi)$	$\dfrac{p}{p^2+w^2}\cdot e^{\pm\frac{p\varphi}{w}}$
9.	$e^{\alpha t}$	$\dfrac{1}{p-\alpha}$	21.	$\dfrac{t^n}{n!}e^{\alpha t}$	$\dfrac{1}{(P-\alpha)^{n+1}}$
10.	$e^{-\alpha t}$	$\dfrac{1}{p+\alpha}$	22.	$t\cos wt$	$\dfrac{p^2-w^2}{(p^2+w^2)^2}$
11.	$e^{\alpha t}\sin wt$	$\dfrac{w}{(p-\alpha)^2+w^2}$	23.	$t\sin wt$	$\dfrac{2pw}{(p^2+w^2)^2}$
12.	$e^{-\alpha t}\sin wt$	$\dfrac{w}{(p+\alpha)^2+w^2}$			

4.2 Основные теоремы операционного исчисления

Теорема 4.3 (сложения). *Изображение суммы нескольких функций, умноженных на постоянные, равно сумме изображений этих функций, умноженных на соответствующие постоянные. То есть, если* $f(t)=\sum_{i=1}^{n} C_i f_i(t)$, *то*

$$F(p)=\sum_{i=1}^{n} C_i F_i(p), \tag{4.5}$$

где $F_i(p)=L\{f_i(t)\}$.

Доказательство. Пусть $f(t)=\sum_{i=1}^{n} C_i f_i(t)$. Умножим все члены этого равенства на e^{-pt} и проинегрируем в пределах от 0 до ∞:

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} f(t)dt = \int_0^{\infty}\sum_{i=1}^{n} e^{-pt}\cdot C_i f_i(t)dt = \sum_{i=1}^{n} C_i \int_0^{\infty} e^{-pt}\cdot f_i(t)dt = \sum_{i=1}^{n} C_i F_i(p).$$

Пример 4.3. Найти изображение функции $f(t)=6\sin t-5\cos t$.

Решение. На основании теоремы сложения имеем, что

$$L\{f(t)\}=6\cdot\frac{1}{p^2+1}-5\cdot\frac{p}{p^2+1}=\frac{6-5p}{p^2+1}.$$

Теоремой сложения пользуются для нахождения изображений некоторых достаточно сложных оригиналов.

Предположим, что оригинал $f(t)$ может быть представлен в виде

$$f(t)=\sum_{i=1}^{n} C_i f_i(t).$$

Причем, изображение $f_i(t)$ можно найти. Тогда, полагая, что ряд соответствующих изображений сходится, будем иметь:

$$f(t)=\sum_{i=1}^{n} C_i f_i(t) \leftarrow F(p)=\sum_{i=1}^{n} C_i F_i(p).$$

Замечание (свойство однородности). Если $f(t)$ имеет изображение $F(p)$, то $C\cdot f(t)$ имеет изображение $C\cdot F(p)$.

Теорема 4.4 (подобия). *Пусть функция* $F(p)$ *является изображением оригинала* $f(t)$. *Тогда изображением оригинала* $f(\alpha t)$ *является*

$$F(p)=\frac{1}{\alpha}F\left(\frac{p}{\alpha}\right), \tag{4.6}$$

где α *– вещественное положительное число.*

Доказательство. По определению изображения имеем:

$$L\{f(\alpha t)\}=\int_0^\infty e^{-Pt}f(\alpha t)dt=\left|\begin{array}{l}\text{Обозначим}\\ \text{z} = \alpha\text{t.}\quad\text{Тогда}\\ dz=\alpha dt;\ t=\dfrac{z}{\alpha}\\ \text{при}\quad t=0\Rightarrow z=0\\ \text{при}\quad t=\infty\Rightarrow z=\infty\end{array}\right|=\int_0^\infty e^{-P\frac{z}{\alpha}}f(z)\frac{dz}{\alpha}=\frac{1}{\alpha}\int_0^\infty e^{-P\frac{z}{\alpha}}f(z)dz=$$

$$=\left|\frac{p}{\alpha}=p'\right|=\frac{1}{\alpha}F(p')=\frac{1}{\alpha}F\left(\frac{p}{\alpha}\right).$$

То есть, $L\{f(\alpha t)\}=\dfrac{1}{\alpha}F\left(\dfrac{p}{\alpha}\right)$.

Пример 4.4. Найти изображение оригинала $f(t)=\sin\alpha t$.

Решение. Учитывая, что $L\{\sin t\}=\dfrac{1}{p^2+1}$, на основании теоремы подобия имеем:

$$L\{\sin\alpha t\}=\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\left(\frac{p}{\alpha}\right)^2+1}=\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\frac{p^2}{\alpha^2}+1}=\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{\alpha^2}{p^2+\alpha^2}=\frac{\alpha}{p^2+\alpha^2}.$$

То есть, $L\{\sin\alpha t\}=\dfrac{\alpha}{p^2+\alpha^2}$.

Пример 4.5. $f(t)=e^{-\alpha t}$.

Решение. Имеем, что $L\{e^t\}=\dfrac{1}{p-1}$.

Тогда $L\{e^{-\alpha t}\}=-\dfrac{1}{\alpha}\cdot\dfrac{1}{\left(\frac{p}{-\alpha}\right)-1}=-\dfrac{1}{\alpha}\cdot\dfrac{-\alpha}{p+\alpha}=\dfrac{1}{p+\alpha}$.

То есть, $L\{e^{-\alpha t}\}=\dfrac{1}{p+\alpha}$.

Пример 4.6. $f(t)=3\sin 5t-4\cos 3t$.

Решение. Знаем, что $L\{\sin t\}=\dfrac{1}{p^2+1}$; $\quad L\{\cos t\}=\dfrac{p}{p^2+1}$. Тогда

$$L\{\sin 5t\}=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{\left(\frac{p}{5}\right)^2+1}=\frac{1}{5}\cdot\frac{25}{p^2+25}=\frac{5}{p^2+25};$$

$$L\{\cos 3t\}=\frac{1}{3}\cdot\frac{\frac{p}{3}}{\left(\frac{p}{3}\right)^2+1}=\frac{1}{9}\cdot\frac{p\cdot 9}{p^2+9}=\frac{p}{p^2+9}.$$

Изображение исходной функции

$$L\{3\sin 5t-4\cos 3t\}=3\cdot\frac{5}{p^2+25}-4\cdot\frac{p}{p^2+9}=\frac{15}{p^2+25}-\frac{4p}{p^2+9}.$$

Пример 4.7. Найти начальную функцию (оригинал), если его изображение $F(p)=\dfrac{20}{p^2+4}+\dfrac{20p}{p^2+9}$.

Решение. Преобразуем изображение к табличному виду:

$$F(p)=10\cdot\frac{2}{p^2+2^2}+20\cdot\frac{p}{p^2+3^2}.$$

Тогда $f(t)=10\sin 2t+20\cos 3t$.

Теорема 4.5 (смещения). *Если* $F(p)$ *есть изображение* $f(t)$, *то* $F(p+\alpha)$ *есть изображение функции* $e^{-\alpha t}\cdot f(t)$, *где* $\mathrm{Re}(p+\alpha)>S_0$, S_0 *– показатель роста.*

$$L\{e^{-\alpha t}\cdot f(t)\}=F(p+\alpha), \tag{4.7}$$

Доказательство. По определению изображения имеем:

$$L\{e^{-\alpha t}\cdot f(t)\}=\int_0^\infty e^{-pt}\cdot e^{-\alpha t}\cdot f(t)dt=\int_0^\infty e^{-(p+\alpha)t}\cdot f(t)dt=\left|\begin{matrix}\text{Обозначим}\\ (p+\alpha)=p'\end{matrix}\right|=$$

$$=\int_0^\infty e^{-p't}\cdot f(t)dt=F(p')=F(p+\alpha).$$

Аналогично получаем $L\{e^{\alpha t}\cdot f(t)\}=F(p-\alpha)$.

Пример 4.8. Найти изображение функции $f(t)=e^{-\alpha t}$.

Решение. Оригинал $f(t)=e^{-\alpha t}\cdot 1;\quad L\{1\}=\dfrac{1}{p}$. Тогда согласно теореме 4.5 имеем:

$$L\{e^{-\alpha t}\}=\frac{1}{p+\alpha}.$$

Пример 4.9. Найти изображение оригинала $f(t)=e^{\alpha t}\sin wt$.

Решение. Имеем, что $L\{\sin wt\}=\dfrac{w}{p^2+w^2}$. Тогда согласно теореме 4.5 имеем:

$$L\{e^{\alpha t}\sin wt\}=\frac{w}{(p-\alpha)^2+w^2}.$$

Пример 4.10. Найти изображение функции $f(t)=e^{-\alpha t}\,\mathrm{ch}\,wt$.

Решение. Знаем, что $L\{\mathrm{ch}\,wt\}=\dfrac{p}{p^2-w^2}$. Тогда $L\{e^{-\alpha t}\cdot\mathrm{ch}\,wt\}=\dfrac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2-w^2}$.

Пример 4.11. Найти начальную функцию, изображение которой имеет вид:

$$F(p)=\frac{p+3}{p^2+2p+10}.$$

Решение. Преобразуем выражение изображения функции

$$F(p)=\frac{(p+1)+2}{(p+1)^2+9}=\frac{p+1}{(p+1)^2+9}+\frac{2\cdot\frac{3}{3}}{(p+1)^2+9}=\frac{p+1}{(p+1)^2+9}+\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{(p+1)^2+9}.$$

Тогда $f(t)=e^{-t}\cos 3t+\frac{2e^{-t}}{3}\sin 3t$.

Теорема 4.6 (запаздывания). *Рассмотрим функции* $f(t)$ *и* $f_\tau(t)$, *где*

$$f_\tau(t)=\begin{cases}0, & t<\tau\\ f(t-\tau), & t>\tau,\ \tau>0\end{cases}$$

Графики этих функций показаны на рисунке 4.1.

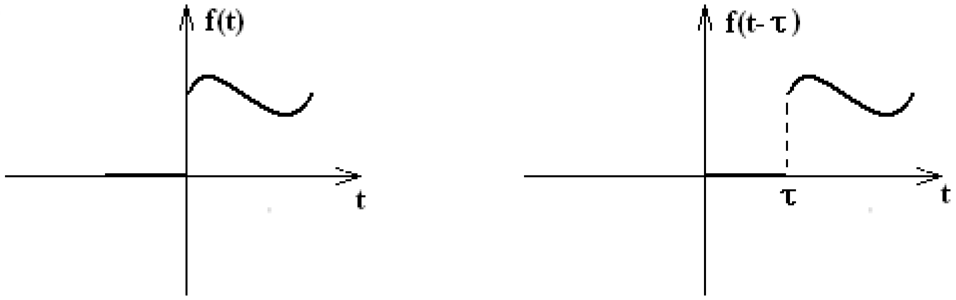


Рисунок 4.1

Тогда изображением функции $f(t\pm\tau)$ *будет* $F(p)=e^{\pm P\tau}\cdot F(p)$. *То есть,*

$$L\{f(t\pm\tau)\}=e^{\pm p\tau}\cdot F(p). \qquad (4.8)$$

Доказательство. Полагая, что $F(p)$ является изображением оригинала $f(t)$, найдем изображение функции $f_\tau(t)$. По определению изображения имеем:

$$L\{f_\tau(t)\}=\int_0^\infty e^{-pt}f_\tau(t)dt=\int_0^\infty e^{-pt}f(t-\tau)dt=\left|\begin{array}{l}\text{Обозначим}\\ z=t-\tau\\ dz=dt\\ \text{при}\, t=\tau \quad z=0\end{array}\right|=\int_0^\infty e^{-p(z+\tau)}f(z)dz=$$

$$=\int_0^\infty e^{-p\tau}\cdot e^{-pz}\cdot f(z)dz=e^{-p\tau}F(p).$$

Получили, что $L\{f_\tau(t)\}=e^{-p\tau}F(p)$.

Аналогично находится изображение функции $f_\tau(t)=\begin{cases}0, & t<-\tau\\ f(t+\tau), & t>-\tau,\end{cases}$.

То есть, $L\{f(t\pm\tau)\}=e^{\pm p\tau}F(p)$.

Следствие. Совместное применение теорем подобия и запаздывания приводит к следующему результату:

$$L\{f(\alpha t \pm \tau)\} = \frac{1}{\alpha} e^{\pm \frac{p}{\alpha}\tau} F\left(\frac{p}{\alpha}\right). \tag{4.9}$$

Теорема запаздывания дает возможность при известном изображении некоторой функции найти изображение другой функции, запаздывающей относительно первой на время τ.

Пример 4.12. Найти изображение функции $f(t) = \sin(wt + \varphi)$.

Решение. Известно, что $L\{\sin t\} = \dfrac{1}{p^2 + 1}$. Тогда согласно следствию имеем:

$$L\{\sin(wt + \varphi)\} = \frac{1}{w} \cdot e^{\frac{p}{w}\varphi} \cdot \frac{1}{\left(\frac{p}{w}\right)^2 + 1} = \frac{1}{w} \cdot e^{\frac{p}{w}\varphi} \cdot \frac{w^2}{p^2 + w^2} = \frac{w}{p^2 + w^2} \cdot e^{\frac{p}{w}\varphi}.$$

4.3 Дифференцирование и интегрирование оригиналов и изображений

Теорема 4.7 (дифференцирование оригинала). *Если* $F(p)$ *является изображением для* $f(t)$*, то* $p \cdot F(p) - f(0)$ *является изображением для* $f'(t)$*:*

$$p \cdot F(p) - f(0) \to f'(t). \tag{4.10}$$

Доказательство. На основании определения изображения можно записать

$$L\{f'(t)\} = \int_0^\infty e^{-pt} f'(t) dt. \tag{4.11}$$

Предполагаем, что все производные $f'(t), f''(t), \ldots, f^{(n)}(t)$ удовлетворяют условию

$$\left| f^{(n)}(t) \right| < M e^{S_0 t}. \tag{4.12}$$

В этом случае интеграл (4.11) и аналогичные интегралы от последующих производных существуют. Вычислим рассматриваемый интеграл путем интегрирования по частям.

$$\int_0^\infty e^{-pt} \cdot f'(t) dt = \begin{vmatrix} u = e^{-pt} & du = -pe^{-pt} \\ dv = f'(t)dt & v = f(t) \end{vmatrix} = e^{-pt} \cdot f(t)\Big|_0^\infty + p\int_0^\infty f(t) \cdot e^{-pt} dt =$$
$$= -f(0) + p \cdot F(p) = p \cdot F(p) - f(0).$$

Здесь $\lim\limits_{t \to \infty} e^{-pt} \cdot f(t) = 0$.

Получили, что $L\{f'(t)\} = p \cdot F(p) - f(0)$.

Что и требовалось доказать.

Для получения изображения $f''(t)$ нужно в формулу (4.10) вместо $F(p)$ подставить $p \cdot F(p) - f(0)$, $f'(t)$ вместо $f(t)$:

$$p\left(p\cdot F(p)-f(0)\right)-f'(0)=p^2F(p)-pf(0)-f'(0)\to f''(t).$$

Для получения изображения производной третьего порядка нужно в формулу (4.10) вместо $F(p)$ подставить $p^2F(p)-pf(0)-f'(0)$ и $f''(t)$ вместо $f(t)$:

$$p\left(p^2F(p)-pf(0)-f'(0)\right)-f''(0)=p^3F(p)-p^2f(0)-pf'(0)-f''(0)\to f'''(t).$$

Для производной *n*-го порядка имеем:

$$p^nF(p)-\left(p^{n-1}\cdot f(0)+p^{n-2}\cdot f'(0)+\ldots+pf^{(n-2)}(0)+f^{(n-2)}(0)\right)\to f^{(n)}(t). \qquad (4.13)$$

Замечание. Формула (4.13) упрощается, если $f(0)=f'(0)=\ldots=f^{(n-1)}(0)=0$:

$$L\left\{f^{(n)}(t)\right\}=p^n\cdot F(p). \qquad (4.14)$$

То есть, чтобы продифференцировать оригинал в этом случае нужно его изображение умножить на *p*.

Пример 4.13. Найти изображение для $f(t)=\operatorname{ch}wt$.

Решение. Имеем, что $\operatorname{ch}wt=\dfrac{1}{w}(\operatorname{sh}wt)'$. В свою очередь $L\{(\operatorname{sh}wt)\}=\dfrac{w}{p^2-w^2}$ и $\operatorname{sh}(0)=0$. Тогда на основании формулы (4.14) можем записать

$$L\{(\operatorname{ch}wt)\}=\frac{1}{w}\cdot\frac{w}{p^2-w^2}\cdot p=\frac{p}{p^2-w^2}.$$

Пример 4.14. Найти изображение дифференциального выражения

$y''(t)-4y'(t)+2y(t)+1$, если $y(0)=-1,\ y'(0)=2$.

Решение. Имеем $y(p)\to y(t)$. Тогда

$$L\{y'(t)\}=py(p)-y(0)=py(p)+1$$

$$L\{y''(t)\}=p^2y(p)-py(0)-y'(0)=p^2y(p)+p-2$$

Используя свойство линейности, получим:

$$\begin{aligned}L\{y''(t)-4y'(t)+2y(t)+1\}&=p^2y(p)+p-2-4py(p)-4+2y(p)+1=\\&=p^2y(p)+y(p)(2-4p)+p-5.\end{aligned}$$

Теорема 4.8 (дифференцирование изображений). *Если $F(p)$ является изображением для $f(t)$, то $F^{(n)}(p)$ является изображением для $(-1)^n\cdot t^n\cdot f(t)$:*

$$F^{(n)}(p)\to(-1)^n\cdot t^n\cdot f(t). \qquad (4.15)$$

Доказательство. По определению изображения имеем

$$F(p)=\int_0^\infty e^{-pt}\cdot f(t)dt.$$

Тогда

$$F'(p)=-\int_0^\infty t\cdot e^{-pt}\cdot f(t)dt=\int_0^\infty e^{-pt}(-t\cdot f(t))dt$$

$$F''(p)=\int_0^\infty t^2\cdot e^{-pt}\cdot f(t)dt=\int_0^\infty e^{-pt}\left(t^2\cdot f(t)\right)dt$$

…………………………………………………………

$$F^{(n)}(p)=(-1)^n\int_0^\infty t^n\cdot e^{-pt}\cdot f(t)dt=\int_0^\infty e^{-pt}\left((-1)^n\cdot f(t)\right)dt$$

Получили, что

$$F^{(n)}(p)\to(-1)^n\cdot t^n\cdot f(t).$$

Что и требовалось доказать.

Видим, что дифференцирование изображения сводится к умножению оригинала на ($-t$).

Пример 4.15. Найти изображение функции $f(t)=t\cdot\sin wt$.

Решение. Известно, что $L\{\sin wt\}=\dfrac{w}{p^2+w^2}$. Тогда

$-t\cdot\sin wt\leftarrow\dfrac{d}{dp}\left(\dfrac{w}{p^2+w^2}\right)=\dfrac{-2pw}{\left(p^2+w^2\right)^2}$. Следовательно, $t\cdot\sin wt\leftarrow\dfrac{2pw}{\left(p^2+w^2\right)^2}$.

Пример 4.16. Найти изображение для $f(t)=t^2\cdot\operatorname{sh}5t$.

Решение. Имеем, что $L\{\operatorname{sh}5t\}=\dfrac{5}{P^2-25}$. Тогда $-t\operatorname{sh}5t\leftarrow\dfrac{-10P}{\left(P^2-25\right)^2}$.

Для заданной функции

$$t^2\cdot\operatorname{sh}5t\leftarrow\left(\frac{-10P}{\left(P^2-25\right)^2}\right)'=\frac{-10\left(P^2-25\right)^2+10P\cdot2\left(P^2-25\right)\cdot2P}{\left(P^2-25\right)^4}=$$

$$=\frac{\left(P^2-25\right)\left(-10P^2+250+40P^2\right)}{\left(P^2-25\right)^4}=\frac{30P^2+250}{\left(P^2-25\right)^3}.$$

Теорема 4.9 (интегрирование оригинала). *Если* $F(p)$ *является изображением для* $f(t)$, *то*

$$L\left\{\int_0^t f(t)dt\right\}=\frac{F(p)}{p}. \tag{4.16}$$

То есть, при интегрировании дифферециала от 0 до t его изображение делится на P.

Доказательство. Обозначим: $\varphi(t)=\int_0^t f(t)dt$ и $\Phi(p)=L\{\varphi(t)\}$. Функция является оригиналом. Для нее $\varphi(0)=0$. Продифференцируем оригинал $L\{\varphi'(t)\}=p\Phi(p)$. Но $\varphi'(t)=f(t)$. Следовательно, $L\{f(t)\}=p\Phi(p)=F(p)$. Откуда $\Phi(p)=\dfrac{F(p)}{p}$, что и требовалось доказать.

Пример 4.17. Найти изображение $\int\limits_0^t \sin t dt$.

Решение. Имеем $L\{\sin t\}=\dfrac{1}{p^2+1}$. Тогда согласно (4.16):

$$L\left\{\int\limits_0^t \sin t dt\right\}=\frac{\left(\dfrac{1}{p^2+1}\right)}{p}=\frac{1}{p\left(p^2+1\right)}.$$

Пример 4.18. Найти изображение $\int\limits_0^t \left(e^{-5t}\operatorname{ch}2t+e^{8t}\sin 3t\right)dt$.

Решение. С помощью теоремы смещения найдем изображение подынтегральной функции:

$$L\left\{\int\limits_0^t \left(e^{-5t}\operatorname{ch}2t+e^{8t}\sin 3t\right)dt\right\}=\frac{p+5}{(p+5)^2-4}+\frac{3}{(p-8)^2+9}.$$

Тогда согласно (4.16) получим:

$$L\left\{\int\limits_0^t \left(e^{-5t}\operatorname{ch}2t+e^{8t}\sin 3t\right)dt\right\}=\frac{\dfrac{p+5}{(p+5)^2-4}+\dfrac{3}{(p-8)^2+9}}{p}=\frac{1}{p}\left(\frac{p+5}{(p+5)^2-4}+\frac{3}{(p-8)^2+9}\right)..$$

Теорема 4.10 (интегрирование изображения). *Если* $F(p)$ *является изображением* $f(t)$*, то* $\int\limits_P^\infty F(p)dp$ *является изображением для* $\dfrac{f(t)}{t}$*:*

$$L\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}=\int\limits_P^\infty F(p)dp. \qquad (4.17)$$

То есть, если изображение интегрируется от p до ∞, то оригинал делится на t.

Доказательство. Так как $f(t)$ – оригинал, то $\dfrac{f(t)}{t}$ тоже является оригиналом. Обозначим $L\left\{\dfrac{f(t)}{t}\right\}=\Phi(p)$. Продифференцируем изображение.

$$\Phi'(p)=L\left\{-t\cdot\frac{f(t)}{t}\right\}=L\{-f(t)\}=-F(p)$$

или

$$F(p) = -\Phi'(p). \tag{4.18}$$

Проинтегрируем равенство (4.18) вдоль любого пути, лежащего в полуплоскости

$$\int_P^\eta F(z)dz = -\int_P^\eta \Phi'(z)dz = -\Phi(z)\Big|_P^\eta = \Phi(p) - \Phi(\eta).$$

Перейдем к пределу при $\eta \to \infty$. При этом действительная часть $\operatorname{Re}\eta \to \infty$.

$$\int_P^\infty F(p)dp = \Phi(p), \text{ т.к. } \Phi(\eta) = 0 \text{ при } \operatorname{Re}\eta \to \infty.$$

Итак, $\int_P^\infty F(p)dp = L\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}$, что и требовалось доказать.

Пример 4.19. Найти изображение для $f(t) = \frac{\sin t}{t}$.

Решение. Так как $L\{\sin t\} = \frac{1}{P^2+1}$, то согласно (4.17):

$$L\left\{\frac{\sin t}{t}\right\} = \int_p^\infty \frac{dp}{p^2+1} = \operatorname{arctg} p\Big|_p^\infty = \operatorname{arctg}\infty - \operatorname{arctg} p = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} p.$$

Пример 4.20. Найти изображение $f(t) = \frac{1-\cos 2t}{t} \cdot e^{-5t}$.

Решение. Функция $f(t)$ является оригиналом, так как она непрерывна при всех $t>0$, а $\lim\limits_{t\to 0+} f(t)$ – конечен. Найдем изображение для $1-\cos 2t$: $L\{1-\cos 2t\} = \frac{1}{p} - \frac{p}{p^2+4}$.

Тогда по (2.18)

$$L\left\{\frac{1-\cos 2t}{t}\right\} = \int_p^\infty \left(\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2+4}\right)dp = \lim_{\operatorname{Re}\eta\to\infty} \int_P^\eta \left(\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2+4}\right)dp = \lim_{\operatorname{Re}\eta\to\infty}\left(\ln p - \frac{1}{2}\ln\left(p^2+4\right)\right)\Bigg|_p^\eta =$$

$$= \lim_{\operatorname{Re}\eta\to\infty} \ln\frac{p}{\sqrt{p^2+4}}\Bigg|_p^\eta = \lim_{\operatorname{Re}\eta\to\infty}\left(\ln\frac{\eta}{\sqrt{\eta^2+4}} - \ln\frac{p}{\sqrt{p^2+4}}\right) = \ln 1 - \ln\frac{p}{\sqrt{p^2+4}} = \ln\frac{\sqrt{p^2+4}}{p}.$$

Тогда $L\left\{\frac{1-\cos 2t}{t}\cdot e^{-5t}\right\} = \ln\frac{\sqrt{(p+5)^2+4}}{p+5} = \ln\frac{\sqrt{p^2+10p+20}}{p+5}$.

4.4 Свертка функций. Теорема Бореля. Интегралы Дюамеля

Сверткой двух функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$ называется функция

$$F(t) = \int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau. \tag{4.19}$$

Интеграл, определяющий свертку, не меняет своего значения от перестановки функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$. Поэтому свертка двух функций симметрична относительно свертываемых функций.

При решении дифференциальных уравнений операционным методом бывает полезна следующая теорема.

Теорема 4.11 (теорема свертывания Бореля). *Если* $F_1(p)$ *и* $F_2(p)$ *есть изображения функций* $f_1(t)$ и $f_2(t)$, *т. е.* $F_1(p)\to f_1(t),\quad F_2(p)\to f_2(t)$, то $F_1(p)\cdot F_2(p)$ *есть изображение функции* $\int\limits_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$, т.е.

$$F_1(p)F_2(p)\to\int\limits_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau. \tag{4.20}$$

Доказательство. Применим к функции $\int\limits_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$ оператор Лапласа

$$L\left\{\int\limits_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau\right\}=\int\limits_0^\infty e^{-pt}\left[\int\limits_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau\right]dt. \tag{*}$$

Справа – двухкратный интеграл по области интегрирования: $\tau=0,\ \tau=t$ в системе координат (τ,t). Изменив порядок интегрированияв нем, получим

$$(*)=\int\limits_\tau^\infty f_1(\tau)\left[\int\limits_0^t e^{-pt}f_2(t-\tau)dt\right]d\tau=\left|\begin{matrix}\text{Пусть}\\ t-\tau=z\\ \Rightarrow t=z+\tau\end{matrix}\right|=$$

Тогда

$$\int\limits_\tau^\infty e^{-pt}f_2(t-\tau)dt=\int\limits_0^\infty e^{-p(z+\tau)}f_2(z)dz=e^{-p\tau}\int\limits_0^\infty e^{-pz}f_2(z)dz=e^{-p\tau}F_2(p)$$

Тогда * имеет вид:

$$(*)\qquad \int\limits_0^\infty f_1(\tau)e^{-p\tau}F_2(p)d\tau=F_2(p)\int\limits_0^\infty e^{-p\tau}f_1(\tau)d\tau=F_2(p)F_1(p).$$

$$\int\limits_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau\leftarrow F_1(p)F_2(p).$$

Замечание 1. Выражение $\int\limits_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$ называется сверткой двух функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$. Операция получения свертки называется свертыванием двух функций, при этом

$$\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau = \int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau,$$

т.е. свертка функций обладает переместительными свойствами.

Замечание 2. Если $f_1(t)= f(t),\ f_2(t)=1$, то $f_1(t)\to F(p),\ f_2(t)\to \frac{1}{p}$ и теорема свертывания для этих функций запишется так: $\int_0^t f_1(\tau)d\tau \leftarrow \frac{1}{p}F(p)$.

Таким образом, легко находится изображение интеграла от данной функции.

Пример 4.20. Пользуясь теоремой свертывания, найти оригинал функции $F(p)=\dfrac{p}{p^4-1}$.

Решение. Имеем: $F(p)=\dfrac{p}{p^2-1}\cdot\dfrac{1}{p^2+1}$. Так как $\dfrac{p}{p^2-1}\to \operatorname{ch} t,\ \dfrac{1}{p^2+1}\to \sin t$, то по теореме свертывания

$$\frac{p}{p^4-1}=\frac{p}{p^2-1}\cdot\frac{1}{p^2+1}\to\int_0^t \operatorname{ch}(t-\tau)\sin\tau d\tau = -\frac{1}{2}\left[\operatorname{sh}(t-\tau)\sin\tau\cdot\operatorname{ch}(t-\tau)\cos\tau\right]\Big|_0^t=\frac{1}{2}(\operatorname{ch} t-\cos t).$$

Пример 4.21. Найти оригинал функции, если $F(p)=\dfrac{1}{p^2+1}F_1(p)$, где $F_1(t)\to f(t)$.

Решение. Имеем: $\dfrac{1}{p^2+1}\to \sin t,\ F_1(p)\to f(t)$. Обозначив $\dfrac{1}{p^2+1}=F_2(p)$ и $F(p)=F_1(p)$, получим:

$$F_1(p)F_2(p)\to\int_0^\tau f(\tau)\sin(t-\tau)d\tau$$ – оригинал функции.

$$F_1(p)F_2(p)\div\int_0^t f_2(\tau)f_1(t-\tau)d\tau=\varphi(t)$$

Поскольку функция равна 0 при $t=0$, то пользуясь правилом дифференцирования $\varphi(t)=\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$ оригинала, получаем следующую запись теоремы Бореля:

$$pF_1(p)F_2(p)\div\frac{d}{dt}\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau.$$

Интеграл в правой части этой формулы называется *интегралом Дюамеля*. Если выполнить дифференцирование в интеграле Дюамеля, то теорема свертки примет вид:

$$pF_1(p)F_2(p) \to f_1(t)f_2(0) + \int\limits_0^t f_1(\tau)f_2{}'(t-\tau)d\tau . \qquad (4.21)$$

Или, учитывая равноправность функции $F_1(p)$ и $F_2(p)$, имеем:

$$pF_1(p)F_2(p) \to f_2(t)f_1(0) + \int\limits_0^t f_2(\tau)f_1{}'(t-\tau)d\tau . \qquad (4.22)$$

Примененное здесь правило дифференцирования интеграла по переменной, входящей в качестве параметра в подынтегральную функцию и в верхний и предел интегрирования, определяется формулой

$$\left(\int\limits_a^t f(x,t)dx\right)' = f(t,t) + \int\limits_a^t f_t'(x,t)dx .$$

4.5 Обратное преобразование Лапласа

Если $F(p) = \int\limits_0^\infty e^{-pt} f(t)dt$ – *прямое преобразование Лапласа*, то *обратное преобразование Лапласа* – возможность получить функцию-оригинал через известную функцию-изображение:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{S-iw}^{S+iw} F(p)e^{pt}dp = \frac{1}{2\pi i}\lim_{w\to\infty}\int\limits_{S-iw}^{S+iw} F(p)e^{pt}dp , \qquad (4.23)$$

где S – некоторая константа.

Пользоваться формулой для обратного преобразования можно при определенном виде функции $F(p)$, либо для численного нахождения функции-оригинала по известному изображению.

Для восстановления оригинала $f(t)$ по заданному изображению $F(p)$ в простейших случаях используется таблица изображений.

Дополнительное применение свойств изображений позволяет существенно расширить возможности восстановления оригинала по заданному изображению.

Теорема 4.12 (Римана-Меллина). *Пусть функция $f(t)$ – ориганал, а $F(p)$ – ее изображение. Тогда в любой точке t непрерывности оригинала $f(t)$ справедлива формула Римана-Меллина*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{S-i\infty}^{S+i\infty} F(p)e^{pt}dp , \qquad (4.24)$$

которая является обратной к формуле $F(p)=\int\limits_0^\infty e^{-pt}f(t)$ *и называется обратным преобразованием Лапласа.*

В точке t_0, являющейся точкой разрыва 1-го рода функции $f(t)$, правая часть формулы Римана-Меллина равна $\frac{1}{2}\left(f(t_0-0)+f(t_0+0)\right)$.

Непосредственное применение формулы обращения для восстановления оригинала $f(t)$ по изображению $F(p)$ затруднительно. Для нахождения оригинала пользуются теоремами разложения.

Теорема 4.13 (1-я теорема разложения). *Если функция* $F(p)$ *в окрестности точки* $p=\infty$ *может быть представлена в ряд Лорана*

$$F(p)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{C_k}{p^{k+1}}=\frac{C_0}{p}+\frac{C_1}{p^2}+\frac{C_2}{p^3}+\ldots,$$

то функция $f(t)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}C_k\frac{t^k}{k!}=C_0+C_1t+C_2\frac{t^2}{2!}+\ldots$ *является оригиналом, имеющим изображение* $F(p)$

$$F(p)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{C_k}{p^{k+1}}\to\sum_{k=0}^{\infty}C_k\frac{t^k}{k!}=f(t). \qquad (4.25)$$

Теорема 4.14 (2-я теорема разложения). *Если* $F(p)=\frac{P(p)}{Q(p)}$ *– рациональная правильная несократимая дробь,* $p_1,p_2,\ldots p_n$ *– простые или кратные нули знаменателя* $Q(p)$*, то оригинал, соответствующий изображению* $F(p)$*, определяется формулой*

$$F(p)=\frac{P(p)}{Q(p)}\to\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{p=p_k}\left[\frac{P(p)}{Q(p)}e^{p_kt}\right]=f(t). \qquad (4.26)$$

Теорема 4.15. *Пусть* $F(p)$ *– функция комплексной переменной p, обладающая свойствами:*

1. *Функция* $F(p)$*, первоначально заданная в полуплоскости* $\mathrm{Re}p=u>S_0$ $(S_0-\mathrm{const})$ *и удовлетворяющая в ней условиям:*

а) $F(p)$ *– аналитическая функция в полуплоскости* $\mathrm{Re}p=u>S_0$;

б) *в области* $\mathrm{Re}p\ge u>S_0$ *функция* $F(p)$ *стремится к нулю при* $|p|\to\infty$ *равномерно* *относительно* $\arg(p-S_0)$*;*

***в)** для всех* $\mathrm{Re}p=u,\ u>S_0$ *сходится несобственный интеграл* $\int\limits_{u-i\infty}^{u+i\infty}|F(p)|dp$ *;*

***г)** может быть аналитически продолжена на всю комплексную плоскость* C_p *.*

***2.** Аналитическое продолжение функции* $F(p)$ *в полуплоскость* $\mathrm{Re}p\le S_0$ *удовлетворяет условиям леммы Жордана.*

Тогда имеет место следующее соотношение

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{u-i\infty}^{u+i\infty}F(p)e^{pt}dp=\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{p=p_k}F(p)e^{pkt},$$

где t>0 *и* $p=p_k$ *– особые точки (полюсы, существенно особые точки) функции, являющейся аналитическим продолжением* $F(p)$ *при* $\mathrm{Re}p\le S_0$*,* $k=\overline{1,n}$.

Пример 4.22. Найти оригинал $\bar{f}(p)=\dfrac{1}{p\left(1+p^5\right)}$, используя первую теорему разложения.

Решение. $\bar{f}(p)=\dfrac{1}{p\left(1+p^5\right)}=\dfrac{1}{p^6}\cdot\dfrac{1}{\left(1+1/p^5\right)}=\dfrac{1}{p^6}-\dfrac{1}{p^{11}}+\dfrac{1}{p^{16}}-\ldots$.

Этот ряд сходится при $|p|>1$. Отсюда находим $f(t)=\dfrac{t^5}{5!}-\dfrac{t^{10}}{10!}+\dfrac{t^{15}}{15!}-\ldots$.

4.6 Применение преобразования Лапласа к решению дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений

Теорема 4.16. *Если* $F(p)\to f(t)$, то

$$pF(p)-f(0)\to f'(t). \tag{4.27}$$

Доказательство.

$$f(t)=\int\limits_0^\infty e^{-pt}f(t)dt,$$

$$f'(t)=\int\limits_0^\infty e^{-pt}f'(t)dt=e^{-pt}f(t)\Big|_0^\infty+p\int\limits_0^\infty e^{-pt}f(t)dt,$$

так как $\lim\limits_{t\to\infty}e^{-pt}f(t)=0$, а $\int\limits_0^\infty e^{-pt}f(t)dt=F(p)$.

Тогда $L\{f'(t)\}=pF(p)-f(0)$.

Рассмотрим изображение производных любого порядка. Подставляя в (4.27) вместо

$F(p)$ выражение $pF(p)-f(0)$, а вместо $f(t)$ – $f'(t)$, получим

$$p[pF(p)-f(0)]-f'(0)\to f''(t).$$

Или, раскрывая скобки:

$$p^2F(p)-pf(0)-f'(0)\to f(t).$$

Аналогичным образом получаем изображение любого порядка для функции $f(t)$, предполагая, что все производные $f(t)$ удовлетворяют условию существования оператора Лапласа.

Применяя к дифференциальному уравнению оператор Лапласа, мы можем свести решение дифференциального уравнения к поиску образа решения, что существенно упрощает получение решения как дифференциального уравнения, так и системы дифференциальных уравнений.

Пример 4.23. Рещить дифференциальное уравнение $y''-2y'-3y=e^{4t}$, если $y(0)=y'(0)=0$.

Решение. Пусть $\bar{y}(p)\to y(t)$;

$$p\bar{y}(p)-p(0)=p\bar{y}(p)\to y'(t);\ p(\bar{y}(p))-y'(0)=p\bar{y}(p)\to y''(t);\ \frac{1}{p-4}\to e^{4t}.$$

Переходя к изображению, уравнение запишется в виде

$$p'\bar{y}(p)-2p\bar{y}(p)-3\bar{y}(p)=\frac{1}{p-4};\quad \bar{y}(p)\left(p^2-2p-3\right)=\frac{1}{p-4};$$

$$\bar{y}(p)=\frac{1}{(p-4)\left(p^2-2p-3\right)}=\frac{1}{(p-4)(p-3)(p+1)}.$$

Разложим эту дробь на простейшие:

$$\frac{1}{(p-4)(p-3)(p+1)}=\frac{A}{p-4}+\frac{B}{p-3}+\frac{C}{p+1}=$$
$$=\frac{A(p-3)(p+1)+B(p-4)(p+1)+C(p-4)(p-3)}{(p-4)(p-3)(p+1)}=$$
$$=\frac{A\left(p^2-2p-3\right)+B\left(p^2-3p-4\right)+C\left(p^2-7p+12\right)}{(p-4)(p-3)(p+1)}.$$

Используя метод неопреленных коэффициентов, получим:

$$\begin{array}{l} p^2 \\ p \\ p^0 \end{array}\begin{cases} A+B+C=0 \\ -2A-3B-7C=0 \\ -3A-4B+12C=1 \end{cases}\begin{cases} C=-A-B \\ -2A-3B+7A+7B=0 \\ -3A-4B-12A-12B=1 \end{cases}\begin{cases} C=-A-B \\ 5A+4B=0/3 \\ -15A-16B=1 \end{cases}$$

$$+\begin{cases} 15A+12B=0 \\ -15A-16B=+1 \end{cases}\quad \begin{array}{l} -4B=1;\quad B=-1/4; \\ A=\dfrac{-4B}{5}=\dfrac{1}{5}; \end{array}\qquad C=-\frac{1}{5}+\frac{1}{4}=\frac{1}{20}.$$

Таким образом, $\bar{y}(p)=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{p-4}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{p-3}+\frac{1}{20}\cdot\frac{1}{p+1}$. Оригиналом этого изображения, используя таблицу изображений, будет

$$y(t)=\frac{1}{5}e^{4t}-\frac{1}{4}e^{3t}+\frac{1}{20}e^{-t}.$$

Пример 4.24. Рещить уравнение $y''+y'-2y=e^{-2t}$, если $y(0)=0;\ y'(0)=-1$.

Решение. $\bar{y}(p)\to y(t)$

$$p\bar{y}(p)-y(0)=p\bar{y}(p)-0=p\bar{y}(p)\to y'(t)$$
$$p(\bar{y}(p))-y'0=p\bar{y}(p)-1\to y''(t)$$
$$\frac{1}{p+2}\to e^{-2t}$$

Переходя к изображению, получим

$$p^2\bar{y}(p)+1+p\bar{y}(p)-2\bar{y}(p)=\frac{1}{p+2};$$
$$\bar{y}(p)\left(p^2+p-2\right)=\frac{1}{p+2}-1=\frac{1-p-2}{p+2}=\frac{-p-1}{p+2};$$
$$\bar{y}(p)=\frac{-(p+1)}{(p+2)\left(p^2+p-2\right)}=\frac{-(p+1)}{(p+2)(p+2)(p-1)}=\frac{-p-1}{(p+2)^2(p-1)};$$
$$\frac{-p-1}{(p+2)^2(p-1)}=\frac{A}{p+2}+\frac{B}{(p+2)^2}+\frac{C}{p-1}=\frac{A\left(p^2+p-2\right)+B(p-1)+C\left(p^2+4p+4\right)}{(p+2)^2(p-1)};$$

$$\begin{array}{c} p^2 \\ p \\ p^0 \end{array}\left\{\begin{array}{c} A+C=0 \\ A+B+4C=-1 \\ -2A-B+4C=-1 \end{array}\right.\quad \left\{\begin{array}{l} C=-A \\ A+B-4A=-1 \\ -2A-B-4A=-1 \end{array}\right.\quad \left\{\begin{array}{l} C=-A \\ -3A+B=-1 \\ -6A-B=-1 \end{array}\right.$$

$$-9A=-2;\quad A=2/9;\quad B=-1+3A=-1+\frac{6}{9}=-1+\frac{2}{3}=-\frac{1}{3};\quad C=-2/9.$$

Следовательно,

$$\bar{y}(p)=\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{p-2}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(p+2)^2}-\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{p-1}\div y(t)=\frac{2}{9}\cdot e^{-2t}-\frac{1}{3}t\cdot e^{-2t}-\frac{2}{9}\cdot e^{t}.$$

Пример 4.25. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x+2y; \\ \dfrac{dy}{dt}=2x+y+1;\quad x(0)=0;\quad y(0)=5.\end{cases}$$

Решение. $\bar{x}(p)\to x(t);\quad p\bar{x}(p)-x'(t);\quad \bar{y}(p)-y(t);\quad p\bar{y}(p)-5\to y'(t);\quad \frac{1}{p}\to 1;$

$$\begin{cases} p\overline{x}(p) = \overline{x}(p) + 2\overline{y}(p); \\ p\overline{y}(p) - 5 = 2\overline{x}(p) + \overline{y}(p) + \dfrac{1}{p}. \end{cases}$$

Решив систему относительно $\overline{x}(p)$ и $\overline{y}(p)$, имеем:

$$\overline{x}(p) = \frac{10p+2}{p(p+1)(p-3)}; \quad \overline{y}(p) = \frac{5p^2-4p-1}{p(p+1)(p-3)}.$$

Длоя определения *x* воспользуемся второй теоремой разложения (4.26).

$P(p) = 10p + 2;$

$Q(p) = p^3 - 2p^2 - 3p; \quad Q'(p) = 3p^2 - 4p - 3; \quad p_1 = 0, \quad p_2 = -1, \quad p_3 = 3;$

$$\frac{P(p_1)}{Q'(p_1)} = \frac{P(0)}{Q'(0)} = -\frac{2}{3}; \quad \frac{P(p_2)}{Q'(p_2)} = \frac{P(-1)}{Q'(-1)} = 2; \quad \frac{P(p_3)}{Q'(p_3)} = \frac{P(3)}{Q'(3)} = \frac{8}{3}.$$

Таким образом, $x = -\frac{2}{3} - 2e^{-t} + \frac{8}{3}e^{3t}$.

Аналогично: $y = \frac{1}{3} + 2e^{-t} + \frac{8}{3}e^{3t}$.

Или, коэффициенты разложения можно найти, используя метод неопределенных коэффициентов.

Белорусский национальный технический университет

Факультет информационных технологий и робототехники

Кафедра высшей математики № 1

ПРАКТИКУМ
ПО УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ МАТЕМАТИКА. ЧАСТЬ 3

Минск БНТУ 2015

ОГЛАВЛЕНИЕ

Занятие 1.

Числовые ряды. Основные определения.

Признаки сходимости рядов с положительными членами

Аудиторные задания

1.1 Установить, сходятся ли указанные ряды, исходя из определения суммы ряда:

1) $1+\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\cdots+\frac{8}{27}+\cdots$; **2)** $2+6+10+14+18+\cdots$; **3)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+3)}$.

1.2 Установить, выполняется ли необходимый признак сходимости ряда:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{2n+2}$; **2)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{n+1}{n+2}}$; **3)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{5}{n}\right)^{n}$; **4)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{(n+1)^3}$; **5)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\cos\frac{1}{n}$; **6)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+2}{n+1}$.

1.3 Установить, сходятся ли ряды, используя признаки сравнения:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n+1}{2^n}$; **2)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+6}$; **3)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+5^n}$; **4)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^k}{1+2^{2k}}$; **5)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^2+1}$; **6)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n^2+1}}$.

1.4 Установить, сходятся ли ряды, используя признаки Даламбера и Коши (радикальный или интегральный):

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{(n+1)!}$; **2)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2}$; **3)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$; **4)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$;

5) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^n}$; **6)** $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$; **7)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2}$; **8)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+2n+2}$.

Домашние задания

1.5 Установить, сходятся ли указанные ряды, исходя из определения суммы ряда:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{n-1}}$; **2)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}$.

1.6 Установить, сходятся ли указанные ряды:

1) $\sum\frac{10n+1}{10n+5}$; **2)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n^2+n+1}$; **3)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n+n}$; **4)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{7^n+1}{5^n}$;

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\arcsin\frac{1}{\sqrt{n}}$; **6)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}tg\frac{1}{n\sqrt{n}}$; **7)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+4)!}$; **8)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5n+6}{3n-4}\right)^{n}$;

9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^2 n}{n}$; **10)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n\cdot 4^n}$; **11)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n!}$; **12)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{2}{5}\right)^{n}$.

Ответы: 1.1 1) Сходится; **2)** расходится; **3) с**ходится.

1.2 1) Нет, ряд расходится; **2)** нет, ряд расходится; **3)** нет, ряд расходится;

4) да, выполняется; **5)** нет, ряд расходится; **6)** нет, ряд расходится.

1.3 1) Расходится; **2**) сходится; **3)** сходится; **4)** сходится; **5)** расходится; **6**) сходится.

1.4 1) Сходится; **2)** расходится; **3)** расходится; **4)** расходится; **5)** сходится; **6)** расходится;

7) сходится; **8)** сходится.

1.5 1) Сходится; **2)** сходится.

1.6 1) Расходится; **2)** расходится; **3)** сходится; **4)** расходится; **5)** расходится; **6)** сходится;

7) сходится; **8)** сходится; **9)** расходится; **10)** сходится; **11)** сходится; **12)** сходится.

Занятие 2.

Знакопеременные и знакочередующиеся ряды.

Признак Лейбница. Абсолютная и условная сходимость

Аудиторные задания

2.1 Исследовать на абсолютную и условную сходимость следующие ряды:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(3n-1)!}$; **2)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n^2-1}{5+n^2}$; **3)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(3n+1)}{n(n+2)}$; **4)** $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n\ln^2 n}$;

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$; **6)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{3n}{3n+1}\right)^n$; **7)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+3^n}$; **8)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$;

9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos na}{n!}$; **10)** $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln n}$.

Домашние задания

2.2 Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряды:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^2}{2^n}$; **2)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{10n+1}{10n-1}\right)$; **3)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(6n-5)}{10^n}$; **4)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n}$;

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{1}{n^2}$; **6)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\ln(n+1)}$; **7)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{4n}{5n+3}\right)^n$.

Ответы: 2.1 1) Сходится абсолютно; **2)** расходится; **3)** сходится условно; **4)** сходится абсолютно; **5)** сходится условно; **6)** расходится; **7)** сходится абсолютно; **8)** сходится условно; **9)** сходится абсолютно; **10)** сходится условно.

2.2 1) Сходится абсолютно; **2)** расходится; **3)** сходится абсолютно; **4)** сходится условно; **5)** сходится абсолютно; **6)** сходится условно; **7)** сходится абсолютно.

Занятие 3.

Функциональные ряды

Аудиторные задания

3.1 Найти область сходимости ряда:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{2x-3}{4x+5}\right)^n$; **2)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)x^{2n-1}}$; **3)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot 2^{nx}$; **4)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$;

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot 3^n(x-5)^n}$; **6)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$; **7)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 3n^2 \cdot x^{n^2}$; **8)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{n\cdot 9^n}$;

9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{x}{x+1}\right)^n$; **10)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+x^{2n}}$; **11)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n e^{-nx}$; **12)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}$;

13) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot \sin\frac{x}{3^n}$.

3.2 Можно ли почленно интегрировать ряд в области его сходимости:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2+n^2}$; **2)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{3^n}$.

3.3 Можно ли почленно дифференцировать ряд в области его сходимости:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2+n^2}$; **2)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{3^n}$.

Домашние задания

3.4 Найти область сходимости ряда:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$; **2)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\cdot e^{nx}$; **3)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n\cdot x^n}{n^3+x^{2n}}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n+3}}{(2n+1)8^{n+1}}$; **5)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 8^n \cdot x^{3n}\,\mathrm{arctg}\frac{x}{n}$; **6)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 x}$;

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}\cdot x^n}$; **8)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{100}\cdot\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^n$; **9)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \sin^n x}{n^2}$.

3.5 Можно ли почленно интегрировать ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2+n\sqrt{n}}$.

3.6 Можно ли почленно дифференцировать ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^7}$.

Ответы: 3.1 1) $\left(-\infty; -\frac{5}{4}\right)\cup\left(-\frac{5}{4}; +\infty\right)$; **2)** $(-\infty; -1)\cup(1; +\infty)$; **3)** $(-\infty; 0)$; **4)** $(0; +\infty)$;

5) $\left(-\infty; 4\frac{2}{3}\right)\cup\left(5\frac{1}{3}; +\infty\right)$; **6)** $(-\infty; -1)\cup(1; +\infty)$; **7)** $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$; **8)** $-2; 4$;

9) $\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$; **10)** $(-\infty; -1)\cup(1; +\infty)$; **11)** $(0; +\infty)$; **12)** $(-\infty; -1)\cup(-1; 1)\cup(1; +\infty)$;

13) $(-\infty; +\infty)$.

3.2 1) Да; **2)** да. **3.3 1)** Да; **2)** да.

3.4 1) (1; +∞); **2)** (–∞; 0); **3)** (–∞; +∞); **4)** [–2; 2); **5)** $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$; **6)** (0; +∞);

7) $(-\infty; -1)\cup(1; +\infty)$; **8)** $(-\infty; 0)$; **9)** $|x-\pi k|\le\frac{\pi}{6}, \quad k\in z$. **3.5** Да. **3.6** Да.

Занятие 4.

Степенные ряды

Аудиторные задания

4.1 Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n \quad |x|<1$.

4.2 Найти область сходимости степенного ряда:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}(x+1)^n$; **2)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}(x+4)^n$; **3)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}(x-1)^n$; **4)** $\sum_{n=1}^{\infty}(nx)^n$; **5)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n!}x^n$;

6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^{2n}$; **7)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n-3)8^n}x^{2n}$; **8)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n+3^n}x^n$; **9)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}\left(\frac{x+1}{2}\right)^n$; **10)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}x^n$.

4.3 Найти сумму ряда:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{a^n}x^{n-1}$, если $|x|<a$; **2)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)a^n}$, если $-a\le x<a$.

Домашние задания

4.4 Найти область сходимости степенного ряда:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\cdot x^n$; **2)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n(x+2)^n}{\sqrt{n}}$; **3)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n}+2^n}$; **4)** $\sum_{n=1}^{\infty}n5^n\cdot(x-3)^n$;

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2}{n!}(x+2)^n$; **6)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n\sqrt{n+1}}$; **7)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}\cdot\left(\frac{x-1}{2}\right)^n$; **8)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{100^n(x+2)^n}{n!}$;

9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^{n^2}\cdot(x+2)^n$; **10)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\cdot 3^n\cdot x^n$.

4.5 Почленно дифференцируя или интегрируя данный степенной ряд, найти его сумму.

Указание. В некоторых примерах сумму ряда следует домножить или разделить на x, x^2 и т.д.

1) $\frac{1\cdot 2}{100}+\frac{2\cdot 3}{1000}+\frac{3\cdot 4}{10000}+\frac{4\cdot 5}{100000}+\cdots,\quad |x|<10$;

2) $x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\cdots,\quad |x|<1$; **3)** $\frac{x^2}{1\cdot 2}-\frac{x^3}{2\cdot 3}+\frac{x^4}{3\cdot 4}-\frac{x^5}{4\cdot 5}+\cdots,\quad |x|<1$;

4) $\frac{1}{5}+\frac{2x}{5^2}+\frac{3x^2}{5^3}+\frac{4x^3}{5^4}+\cdots,\quad |x|<5$; **5)** $x+\frac{x^2}{2\cdot 2}+\frac{x^3}{3\cdot 2^2}+\frac{x^4}{4\cdot 2^3}+...,\quad |x|<2$.

Ответы: 4.1 $S(x)=\frac{1}{x+1}$. **4.2 1)** $-\infty<x<\infty$; **2)** $3<x<5$; **3)** $1<x<3$; **4)** $x=0$; **5)** расходится; **6)** $-1<x<1$; **7)** $-2<x<2$; **8)** $-3<x<3$; **9)** $-1<x<3$; **10)** $-1\le x\le 1$. **4.3 1)** $\frac{a}{(a-x)^2}$; **2)** $\frac{a\ln a}{(a-x)}-x$. **4.4 1)** $\left(-\frac{1}{e};\frac{1}{e}\right)$; **2)** $(-2{,}5;-1{,}5]$; **3)** $(-2;2)$; **4)** $(2{,}8;3{,}2)$; **5)** $x=-2$; **6)** $[1;3]$; **7)** $(-1;3)$; **8)** $(-\infty;+\infty)$; **9)** $(-\infty;+\infty)$; **10)** $\left(-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$. **4.5 1)** $\frac{20}{(10-x)^3}$; **2)** $-\ln(1-x)$; **3)** $(x+1)\ln(x+1)-x$; **4)** $\frac{5}{(5-x)^2}$; **5)** $2\ln\frac{2}{2-x}$.

Занятие 5.

Ряды Фурье

Аудиторные задания

5.1 Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)$ на интервале $(-\pi,\pi)$:

1) $f(x)=\begin{cases}-x, & -\pi<x\le 0\\ 2x, & 0<x<\pi\end{cases}$; **2)** $f(x)=\sin\frac{x}{2}$; **3)** $f(x)=|x|$; **4)** $f(x)=\pi+x$.

5.2 Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)$ на интервале $(0,\pi)$:

1) по косинусам, если $f(x)=\begin{cases}1, & 0<x\le 1\\ 0, & 1<x<\pi\end{cases}$; **2)** по синусам, если $f(x)=\cos\frac{x}{\pi}$;

3) по косинусам, если $f(x)=\begin{cases}1-2x, & 0<x\le\dfrac{1}{2}\\ 0, & \dfrac{1}{2}<x<\pi\end{cases}.$

5.3 Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)$ на интервале $(-l,l)$:

1) $f(x)=\begin{cases}1, & -1<x\le 0\\ x, & 0<x<1\end{cases}$; **2)** $f(x)=e^x$, $l=\dfrac{1}{2}$; **3)** $f(x)=\begin{cases}-1, & -1<x\le 0\\ 1, & 0<x<1\end{cases}$.

5.4 Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)$, заданную на интервале $(0,l)$:

1) по косинусам, если $f(x)=1-x$, $l=1$; **2)** по косинусам, если $f(x)=x+x^2$, $l=1$;

3) по синусам, если $f(x)=1+x$, $l=2$; **4)** по синусам, если $f(x)=x^2$, $l=1$.

Домашние задания

5.5 Разложить в ряд Фурье функцию f(x) на интервале $(-\pi,\pi)$:

1) $f(x)=\begin{cases}5x, & -\pi<x\le 0\\ -x, & 0<x<\pi\end{cases}$; **2)** $f(x)=\begin{cases}-3, & -\pi<x\le 0\\ 1, & 0<x<\pi\end{cases}$; **3)** $f(x)=e^{-x/2}$.

5.6 Разложить в ряд Фурье функцию f(x) на интервале $(0,\pi)$:

1) по косинусам, если $f(x)=\begin{cases}1-x, & 0<x<1\\ 0, & 1\le x<\pi\end{cases}$; **2)** по синусам, если $f(x)=\cos\pi x$;

3) по синусам, если $f(x)=\begin{cases}1, & 0<x<\pi/2\\ 0, & \pi/2<x<\pi\end{cases}.$

5.7 Разложить в ряд Фурье функцию f(x) на интервале $(-l,l)$:

1) $f(x)=\begin{cases}0, & -3<x<0\\ x, & 0<x<3,\end{cases}$ $l=3$; **2)** $f(x)=e^{-x}$, $l=1$; **3)** $f(x)=|x|$, $l=2$.

5.8 Разложить в ряд Фурье функцию f(x), на интервале $(0,l)$:

1) по косинусам, если $f(x)=2+3x$, $l=3$; **2)** по синусам, если $f(x)=x$, $l=3$;

3) по синусам, если $f(x)=x-\dfrac{x^2}{2}$, $l=2$.

Ответы: **5.1 1)** $\dfrac{3}{4}\pi-\dfrac{6}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos(2n-1)x}{2n-1}+\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}\sin nx}{n}$; **2)** $\dfrac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{n\sin nx}{4n^2-1}$;

3) $\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}$; **4)** $\pi+2\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$. **5.2 1)** $\dfrac{2}{\pi}\left(\dfrac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin n}{n}\cos nx\right)$;

2) $2\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{1-(n\pi)^2}\left((-1)^n\cos 1-1\right)\sin nx$ **; 3)** $\frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{2}+16\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin {}^{n}\!/\!_{4}}{n}\right)^2\cos nx\right)$**.**

5.3 1) $\frac{3}{4}-\frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(\pi(2n+1)x)}{(2n-1)^2}-\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(\pi nx)}{n}$**;**

2) $2Sh\frac{1}{2}\left(1+4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1/2(\cos(2\pi nx)-\pi n\sin(2\pi nx))}{1+(2\pi n)^2}\right)$**;**

3) $\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin((2n+1)\pi x)$**. 5.4 1)** $\frac{1}{2}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)\pi x}{(2n+1)^2}$ **; 2)** $\frac{5}{6}+\frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3(-1)^n-1}{n^2}\cos n\pi x$ **;**

3) $\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-3(-1)^n}{n}\sin\frac{n\pi x}{2}$ **; 4)** $\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{2}{(\pi n)^2}\left((-1)^n-1\right)-(-1)^n\right)\sin n\pi x$**.**

5.5 1) $-\frac{3}{2}\pi+\frac{12}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{2n+1}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\sin nx}{n}$ **; 2)** $-1+\frac{8}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}$ **;**

3) $\frac{2}{\pi}\mathrm{sh}\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4n^2+1}(2\cos nx+4n\sin nx)\right)$**.**

5.6 1) $\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2}+4\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin n/2}{n}\right)^2\cos nx\right)$**; 2)** $\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\pi^2-n^2}\left((-1)^n\cos\pi^2-1\right)\sin nx$**;**

3) $\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos\frac{n\pi}{2}}{n}\sin nx$**.**

5.7 1) $\frac{3}{4}-\frac{6}{\pi^2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\cos\frac{(2n+1)\pi x}{3}-\frac{3}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin\frac{n\pi x}{3}$**;**

2) $2\,\mathrm{sh}\,1\left(\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos n\pi x+n\pi\sin n\pi x}{1+(\pi n)^2}\right)$**; 3)** $1-\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\cos\frac{(2n+1)\pi x}{2}$**.**

5.8 1) $\frac{13}{2}-\frac{36}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\cos\frac{(2n+1)\pi x}{3}$**; 2)** $\frac{6}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi x}{3}$**;**

3) $\frac{16}{\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^3}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2}$**.**

Занятие 6.

Разложение функции в ряд Тейлора, Маклорена. Применение рядов в приближенных вычислениях

Аудиторные задания

6.1 Найти три первых, отличных от нуля, члена разложения в ряд Тейлора функции $f(x)$ по степеням $x - x_0$:

1) $f(x) = \ln\left(1 + e^x\right), \quad x_0 = 0$; **2)** $f(x) = \ln\cos x, \quad x_0 = 0$; **3)** $f(x) = x\sqrt{x}, \quad x_0 = 3$;

4) $f(x) = \dfrac{x}{3 - x}, \quad x_0 = 1$; **5)** $f(x) = \operatorname{ctg} x, \quad x_0 = \dfrac{\pi}{4}$; **6)** $f(x) = \cos^2 x, \quad x_0 = \dfrac{\pi}{3}$;

7) $f(x) = \dfrac{1}{x}, \quad x_0 = -2$; **8)** $f(x) = 2 + \cos x, \quad x_0 = \dfrac{\pi}{4}$; **9)** $f(x) = \sin 3x, \quad x_0 = -\dfrac{\pi}{3}$;

10) $f(x) = xe^x, \quad x_0 = 1$.

6.2 Разложить функции в ряд Маклорена, используя разложения основных элементарных функций:

1) $f(x) = e^{2x}$; **2)** $f(x) = \sqrt[3]{8 - x^3}$; **3)** $f(x) = \sin^2 x$; **4)** $f(x) = \dfrac{x}{4 + x^2}$;

5) $f(x) = \dfrac{x}{3 + 4x}$; **6)** $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{9 + x^2}}$; **7)** $f(x) = \operatorname{arctg} x$; **8)** $f(x) = \ln\left(1 + \dfrac{x}{2}\right)$;

9) $f(x) = (1 - x)e^{-2x}$; **10)** $f(x) = x\cos 2x$.

6.3 **а)** С помощью рядов вычислить приближенно с заданной точностью ε:

1) $1/\varepsilon, \quad \varepsilon = 0{,}0001$; **2)** $\ln 0{,}98, \quad \varepsilon = 0{,}0001$; **3)** $\sin\dfrac{\pi}{10}, \quad \varepsilon = 0{,}0001$;

4) $\sqrt[3]{60}, \quad \varepsilon = 0{,}001$; **5)** $\cos 25^\circ, \quad \varepsilon = 0{,}0001$.

б) С помощью рядов вычислить приближенно определенные интегралы с указанной точностью ε:

6) $\displaystyle\int_0^{0,5} x^5 \sin x\,dx, \quad \varepsilon = 0{,}0001$; **7)** $\displaystyle\int_{0,1}^{0,2} \frac{e^{-x}}{x^2}dx, \quad \varepsilon = 0{,}001$; **8)** $\displaystyle\int_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt[3]{1 + x^3}}, \quad \varepsilon = 0{,}0001$;

9) $\displaystyle\int_0^{0,5} \frac{dx}{1 + x^4}, \quad \varepsilon = 0{,}001$; **10)** $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{\cos x}{x}dx, \quad \varepsilon = 0{,}0001$.

6.4 Найти с помощью рядов решения дифференциальных уравнений, удовлетворяющих данным начальным условиям:

1) $y'' - xy' + y - 1 = 0, \quad y(0) = y'(0) = 0$; **2)** $y'' + xy = 0, \quad y(0) = y'(0) = 1$;

3) $y' + y = x + 1, \quad y(0) = 1$; **4)** $xy'' + y = 0, \quad y(0) = y'(0) = 1$;

5) $y' = 1 - xy, \quad y(0) = 0$; **6)** $y'' - \sin xy' = 0, \quad y(0) = 0, y'(0) = 1$;

7) $y'' - (1 + x^2)y = 0, \quad y(0) = -2, y'(0) = 2$; **8)** $xy' = y^2 - 3y + 4x^2 + 2, \quad y(0) = 2$;

9) $y' = e^y + xy, \quad y(0) = 0$; **10)** $y'' = x^2 y - y', \quad y(0) = 1, y'(0) = 0$.

Домашние задания

6.5 Разложить функцию $f(x) = \sqrt[4]{x}$ в ряд Тейлора по степеням $x - 1$.

6.6 Найти три первых, отличных от нуля, члена разложения в ряд Тейлора функции $f(x) = \operatorname{ctg} x$ в точке $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$.

6.7 Разложить $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{16 + x^2}}$ в ряд Маклорена, используя разложения основных элементарных функций.

6.8 С помощью рядов вычислить приближенно значения функций с точностью ε:

1) $\cos 10°, \quad \varepsilon = 0{,}0001$; **2)** $\sqrt[3]{70}, \quad \varepsilon = 0{,}001$; **3)** $\dfrac{1}{\sqrt[4]{e}}, \quad \varepsilon = 0{,}0001$; **4)** $\ln 5, \quad \varepsilon = 0{,}00001$.

6.9 С помощью рядов вычислить приближенно определенный интеграл с указанной точностью ε:

$$\int_0^{0,5} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx, \quad \varepsilon = 0{,}001.$$

6.10 Найти четыре члена разложения в ряд решения ДУ при заданных начальных условиях

1) $xy'' + y' + xy = 0, \quad y(0) = 1, y'(0) = 0$; **2)** $y' = y^2 + x^3 = 0, \quad y(0) = \dfrac{1}{2}$.

Ответы: 6.1 1) $\ln 2 + \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{8} + \ldots$; **2)** $\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{12} - \dfrac{x^6}{20} + \ldots$;

3) $3\sqrt{3} + \dfrac{3\sqrt{3}}{2}(x - 3) + \dfrac{\sqrt{3}}{2^2}(x - 3)^2 + \ldots$; **4)** $\dfrac{1}{3} + \dfrac{3}{2^2}(x - 1) + \dfrac{3}{2^3}(x - 1)^2 + \ldots$;

5) $1 - 2\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) + \dfrac{4}{2!}\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)^2 + \ldots$; **6)** $\dfrac{1}{4} - \dfrac{\sqrt{3}}{2 \cdot 1!}\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) + \dfrac{2\sqrt{3}}{3!}\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)^2 + \ldots$;

7) $-\frac{1}{2}\left(1+\frac{x+2}{2}+\frac{(x+2)^2}{4}+\ldots\right)$; **8)** $2+\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1-\frac{1}{1!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{2!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2+\ldots\right)$;

9) $-\frac{3}{1!}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\frac{3^3}{3!}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)^3-\frac{3^5}{5!}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)^5+\ldots$; **10)** $e\left(1+2(x-1)+3(x-1)^2+\ldots\right)$.

6.2 1) $1+2x+\frac{(2x)^2}{2!}+\ldots+\frac{(2x)^n}{n!}+\ldots$; **2)** $2-2\left(\frac{1}{3}\left(\frac{x}{2}\right)^3+\frac{2}{3^2\cdot 2!}\left(\frac{x}{2}\right)^6+\ldots+\frac{2\cdot 5(3n-4)}{3^n\cdot n!}\left(\frac{x}{2}\right)^{3n}\right)$;

3) $\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(2x)^{2n}}{(2n)!}$; **4)** $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{4^{n+1}}$; **5)** $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{4^n x^{n+1}}{3^{n+1}}$;

6) $\frac{1}{3}\left(1-\frac{x^2}{18}+\frac{1\cdot 3}{1\cdot 18^2}x^4+\ldots+\frac{(-1)^n 1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{n!18^n}x^{2n}\right)$; **7)** $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$;

8) $\frac{x}{2}-\frac{x^2}{2^2\cdot 2}+\ldots+(-1)^n\frac{x^n}{2^n\cdot n}+\ldots$; **9)** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n x^n}{n!}-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n x^{n+1}}{n!}$; **10)** $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n)!}$.

6.3 а) 1) 0,3679; 2) – 0,0202; 3) 0,3091; 4) 3,915; 5) 0,9063; б) 6) 0,00108; 7) 32,864; 8) 0,4926; 9) 0,494; 10) 0,3230.

6.4 1) $y=\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{3x^6}{6!}+\ldots$; **2)** $y=1+x-\frac{x^3}{3!}-\frac{2x^4}{4!}+\ldots$; **3)** $y=1+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots$;

4) $y=x-\frac{x^2}{(1!)^2 2}+\frac{x^3}{(2!)^2 3}-\frac{x^4}{(3!)^2 4}+\ldots$; **5)** $y=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{3\cdot 5}-\ldots$; **6)** $y=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{2x^5}{5!}+\ldots$;

7) $y=-2+2x-x^2+\ldots$; **8)** $y=2+4x^2+\frac{16}{3}x^4+\ldots$; **9)** $y=x+\frac{x^2}{2}+\frac{2x^3}{3}+\ldots$;

10) $y=1+\frac{2x^4}{4!}-\frac{2x^5}{5!}+\ldots$.

6.5 $1+\frac{1}{4}(x-1)-\frac{1}{4^2}\cdot\frac{3}{2!}(x-1)^2+\frac{1\cdot 3\cdot 7}{4^3\cdot 3!}(x-1)^3+\ldots$.

6.6 $1-2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{2^2}{2!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2-\frac{2^3}{3!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3+\ldots$.

6.7 $4\left(1-\frac{1}{2\cdot 16}x^2+\frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!16^2}x^4-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{3^3\cdot 3!16^3}x^6+\ldots\right)$.

6.8 1) 0,9849; **2)** 4,121; **3)** 0,7788; **4)** 1,6099. **6.9** 0,487.

6.10 1) $y=1-\dfrac{x^2}{2^2}+\dfrac{x^4}{2^2\cdot 4^2}-\dfrac{x^6}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}+\ldots$; **2)** $y=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}x+\dfrac{1}{8}x^2+\dfrac{1}{16}x^3+\ldots$.

Занятие 7.

Функция комплексной переменной. Предел. Производная. Условия Коши-Римана

Аудиторные задания

7.1 Описать области, заданные следующими соотношениями:

1) $0<\mathrm{Re}(2z)<1$; **2)** $-2<\mathrm{Im}\left(\dfrac{z}{3}\right)<2$; **3)** $|z-i|>2$;

4) $1<|z+4|<3$; **5)** $|z+i|>1$; **6)** $2<|z+i|<5$.

7.2 Найти действительную и мнимую части функции $f(z)$:

1) $f(z)=2i\cdot z+\bar{z}$; **2)** $f(z)=z\cdot\bar{z}+4i\cdot z^2$;

3) $f(z)=\mathrm{Re}\left(z^2-i\right)+i\cdot\mathrm{Im}\left(\dfrac{1}{2}z+4\right)$; **4)** $f(z)=\mathrm{Im}\left(\dfrac{z}{\bar{z}}\right)+2i\cdot\mathrm{Re}(4i\bar{z})$.

7.3 Найти образы указанных точек при заданных отображениях:

1) $z_0=i;\ \omega=z^2-i$; **2)** $z_0=-i;\ \omega=e^{2z}$; **3)** $z_0=\dfrac{1-i}{2};\ \omega=(z+i)^2$;

4) $z_0=\dfrac{\pi i}{4};\ \omega=\sin(iz)$; **5)** $z_0=1-5i;\ \omega=\cos z$; **6)** $z_0=-2i;\ \omega=\mathrm{Ln}\,z$.

7.4 Вычислить следующие пределы:

1) $\lim\limits_{z\to -2i}\dfrac{z^2+zi+2}{z+2i}$; **2)** $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\cos z}{\mathrm{ch}(iz)}$; **3)** $\lim\limits_{z\to\frac{\pi i}{4}}\dfrac{\sin(iz)}{\mathrm{ch}\,z+i\,\mathrm{sh}\,z}$; **4)** $\lim\limits_{z\to\pi/2}\dfrac{e^{2iz}+1}{e^{-iz}+1}$.

7.5 Проверить выполнение условий Коши-Римана и в случае их выполнения найти $f'(z)$:

1) $f(z)=e^{z/2}$; **2)** $f(z)=\mathrm{ch}\,z$;

3) $f(z)=4\left(x^2-2\right)-4\left(y^2+4\right)+i(8xy-5)$; **4)** $f(z)=x^2+14xy+y^2-8+i\left(2xy-7x^2+7y^2+4\right)$.

7.6 Проверить гармоничность приведенных функций и найти, когда это возможно, аналитическую функцию по данной ее действительной или мнимой части:

1) $u(x,y)=x^3-3xy^2$; **2)** $v(x,y)=2e^x\sin y$;

3) $u(x,y)=x^2-y^2+5x+y-\dfrac{y}{x^2+y^2}$; **4)** $v(x,y)=2xy+8x^2-8y^2+4x$.

Домашние задания

7.7 Описать области, заданные соотношениями:

1) $1<|z+3i|<3$**;** **2)** $|z|>2$**;** **3)** $|z-4i|<5$**.**

7.8 Найти действительную и мнимую части функции $f(z)$:

1) $f(z)=2i-z+3iz^2$**;** **2)** $f(z)=iz^2-4\bar{z}$**;** **3)** $f(z)=e^z\cdot z^2$**.**

7.9 Вычислить следующие пределы:

1) $\lim\limits_{z\to 4i}\dfrac{z^2-2iz+8}{z^2+16}$**;** **2)** $\lim\limits_{z\to 3i}\dfrac{z^2-2iz+3}{z^2+9}$**.**

7.10 Проверить выполнение условий Коши-Римана и в случае их выполнения найти $f'(z)$:

1) $f(z)=e^{4z}+2z-4$**;** **2)** $f(z)=z^2+4iz+5$**;** **3)** $f(z)=\mathrm{sh}(2z)$**.**

7.11 Проверить гармоничность приведенных ниже функций и найти, когда это возможно, аналитическую функцию по данной ее действительной или мнимой части:

1) $u(x,y)=2xy+3$**;** **2)** $v(x,y)=3+x^2-y^2-\dfrac{y}{2(x^2+y^2)}$**.**

Ответы: 7.1 1) полоса, ограниченная прямыми $x=0,\ x=1/2$;

2) полоса, ограниченная прямыми $y=\pm 6$; **3)** внешность круга с центром в точке $z=i$ и радиусом 2; **4)** внутренность кольца с центром в т. $z=-4$ и радиусами 1 и 3; **5)** внешность круга с центром в точке $z=-i$ и радиусом 1; **6)** внутренность кольца с центром в т. $z=-2i$ и радиусами 2 и 5.

7.2 1) $\mathrm{Re}\,f(z)=x-2y,\ \mathrm{Im}\,f(z)=-2x-y$**; 2)** $\mathrm{Re}\,f(z)=x^2+y^2-8xy,\ \mathrm{Im}\,f(z)=4(x^2-y^2)$**;**

3) $\mathrm{Re}\,f(z)=x^2-y^2+2xy,\ \mathrm{Im}\,f(z)=\dfrac{1}{2}y$**; 4)** $\mathrm{Re}\,f(z)=\dfrac{2xy}{x^2+y^2},\ \mathrm{Im}\,f(z)=8y$**.**

7.3 1) $-1-i$**; 2)** i**; 3)** $\cos 2-i\sin 2$**; 4)** $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$**; 5)** $\dfrac{1}{2}(e^5+e^{-5})\cos 1+\dfrac{i}{2}(e^5-e^{-5})\sin 1$**;**

6) $\ln 2+i\left(\dfrac{3\pi}{2}+2\pi k\right),\ k\in Z$**.**

7.4 1) $-3i$**; 2)** 1; **3)** ∞; **4)** 0.

7.5 1) $\dfrac{1}{2}e^{z/2}$**; 2)** $\mathrm{sh}\,z$**; 3)** $8x+i8y$**; 4)** Условия Коши-Римана не выполняются.

7.6 1) $f(z)=(x^3-3xy^2)+i(3x^2y-y^3+C)$**; 2)** $f(z)=2e^x\cos y+C+2ie^x\sin y$**;**

3) $f(z)=\left(x^2-y^2+5x+y-\dfrac{y}{x^2+y^2}\right)+i\left(2xy+5y-\dfrac{x}{x^2+y^2}-x+C\right)$**;**

4) $f(z)=\left(x^2-16xy-y^2-4y+C\right)+i\left(2xy+8x^2-8y^2+4x\right)$**.**

7.7 1) внутренность кольца с центром в т. $z=-3i$ и радиусами 1 и 4;

2) внешность круга с центром в точке $z=0$ и радиусом 2;

3) внутренность круга с центром в т. $z=4i$ и радиусом 5.

7.8 1) $\operatorname{Re} f(z)=-x-6xy,\ \operatorname{Im} f(z)=2-y+3x^2-3y^2$**;**

2) $\operatorname{Re} f(z)=-2xy-4x,\ \operatorname{Im} f(z)=x^2-y^2+4y$**;**

3) $\operatorname{Re} f(z)=e^x\left(x^2-y^2\right)\cos y-2xye^x\sin y$**,** $\operatorname{Im} f(z)=e^x\left(x^2-y^2\right)\sin y+2xye^x\cos y$**.**

7.9 1) $\dfrac{3}{4}$**; 2)** $\dfrac{2}{3}$**. 7.10 1)** $4e^{4z}+2$**; 2)** $2\operatorname{ch}(2z)$**; 3)** $2z+4i$**.**

7.11 1) $f(z)=2xy+3+i\left(y^2-x^2+C\right)$**;**

2) $f(z)=\left(-2xy+\dfrac{x}{2\left(x^2+y^2\right)}+C\right)+i\left(3+x^2-y^2-\dfrac{y}{2\left(x^2+y^2\right)}\right)$**.**

Занятие 8.

Интеграл от функции комплексной переменной

Аудиторные задания

8.1 Вычислить интегралы по заданным контурам:

1) $\int\limits_L \operatorname{Im} z\,dz,\ L=\{(x,y)\mid y=2x^2,\ 0\le x\le 1\}$**;** **2)** $\int\limits_L \operatorname{Re}\left(z+z^2\right)dz,\ L=\{(x,y)\mid y=2x^2,\ 0\le x\le 1\}$**;**

3) $\int\limits_L \left(\bar{z}^2-z\right)dz,\ L=\{z\mid |z|=1,\ \pi\le\arg z\le 2\pi\}$**;** **4)** $\int\limits_L \operatorname{Im} z^2\cdot\operatorname{Re} z\,dz,\ L=\{(x,y)\mid y=3x^2,\ 0\le x\le 1\}$**;**

5) $\int\limits_L (\operatorname{Re} z+\operatorname{Im} z)dz$**,** где L – отрезок, соединяющий начало координат и точку $2-i$.

8.2 Применяя формулу $\int\limits_{z_1}^{z_2} f(\eta)d\eta=F(z_2)-F(z_1)$, вычислить интегралы:

1) $\int\limits_L e^{2z}dz,\ L=\{(x,y)\mid y=x^3,\ 1\le x\le 2\}$**; 2)** $\int\limits_L \sin z\,dz,\ L=\left\{z\mid z=t^2+it,\ \dfrac{1}{2}\le t\le\dfrac{3}{2}\right\}$**;**

3) $\int\limits_L z^2\cos z\,dz$, где L – отрезок прямой от т. $z_1=i$ до т. $z_2=1$.

8.3 Вычислить интегралы, применив теорему Коши, интегральную формулу Коши или формулу, получаемую дифференцированием интегральной формулы Коши (обход контуров – против часовой стрелки):

1) $\oint\limits_{|z|=4} \frac{z^2}{z-2i}dz$; **2)** $\oint\limits_{|z|=1} \frac{z^2}{z-2i}dz$; **3)** $\oint\limits_{|z|=1} \frac{e^{2z}}{z-\pi i}dz$; **4)** $\oint\limits_{|z|=4} \frac{e^{2z}}{z-\pi i}dz$;

5) $\oint\limits_{|z|=3} \frac{dz}{z^2+2z}$; **6)** $\oint\limits_{|z|=1} \frac{\mathrm{sh}\left(\frac{\pi}{2}(z+i)\right)}{z^2-2z}dz$; **7)** $\oint\limits_{|z|=2} \frac{\sin z\cdot\sin(z-1)}{z^2-z}dz$; **8)** $\oint\limits_{|z+i|=1} \frac{\sin z}{(z+i)^3}dz$;

9) $\oint\limits_{|z+2|=2} \frac{e^{2z}}{(z^2-4)(z+i)}dz$; **10)** $\oint\limits_{|z|=4} \frac{\cos z}{(z-\pi)^2}dz$.

Домашние задания

8.4 Вычислить интегралы по заданным контурам:

1) $\int\limits_L |z|\cdot\bar{z}dz$, где L – верхняя полуокружность $|z|=2$ с обходом против часовой стрелки;

2) $\int\limits_L \frac{z}{\bar{z}}dz,\ L=\left\{z\middle|\,|z|=1,\ 0\le\arg z\le\frac{\pi}{2}\right\}$;

3) $\int\limits_L \left(\sin z+z^5\right)dz$, где L – ломаная, соединяющая точки $z_1=1,\ z_2=0,\ z_3=2i$;

4) $\int\limits_L \mathrm{Re}(2z)dz$, где L – отрезок, соединяющий точки $z_1=1-i,\ z_2=1+i$.

8.5 Выполнить действия согласно 8.3.

1) $\oint\limits_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{dz}{1+z^2}$; **2)** $\oint\limits_{|z-i|=1} \frac{dz}{1+z^2}$; **3)** $\oint\limits_{|z+i|=1} \frac{dz}{1+z^2}$; **4)** $\oint\limits_{|z|=4} \frac{\cos z}{z^2-\pi^2}dz$;

5) $\oint\limits_{|z-1|=1} \frac{z^2+1}{z^2-1}dz$; **6)** $\oint\limits_{|z|=1} \frac{\mathrm{sh}^2 z}{z^3}dz$; **7)** $\oint\limits_{|z|=2} \frac{\cos 2z}{(z^2+1)(z^2-9)}dz$; **8)** $\oint\limits_{|z-i|=3} \frac{e^z}{(z-\pi i)^3}dz$.

Ответы: 8.1 1) $\frac{2}{3}+2i$; **2)** $\frac{8}{15}-\frac{1}{3}i$; **3)** $\frac{2}{3}+\pi i$; **4)** $\frac{6}{5}+6i$; **5)** $1-\frac{1}{2}i$.

8.2 1) $\frac{1}{2}\left(e^{4+6i}-e^{2+2i}\right)$; **2)** $-\left(\cos\left(\frac{9}{4}+\frac{3}{2}i\right)-\cos\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}i\right)\right)$; **3)** $(3\sin 1+2\cos 1)-i(2\,\mathrm{ch}\,1-\mathrm{sh}\,1)$.

18.3 1) $-8\pi i$; **2)** 0; **3)** 0; **4)** $2\pi i$; **5)** 0; **6)** π; **7)** 0; **8)** $\pi\,\mathrm{sh}\,1$; **9)** $\frac{\pi}{10}e^{-4}(2i-1)$; **10)** 0.

8.4 1) $8\pi i$**; 2)** $-\dfrac{i+1}{3}$**; 3)** $\cos 1-\operatorname{ch} 2-\dfrac{65}{6}$; **4)** 0.

8.5 1) 0; **2)** π; **3)** – π; **4)** – *i*; **5)** $2\pi i$; **6)** $2\pi i$; **7)** 0; **8)** $-\pi i$.

Занятие 9.

Ряды Тейлора и Лорана

Аудиторные задания

9.1 Используя разложение основных элементарных функций, разложить функции в ряд по степеням *z* и указать область сходимости полученных рядов:

1) e^{-z^2} **; 2)** $\cos z^2$**; 3)** $\sin 2z\cos 2z$**; 4)** $\sin^2 z$**; 5)** $\dfrac{z}{4+z^2}$**; 6)** $\dfrac{3}{1+z-2z^2}$**; 7)** $\ln\left(z+\sqrt{1+z^2}\right)$**.**

9.2 Разложить функции в ряд по степеням $z-z_0$ и указать область сходимости полученных рядов:

1) $z^3-2z^2-5z-2,\ z_0=-4$**; 2)** $\dfrac{1}{1-z},\ z_0=2$**; 3)** $\dfrac{1}{1-z},\ z_0=3i$**; 4)** $\dfrac{1}{z^2-6z+5},\ z_0=3$**.**

9.3 Найти область сходимости указанных рядов

1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)(n+2)z^n$**; 2)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(z+1)^n$**; 3)** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(z-3)^n}{n+1}$**.**

9.4 Разложить данные функции в ряд Лорана в проколотой окрестности точки z_0:

1) $\dfrac{z}{(z+1)^3},\ z_0=-1$**; 2)** $\dfrac{1}{z^3}\cos z,\ z_0=0$**; 3)** $\sin\left(\dfrac{1}{z+2}\right),\ z_0=-2$**; 4)** $\dfrac{e^{z^2}}{z},\ z_0=0$**;**

5) $z^2\cos\left(\dfrac{1}{z}\right),\ z_0=0$**; 6)** $z^3e^{\frac{1}{z}},\ z_0=0$**; 7)** $\dfrac{1}{z(z-1)},\ z_0=1$**; 8)** $\dfrac{1}{(z-2)(z+3)},\ z_0=2$**.**

9.5 Разложить данные функции в ряд Лорана в заданных кольцах:

1) $\dfrac{1}{(z+i)(z+2i)},\ 1<|z|<2$**; 2)** $\dfrac{e^z}{z(1-z)},\ 0<|z|<1$**; 3)** $\dfrac{z^3}{(z+1)(z+2)},\ 1<|z+1|<3$**.**

Домашние задания

9.6 Выполнить действия согласно 9.2.

1) $\sqrt{27-z},\ z_0=0$**; 2)** $\dfrac{z}{3+4z},\ z_0=0$**; 3)** $\ln(5z+3),\ z_0=1$**;**

4) $\dfrac{1}{z^2+3z+2},\ z_0=-4$; **5)** $z^2\cdot e^{1/z},\ z_0=0$.

9.7 Выполнить действия согласно 9.3.

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(z-1)^n}{n^2\cdot 2^n}$; **2)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n!(z-i)^n$; **3)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1+i)^n\cdot z^n$.

9.8 Выполнить действия согласно 9.5.

1) $\dfrac{1}{(z-1)(z-2)},\ 1<|z|<2$; **2)** $\dfrac{1}{z(z+3)},\ 1<|z-1|<2$;

3) $\dfrac{z^2}{z^2+1},\ 0<|z-i|<2$; **4)** $\dfrac{1}{(z^2-4)(z^2+4)},\ 2<|z|<+\infty$.

Ответы: 9.1 1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\dfrac{z^{2n}}{n!},\ |z|<+\infty$; **2)** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\dfrac{z^{4n}}{(2n)!},\ |z|<+\infty$;

3) $\dfrac{1}{2}\sum\limits_{z=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\dfrac{(4z)^{2n-1}}{(2n-1)!},\ |z|<+\infty$; **4)** $\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\dfrac{(2z)^{2n-1}}{(2n)!},\ |z|<+\infty$;

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\dfrac{z^{2n-1}}{2^{2n}},\ |z|<2$; **6)** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(1+(-1)^n\cdot 2^{n+1}\right)z^n,\ |z|<\dfrac{1}{2}$;

7) $z+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\dfrac{(2n-1)!z^{2n+1}}{2^n\cdot n!(2n+1)},\ |z|<1$.

9.2 1) $-78+59(z+4)-14(z+4)^2+(z+4)^3$; **2)** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot(z-2)^n,\ |z-2|<1$;

3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(z-3i)^n}{(1-3i)^{n+1}},\ |z-3i|<\sqrt{10}$; **4)** $-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(z-3)^{2n}}{4^{n+1}},\ |z-3|<2$.

9.3 1) $|z|<1$; **2)** $|z+1|<1$; **3)** $|z-3|<1$.

9.4 1) $\dfrac{1}{(z+1)^2}-\dfrac{1}{(z+1)^3},\ z\neq-1$; **2)** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\dfrac{z^{2n-3}}{(2n)!},\ 0<|z|<+\infty$;

3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{(2n+1)!(z+2)^{n+1}},\ 0<|z+2|<+\infty$;

4) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^{2n-1}}{n!},\ 0<|z|<+\infty$; **5)** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n z^{2-2n}}{(2n)!},\ 0<|z|<+\infty$; **6)** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^{3-n}}{n!},\ 0<|z|<+\infty$;

7) $\frac{1}{z-1}-\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot(z-1)^n$**, если** $0<|z-1|<1$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{(z-1)^{n+1}}$**, если** $1<|z-1|<+\infty$**;**

8) $\frac{1}{5(z-2)}-\frac{1}{25}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{(z-2)^n}{5^n}$**, если** $0<|z-2|<5$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{5^n}{(z-2)^{n+2}}$**, если** $|z-2|>5$**.**

9.5 1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot i^{n+1}}{z^{n+1}}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot z^n}{2^{n+1}\cdot i^n}$**; 2)** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n-1}}{n!}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n+1}}{n!}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n+1}}{n!}+\ldots$**;**

3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2}{(z+1)^{2n-1}}-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{6}{(z+1)^{2n}}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{6}{(z+1)^{2n+1}}-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2}{(z+1)^{2n+2}}$**.**

9.6 1) $3-\frac{z}{27}\cdot\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{2\cdot5\cdot8\cdot\ldots\cdot(3n-4)}{n!3^{4n-1}}\cdot z^n,\ |z|<27$**; 2)** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{4^n\cdot z^{n+1}}{3^{n+1}},\ |z|<3/4$**;**

3) $3\ln 2+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{5^n\cdot(z-1)^n}{n\cdot 8^n},\ |z-1|<8/5$**; 4)** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(2^{-n-1}-3^{-n-1}\right)\cdot(z+4)^n,\ |z+4|<2$**;**

5) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^{-n+2}}{n!},\ 0<|z|<+\infty$**.**

9.7 1) $|z-1|<2$**; 2)** ряд расходится во всех точках, кроме $z=i$**; 3)** $|z|<\sqrt{2}/2$**.**

9.8 1) $-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}$**; 2)** $\frac{1}{3}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(z-1)^{n+1}}+\frac{1}{12}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-1)^n}{4^n}$**;**

3) $-\frac{i}{2}(z-i)+1+\frac{i}{2}\cdot\frac{1}{z-i}+\frac{1}{4}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(z-i)^{n+2}\cdot(-1)^n}{(2i)^n}+\frac{1}{4}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-i)^{n+1}}{(2i)^{n-1}}-\frac{1}{4}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-i)^n}{(2i)^n}$**.**

4) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2^{4k}}{z^{4k+4}}$**.**

Занятие 10.

Изолированные особые точки

Аудиторные задания

10.1 Указать все конечные особые точки заданных ниже функций и определить их характер:

1) $\frac{\sin 4z}{z}$; **2)** $\frac{\sin z^2}{z^3+\frac{\pi}{2}z^2}$; **3)** $\frac{1}{(z-2)(z-i)}$; **4)** $\frac{z-8}{z(z+1)^2(z-i)^3}$; **5)** $\frac{e^{2z}}{z^2-1}$;

6) $\frac{1}{\sin z}$; **7)** $\frac{1}{z^2}\sin\left(\frac{1}{z-1}\right)$; **8)** $e^{\frac{1}{z+3i}}$; **9)** $\cos\left(\frac{1}{z-2i}\right)$; **10)** $\frac{1-\cos z}{z^2}$.

10.2 Определить тип особой точки $z=0$ для функций:

1) $\dfrac{\cos z^3-1}{\sin z-z+\dfrac{z^3}{6}}$; **2)** $\dfrac{e^{3z}-1}{\cos z-1+\dfrac{z^2}{2}}$; **3)** $z\cos\left(\dfrac{2}{z^3}\right)$; **4)** $ze^{\frac{1}{z^2}}$; **5)** $\sin\left(\dfrac{2}{z}\right)$.

10.3 Определить порядок нуля следующих функций:

1) $1-\cos z$; **2)** $\dfrac{\cos z-1+z^2/2}{e^{3z}-1}$; **3)** $z^2\left(e^{z^2}-1\right)$; **4)** $\dfrac{z^3}{1+z-e^z}$.

10.4 Для заданных ниже функций выяснить характер бесконечно удаленной особой точки (устранимую особую точку считать правильной):

1) $\dfrac{z^2}{5+2z^2}$; **2)** $\dfrac{-3z^5+4z-2}{z^2+z+8}$; **3)** $\dfrac{z}{1+3z^4}$; **4)** $1+3z+3z^2$; **5)** $\cos z$.

Домашние задания

10.5 Указать все конечные особые точки заданных ниже функций и определить их характер:

1) $\dfrac{z}{(z+1)(z+2)^2(z-i)^4}$; **2)** $e^{\frac{2}{z-3i}}$; **3)** $z^3\sin\left(\dfrac{1}{z^2}\right)$; **4)** $\dfrac{1}{z^2+5z+6}$; **5)** $\dfrac{1}{z^2+16}$;

6) $\sin\left(\dfrac{2}{z^3}\right)$; **7)** $\dfrac{z+1}{z^5+2z^4+z^3}$; **8)** $\dfrac{z(z-\pi)}{\sin 2z}$; **9)** $\dfrac{\cos z}{z^3}$; **10)** $\dfrac{z-\sin z}{z^3}$.

Ответы: 10.1 1) $z=0$ – устранимая особая точка; **2)** $z_1=0$ – устранимая особая точка; $z_2=-\pi/2$ – простой полюс; **3)** $z_1=2$ – простой полюс; $z_2=i$ – простой полюс; **4)** $z_1=0$ – простой полюс; $z_2=-1$ – полюс второго порядка; $z_3=i$ – полюс третьего порядка; **5)** $z_{1,2}=\pm1$ – простые полюсы; **6)** $z_k=\pi k,\ k\in z$ – простые полюсы; **7)** $z_1=0$ – полюс второго порядка; $z_2=1$ – существенно особая точка; **8)** $z=-3i$ – существенно особая точка; **9)** $z=2i$ – существенно особая точка; **10)** $z=0$ – устранимая особая точка.

10.2 1) $z=0$ – устранимая особая точка; **2)** $z=0$ – полюс третьего порядка; **3)** $z=0$ – существенно особая точка; **4)** $z=0$ – существенно особая точка; **5)** $z=0$ – существенно особая точка.

10.3 1) нуль второго порядка; **2)** нуль третьего порядка; **3)** нуль четвертого порядка; **4)** нуль первого порядка.

10.4 1) правильная точка (устранимая особая точка); **2)** полюс третьего порядка; **3)** правильная точка (устранимая особая точка); **4)** полюс второго порядка; **5)** существенно особая точка.

10.5 1) $z_1=-1$ – простой полюс; $z_2=-2$ – полюс второго порядка; $z_3=i$ – полюс четвертого порядка; **2)** $z=3i$ – существенно особая точка; **3)** $z=0$ – простой полюс; **4)** $z_1=-2$ – простой полюс; $z_2=-3$ – простой полюс; **5)** $z_{1,2}=\pm 4i$ – простые полюсы; **6)** $z=0$ – существенно особая точка; **7)** $z_1=0$ – полюс третьего порядка; $z_2=-1$ – простой полюс; **8)** $z_1=0$ – устранимая особая точка; $z_2=\pi$ – устранимая особая точка; $z_3=\dfrac{\pi k}{2},\ k\in Z/\{0\}$ – простые полюсы; **9)** $z=0$ – полюс третьего порядка; **10)** $z=0$ – устранимая особая точка.

Занятие 11.

Вычеты. Основная теорема о вычетах

Аудиторные задания

11.1 Найти вычеты указанных ниже функций в изолированных особых точках

1) $\dfrac{z^2+1}{(z-2)(z+3)}$; **2)** $\dfrac{1}{z^2\left(4-z^2\right)}$; **3)** $\dfrac{z^3}{4+z^2}$; **4)** $\dfrac{z^2-2z+1}{z^2(z-1)}$; **5)** $\dfrac{\sin 2z}{(z-1)^3}$;

6) $\dfrac{\cos^3 z}{z^3}$; **7)** $\dfrac{1-\cos z}{2z^2}$; **8)** $e^{\frac{2}{z+i}}$; **9)** $z^3\cdot\sin\dfrac{1}{z}$; **10)** $(z-1)^2\cos\left(\dfrac{1}{z-1}\right)$.

11.2 Найти вычеты функций относительно $z=0$.

1) $e^{\frac{4+z}{z}}$; **2)** $\sin\left(\dfrac{2}{z}\right)$; **3)** $\dfrac{\cos z}{z^3}$; **4)** $z^2e^{1/z}$.

11.3 Найти вычеты функций относительно $z=\infty$.

1) $\sin\left(\dfrac{1}{z}\right)$; **2)** $e^{\frac{1+z}{z}}$; **3)** z^5e^{1/z^2}; **4)** $z^4\cos\left(\dfrac{1}{z^4}\right)$.

11.4 Используя теоремы о вычетах, вычислить следующие интегралы:

1) $\oint\limits_{|z-2|=2}\dfrac{zdz}{(z-1)(z-2)}$; **2)** $\oint\limits_{|z|=2}\dfrac{z^2dz}{\left(z^2+1\right)(z+3)}$; **3)** $\oint\limits_{|z|=1}\dfrac{e^zdz}{z^2\left(z^2+9\right)}$; **4)** $\oint\limits_{|z|=1/2}\dfrac{dz}{(z-1)^2\left(z^2+1\right)}$;

5) $\oint\limits_{|z|=1}\sin\left(\dfrac{1}{z}\right)dz$; **6)** $\oint\limits_{|z+2i|=3}z^3e^{1/z^2}dz$; **7)** $\oint\limits_{|z+2i|=1}z^3e^{1/z^2}dz$; **8)** $\oint\limits_{|z|=1}\sin^2\left(\dfrac{1}{z}\right)dz$.

11.5 При помощи вычетов вычислить определенные интегралы:

1) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{dx}{2+\cos x}$; **2)** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x-1}{\left(x^2+1\right)^2}dx$.

Домашние задания

11.6 Найти вычеты указанных ниже функций в изолированных особых точках:

1) $\dfrac{z^5}{z^2-4}$; **2)** $\dfrac{z+1}{z^3-9z}$; **3)** $\dfrac{z^2}{\left(z^2+1\right)^2}$; **4)** $\cos\left(\dfrac{2}{z+1}\right)$; **5)** $z^2\cos^2\dfrac{\pi}{z}$.

11.7 Используя теоремы о вычетах, вычислить следующие интегралы:

1) $\oint\limits_{|z+2|=1}\dfrac{z^2dz}{(z-1)(z+2)}$; **2)** $\oint\limits_{|z|=3}\dfrac{zdz}{\left(z^2+4\right)(z-2)}$; **3)** $\oint\limits_{|z|=4}\dfrac{e^z dz}{z^2\left(z^2+9\right)}$;

4) $\int\limits_{|z-(i+1)|=2}\dfrac{1}{z^2}\sin z dz$; **5)** $\oint\limits_{|z+i|=2}\dfrac{\cos\pi z}{(z+1)^3}dz$.

Ответы:

11.1 1) $\operatorname{Res} f(2)=5; \operatorname{Res} f(-3)=-2$; **2)** $\operatorname{Res} f(2)=\dfrac{1}{16}; \operatorname{Res} f(-2)=-\dfrac{1}{16}; \operatorname{Res} f(0)=0$;

3) $\operatorname{Res} f(2i)=-2; \operatorname{Res} f(-2i)=-2$; **4)** $\operatorname{Res} f(1)=0; \operatorname{Res} f(0)=1$; **5)** $\operatorname{Res} f(1)=-\dfrac{1}{2}\sin 2$;

6) $\operatorname{Res} f(0)=-3/2$; **7)** $\operatorname{Res} f(0)=0$; **8)** $\operatorname{Res} f(-i)=2$; **9)** $\operatorname{Res} f(0)=0$; **10)** $\operatorname{Res} f(1)=0$.

11.2 1) $\operatorname{Res} f(0)=4e$; **2)** $\operatorname{Res} f(0)=2$; **3)** $\operatorname{Res} f(0)=-\dfrac{1}{2}$; **4)** $\operatorname{Res} f(0)=\dfrac{1}{6}$.

11.3 1) $\operatorname{Res} f(\infty)=-2$; **2)** $\operatorname{Res} f(\infty)=e$; **3)** $\operatorname{Res} f(\infty)=-\dfrac{1}{6}$; **4)** $\operatorname{Res} f(\infty)=0$.

11.4 1) 2πi; **2)** $\dfrac{\pi i}{5}$; **3)** $\dfrac{2\pi i}{9}$; **4**) 0; **5**) 2πi; **6**) πi; **7**) 0; **8**) 0. **11.5 1)** $\dfrac{2\pi}{\sqrt{3}}$; **2)** $-\dfrac{\pi}{2}$.

11.6 1) $\operatorname{Res} f(2)=8; \operatorname{Res} f(-2)=8$; **2)** $\operatorname{Res} f(0)=-\dfrac{1}{9}; \operatorname{Res} f(3)=\dfrac{2}{9}; \operatorname{Res} f(-3)=-\dfrac{1}{9}$;

3) $\operatorname{Res} f(i)=-\dfrac{i}{4}; \operatorname{Res} f(-i)=\dfrac{i}{4}$; **4)** $\operatorname{Res} f(-1)=0$; **5)** $\operatorname{Res} f(0)=-\pi$.

11.7 1) $-\dfrac{8\pi i}{3}$; **2**) 0; **3)** $2\pi i\left(\dfrac{1}{9}-\dfrac{1}{27}\sin 3\right)$; **4)** 2πi; **5)** π^3.

Занятие 12.

Преобразование Лапласа. Оригинал и изображение элементарных функций. Основные теоремы

Аудиторные задания

12.1 Проверить, являются ли оригиналами функции:

1) $f(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ 4, & t\ge 0;\end{cases}$ **2)** $f(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ \mathrm{tg}\,t, & t\ge 0;\end{cases}$ **3)** $f(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ e^{(3+i)t}, & t>0;\end{cases}$

4) $f(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ \sin(2-i)t, & t>0;\end{cases}$ **5)** $f(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ 2^{t^2}, & t>0;\end{cases}$ **6)** $f(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ \sin t, & t\ge 0.\end{cases}$

12.2 Пользуясь определением преобразования Лапласа, найти изображения оригиналов:

1) $f(t)=1$**;** **2)** $f(t)=e^{\alpha t}\ (\alpha>0)$**;** **3)** $f(t)=t$**;** **4)** $f(t)=\mathrm{ch}(4-3i)t$**;** **5)** $f(t)=\sin t$**;**

6) $f(t)=\cos t$**;** **7)** $f(t)=e^{\alpha t}\cdot\cos\beta t$**;** **6)** $f(t)=e^{3t}\cdot\cos 2t$**;** **9)** $f(t)=t^2$**.**

12.3 Используя свойства линейности и подобия, найти изображение оригиналов:

1) $f(t)=2e^{-it}+5\cos t-3$**;** **2)** $f(t)=\sin 2t\cdot 5\cos 5t$**;** **3)** $f(t)=\cos^4 t-\sin^4 t$**;**

4) $f(t)=\sin^2 5t$**;** **5)** $f(t)=3\sin t-2\cos t$**;** **6)** $f(t)=3\sin 4t-2\cos 5t$**.**

Домашние задания

12.4 Проверить, являются ли следующие функции оригиналами:

1) $f(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ \sin 3t, & t\ge 0;\end{cases}$ **2)** $f(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ \sin 2t, & t\ge 0;\end{cases}$ **3)** $f(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ t^2-9, & t\ge 0.\end{cases}$

12.5 Используя определение преобразования Лапласа, найти изображение оригиналов:

1) $f(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ e^{-7t}, & t\ge 0;\end{cases}$ **2)** $f(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ \sin\alpha t, & t\ge 0;\end{cases}$

12.6 Пользуясь теоремой подобия, найти изображение оригинала $\mathrm{sh}\,\beta t$, зная, что $\mathrm{sh}\,t \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{=}} \dfrac{1}{p^2-1}$.

Ответы: 12.1 1) является; **2)** не является; **3)** является; **4)** является; **5)** не является; **6)** является.

12.2 1) $F(p)=\dfrac{1}{p}$**; 2)** $F(p)=\dfrac{1}{p-\alpha}$**; 3)** $F(p)=\dfrac{1}{p^2}$**; 4)** $F(p)=\dfrac{p}{p^2-7+24i}$**; 5)** $F(p)=\dfrac{1}{1+p^2}$**;**
6) $F(p)=\dfrac{p}{p^2+1}$**; 7)** $F(p)=\dfrac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2+\beta^2}$**; 8)** $F(p)=\dfrac{p-3}{(p-3)^2+4}$**; 9)** $F(p)=\dfrac{2}{p^3}$**.**

12.3 1) $F(p)=\dfrac{2}{p+i}+\dfrac{5p}{p^2+1}-\dfrac{3}{p}$**; 2)** $F(p)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{7}{p^2+49}-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{p^2+9}$**; 3)** $F(p)=\dfrac{p}{p^2+4}$**;**

4) $F(p)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{p}-\dfrac{p}{p^2+100}\right)$**; 5)** $F(p)=\dfrac{3-2p}{p^2+1}$**; 6)** $F(p)=\dfrac{12}{p^2+16}-\dfrac{2p}{p^2+25}$**.**

12.4 1) Да; 2) Да; 3) Нет. 12.5 1) $F(p)=\dfrac{1}{p+7}$**; 2)** $F(p)=\dfrac{\alpha}{p^2+\alpha^2}$**. 12.6** $\dfrac{\beta}{p^2-\beta^2}$**.**

Занятие 13.

Основные теоремы операционного исчисления

Аудиторные задания

13.1 Пользуясь свойствами смещения и запаздывания, найти изображение оригиналов:

1) $f(t)=e^{-3t}\cdot\sin\pi t$; **2)** $f(t)=\operatorname{sh}\beta t\cdot\cos\beta t$; **3)** $f(t)=\sin(t-2)\cdot 1(t-2)$;

4) $f(t)=\sin(t-2)\cdot 1(t)$; **5)** $f(t)=\begin{cases} t, & 0<t<2\pi, \\ \sin 2t, & t\ge 2\pi; \end{cases}$; **6)** $f(t)=e^{-3t}\cdot\cos^2 t$;

7) $f(t)=\operatorname{ch}5t\cdot\sin 3t$; **8)** $f(t)=e^{-\alpha t}$; **9)** $f(t)=e^{3t}\cdot\sin 4t$;

10) $f(t)=e^{-5t}\cdot\cos 7t$; **11)** $f(t)=e^{-4t}\cdot\operatorname{ch}5t$; **12)** $f(t)=e^{5t}\cdot\operatorname{sh}2t$;

13) $f(t)=\cos(3t+1)$; **14)** $f(t)=\sin(5t-4)$; **15)** $f(t)=e^{-3t}\cdot\cos(6t-5)$.

13.2 Найти оригиналы по их изображениям:

1) $F(p)=\dfrac{2p+1}{p^2+5p+10}$; **2)** $F(p)=e^{-p}\cdot\dfrac{p}{p^2-9}+\dfrac{1}{p^2+5}$; **3)** $F(p)=\dfrac{1}{p^2-4}+\dfrac{3p-2}{(p-1)^2+3}$;

4) $F(p)=\dfrac{p-3}{2p^2-6p-1}$; **5)** $F(p)=\dfrac{e^{-2p}}{p^2+4p+3}$; **6)** $F(p)=\dfrac{7}{p^2+10p+41}$;

7) $F(p)=\dfrac{p+3}{p^2+2p+10}$; **8)** $F(p)=\dfrac{p}{(p-1)^3(p+2)^2}$; **9)** $F(p)=\dfrac{20}{p^2+4}+\dfrac{20p}{p^2+9}$.

Домашние задания

13.3 Пользуясь теоремами подобия и запаздывания, найти изображение оригинала:

1) $f(t)=\cos(t-\dfrac{\pi}{2}),\ t>\dfrac{\pi}{2}$; **2)** $f(t)=e^{-4t}\cdot\sin(t+7)$.

13.4 Применяя теорему запаздывания, найти оригинал для функции:

1) $\dfrac{e^{-2p}}{p^2}$; **2)** $\dfrac{e^{-2p}}{(p+1)^3}$; **3)** $\dfrac{3}{p^2+9p}$; **4)** $\dfrac{4p+5}{6p^2+3p+1}$.

13.5 Используя свойства преобразования Лапласа и таблицу изображений основных функций, найти изображения заданных функций:

1) $t^2-\dfrac{1}{2}e^t$; **2)** $\sin^2 2t$; **3)** $\sin 3t-t\cos t$.

13.6 Найти оригинал, если:

1) $F(p)=\dfrac{p+2}{p^2+4p+20}$; **2)** $F(p)=\dfrac{3-p}{4p^2+8p-51}$.

Ответы: 13.1 1) $F(p)=\dfrac{\pi}{(p+3)^2+\pi^2}$ **; 2)** $F(p)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{p-\beta}{(p-\beta)^2+\beta^2}-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{p+\beta}{(p+\beta)^2+\beta^2}$ **;**

3) $F(p)=e^{-2p}\cdot\dfrac{1}{p^2+1}$**; 4)** $F(p)=\cos 2\cdot\dfrac{1}{p^2+1}-\sin 2\cdot\dfrac{p}{p^2+1}$ **;**

5) $F(p)=\dfrac{1}{p^2}-e^{-2\pi p}\cdot\dfrac{1}{p^2}-2\pi e^{-2\pi p}\cdot\dfrac{1}{p}+e^{-2\pi p}\cdot\dfrac{1}{p^2+1}$**; 6)** $F(p)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{p+3}+\dfrac{p+3}{(p+3)^2+4}\right)$**;**

7) $F(p)=\dfrac{3\left(p^2+34\right)}{\left(p^2+34\right)^2-100p^2}$**; 8)** $F(p)=\dfrac{1}{p+\alpha}$**; 9)** $F(p)=\dfrac{4}{(p-3)^2+16}$**;**

10) $F(p)=\dfrac{p+5}{(p+5)^2+49}$**; 11)** $F(p)=\dfrac{p+4}{(p+4)^2-25}$**; 12)** $F(p)=\dfrac{2}{(p-6)^2-4}$**;**

13) $F(p)=\dfrac{p}{p^2+9}\cdot e^{\frac{p}{3}}$**; 14)** $F(p)=\dfrac{5}{p^2+25}\cdot e^{-\frac{p}{5}\cdot 4}$ **; 15)** $F(p)=\dfrac{p+3}{(p+3)^2+36}\cdot e^{\frac{-(p+3)}{6}\cdot 5}$ **.**

13.2 1) $f(t)=2e^{-\frac{5t}{2}}\cos\dfrac{\sqrt{15}}{2}t-\dfrac{8}{\sqrt{15}}e^{-\frac{5t}{2}}\sin\dfrac{\sqrt{15}}{2}t$**;**

2) $f(t)=\operatorname{ch}3(t-1)\cdot 1(t-1)+\dfrac{1}{\sqrt{5}}\sin\sqrt{5}t\cdot 1(t)$**; 3)** $f(t)=\dfrac{1}{2}\operatorname{sh}2t+3e^t\cos\sqrt{3}\cdot t+\dfrac{1}{\sqrt{3}}e^t\sin\sqrt{3}\cdot t$**;**

4) $f(t)=\dfrac{1}{2}e^{\frac{3t}{2}}\left(\operatorname{ch}\dfrac{\sqrt{11}}{2}t-\dfrac{3}{\sqrt{11}}\operatorname{sh}\dfrac{\sqrt{11}}{2}t\right)$**; 5)** $f(t)=\dfrac{1}{2}\left(e^{-t+2}-e^{-3t+6}\right)$**; 6)** $f(t)=7e^{-5t}\cdot\sin 4t$**;**

7) $f(t)=e^{-t}\left(\cos 3t+\dfrac{2}{3}\sin 3t\right)$**; 8)** $f(t)=\dfrac{3t^2+2t-2}{54}\cdot e^t+\dfrac{2t+1}{27}\cdot e^{-2t}$**;**

9) $f(t)=10\sin 2t+20\cos 3t$**.**

13.3 1) $F(p)=\dfrac{pe^{-\frac{\pi p}{2}}}{p^2+1}$**; 2)** $F(p)=\dfrac{1}{p^2+1}\cdot e^{-4p}$**.**

13.4 1) $f(t)=t-2$**; 2)** $f(t)=\dfrac{1}{2}(t-2)e^{-(t-2)}$**; 3)** $f(t)=\dfrac{1}{3}-\dfrac{\cos 3t}{3}$**;**

4) $f(t)=\frac{2}{3}\left(\cos\sqrt{\frac{5}{48}}t\cdot e^{-\frac{1}{4}t}-\frac{3}{2}\sqrt{\frac{5}{48}}\sin\sqrt{\frac{5}{48}}t\cdot e^{-\frac{1}{4}t}\right)$.

13.5 1) $F(p)=\frac{2}{p^3}-\frac{1}{2(p-1)}$; **2)** $F(p)=\frac{1}{2p}-\frac{p}{2(p^2+16)}$; **3)** $F(p)=\frac{3}{p^2+9}+\frac{1-p^2}{(p^2+1)^2}$.

13.6 1) $f(t)=e^{-2t}\cdot\cos 4t$; **2)** $f(t)=\frac{2}{\sqrt{55}}\cdot e^{-t}\,\mathrm{sh}\frac{\sqrt{55}}{2}t-\frac{1}{4}e^{-t}\,\mathrm{ch}\frac{\sqrt{55}}{2}t$.

Занятие 14.

Дифференцирование и интегрирование оригиналов и изображений

Аудиторные задания

14.1 Найти изображение дифференциальных выражений:

1) $y''(t)-4y'(t)+3y(t)$, если $y(0)=1,\ y'(0)=2$;

2) $y'''(t)+6y''(t)+y'(t)-2y(t)+3$, если $y(0)=-3,\ y'(0)=7,\ y''(0)=1$;

3) $y'''(t)-3y''(t)+2y'(t)-4y(t)+1$, если $y(0)=-1,\ y'(0)=2,\ y''(0)=-3$;

4) $y''(t)-y'(t)-6y(t)$, если $y(0)=1,\ y'(0)=0$; **5)** $y''(t)+2y'(t)+y(t)$, если $y(0)=2,\ y'(0)=2$.

14.2 Пользуясь свойством дифференцирования изображения, найти изображения оригиналов:

1) $f(t)=t\cdot\cos\beta t$; **2)** $f(t)=t^2\cdot\mathrm{sh}\,3t$; **3)** $f(t)=2t-3t^4$; **4)** $f(t)=t^2\cdot\cos 3t$;

5) $f(t)=t\cdot\sin 5t$; **6)** $f(t)=t\cdot e^{-2t}$; **7)** $f(t)=t^3\cdot e^{-4t}$; **8)** $f(t)=t\cos 5t$.

14.3 Пользуясь свойством интегрирования оригинала, найти изображения оригиналов:

1) $\int_0^t\left(e^{-3t}\,\mathrm{ch}\,2t+e^{4t}\sin 2t\right)dt$; **2)** $\int_0^t\left(t^7-5t^4-2t^2+3\right)e^{2t}dt$; **3)** $\int_0^t\left(\sin t+3t^2\sin 2t\right)dt$; **4)** $\int_0^t t\cdot e^{-2t}dt$.

14.4 Найти оригиналы следующих изображений:

1) $F(p)=\frac{1}{p(p^2+4)}$; **2)** $F(p)=\frac{1}{p^2(p^2+4)}$; **3)** $F(p)=\frac{1}{(p-3)^5}$;

4) $F(p)=\frac{2p-5}{(p+2)^6}$; **5)** $F(p)=\frac{1}{p(p^2+1)}$; **6)** $F(p)=\frac{p^2}{(p^2+1)^2}$;

7) $F(p)=\frac{2}{p(p^2+5)}$; **8)** $F(p)=\frac{3}{p^2+4p}$; **9)** $F(p)=\frac{3p}{p^2+9p}$.

14.5 Используя теорему интегрирования изображения, найти изображения функций:

1) $f(t)=\dfrac{1-\cos 2t}{t}\cdot e^{-3t}$ **; 2)** $f(t)=\dfrac{e^t-1}{t}$ **; 3)** $f(t)=\dfrac{e^{-\alpha t}\sin\beta t}{t}$ **; 4)** $f(t)=\dfrac{\sin t}{t}$ **; 5)** $f(t)=\dfrac{\sin 3t}{t}$ **.**

Домашние задания

14.6 Найти изображение дифференциального выражения при заданных начальных условиях:

$x'''(t)+6x''(t)+x'(t)-2x(t);\ x(0)=x'(0)=0;\ x''(0)=1$ **.**

14.7 Пользуясь теоремой смещения и теоремой дифференцирования изображения, найти изображение оригинала $t\sin t$.

14.8 Пользуясь теоремой об интегрировании оригинала, найти изображение функции $\int\limits_0^t \cos\tau d\tau$ **.**

14.9 Используя теорему интегрирования изображения, найти изображение функции:

1) $\dfrac{\operatorname{sh} t}{t}$ **;** **2)** $\dfrac{\sin 2t}{t}$ **.**

Ответы:

14.1 1) $F(p)=\left(p^2-4p+3\right)Y(p)-p+2$ **; 2)** $F(p)=\left(p^3+6p^2+p-2\right)Y(p)+3p^2+11p-40+\dfrac{3}{p}$ **;**

3) $F(p)=\left(p^3-3p^2+2p-4\right)Y(p)+p^2-5p+11+\dfrac{1}{p}$ **; 4)** $F(p)=Y(p)\left(p^2-p-6\right)+1-p$ **;**

5) $F(p)=Y(p)\left(p^2+2p+1\right)-2p-6$ **.**

14.2 1) $F(p)=\dfrac{p^2-\beta^2}{\left(p^2+\beta^2\right)^2}$ **; 2)** $F(p)=\dfrac{18\left(p^2+3\right)}{\left(p^2-9\right)^3}$ **; 3)** $F(p)=2\cdot\dfrac{1}{p^2}-3\dfrac{4!}{p^5}$ **;**

4) $F(p)=\dfrac{2p\left(p^2-27\right)}{\left(p^2+9\right)^3}$ **; 5)** $F(p)=\dfrac{10p}{\left(p^2+25\right)^2}$ **; 6)** $F(p)=\dfrac{1}{(p+2)^2}$ **; 7)** $F(p)=\dfrac{6}{(p+4)^4}$ **;**

8) $F(p)=\dfrac{p^2-25}{\left(p^2+25\right)^2}$ **.**

14.3 1) $F(p)=\dfrac{1}{p}\left(\dfrac{p+3}{(p+3)^2-4}+\dfrac{2}{(p-4)^2+4}\right)$ **;**

2) $F(p)=\dfrac{1}{p}\left(\dfrac{7!}{(p-2)^8}-\dfrac{5!}{(p-2)^5}-\dfrac{4}{(p-2)^3}+\dfrac{3}{p-2}\right)$ **; 3)** $F(p)=\dfrac{1}{p}\left(\dfrac{1}{p^2+1}+\dfrac{6}{p^3}\right)$ **;**

4) $F(p)=\dfrac{4!}{p(p+2)^5}$.

14.4 1) $f(t)=\dfrac{1}{4}(1-\cos 2t)$; **2)** $f(t)=\dfrac{1}{4}\left(t-\dfrac{1}{2}\sin 2t\right)$; **3)** $f(t)=e^{3t}\cdot\dfrac{t^4}{4!}$;

4) $f(t)=e^{-2t}\left(\dfrac{t^4}{12}-\dfrac{3t^5}{40}\right)$; **5)** $f(t)=1-\cos t$; **6)** $f(t)=e^t\left(1-te^{-t}-e^{-t}\right)$; **7)** $f(t)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\cos 2t}{2}$;

8) $f(t)=\dfrac{3}{4}-\dfrac{3}{4}e^{-4t}$; **9)** $f(t)=\sin 3t$.

14.5 1) $F(p)=\ln\dfrac{\sqrt{p^2+6p+13}}{p+3}$; **2)** $F(p)=\ln\dfrac{p}{p-1}$;

3) $F(p)=\operatorname{arctg}\dfrac{p+\alpha}{\beta}$; **4)** $F(p)=\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}p$; **5)** $F(p)=\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\dfrac{p}{3}$.

14.6 $F(p)=\left(p^3+6p^2+p-2\right)X(p)-1$. **14.7** $F(p)=\dfrac{2p}{\left(p^2+1\right)^2}$. **14.8** $F(p)=\dfrac{1}{p^2+1}$.

14.9 1) $F(p)=\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{p+1}{p-1}\right|$; **2)** $F(p)=\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\dfrac{p}{2}$.

Занятие 15.

Свертка функций. Теорема Бореля. Формулы Дюамеля

Аудиторные задания

15.1 Найти свертку функций:

1) $f_1(t)=t,\ f_2(t)=e^t$; **2)** $f_1(t)=e^{\alpha t},\ f_2(t)=e^{\beta t}$; **3)** $f_1(t)=\cos\alpha t,\ f_2(t)=\cos 2t$;

4) $f_1(t)=\operatorname{ch}t,\ f_2(t)=\sin t$; **5)** $f_1(t)=t,\ f_2(t)=\cos t$; **6)** $f_1(t)=1-\alpha t,\ f_2(t)=e^{\alpha t}$;

7) $f_1(t)=e^{5t},\ f_2(t)=e^t$; **8)** $f_1(t)=2t,\ f_2(t)=e^{-3t}$.

15.2 Найти свертку и ее изображение:

1) $f_1(t)=\cos 2t,\ f_2(t)=\sin 2t$; **2)** $f_1(t)=e^{5t},\ f_2(t)=\sin 4t$.

15.3 Найти изображение свертки функций с помощью теоремы Бореля:

1) $f_1(t)=\operatorname{sh}2t,\ f_2(t)=\operatorname{ch}5t$; **2)** $f_1(t)=t^n,\ f_2(t)=e^{3t}\cos 5t$.

15.4 Пользуясь теоремой Бореля, найти оригиналы изображений:

1) $F(p)=\dfrac{p^2}{\left(p^2+\alpha^2\right)^2}$; **2)** $F(p)=\dfrac{p}{p^4-1}$; **3)** $F(p)=\dfrac{p}{\left(p^2+1\right)\left(p^2+4\right)}$; **4)** $F(p)=\dfrac{p^2}{p^4+13p^2+36}$.

15.5 Пользуясь формулой Дюамеля, найти оригинал изображения:

1) $F(p)=\dfrac{p^3}{p^4-8p^2+12}$; **2)** $F(p)=\dfrac{1}{p^3\left(p^2+1\right)}$; **3)** $F(p)=\dfrac{p^3e^{-2p}}{\left(p^2+9\right)^2}$.

15.6 Найти оригиналы изображений с помощью вычетов:

1) $F(p)=\dfrac{7-2p}{(p+2)(p-1)^2}$; **2)** $F(p)=\dfrac{p^2+2}{p^4+4}$;

3) $F(p)=\dfrac{p^2+21p-40}{(p+1)\left(p^2-5p+6\right)}$; **4)** $F(p)=\dfrac{5p^2+60p+146}{\left(p^2+4\right)(p+5)^2}$.

15.7 С помощью разложения дробей на простейшие найти оригиналы изображений:

1) $F(p)=\dfrac{3p^2-3p}{p^4-1}$; **2)** $F(p)=\dfrac{(5p+4)e^{-2p}}{(p-1)^2\left(p^2+2p+5\right)}$;

3) $F(p)=\dfrac{3p^2+3p+2}{(p-2)\left(p^2+4p+8\right)}$; **4)** $F(p)=\dfrac{p^{-4p}}{(p+1)^3(p+3)}$.

15.8 Найти свертку функций:

1) $f_1(t)=e^{5t},\ f_2(t)=t^3$; **2)** $f_1(t)=t,\ f_2(t)=\cos 5t$; **3)** $f_1(t)=e^{4t},\ f_2(t)=t^2$.

Домашние задания

15.9 Используя теорему Бореля об изображении свертки, найти изображение функции:

1) $\int\limits_0^t \tau e^{t-\tau}\sin(t-\tau)d\tau$; **2)** $f_1(t)=4t,\ f_2(t)=e^{7t}$.

15.10 Найти оригиналы для заданных функций:

1) $\dfrac{1}{(p+1)(p-3)}$; **2)** $\dfrac{1}{p^2+p+1}$; **3)** $\dfrac{4-p}{p^2+9}$; **4)** $\dfrac{p+2}{p^3+3p}$; **5)** $\dfrac{1}{p^4+2p^2-3}$; **6)** $\dfrac{2p+3}{p^3+4p^2+3p}$.

Ответы: 15.1 1) e^t-t-1; **2)** $\dfrac{e^{\beta t}-e^{\alpha t}}{\beta-\alpha}$; **3)** $\dfrac{1}{2}\left(t\cos\alpha t+\dfrac{1}{a}\sin\alpha t\right)$; **4)** $\dfrac{1}{2}(\operatorname{ch}t-\cos t)$; **5)** $1-\cos t$; **6)** t; **7)** $\dfrac{1}{4}e^{5t}-\dfrac{1}{4}e^t$; **8)** $\dfrac{2t}{3}+\dfrac{2}{9}e^{-3t}-\dfrac{2}{9}$.

15.2 1) $F(p)=\dfrac{2p}{\left(p^2+4\right)}$; **2)** $F(p)=\dfrac{4}{(p-5)\left(p^2+16\right)}$.

15.3 1) $F(p)=\dfrac{2}{p^2-4}\cdot\dfrac{2}{p^2-25}$; **2)** $F(p)=\dfrac{n!(p-3)}{p^{n+1}\left((p-3)^2+25\right)}$.

15.4 **1)** $f(t)=\frac{1}{2}\left(t\cos\alpha t+\frac{1}{2}\sin\alpha t\right)$; **2)** $f(t)=\frac{1}{2}(\operatorname{ch}t-\cos t)$; **3)** $f(t)=\frac{1}{3}(\cos t-\cos 2t)$;

4) $f(t)=\frac{1}{5}(3\sin 3t-2\sin 2t)$.

15.5 1) $f(t)=1/2\left(3\operatorname{ch}\sqrt{6}t-\operatorname{ch}\sqrt{2}t\right)$; **2)** $f(t)=t^2/2+\cos t-1$;

3) $f(t)=\cos 3(t-2)-1{,}5(t-2)\sin 3(t-2)$.

15.6 1) $f(t)=\frac{11}{9}e^{-2t}+\left(\frac{5}{3}t-\frac{11}{9}\right)e^{t}$; **2)** $f(t)=\operatorname{ch}t\cdot\sin t$; **3)** $f(t)=8e^{3t}-5e^{-t}-2e^{2t}$;

4) $f(t)=3\sin 2t-t\cdot e^{-5t}$.

15.7 1) $f(t)=-\frac{1}{4}e^{t}-\frac{5}{4}e^{-t}+\frac{3}{2}\cos t+\sin t$;

2) $f(t)=\frac{1}{16}\left(e^{t-2}(18(t-2)+1)-e^{-(t-2)}(\cos 2(t-2)+10\sin 2(t-2))\right)\cdot 1(t-2)$;

3) $f(t)=e^{2t}+e^{-2t}(2\cos 2t-0{,}5\sin 2t)$;

4) $f(t)=\frac{1}{8}\left(e^{-(t-4)}\left(1-2(t-4)+2(t-4)^2\right)\right)-e^{-3(t-4)}\cdot 1(t-4)$.

15.8 1) $e^{-5t}\left(-\frac{1}{5}t^3-\frac{3}{25}t^2-\frac{6}{125}t-\frac{6}{625}\right)+e^{5t}\cdot\frac{6}{625}$; **2)** $\frac{1}{25}-\frac{1}{25}\cos 5t$; **3)** $-\frac{t^2}{4}-\frac{t}{8}-\frac{1}{32}+\frac{e^{4t}}{32}$.

15.9 1) $F(p)=\frac{1}{p^2\left(p^2-2p+2\right)}$; **2)** $F(p)=\frac{4}{p^2}\cdot\frac{17}{p-7}$.

15.10 **1)** $f(t)=\frac{1}{4}\left(e^{3t}-e^{t}\right)$; **2)** $f(t)=\frac{2}{\sqrt{3}}e^{-\frac{t}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t$; **3)** $f(t)=\frac{4}{3}\sin 3t-\cos 3t$;

4) $f(t)=\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\cos\sqrt{3}t+\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\sqrt{3}t$; **5)** $f(t)=\frac{1}{4}\left(\operatorname{sh}t-\frac{\sqrt{3}}{3}\sin\sqrt{3}t\right)$; **6)** $f(t)=1-\frac{1}{2}e^{-t}-\frac{1}{2}e^{-3t}$.

Занятие 16.
Применение операционного исчисления к решению линейных дифференциальных уравнений, систем дифференциальных уравнений, интегральных уравнений и уравнений с частными производными

Аудиторные задания

16.1 Найти решения дифференциальных уравнений при заданных начальных условиях:

1) $4x''+12x'+9x=144e^{3t/2}$, $x(0)=1$, $x'(0)=\dfrac{1}{2}$; **2)** $x''+4x=\sin^2 t$, $x(0)=0$, $x'(0)=0$;

3) $x''-9x=2-t$, $x(0)=0$, $x'(0)=1$; **4)** $x''+4x=2\cos t$, $x(0)=0$, $x'(0)=4$;

5) $x''-x=e^t$, $x(0)=1$, $x'(0)=0$; **6)** $x^{IV}+2x''+x=\cos t$, $x(0)=0$, $x'(0)=0$, $x''(0)=0$, $x'''(0)=0$;

7) $y''-2y'-3y=e^{3t}$, $y(0)=0$, $y'(0)=0$; **8)** $y''+y'-2y=e^{-t}$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$;

9) $y'''-y'=t$, $y(0)=0$, $y'(0)=0$, $y''(0)=1$.

16.2 Найти решения систем дифференциальных уравнений при заданных начальных условиях:

1) $\begin{cases} x'-3x-5y=0, \\ y'+2x-8y=0, \end{cases}$ $x(0)=2,\quad y(0)=5$; **2)** $\begin{cases} x'-x+y=1{,}5t^2, \\ y'+4x+2y=1+4t, \end{cases}$ $x(0)=0,\quad y(0)=0$;

3) $\begin{cases} x'-2x-4y=\cos t, \\ y'+x+2y=\sin t, \end{cases}$ $x(0)=0,\quad y(0)=0$; **4)** $\begin{cases} x'=x+2y, \\ y'=2x+y+1, \end{cases}$ $x(0)=0,\quad y(0)=5$;

5) $\begin{cases} x'=2y, \\ y'=2x, \end{cases}$ $x(0)=2,\quad y(0)=2$; **6)** $\begin{cases} x'=3x+4y, \\ y'=4x-3y, \end{cases}$ $x(0)=1,\quad y(0)=1$.

16.3 Решить интегральные уравнения:

1) $\int\limits_0^t (1+t-\tau)y(\tau)d\tau=\dfrac{1}{2}e^{-t}\cdot\sin t$; **2)** $y''(t)-4\int\limits_0^t (y'(\tau)+y(\tau))e^{-(t-\tau)}d\tau=0, y(0)=0, y'(0)=6$;

3) $y'(t)+2y(t)+\int\limits_0^t y(\tau)\left(e^{-3(t-\tau)}+3e^{t-\tau}\right)d\tau=0, y(0)=1$;

4) $y''(t)+\int\limits_0^t (y''(\tau)+y(\tau))\sin(t-\tau)d\tau=2\cos t, y(0)=0, y'(0)=0$;

5) $\int\limits_0^t y(\tau)\cdot\sin(t-\tau)d\tau=\sin^2 t$; **6)** $\int\limits_0^t y(\tau)\cdot\operatorname{ch}(t-\tau)d\tau=t^n$;

7) $y(t)=\sin 2t-\dfrac{8}{3}\int\limits_0^t y(\tau)\operatorname{sh}3(t-\tau)d\tau$; **8)** $y(t)=\int\limits_0^t y\,dt+1$.

16.4 Найти решения уравнений в частных производных:

1) $(x+t)\dfrac{\partial u}{\partial t}=x+u,\quad u(x,0)=x^3-x,\quad 0<x<\infty,\quad 0<t<\infty$;

2) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t}=0,\ u(0,t)=E_0\sin\omega t,\ u(l,t)=0$;

3) $\dfrac{\partial u}{\partial t}-\dfrac{\partial u}{\partial x}=t+x-u,\quad u(x,0)=1-x,\quad 0<x<\infty,\quad 0<t<\infty$;

4) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\dfrac{\partial u}{\partial x}+u=t,\quad u(x,0)=x$**,** $\dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t}=0,\quad 0<x<\infty,\quad 0<t<\infty$**;**

5) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad u(x,0)=0,\ \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t}=0$**,** $u(0,t)=1, u(l,t)=0, 0<x<\infty, 0<t<\infty$**.**

Домашние задания

16.5 Найти решения дифференциальных уравнений при заданных начальных условиях:

1) $x'-x=\cos t-\sin t,\ x(0)=0$**;** **2)** $x''-5x'+6x=12;\ x(0)=2,\ x'(0)=0$**;**

3) $x''+4x'+3x=1;\ x(0)=3,\ x'(0)=-2$**;** **4)** $x''+3x'=e^{-3t};\ x(0)=0,\ x'(0)=-1$**.**

16.6 Найти общее решение дифференциального уравнения $x''+9x=\cos 3t$.

16.7 Найти решения систем дифференциальных уравнений при заданных начальных условиях:

1) $\begin{cases} x'+x-2y=0,\\ y'+x+4y=0; \end{cases}\quad x(0)=y(0)=1$**;** **2)** $\begin{cases} x'+4y+2x=4t+1,\\ y'+x-y=\dfrac{3}{2}t^2; \end{cases}\quad x(0)=y(0)=0$**;**

3) $\begin{cases} x'+7x-y=5,\\ y'+2x+5y=-37t; \end{cases}\quad x(0)=y(0)=0$**;** **4)** $\begin{cases} x'=4y+z, & x(0)=5,\\ y'=z, & y(0)=0,\\ z'=4y; & z(0)=4. \end{cases}$

16.8 Решить интегральные уравнения:

1) $\int\limits_0^t y(\tau)(t-\tau)^2\,d\tau=\dfrac{1}{3}t^3$**;** **2)** $\int\limits_0^t y(\tau)\cos(t-\tau)d\tau=1-\cos t$**.**

16.9 Найти решения уравнений:

1) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\dfrac{p^2}{a^2}u=-pA\cdot\dfrac{1}{a^2}\sin\dfrac{\pi x}{l},\quad u(0,t)=u(l,t)=0$**;**

2) $\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad u(x,0)=0,\quad u(0,t)=u_0,\quad t>0$**;**

3) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{1}{a^2}\cdot\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}, u(x,0)=A\cos\left(\dfrac{n\pi x}{l}\right), \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t}=0$**,** $\dfrac{\partial u(0,t)}{\partial x}=\dfrac{\partial u(l,t)}{\partial x}=0, 0\le x\le l$**.**

Ответы: 16.1 1) $x(t)=e^{-3t/2}\left(18t^2+2t+1\right)$**; 2)** $x(t)=\dfrac{1}{8}(1-\cos 2t-t\sin 2t)$**;**

3) $x(t)=\left(3t+6-7e^{3t}-e^{-3t}\right)/27$; **4)** $x(t)=(2+0{,}5t)\cdot\sin 2t$; **5)** $x(t)=0{,}5\left(te^{t}-\operatorname{sh}t\right)$;

6) $x(t)=t(\sin t-t\cos t)/8$; **7)** $y(t)=\frac{1}{4}te^{3t}-\frac{1}{16}e^{3t}+\frac{1}{16}e^{-t}$; **8)** $y(t)=\operatorname{sh}t$;

9) $y(t)=-2t-\frac{t^2}{2}+e^{t}+e^{-t}$.

16.2 1) $\begin{cases}x(t)=5e^{2t}-3e^{-7t},\\ y(t)=6e^{-7t}-e^{2t};\end{cases}$ **2)** $\begin{cases}x(t)=-0{,}5t^2,\\ y(t)=t^2+t;\end{cases}$ **3)** $\begin{cases}x(t)=1+10t-3\sin t-2\cos t,\\ y(t)=4-7t+2\sin t-2\cos t;\end{cases}$

4) $\begin{cases}x(t)=-\frac{2}{3}-2e^{-t}+\frac{8}{3}e^{3t},\\ y(t)=\frac{1}{3}+2e^{-t}+\frac{8}{3}e^{3t};\end{cases}$ **5)** $\begin{cases}x(t)=\frac{5}{2}e^{2t}-\frac{1}{2}e^{-2t},\\ y(t)=\frac{5}{2}e^{2t}-\frac{1}{2}e^{-2t};\end{cases}$ **6)** $\begin{cases}x(t)=\frac{6}{5}e^{5t}-\frac{1}{5}e^{-5t},\\ y(t)=\frac{3}{5}e^{5t}+\frac{2}{5}e^{-5t}.\end{cases}$

16.3 1) $y(t)=e^{-t}\left(\frac{1}{2}-\sin t\right)$; **2)** $y(t)=3\operatorname{sh}2t$; **3)** $y(t)=4e^{-t}-4te^{-t}-3e^{-2t}$; **4)** $y(t)=t\cdot\sin t$;

5) $y(t)=(1+3\cos 2t)/2$; **6)** $y(t)=nt^{n-1}-t^{n+1}/(n+1),\ n>0$; **7)** $y(t)=(13\sin 2t-16\operatorname{sh}t)/5$;

8) $y(t)=e^{t}$.

16.4 1) $u(x,t)=x^3-x+tx^2$; **2)** $u(x,t)=E_0\left(\frac{\sin(\omega(e-x)/a)\sin\omega t}{\sin(\omega e/a)}+2a\omega e\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(k\pi x/e)\cdot\sin(ak\pi t/e)}{e^2\omega^2-a^2k^2\pi^2}\right)$

3) $u(x,t)=t+e^{-t}(1-2t-2x)+x$; **4)** $u(x,t)=t+x\cos t-\sin t-0{,}5t\sin t$;

5) $u(x,t)=1-\frac{x}{e}-\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sin\frac{k\pi x}{e}\cos\frac{k\pi at}{e}\right)/k$.

16.5 1) $x(t)=\sin t$; **2)** $x(t)=2$; **3)** $x(t)=\frac{1}{3}+3e^{-t}-\frac{1}{3}e^{-3t}$; **4)** $x(t)=\frac{2}{9}\left(e^{-3t}-1\right)-\frac{t}{3}e^{-3t}$.

16.6 $x(t)=C_1\cos 3t+C_2\sin 3t+\frac{t}{6}\sin 3t$.

16.7 1) $\begin{cases}x(t)=4e^{-2t}-3e^{-t},\\ y(t)=3e^{-3t}-2e^{-2t};\end{cases}$ **; 2)** $\begin{cases}x(t)=t^2+t,\\ y(t)=-\frac{1}{2}t^2;\end{cases}$ **; 3)** $\begin{cases}x(t)=1-t-e^{-6t}\cos t,\\ y(t)=1-7t-e^{-6t}\cos t+e^{-6t}\sin t;\end{cases}$ **;**

4) $\begin{cases}x(t)=1+3e^{2t}+e^{-2t},\\ y(t)=e^{2t}-e^{-2t},\\ z(t)=2e^{2t}+2e^{-2t}.\end{cases}$

16.8 1) $y(t)=1$; **2)** $y(t)=t$. **16.9 1)** $u(x,t)=A\cos\frac{\pi at}{e}\cdot\sin\frac{\pi x}{e}$;

2) $u(x,t)=U_0\left(1-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot\int\limits_0^{x/2a\sqrt{t}}e^{-\tau}d\tau\right)$**; 3)** $u(x,t)=A\cos\frac{n\pi at}{e}\cdot\cos\frac{n\pi x}{e}$**.**

Занятие 17.

Дифференциальные уравнения в частных производных

Аудиторные задания

17.1 Определите тип дифференциального уравнения:

1) $x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\sqrt{xy}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{\sqrt{x}}-\sqrt{y}\right)\frac{\partial u}{\partial y}=0$**;**

2) $y^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+x^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$**;** **3)** $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2x\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$**.**

17.2 Найдите решение уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, если $u(x,0)=\cos x$; $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0$.

17.3 Найдите решение уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, если:

1) $u(x,0)=\frac{\sin x}{x}$; $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=\frac{1}{1+x^2}$**;** **2)** $u(x,0)=\cos 2x$; $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=\sin x$ **.**

17.4 Найдите отклонение $u(x,t)$ закрепленной на концах $x=0$ и $x=l$ однородной струны от положения равновесия, если в начальный момент струна имела форму параболы с вершиной в точке $x=\frac{l}{2}$ и отклонением от положения равновесия $-h$, а начальные скорости отсутствуют.

17.5 Струна закреплена на концах $x=0$ и $x=2$. В начальный момент имеет форму параболы $u=2x-x^2$. определить форму струны для любого момента времени, если начальные скорости точек струны отсутствуют.

17.6 Струна, закрепленная на концах $x=0$ и $x=l$, в начальный момент имеет форму $u=h\left(x^4+2x^3+x\right)$. Найти форму струны для любого момента времени *t*, если начальные скорости отсутствуют.

17.7 Найти решение уравнения теплопроводности $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, если

$$u(x,0)=\begin{cases} x \text{ при } 0<x\le \dfrac{l}{2} \\ l-x \text{ при } \dfrac{l}{2}\le x<l \end{cases} \quad \text{и } u(0,t)=u(l,t)\equiv 0.$$

17.8 Решить задачу Дирихле в круге $0\le\rho\le 1$, если $u(\rho,\varphi)=\varphi^2$, $\varphi=1$.

17.9 Решить уравнение $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{a^2}{l^2}\sin\dfrac{\pi a t}{l}$ при начальных и граничных условиях: $u(x,0)=u'_t(x,0)=u(0,t)=u(l,t)=0$, где $0\le x\le l$ и $t\ge 0$.

Домашние задания

17.10 Определите тип дифференциального уравнения:

1) $y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-2x\dfrac{\partial u}{\partial x}=0$; **2)** $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+x\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$.

17.11 Найти закон свободных колебаний закрепленной на конце $x=0$ однородной струны, если правый конец ее при $x=l$ перемещается так, что касательная к струне остается постоянно горизонтальной. В начальный момент струна находилась в положении равновесия и ей была придана начальная скорость $u'_t(x,0)=\sin\dfrac{\pi x}{l}$.

17.12 Определить температуру тонкого однородного стержня длины l, изолированного от внешнего пространства, начальная температура которого равна $f(x)=\dfrac{cx(l-x)}{l^2}$.

17.13 Решить задачу Дирихле в круге $0\le\rho\le 1$, если $u(1,\varphi)=\varphi$.

Ответы: 17.1 1) параболический тип в области $x+y>0;\ x+y<0$;

2) параболический тип в области $x^2+y^2=R^2$; **3)** гиперболический тип.

17.2 $u(x,t)=\dfrac{\cos(x-t)+\cos(x+t)}{2}=\cos x\cos t$.

17.3 1) $u(x,t)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sin(x-at)}{x-at}+\dfrac{\sin(x+at)}{x+at}+\dfrac{\operatorname{arctg}(x+at)-\operatorname{arctg}(x-at)}{a}\right)$;

2) $u(x,t)=\cos 2x\cos 2at+\dfrac{1}{a}\sin x\sin at$.

17.4 $u(x,t)=\dfrac{4h}{cr}\left(xl-x^2-t^2\right)$. **17.5** $u(x,t)=\dfrac{32}{\pi^3}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2n+1)^3}\cdot\cos\dfrac{(2n+1)\pi at}{2}\cdot\sin\dfrac{(2n+1)\pi x}{2}$.

17.6 $u(x,t)=h\left(x^4+6x^2a^2t^2+x^4t^4+2x^4+3xa^2t^2+x\right)$.

17.7 $u(x,t)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi t}}\left(\int\limits_0^{l/2}\alpha l^{-\frac{(\alpha-x)^2}{4t}}d\alpha+\int\limits_{l/2}^{l}(l-\alpha)l^{-\frac{(l-\alpha-x)^2}{4t}}d\alpha\right)$.

17.8 $u(x,t)=\dfrac{4}{3}\pi^2+4\sum\left(\dfrac{1}{n^2\cos n\varphi}-\dfrac{4\pi}{n}\sin n\varphi\right)\rho^n$.

17.9 $u(x,t)=\dfrac{2}{\pi^3}\left(\sin\dfrac{\pi at}{l}-\dfrac{\pi at}{l}\cos\dfrac{\pi at}{l}\right)\sin\dfrac{\pi x}{l}+$

$$+\frac{1}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(2n+1)^2}\left((2n+1)\sin\frac{\pi at}{l}-\sin\frac{(2n+1)\pi at}{l}\right)\sin\frac{(2n+1)\pi x}{l}.$$

17.10 1) гиперболического типа; **2)** эллиптического типа при $x>0$, гиперболического типа при $x<0$.

17.11 $u(x,t)=\dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\dfrac{\pi nx}{l}\sin\dfrac{a\pi n}{l}t$. **17.12** $u(x,t)=l^{\frac{-\pi^2a^2t}{l^2}}\cdot\dfrac{cx(l-x)}{l^2}$.

17.13 $u(\rho,\varphi)=2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin n\varphi}{n}\rho^n$.

РАЗДЕЛ КОНТРОЛЯ ЗНАНИЙ

Контроль знаний является неотъемлемой частью изучения математики. Только самостоятельная работа студентов способна отразить уровень их подготовки. Важное место в этом случае отводится решению тестов и выполнению контрольных работ (для студентов заочной формы обучения).

В настоящее время на кафедре «высшая математика № 1» разработаны различные варианты тестов по изучаемым разделам математики. Тесты снабжены ответами, что позволяет студенту проверить правильность своего решения. Они приведены в работе [10].

Контрольные работы предназначены активизировать самостоятельную работу студентов.

В третьем семестре студенты-заочники выполняют контрольную работу № 3 [11]. Номер варианта выбирается по двум последним числам зачетной книжки. При этом отбрасывается число, кратное **30**.

Например, для зачетной книжки 301154/13 вариант выполняемой работы будет 13. Для номера 301141/124 – 4-й вариант. Для номера 301041/176 – 26-й вариант и т.д.

Номера задач после первого номера получаются путем прибавления к предыдущей задачи числа **30**. Например, для 16-го варианта номерами заданий контрольной работы будут: 16, 46, 76, 106, 136.

Типовой расчет «Ряды»

В задачах 1, 2 исследовать сходимость числового ряда.

В задаче 3 исследовать сходимость знакочередующегося ряда. В случае сходимости исследовать на абсолютную и условную сходимость.

В задачах 4, 5 определить область сходимости степенных рядов.

В задаче 6 найти четыре первых, отличных от нуля, члена разложения в ряд функции $f(x)$ по степеням $x - x_0$.

В задаче 7 разложить функцию $f(x)$ в ряд по степеням x, используя разложения основных элементарных функций.

В задаче 8 вычислить с помощью ряда определенный интеграл с точностью до 0,001.

В задаче 9 найти первые k членов разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения при указанных начальных условиях.

В задаче 10 разложить в ряд Фурье функцию $f(x)$ на интервале $[-\pi, \pi]$.

Вариант 1

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n+2}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{2}{5}\right)^n$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{3n+1}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\sqrt{n}}$;

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n\cdot 3^n}(x+1)^n$; 6) $f(x)=\frac{1}{x}, x_0=1$; 7) $f(x)=\sin^2 x\cos^2 x$; 8) $\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}}dx$;

9) $y'=x+y^2, y(1)=1, k=3$; 10) $f(x)=\begin{cases}\pi+x, -\pi\le x<0,\\ 0,\ 0\le x\le\pi.\end{cases}$

Вариант 2

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^2+1}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{(\sqrt{2})^n}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\sqrt{n}}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty}n\left(\frac{x}{2}\right)^n$;

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n^2}$; 6) $f(x)=e^x, x_0=-2$; 7) $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1-x^4}}$; 8) $\int_{-1}^{0}\frac{dx}{\sqrt[3]{8-x^3}}$;

9) $y'=2x+y^3, y(1)=1, k=3$; 10) $f(x)=\begin{cases}2x-1, -\pi\le x\le 0,\\ 0,\ 0<x\le\pi.\end{cases}$

Вариант 3

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{3n+2}$. 2) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$. 3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n-1}{n(n+1)}$. 4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n}\left(\frac{x}{3}\right)^n$.

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-5)^n}{n\sqrt{n}}$. 6) $f(x)=\cos x, x_0=\frac{\pi}{2}$. 7) $f(x)=\frac{\ln(1+x)}{x}$. 8) $\int_0^{0,2}\sqrt{x}e^{-x}dx$.

9) $y'=x+\frac{1}{y}, y(0)=1, k=5$. 10) $f(x)=\begin{cases}-x+\frac{1}{2}, -\pi\le x\le 0,\\ 0,\quad 0<x\le\pi.\end{cases}$.

Вариант 4

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+1}{\sqrt{n3^n}}$. 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4+n^2}{1+n^2}\right)^2$. 3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^n$. 4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n-1}{2^n}\cdot x^n$.

5) $\sum_{n=1}^{\infty}n^n(x+3)^n$. 6) $f(x)=\sqrt{x},\ x(0)=4$. 7) $f(x)=x\,ch\,x$. 8) $\int_0^{0,2}\sqrt{x}\cos x\,dx$.

9) $y'=2x-0{,}1y^2,\ y(0)=1,\ k=3$. 10) $f(x)=\begin{cases}2x+3,\ -\pi\le x\le 0,\\ 0\ ,\quad 0<x\le\pi.\end{cases}$

Вариант 5

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{4^n}$. 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+2}{2n-1}\right)^n$. 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}$. 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^n x^n}{2^n}$.

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2+x)^n$. 6) $f(x)=\cos^2 x, x_0=\frac{\pi}{4}$. 7) $f(x)=\sqrt[3]{8+x}$. 8) $\int\limits_0^{0,5}\sqrt{1+x^2}\,dx$.

9) $y'=x^2-xy, y(0)=0{,}1; k=3$. 10) $f(x)=\begin{cases} x-2, -\pi\le x\le 0,\\ 0,\ 0<x\le\pi.\end{cases}$

Вариант 6

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{10n+1}$. 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{(2n)!}$. 3) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln}{n}$. 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n}x^n$.

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{n^2}$. 6) $f(x)=e^{3x}, x_0=1$. 7) $f(x)=\cos^2 x$. 8) $\int\limits_0^{0,5}\frac{dx}{1+x^5}$.

9) $y''=2yy', y(0)=0, y'(0)=1, k=3$. 10) $f(x)=\begin{cases} 0, -\pi\le x<0,\\ 4x-3,\ 0\le x\le\pi.\end{cases}$

Вариант 7

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+3}{n^3-2}$. 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{3^n(2n+1)}$. 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{n+10}$. 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\cdot 3^n}$.

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{(n+1)\ln(n+1)}$. 6) $f(x)=\operatorname{ctg} x, x_0=\frac{\pi}{4}$. 7) $f(x)=\frac{x}{4+x^2}$. 8) $\int\limits_0^{0,1}\frac{e^x-1}{x}dx$.

9) $y'=2x+\cos y, y(0)=0, k=5$. 10) $f(x)=\begin{cases} 5-x, -\pi\le x\le 0,\\ 0,\ 0<x\le\pi.\end{cases}$

Вариант 8

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n+2}{5n+1}$. 2) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^2}$. 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n+5}}$. 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^n}$.

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-4)^n}{\sqrt{n^2+1}}$. 6) $f(x)=\operatorname{sh} x, x_0=1$. 7) $f(x)=\frac{3x-5}{x^2-4x+3}$. 8) $\int\limits_0^{0,5}x^2\cos 3x\,dx$.

9) $y'''=ye^x-xy'^2, y(0)=y'(0)=y''(0)=1, k=6$. 10) $f(x)=\begin{cases} 0, -\pi\le x<0,\\ 3x-1,\ 0\le x\le\pi.\end{cases}$

Вариант 9

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2n+5}$. 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{3n}\right)^n$. 3) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{6n-4}$. 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}\left(\frac{x}{2}\right)^n$.

5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x+5)^n}{n^3+1}$. 6) $f(x) = \operatorname{tg} x, x_0 = \frac{\pi}{4}$. 7) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}$. 8) $\int_0^{0,5} \ln\left(1+x^2\right)$.

9) $y' = 3x - y^2, y(0) = 2, k = 3$. 10) $f(x) = \begin{cases} 3-2x, -\pi \le x \le 0, \\ 0, \ 0 < x \le \pi. \end{cases}$.

Вариант 10

1) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \sin \frac{\pi}{2^n}$. 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}$. 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt[n]{n}}$. 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$.

5) $\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{x+2}{2}\right)^n$. 6) $f(x) = 3x^3 - 6x^2 + 3, x_0 = -1$. 7) $f(x) = \ln(2+x)$. 8) $\int_0^{0,4} \sqrt{x} e^{-\frac{x}{4}} dx$.

9) $y' = x^2 - 2y, y(0) = 1, k = 4$. 10) $f(x) = \begin{cases} 0, \quad -\pi \le x < 0, \\ \frac{\pi - x}{2}, \ 0 \le x \le \pi. \end{cases}$.

Вариант 11

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+n}{1+n^2}\right)^2$. 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n!}$. 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}$. 4) $\sum_{n=1}^{\infty} (2n+1)^2 x^n$.

5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-.3)^n}{(2n+1)\sqrt{n+1}}$. 6) $f(x) = x\sqrt{x}, x_0 = 3$. 7) $f(x) = \cos(x+\alpha)$. 8) $\int_0^{0,5} \frac{1+\cos x}{x^2} dx$.

9) $y'' = \frac{y'}{y} - \frac{1}{x}, y(1) = 1, y'(1) = 0, k = 4$. 10) $f(x) = \begin{cases} 5x+1, -\pi \le x \le 0, \\ 0, \ 0 < x \le \pi. \end{cases}$

Вариант 12

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{1+n^2}$. 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n!}$. 3) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n-1}{(n+1)\sqrt{n}}$. 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2n-1}$.

5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+4)^n}{n \cdot 3^n}$. 6) $f(x) = \frac{1}{x+1}, x_0 = 2$. 7) $f(x) = x\sin^2 x$. 8) $\int_0^{0,8} \frac{1-\cos x}{x} dx$.

9) $y' = x^2 + 0.2y^2, y(0) = 0, k = 3$. 10) $f(x) = \begin{cases} 0, -\pi \le x < 0, \\ 1-4x, \ 0 \le x \le \pi. \end{cases}$

Вариант 13

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$. 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^{\frac{n}{2}}$. 3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt[3]{n}}{n+1}$. 4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\cdot 2^n}$.

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n(x-1)^n}{\sqrt{n^2+1}}$. 6) $f(x)=\operatorname{ch}x, x_0=1$. 7) $f(x)=\frac{x^6}{1-x}$. 8) $\int_0^1\sin x^2dx$.

9) $y''=y'^2+xy, y(0)=4, y'(0)=-2, k=5$. 10) $f(x)=\begin{cases}3x+2, -\pi\le x\le 0,\\ 0,\ 0<x\le\pi.\end{cases}$

Вариант 14

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$. 2) $\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi}{2^{n+1}}$. 3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n+1}{n^2}$. 4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^nx^n}{2n-1}$.

5) $\sum_{n=1}^{\infty}(3n+1)\left(\frac{x-2}{4}\right)^n$. 6) $f(x)=\frac{1}{x+3}, x_0=-2$. 7) $f(x)=\ln(x+1), x_0=2$. 8) $\int_0^{0,1}\frac{\ln(1+x)}{x}dx$.

9) $y'=xy+y^2, y(0)=0.1, k=3$. 10) $f(x)=\begin{cases}0, -\pi\le x<0,\\ 4-2x,\ 0<x\le\pi.\end{cases}$

Вариант 15

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$. 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(5n+8)\ln^3(5n+8)}$. 3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}$. 4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^nx^n}{6^n\sqrt[3]{n}}$.

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{n\cdot 5^n}$. 6) $f(x)=\frac{1}{2x+5}, x_0=3$. 7) $f(x)=xe^{-x}$. 8) $\int_0^1\cos\sqrt[3]{x}dx$.

9) $y'=0.2x+y^2, y(0)=1, k=3$. 10) $f(x)=\begin{cases}x+\frac{\pi}{2}, -\pi\le x\le 0,\\ 0,\ 0<x\le\pi.\end{cases}$

Вариант 16

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^2+2n}$. 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^{n+1}}$. 3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2+1}$. 4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{(n+2)^2}\cdot x^n$.

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n}$. 6) $f(x)=\sin^2x, x_0=\frac{\pi}{4}$. 7) $f(x)=\operatorname{sh}\frac{x}{2}$. 8) $\int_0^1\sqrt{x}\sin x dx$.

9) $y''=x^2+y^2, y(-1)=2, y'(-1)=0.5, k=4$. 10) $f(x)=\begin{cases}0, -\pi\le x<0,\\ 6x-5,\ 0\le x\le\pi.\end{cases}$

Вариант 17

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[3]{n}-n}$. **2)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2^n(n^2+1)}$. **3)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n!}{n^n}$. **4)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n}}$.

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{n\cdot 5^n}$. **6)** $f(x)=\sin\frac{\pi x}{4}, x_0=2$. **7)** $f(x)=x^2e^{2x}$. **8)** $\int\limits_0^{0,5}\frac{e^{-2x^2}}{\sqrt{x}}dx$.

9) $y'=x^2+xy+e^{-x}, y(0)=0, k=3$. **10)** $f(x)=\begin{cases}7-3x, -\pi\le x\le 0,\\ 0,\ 0<x\le\pi.\end{cases}$

Вариант 18

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{n+3}{2n+1}}$. **2)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{\pi}{3^n}$. **3)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{3}{\ln(n+1)}$. **4)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2+5}$.

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{10^n}$. **6)** $f(x)=\frac{1}{\sqrt{4+x}}, x_0=-3$. **7)** $f(x)=(1+x)\cos x$. **8)** $\int\limits_0^1\cos\frac{x^2}{4}dx$.

9) $y''+y=0, y(0)=0, y'(0)=1, k=3$. **10)** $f(x)=\begin{cases}0, -\pi\le x<0,\\ \frac{\pi}{4}-\frac{x}{2},\ 0\le x\le\pi.\end{cases}$

Вариант 19

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2+n}{1+n^2}$. **2)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{(n+1)!}$. **3)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-1)3^n}$. **4)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n!}x^n$.

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-4)^n}{(n+1)^2}$. **6)** $f(x)=\frac{1}{1-x}, x_0=2$. **7)** $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. **8)** $\int\limits_0^{0.5}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}dx$.

9) $y''=y\cos y'+x, y(0)=1, y'(0)=\frac{\pi}{3}, k=3$. **10)** $f(x)=\begin{cases}6x-2, -\pi\le x\le 0,\\ 0,\ 0<x\le\pi.\end{cases}$

Вариант 20

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-4n+13}$. **2)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{3n}\right)^n$. **3)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n}}$. **4)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)!}{2^n}x^n$.

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+4)^n}{\sqrt{n+1}}$. **6)** $f(x)=\frac{1}{x+1}, x_0=1$. **7)** $f(x)=\arcsin x$. **8)** $\int\limits_0^1\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)dx$.

9) $y'=\cos x+x^2, y(0)=0, k=3$. **10)** $f(x)=\begin{cases}0, -\pi\le x<0,\\ 4-9x,\ 0\le x\le\pi.\end{cases}$

Вариант 21

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{3n+4}$. **2)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$. **3)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\cdot 3^n}$. **4)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n!\, x^n$.

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)(n+2)}{(n+3)^2}(x-3)^n$. **6)** $f(x)=\frac{2}{x+2},\ x_0=1$. **7)** $f(x)=\operatorname{arctg} x$. **8)** $\int\limits_0^{0,5}\frac{x-\operatorname{arctg} x}{x^2}\,dx$.

9) $y'-4y+2xy^2-e^{3x}=0,\ y(0)=2,\ k=4$. **10)** $f(x)=\begin{cases}\frac{x}{3}-3, & -\pi\le x\le 0,\\ 0, & 0<x\le\pi.\end{cases}$

Вариант 22

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+5}{n^4-1}$. **2)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{10^n}{3^n(n+2)}$. **3)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+1}$. **4)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$.

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{(n+1)(n+2)}$. **6)** $f(x)=xe^x,\ x_0=1$. **7)** $f(x)=x\ln(1+x^2)$. **8)** $\int\limits_0^{0,5}e^{-x^2}\,dx$.

9) $(1-x)y''+y=0,\ y(0)=y'(0)=1,\ k=3$. **10)** $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x\le 0,\\ 10x-3, & 0<x\le\pi.\end{cases}$

Вариант 23

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+2n}{3n^2+4}$. **2)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^3}{(3n)!}$. **3)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(n+1)}$. **4)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2^n\cdot n}$.

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+8)^n}{3n+2}$. **6)** $f(x)=\ln x,\ x_0=1$. **7)** $f(x)=\frac{x^2}{1-x^2}$. **8)** $\int\limits_0^{0.4}\sqrt{1-x^3}\,dx$.

9) $4x^2y''+y=0,\ y(1)=1,\ y'(1)=\frac{1}{2},\ k=3$. **10)** $f(x)=\begin{cases}1-\frac{x}{4}, & -\pi\le x\le 0,\\ 0, & 0<x\le\pi.\end{cases}$

Вариант 24

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{5^n}$. **2)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+2}{2n+1}\right)^n$. **3)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+4}}$. **4)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)(2n+1)}{2n(2n+2)}\cdot x^n$.

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{n(n+1)}$. **6)** $f(x)=\frac{1}{1-x},\ x_0=2$. **7)** $f(x)=\frac{x}{1+x}$. **8)** $\int\limits_0^{1}\sqrt{x}\cos x\,dx$.

9) $y'=2x^2+y^3,\ y(1)=1,\ k=3$. **10)** $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x\le 0,\\ \frac{x}{5}-2, & 0<x\le\pi.\end{cases}$

Вариант 25

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+2n}{2+3n}\right)^n$. 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n\cdot 4^n}$. 3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{3n-1}$. 4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{2n+3}x^n$.

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(x-2)^n}{n+1}$. 6) $f(x)=e^x, x_0=-3$. 7) $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$. 8) $\int_0^1\frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx$.

9) $y'=x^2+xy+y^2, y(0)=1, k=4$. 10) $f(x)=\begin{cases}2x-11, -\pi\le x\le 0,\\ 0,\ 0<x\le\pi.\end{cases}$

Вариант 26

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+3}{3n+4}$. 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$. 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n-1}$. 4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$.

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(x+2)^n}{n+3}$. 6) $f(x)=\sqrt{x}, x_0=9$. 7) $f(x)=x\sqrt[5]{1+x}$. 8) $\int_0^{0.1}\frac{dx}{1+x^4}$.

9) $xy''+y=0, y(1)=2, y'(1)=1, k=4$. 10) $f(x)=\begin{cases}0, -\pi\le x<0,\\ 3-8x,\ 0\le x\le\pi.\end{cases}$

Вариант 27

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2+2}$. 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+1}{3^{\frac{n}{2}}}$. 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)(n+2)}$. 4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$.

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{2n-3}$. 6) $f(x)=\sqrt{1+x}, x_0=3$. 7) $f(x)=\frac{e^{x^2}}{x}$. 8) $\int_0^1 x^{10}\sin x dx$.

9) $y''-xy+1=0, y(0)=1, y'(0)=1, k=5$. 10) $f(x)=\begin{cases}7x-1, -\pi\le x\le 0,\\ 0,\ 0<x\le\pi.\end{cases}$

Вариант 28

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2n+3}$. 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{3}{4}\right)^n$. 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$. 4) $\sum_{n=1}^{\infty}2^{n-1}x^n$.

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{n^3+1}$. 6) $f(x)=xe^x, x_0=1$. 7) $f(x)=\frac{x^2}{1-x^2}$. 8) $\int_0^1\sqrt[3]{x}\cos x dx$.

9) $xy''+y^2=0, y(1)=1, y'(1)=1, k=5$. 10) $f(x)=\begin{cases}0, -\pi\le x<0,\\ 2x+1,\ 0\le x\le\pi.\end{cases}$

Вариант 29

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{n^2+1}$. 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+4)!}$. 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3}{\ln(n+1)}$. 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$.

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2^n}$. 6) $f(x) = \sin 2x, x_0 = \frac{\pi}{4}$. 7) $f(x) = x\cos 2x$. 8) $\int\limits_0^1 e^{-x^2} dx$.

9) $y'' - y\cos x = 0, y(0) = 1, y'(0) = 2, k = 5$. 10) $f(x) = \begin{cases} 0, -\pi \le x < 0, \\ x+1, \ 0 \le x \le \pi. \end{cases}$

Вариант 30

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+4n}$. 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+1}{4n+5}\right)^n$. 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}$. 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n$.

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+4)^n}{n(n+1)(n+2)}$. 6) $f(x) = 2 + \cos x, x_0 = \frac{\pi}{4}$. 7) $f(x) = \frac{\sin x}{x}$. 8) $\int\limits_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$.

9) $y' = y\cos x + 2\cos y, y(0) = 0, k = 3$. 10) $f(x) = \begin{cases} 0, -\pi < x < 0, \\ x, \ 0 \le x \le \pi. \end{cases}$

Типовой расчет «Элементы операционного исчисления»

В задачах № 1, 2 установить принадлежат ли множеству оригиналов данные функции.

В задаче № 3, пользуясь определением, найти изображение оригинала $1(t)\, f(t)$, где

$$1(t) = \begin{cases} 0, t < 0, \\ 1, t \ge 0. \end{cases}$$

В задачах № 4, 5 найти изображение оригинала $1(t)\, f(t)$.

В задачах № 6 найти свертку данных функций.

В задаче № 7 найти изображение периодического оригинала $1(t)\, f(t)$.

В задаче № 8 найти оригинал по данному изображению.

В задаче № 9 найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям.

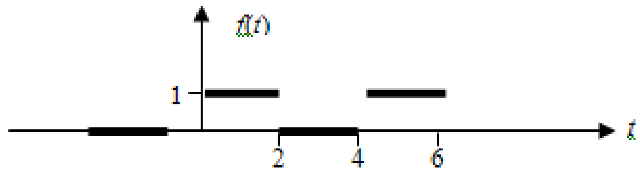
В задаче № 10 найти частное решение системы дифференциальных уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям.

Вариант 1

1) $f(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ e^{5t}, & t\ge 0\end{cases}$ **2)** $f(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ \dfrac{1}{t+3}, & t\ge 0\end{cases}$ **3)** $f(t)=e^{2t}$ **4)** $f(t)=\sin^4 t$ **5)** $f(t)=\dfrac{e^{-2t}\sin t}{t}$.

6) $f_1(t)=t,\ f_2(t)=\operatorname{sh} t$

7)



8) $F(p)=\dfrac{2}{p(p^2+4)}$

9) $y''-2y'=t^2,\ y(0)=0,\ y'(0)=0$

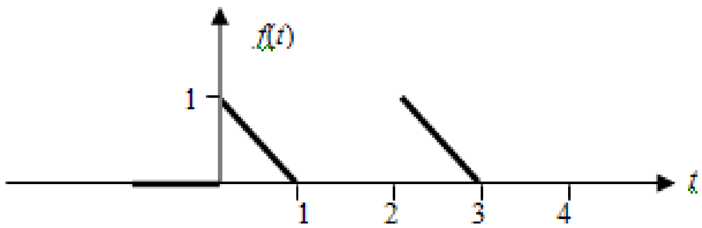
10) $\left.\begin{array}{l}x'=-2x-2y-4z,\\ y'=-2x+y-2z,\\ z'=5x+2y+7z,\end{array}\right\},\quad x(0)=1,\ y(0)=2,\ z(0)=-1$

Вариант 2

1) $f(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ e^{t^2}, & t\ge 0.\end{cases}$ **2)** $f(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ \dfrac{\sin t}{t}, & t\ge 0.\end{cases}$ **3)** $f(t)=\begin{cases}e^{3t}, & t\in[0,1]\\ 2, & t\in[1,\infty]\end{cases}$ **4)** $f(t)=\operatorname{ch} t\sin^2 3t$.

5) $f(t)=\dfrac{\cos 2t-\cos 3t}{t}$. **6)** $f_1(t)=e^t,\ f_2(t)=e^{-t}$.

7)



8) $F(p)=\dfrac{1}{p^2+2p+7}$. **9)** $y''+y'=\sin t,\ y(0)=0,\ y'(0)=0$.

10) $\left.\begin{array}{l}x''-3x'+2x+y'-y=0,\\ -x'+x+y''-5y'+4y=0,\end{array}\right\} x(0)=x'(0)=y'(0)=0,\ y(0)=1.$

Вариант 3

1) $f(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ t^3, & t\ge 0.\end{cases}$ **2)** $f(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ \dfrac{\cos t}{t}, & t\ge 0.\end{cases}$ **3)** $f(t)=e^{t/2}$. **4)** $f(t)=\sin t\sin 2t$.

5) $f(t)=\dfrac{1-e^{3t}}{te^{2t}}$.   **6)** $f_1(t)=\cos 2t,\ f_2(t)=e^{-t}$.   **7)** $f(t)=e^{-t},\, t\in[0;3],\quad f(t+3)=f(t)$.

8) $F(p)=\dfrac{p+2}{p(p+3)}$.   **9)** $y''-y=8te^{t},\ y(0)=0,\ y'(0)=0$.

10) $\left.\begin{aligned} x''-8x'+\sqrt{6}\,y'=0,\\ -\sqrt{6}x'+y''+2y=0,\end{aligned}\right\},\quad x(0)=1,\ x'(0)=y(0)=y'(0)=0$.

Вариант 4

1) $f(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ 1, & t\in[0,2],\\ 2t^3, & t>2.\end{cases}$ **2)** $f(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ \dfrac{2}{\sin t}, & t\ge 0.\end{cases}$ **3)** $f(t)=2-t$.   **4)** $f(t)=e^{2t}\cos^2 t$.

5) $f(t)=e^{2t}\sin 4t$.   **6)** $f_1(t)=t,\ f_2(t)=e^{3t}$.   **7)** $f(t)=e^{-t},\, t\in[0,2],\quad f(t+2)=f(t)$.

8) $F(p)=\dfrac{4-p}{p^2+9}$.   **9)** $y''-2y'+3y=1,\ y(0)=0,\ y'(0)=0$.

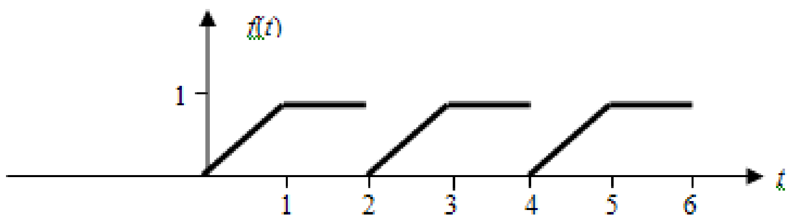
10) $\left.\begin{aligned} x'=y+z,\\ y'=z+x,\\ z'=x+y,\end{aligned}\right\},\quad x(0)=3,\ y(0)=-1,\ z(0)=2$.

Вариант 5

1) $f(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ t+\sin 3t, & t\ge 0.\end{cases}$ **2)** $f(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ e^t/t, & t\ge 0.\end{cases}$ **3)** $f(t)=\operatorname{sh} 2t$.   **4)** $f(t)=\cos^3 t$.

5) $f(t)=\dfrac{e^{-\alpha t}\sin t}{t}$.   **6)** $f_1(t)=\cos t,\ f_2(t)=\cos t$.

7)



8) $F(p)=\dfrac{2p+3}{p^2-6p+12}$.   **9)** $y''+y=t^2,\ y(0)=0,\ y'(0)=0$.

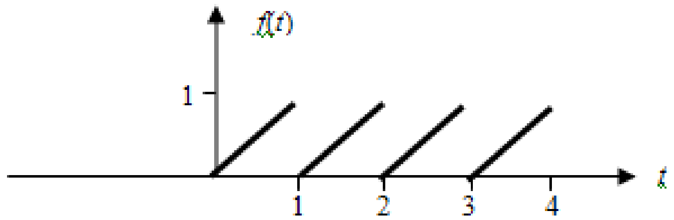
10) $\left.\begin{aligned} x'=8y,\\ y'=-2z,\\ z'=2x+8y-2z,\end{aligned}\right\},\quad x(0)=2,\ y(0)=0,\ z(0)=-1$.

Вариант 6

1) $f(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ \dfrac{\sin^2 t}{t}, & t\ge 0.\end{cases}$ **2)** $f(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ \dfrac{1}{t+1}, & t\ge 0.\end{cases}$ **3)** $f(t)=2\,\mathrm{sh}\,3t$. **4)** $f(t)=\mathrm{e}^{3t}\sin^2\dfrac{t}{2}$.

5) $f(t)=\cos(\alpha t-b)$. **6)** $f_1(t)=\sin 3t,\ f_2(t)=\sin 4t$.

7)



8) $F(p)=\dfrac{5}{p(p^2+2p+5)}$. **9)** $y''+2y'+y=2\sin t,\ y(0)=0,\ y'(0)=0$.

10) $\left.\begin{aligned}x'+3x+y=0,\\ y'-x+y=0,\end{aligned}\right\},\quad x(0)=2,\ y(0)=3.$

Вариант 7

1) $f(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ \mathrm{e}^{(2+3t)t}, & t\ge 0.\end{cases}$ **2)** $f(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ \dfrac{\cos 3t}{t}, & t\ge 0.\end{cases}$ **3)** $f(t)=2-\mathrm{e}^{2t}$. **4)** $f(t)=\cos^4\dfrac{t}{2}$.

5) $f(t)=\dfrac{\cos bt-\cos at}{t}$. **6)** $f_1(t)=\dfrac{t}{2},\ f_2(t)=\mathrm{ch}\,3t$. **7)** $f(t)=\begin{cases}4, & t\in[0,2),\\ 2, & t\in[2,3].\end{cases}\quad f(t+3)=f(t).$

8) $F(p)=\dfrac{2p+6}{(p-2)(p+3)}$. **9)** $y''+2y'+5y=5,\ y(0)=0,\ y'(0)=0$.

10) $\left.\begin{aligned}x''+y''=0,\\ x'+y=1+\mathrm{e}^t,\end{aligned}\right\},\quad x(0)=x'(0)=0,\ y(0)=2,\ y'(0)=-1.$

Вариант 8

1) $f(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ \mathrm{t}^3, & t\ge 0.\end{cases}$ **2)** $f(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ \dfrac{1}{\sin t}, & t\ge 0.\end{cases}$ **3)** $f(t)=3-2t$. **4)** $f(t)=\mathrm{ch}\,3t\cos^2 t$.

5) $f(t)=\dfrac{1-\mathrm{e}^{2t}}{t\mathrm{e}^t}$. **6)** $f_1(t)=\mathrm{e}^{-t},\ f_2(t)=\sin t$. **7)** $f(t)=\begin{cases}e^{-t}, & t\in[0,a),\\ e^{-2t}, & t\in[a,2a],\end{cases}\quad f(t+2a)=f(t).$

8) $F(p)=\dfrac{3p+1}{p^2(p^2-4p+1)}$. **9)** $y''+y=\sin t,\ y(0)=0,\ y'(0)=0$.

10) $\left.\begin{aligned} &x''-x'+9x-y''-y'-3y=0,\\ &2x''+x'+7x-y''+y'-5y=0,\end{aligned}\right\}$ $x(0)=x'(0)=1,\ y(0)=y'(0)=0$

Вариант 9

1) $f(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ e^{1/t}, & t\ge 0.\end{cases}$ **2)** $f(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ \dfrac{\sin t}{2t}, & t\ge 0.\end{cases}$ **3)** $f(t)=1+e^{2t}$. **4)** $f(t)=\sin^2 2t\cos 3t$.

5) $f(t)=e^{2(t-1)}\sin(t-1)$. **6)** $f_1(t)=t,\ f_2(t)=\cos 3t$. **7)** $f(t)=\begin{cases}2t, & t\in[0,\pi],\\ 3t, & t\in(\pi,2\pi[,\end{cases}$ $f(t+2\pi)=f(t)$.

8) $F(p)=\dfrac{p^2+1}{p^3+27}$. **9)** $y''+y=te^t,\ y(0)=0,\ y'(0)=0$.

10) $\left.\begin{aligned} &x'-2y+5x=e^t,\\ &y'-x+6y=e^{-2t},\end{aligned}\right\},$ $x(0)=1,\ y(0)=-1.$

Вариант 10

1) $f(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ e^t, & t\ge 0.\end{cases}$ **2)** $f(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ \dfrac{1}{t-1}, & t\ge 0.\end{cases}$ **3)** $f(t)=\begin{cases}2, & t\in[0,3),\\ t, & t\in[3,\infty).\end{cases}$ **4)** $f(t)=\sin^3 t$.

5) $f(t)=e^{-(t-a)}\cos(t-a)$. **6)** $f_1(t)=t,\ f_2(t)=\operatorname{ch} t$. **7)** $f(t)=\dfrac{3at}{2\pi},\ t\in[0,2\pi],\ f(t+2\pi)=f(t)$.

8) $F(p)=\dfrac{2p^2-1}{p(p^2+2)}$. **9)** $y''+y=e^t,\ y(0)=0,\ y'(0)=0$.

10) $\left.\begin{aligned} &4x'-y'+3x=\sin t,\\ &x'+y=\cos t,\end{aligned}\right\}$ $x(0)=2,\ y(0)=-1.$

Вариант 11

1) $f(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ t+\sin 2t, & t\ge 0.\end{cases}$ **2)** $f(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ \dfrac{1}{t^2-4}, & t\ge 0.\end{cases}$ **3)** $f(t)=2t^2$. **4)** $f(t)=\operatorname{sh} 2t\sin 3t$.

5) $f(t)=t\sin^2 t$. **6)** $f_1(t)=t,\ f_2(t)=\sin 4t$. **7)** $f(t)=\begin{cases}\pi, & t\in[0,\pi),\\ 2\pi, & t\in[\pi,2\pi],\end{cases}$ $f(t+2\pi)=f(t)$.

8) $F(p)=\dfrac{p^2+1}{p^2(p^2+9)}$. **9)** $y'''+y''=\cos t,\ y(0)=y'(0)=y''=0$.

10) $\left.\begin{matrix} x'' + y' + x = e^t, \\ x' + y'' = 1, \end{matrix}\right\}$ $x(0) = 1,\ x''(0) = 0,\ y(0) = -1,\ y'(0) = 2.$

Вариант 12

1) $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ \operatorname{ch} 2t, & t \geq 0. \end{cases}$ **2)** $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ \dfrac{\cos 3t}{t}, & t \geq 0. \end{cases}$ **3)** $f(t) = e^{-2t}$. **4)** $f(t) = \cos 2t \cos 3t$.

5) $f(t) = \dfrac{e^{2t} \sin t}{t}$. **6)** $f_1(t) = \sin t,\ f_2(t) = \sin 2t$. **7)** $f(t) = \begin{cases} 2t, & t \in [0,1), \\ t, & t \in [1,2], \end{cases}$ $f(t+2) = f(t).$

8) $F(p) = \dfrac{p^2 - p + 2}{p^3 - p^2 - 6p}$. **9)** $2y' + 3y = t^2,\ y(0) = -1$.

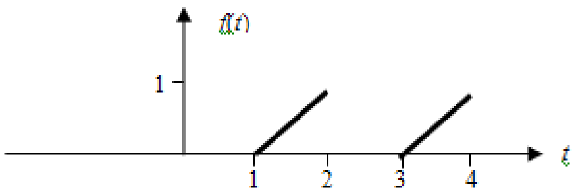
10) $\left.\begin{matrix} x'' + y = 1, \\ y'' + x = 0, \end{matrix}\right\},$ $x(0) = y(0) = x'(0) = y'(0) = 0.$

Вариант 13

1) $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ t, & t \in [0,1), \\ e^t, & t \geq 1 \end{cases}$ **2)** $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ \dfrac{2}{t-3}, & t \geq 0. \end{cases}$ **3)** $f(t) = \operatorname{ch} \dfrac{t}{2}$. **4)** $f(t) = e^t \cos^2 t$.

5) $f(t) = \dfrac{\sin 3t \cos 2t}{t}$. **6)** $f_1(t) = \cos 2t,\ f_2(t) = e^{2t}$.

7)



8) $F(p) = \dfrac{p}{p^2 + 3p + 2}$. **9)** $y' + ay = b,\ y(0) = 0$.

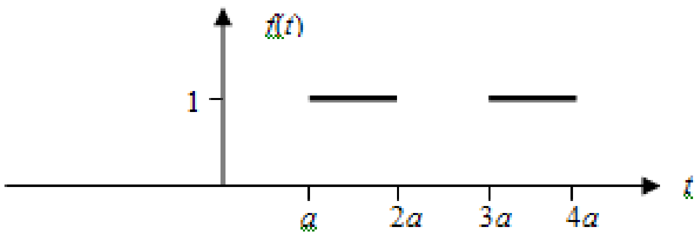
10) $\left.\begin{matrix} x'' + y' = \operatorname{sh} t - \sin t - t, \\ y'' + x' = \operatorname{ch} t - \cos t, \end{matrix}\right\},$ $x(0) = 0,\ x'(0) = 2,\ y(0) = 1,\ y' = 0$.

Вариант 14

1) $f(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ t+\dfrac{\sin t}{t}, & t\ge 0.\end{cases}$ 2) $f(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ \mathrm{e}^{3t^2}, & t\ge 0.\end{cases}$ 3) $f(t)=\begin{cases}2, & t\in[0,5),\\ t, & t\in[5,\infty).\end{cases}$ 4) $f(t)=\operatorname{sh} t\cos 2t$.

5) $f(t)=\dfrac{\sin 3t}{t}$. 6) $f_1(t)=\mathrm{e}^{3t},\ f_2(t)=\cos t$.

7)



8) $F(p)=\dfrac{1-p^2}{p(p^2+1)}$. 9) $y''-y'-6y=2,\ y(0)=1,\ y'(0)=0$.

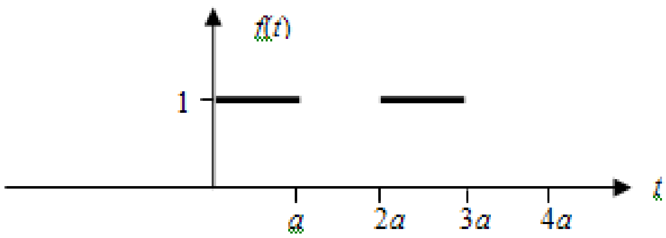
10) $\left.\begin{aligned}x''-x'+y&=\mathrm{e}^{-t}+\cos t,\\ x'-y''-y'&=2\,\mathrm{e}^{t}+\sin t,\end{aligned}\right\},\quad x(0)=2,\ x'(0)=1,\ y(0)=0,\ y'=1.$

Вариант 15

1) $f(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ \dfrac{\sin t}{t-2}, & t\ge 0.\end{cases}$ 2) $f(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ \mathrm{e}^{(1+i)t}, & t\ge 0.\end{cases}$ 3) $f(t)=3\operatorname{sh}\dfrac{t}{3}$. 4) $f(t)=\cos 5t\sin 3t$.

5) $f(t)=\dfrac{e^t\sin 2t}{t}$. 6) $f_1(t)=t,\ f_2(t)=\cos 2t$.

7)



8) $F(p)=\dfrac{p+2}{(p^2+4p+5)^2}$. 9) $y''-4y=2\cos 2t,\ y(0)=0,\ y'(0)=4$.

10) $\left.\begin{aligned}x'+3x-4y&=9\,\mathrm{e}^{2t},\\ 2x+y'-3y&=3\,\mathrm{e}^{2t},\end{aligned}\right\},\quad x(0)=2,\ y(0)=0.$

Вариант 16

1) $f(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ \operatorname{sh}2t, & t\ge 0.\end{cases}$ **2)** $f(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ t^2, & t\in[0,2],\\ \dfrac{1}{t-4}, & t>2.\end{cases}$ **3)** $f(t)=\begin{cases}0, & t\in[0,4],\\ 5t, & t\in(4,\infty).\end{cases}$ **4)** $f(t)=\mathrm{e}^t\sin^2 t$.

5) $f(t)=\dfrac{1+\cos 2t}{t}$. **6)** $f_1(t)=t,\ f_2(t)=\sin 2t$. **7)** $f(t)=\begin{cases}a, & t\in[0,l[,\\ -a, & t\in[l,2l[,\end{cases}$ $f(t+2l)=f(t)$.

8) $F(p)=\dfrac{p^2-2p-1}{(p^2-2p+3)^2}$. **9)** $2y''-9y=2-t,\ y(0)=0,\ y'(0)=1$.

10) $\left.\begin{array}{l}x''+y'+y=\mathrm{e}^t-t,\\ x'-x+2y''-y=-\mathrm{e}^{-t},\end{array}\right\}$, $x(0)=1,\ x'(0)=2,\ y(0)=y'(0)=0$.

Вариант 17

1) $f(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ t^2+1, & t\in[0,1]\\ \operatorname{sint}, & t>1.\end{cases}$ **2)** $f(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ \mathrm{e}^{2t^2}, & t\ge 0.\end{cases}$ **3)** $f(t)=t^2-1$. **4)** $f(t)=\operatorname{ch}2t\cos t$.

5) $f(t)=\dfrac{\cos 3t}{2}+t\mathrm{e}^t$. **6)** $f_1(t)=\mathrm{e}^{2t},\ f_2(t)=\sin 3t$. **7)** $f(t)=\begin{cases}|\sin t|, & t>0,\\ 0, & t<0,\end{cases}$ $f(t+\pi)=f(t)$.

8) $F(p)=\dfrac{p^2-3p-9}{(p^2+9)^2}$. **9)** $y''+y=\sin 2t,\ y(0)=y'(0)=0$.

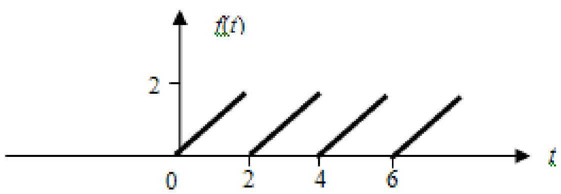
10) $\left.\begin{array}{l}x''-y'=1,\\ y''-x'=0,\end{array}\right\}$, $x(0)=1,\ x'(0)=y(0),\ y'(0)=1$.

Вариант 18

1) $f(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ \operatorname{sh}it, & t\ge 0.\end{cases}$ **2)** $f(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ \dfrac{1}{t-2}, & t\ge 0.\end{cases}$ **3)** $f(t)=\begin{cases}1, & t\in[0,2),\\ 1+2t, & t\in[2,\infty).\end{cases}$ **4)** $f(t)=\sin 2t\cos^2 t$.

5) $f(t)=\dfrac{2+3\cos 4t}{\mathrm{e}^t}$. **6)** $f_1(t)=t,\ f_2(t)=\operatorname{sh}2t$.

7)



8) $F(p)=\dfrac{p^2+4}{(p^2-4)^2}$. 9) $y'''-y'=10e^{2t}$, $y(0)=y'(0)=y''(0)=0$.

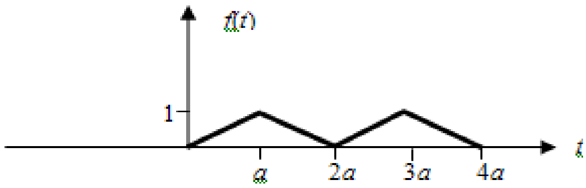
10) $\left.\begin{matrix} x'+3x+y=0, \\ y'-x+y=0, \end{matrix}\right\}$, $x(0)=y(0)=1$.

Вариант 19

1) $f(t)=\begin{cases} 0, & t<0, \\ \sin t+\dfrac{1}{t}, & t\geq 0. \end{cases}$ 2) $f(t)=\begin{cases} 0, & t<0, \\ e^{(1+2i)t}, & t\geq 0. \end{cases}$ 3) $f(t)=t^2+2$. 4) $f(t)=\operatorname{ch} 2t\sin^2 t$.

5) $f(t)=\dfrac{\sin t\cdot\cos 3t}{t}$. 6) $f_1(t)=e^{2t}$, $f_2(t)=e^{\frac{t}{2}}$.

7)



8) $F(p)=\dfrac{p^2-2p-8}{(p^2-2p+10)^2}$. 9) $y''-y'=t$, $y(0)=y'(0)=0$.

10) $\left.\begin{matrix} x'+4x+4y=0, \\ y'+2x+6y=0, \end{matrix}\right\}$, $x(0)=3$, $y(0)=15$.

Вариант 20

1) $f(t)=\begin{cases} 0, & t<0, \\ \sin t, & t\geq 0. \end{cases}$ 2) $f(t)=\begin{cases} 0, & t<0, \\ \dfrac{1}{t+3}, & t\geq 0. \end{cases}$ 3) $f(t)=\operatorname{sh}\dfrac{t}{3}$. 4) $f(t)=\operatorname{ch} 3t\sin 2t$.

5) $f(t)=t\sin 3t\cdot\cos 4t$. 6) $f_1(t)=e^{5t}$, $f_2(t)=t$. 7) $f(t)=t+1$, $t\in[0,1]$, $f(t+1)=f(t)$.

8) $F(p)=\dfrac{2(p-3)}{(p^2-6p+8)^2}$. 9) $y''+y'=1$, $y(0)=y'(0)=0$.

10) $\left.\begin{matrix} x''+y'+x=e^t, \\ x'+y''=1, \end{matrix}\right\}$ $x(0)=1$, $x'(0)=0$, $y(0)=-1$, $y'(0)=2$.

Вариант 21

1) $f(t)=\begin{cases} 0, & t<0, \\ \cos t, & t\geq 0. \end{cases}$ 2) $f(t)=\begin{cases} 0, & t<0, \\ \dfrac{1}{\sin t}, & t\geq 0. \end{cases}$ 3) $f(t)=\begin{cases} e^{2t}, & t\in[0,1), \\ 1, & t\in[1,\infty). \end{cases}$ 4) $f(t)=\operatorname{sh} t\sin^2 t$.

5) $f(t)=\dfrac{\sin t\cdot\sin 3t}{t}$. **6)** $f_1(t)=\cos 2t,\ f_2(t)=\cos 3t$. **7)** $f(t)=2t, t\in[0,3],\quad f(t+3)=f(t).$

8) $F(p)=\dfrac{p-1}{(p^2-2p+10)^2}$. **9)** $y''+y=3,\ y(0)=y'(0)=0$.

10) $\left.\begin{aligned} x'&=-2x-2y-4z,\\ y'&=-2x+y-2z,\\ z'&=5x+2y+7z,\end{aligned}\right\},\quad x(0)=1,\ y(0)=2,\ z(0)=-1.$

Вариант 22

1) $f(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ \sin t, & t\ge 0.\end{cases}$ **2)** $f(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ e^{t^2}, & t\ge 0.\end{cases}$ **3)** $\begin{cases}\sin t, & t\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right),\\ 0, & t\in\left[\dfrac{\pi}{2},\infty\right].\end{cases}$ **4)** $f(t)=\operatorname{sh}2t\cos^2\dfrac{t}{2}$.

5) $f(t)=t\cos(2t+3)$; **6)** $f_1(t)=\sin 3t,\ f_2(t)=t.$ **7)** $\begin{cases}0, & t\in[0,1),\\ 1, & t\in[1,4],\end{cases}\quad f(t+4)=f(t)$.

8) $F(p)=\dfrac{1}{(p-a)(p-b)}$. **9)** $y''-2y'+y=e^t,\ y(0)=y'(0)=0$.

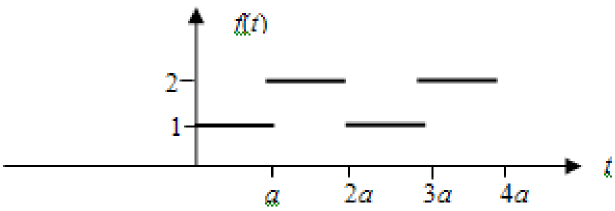
10) $\left.\begin{aligned} x'-x-2y&=t,\\ y'-2x-y&=t,\end{aligned}\right\}\ x(0)=2,\ y(0)=4.$

Вариант 23

1) $f(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ e^{2+t}, & t\ge 0.\end{cases}$ **2)** $f(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ \dfrac{1}{2t+1}, & t\ge 0.\end{cases}$ **3)** $\begin{cases}\cos t, & t\in[0,\pi),\\ 0, & t\in[\pi,\infty].\end{cases}$ **4)** $f(t)=\sin^2 t\cos 2t.$

5) $f(t)=\dfrac{t\cos t}{e^{5t}}$; **6)** $f_1(t)=\sin 2t,\ f_2(t)=e^{3t}$.

7)



8) $F(p)=\dfrac{1}{(p-2)^4}$. **9)** $y'+y=\sin t,\ y(0)=0$.

10) $\left.\begin{aligned} x'&=y-z,\\ y'&=z-2x,\\ z'&=2x-y,\end{aligned}\right\},\quad x(0)=1,\ y(0)=z(0)=0.$

Вариант 24

1) $f(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ 3t^2, & t\geq 0.\end{cases}$ **2)** $f(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ \dfrac{1}{\sin 2t}, & t\geq 0.\end{cases}$ **3)** $f(t)=2-t.$ **4)** $f(t)=\operatorname{ch} t \sin^2 t$**.**

5) $f(t)=t\cos(2t+3)$**.** **6)** $f_1(t)=\cos 3t,\ f_2(t)=\sin 2t$**.** **7)** $f(t)=2t, \quad t\in[0,\,1], \quad f(t+1)=f(t);$

8) $F(p)=\dfrac{p^2+5}{(p^2-5)^2}$**.** **9)** $y'+y=t, \ \ y(0)=0$**.** **10)** $\left.\begin{aligned} x''+2y=0,\\ y''-2x=0,\end{aligned}\right\}, \ \begin{aligned} &x(0)=0,\ x'(0)=1,\\ &y(0)=y'(0)=0.\end{aligned}$

Вариант 25

1) $f(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ e^{2t}, & t\geq 0.\end{cases}$ **2)** $f(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ \dfrac{1}{t-2}, & t\geq 0.\end{cases}$ **3)** $f(t)=1-t^2.$ **4)** $f(t)=\sin 2t\cdot\sin 4t$**.**

5) $f(t)=\dfrac{t\cos(t+2)}{e^{t+2}}$**.** **6)** $f_1(t)=\cos 5t,\ f_2(t)=t$**.** **7)** $\begin{cases}e^t, & t\in[0,2],\\ 0, & t\in(2,\,3),\end{cases} \ f(t+3)=f(t)$**.**

8) $F(p)=\dfrac{1}{(2p+3)^3}$**.** **9)** $y'+y=\sin t, \ \ y(0)=0$**.**

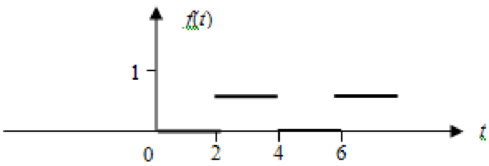
10) $\left.\begin{aligned} x'-x+2y=0,\\ x''-2y'=2t-\cos 2t,\end{aligned}\right\} \begin{aligned} &x(0)=0, && x'(0)=-1,\\ &y(0)=-\frac{1}{2}, && y'(0)=0.\end{aligned}$

Вариант 26

1) $f(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ e^{57}, & t\geq 0.\end{cases}$ **2)** $f(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ \dfrac{1}{t+3}, & t\geq 0.\end{cases}$ **3)** $f(t)=e^{2t}$**.** **4)** $f(t)=\sin^4 t$**.**

5) $f(t)=\dfrac{e^{-2t}\sin t}{t}$**.** **6)** $f_1(t)=t,\ f_2(t)=\operatorname{sh} t$**.**

7)



8) $F(p)=\dfrac{p^2-3p-9}{(p^2+9)^2}$**.** **9)** $y''-y'-6y=2,\ y(0)=1, y'(0)=0$

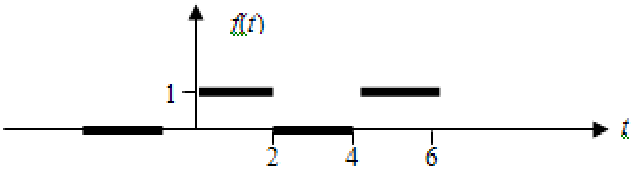
10) $\left.\begin{aligned} x''-y'=1,\\ y''-x'=0,\end{aligned}\right\}, \quad x(0)=1, x'(0)=y(0)=0,\ y'(0)=1.$

Вариант 27

1) $f(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ e^{-6t}, & t\ge 0\end{cases}$ 2) $f(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ \dfrac{1}{t-5}, & t\ge 0\end{cases}$ 3) $f(t)=e^{3t}$ 4) $f(t)=\sin^4 2t$

5) $f(t)=\dfrac{e^{-6t}\sin t}{t}$. 6) $f_1(t)=t^2,\ f_2(t)=\operatorname{sh} t$

7)



8) $F(p)=\dfrac{6}{p(p^2+4)}$ 9) $y''-4y'=t^2,\ y(0)=0,\ y'(0)=0$

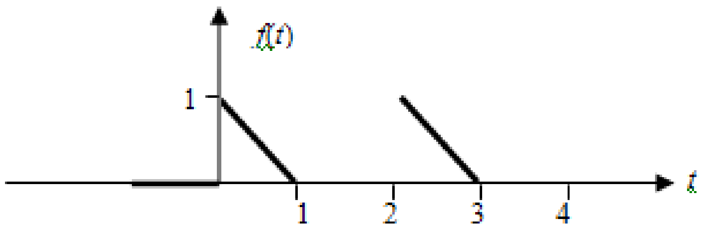
10) $\left.\begin{aligned}x'&=-2x-2y-2z,\\ y'&=-2x+y-3z,\\ z'&=5x+2y+4z,\end{aligned}\right\}$, $x(0)=1,\ y(0)=2,\ z(0)=-1$

Вариант 28

1) $f(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ e^{4t}, & t\ge 0.\end{cases}$ 2) $f(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ \dfrac{\sin 5t}{t}, & t\ge 0.\end{cases}$ 3) $f(t)=\begin{cases}e^{2t}, & t\in[0,1],\\ 2, & t\in(1,\infty).\end{cases}$ 4) $f(t)=\operatorname{ch} t\sin^2 4t$.

5) $f(t)=\dfrac{\cos 3t-\cos 2t}{t}$. 6) $f_1(t)=e^{3t},\ f_2(t)=e^{-t}$.

7)



8) $F(p)=\dfrac{7}{p^2+2p+7}$. 9) $y''+2y'=\sin t,\ y(0)=0,\ y'(0)=0$.

10) $\left.\begin{aligned}x''-3x'+2x+y'-5y=0,\\ -x'+x+y''-5y'+2y=0\end{aligned}\right\}$, $x(0)=x'(0)=y'(0)=0,\ y(0)=1.$

Вариант 29

1) $f(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ t^4, & t\ge 0.\end{cases}$ **2)** $f(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ \dfrac{\cos 3t}{t}, & t\ge 0.\end{cases}$ **3)** $f(t)=\mathrm{e}^{-t/2}$. **4)** $f(t)=\sin t\sin 4t$.

5) $f(t)=\dfrac{1-\mathrm{e}^{5t}}{t\,\mathrm{e}^{2t}}$. **6)** $f_1(t)=\cos 4t,\ f_2(t)=\mathrm{e}^{-t}$. **7)** $f(t)=\mathrm{e}^{-3t}, t\in[0;3],\quad f(t+3)=f(t)$.

8) $F(p)=\dfrac{p+4}{p(p+3)}$. **9)** $y''-3y=8t\,\mathrm{e}^{t},\ y(0)=0,\ y'(0)=0$.

10) $\left.\begin{aligned}x''-8x'+y'&=0,\\ -x'+y''+2y&=0\end{aligned}\right\},\ x(0)=1,\ x'(0)=y(0)=y'(0)=0$.

Вариант 30

1) $f(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ 2, & t\in[0,2],\\ 4t^3, & t>2.\end{cases}$ **2)** $f(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ \dfrac{2}{\sin 3t}, & t\ge 0.\end{cases}$ **3)** $f(t)=4-t$. **4)** $f(t)=\mathrm{e}^{5t}\cos^2 t$.

5) $f(t)=\mathrm{e}^{3t}\sin 4t$. **6)** $f_1(t)=t,\ f_2(t)=\mathrm{e}^{3t}$. **7)** $f(t)=\mathrm{e}^{-2t}, t\in[0,2],\quad f(t+2)=f(t)$.

8) $F(p)=\dfrac{6-p}{p^2+9}$. **9)** $y''-3y'+3y=1,\ y(0)=0,\ y'(0)=0$.

10) $\left.\begin{aligned}x'&=2y+z,\\ y'&=3z+x,\\ z'&=x+y\end{aligned}\right\},\ x(0)=3,\ y(0)=-1,\ z(0)=2$.

Типовой расчет «ТФКП»

В задаче 1 вычислить значение функции $f(z)$ в точке z_0.

В задаче 2 найти действительную и мнимую части функции $w=f(z)$.

В задаче 3 найти аналитическую функцию $f(z)$ по заданной действительной (u) или мнимой (v) части и заданному значению $f(z_0)$.

В задаче 4 найти область, на которую заданная функция $w=f(z)$ отображает указанную область G. Заданную область G на плоскости Z и ее образ на плоскости W изобразить на чертежах.

В задаче 5 вычислить $\int\limits_{\gamma} f(z)dz.$

В задаче 6 вычислить с помощью формулы Коши $\int\limits_{\gamma} f(z)dz$, где γ – замкнутый контур, пробегаемый против часовой стрелки.

В задаче 7 записать ряд Лорана функции $f(z)$ в окрестности точки z_0 и определить область сходимости полученного ряда.

В задаче 8 найти особые точки функции $f(z)$ и выяснить их характер.

В задаче 9 найти вычеты функции $f(z)$ в изолированных особых точках.

В задаче 10 вычислить с помощью вычетов $\int\limits_{\gamma} f(z)dz$, где γ – замкнутый контур, пробегаемый против часовой стрелки.

Вариант 1

1) $f(z) = Ln\, z, \quad z_0 = 1 + \sqrt{3}\, i;$ **2)** $w = ze^{z};$ **3)** $u = x^2 - y^2 + 3x + y, \quad f(0) = i$**;**

4) $w = i(2z+1),\ G:$ квадрант $\operatorname{Re} z \geq 0,\ \operatorname{Im} z \geq 0$**;**

5) $\int\limits_{\gamma} \operatorname{Re} z dz$, γ – отрезок прямой от точки $z_0 = 0$ до точки $z_1 = 2 + i;$

6) $\oint\limits_{\gamma} \dfrac{zdz}{z^2+1}, \quad \gamma: |z+i| = 1;$ **7)** $f(z) = z^2 e^{\frac{1}{z}}, \quad z_0 = 0;$ **8)** $f(z) = \dfrac{z+2}{(z-1)^3(z+1)};$

9) $f(z) = \dfrac{z}{(z-2)\sin z};$ **10)** $\oint\limits_{\gamma} \dfrac{dz}{\left(z^2+4\right)^2}, \quad \gamma: |z+2i| = 1.$

Вариант 2

1) $f(z) = z^{i}, \quad z_0 = i;$ **2)** $w = \sin z;$ **3)** $u = x^3 - 3xy^2 + 2,\ f(0) = 2 + i;$

4) $w = e^{2z} + i,\ G:$ полоса $-\infty < \operatorname{Re} z < +\infty, 0 \leq \operatorname{Im} z \leq \pi;$

5) $\int\limits_{\gamma} \bar{z} dz,$ где γ – ломаная с вершинами в точках $z_0 = 0,\ z_1 = 1,\ z_2 = 1 + i;$

6) $\oint\limits_{\gamma} \dfrac{e^z dz}{(z-i)^3}, \quad \gamma: |z| = 2;$ **7)** $f(z) = \sin\dfrac{1}{z}, \quad z_0 = 0$**;** **8)** $f(z) = \dfrac{1}{\left(z^2+i\right)^3};$

9) $f(z) = \dfrac{e^z}{z^2(z+3)};$ **10)** $\oint\limits_{\gamma} \dfrac{tgz}{z+2} dz, \quad \gamma: |z+2| = 2.$

Вариант 3

1) $f(z)=e^z, \quad z_0=3+\frac{\pi}{4}i;$ **2)** $w=\operatorname{ch} z;$ **3)** $v=2e^x\cos y, \quad f(0)=2(1+i);$

4) $w=(1-i)(1+z), \quad G$: треугольник с вершинами в точках $z_1=0, z_2=-i, z_3=1$;

5) $\int\limits_\gamma z^2\,dz, \quad \gamma$ – отрезок прямой, соединяющий точку $z_0=0$ с точкой $z_1=1+i$;

6) $\int\limits_\gamma \frac{z^2\,dz}{(z-2i)^2}, \quad \gamma: |z-i|=2;$ **7)** $f(z)=\frac{1}{(z+3)(z-1)^4}, \quad z_0=1;$ **8)** $f(z)=\cos\frac{1}{z+i};$

9) $f(z)=\frac{z^5}{z^2-1};$ **10)** $\int\limits_\gamma \frac{e^z}{2z}dz, \quad \gamma: |z|=1.$

Вариант 4

1) $f(z)=2^z, z_0=1+i$**;** **2)** $w=\cos z$**;** **3)** $u=x^2-y^2+5x+y-\frac{y}{x^2+y^2}, f(1)=6-2i\ (|z|>0)$**;**

4) $w=\frac{1}{z+i}, \quad G$: полуплоскость $\operatorname{Im} z\ge 0$;

5) $\int\limits_\gamma \frac{dz}{\sqrt{z}}, \quad \gamma$ – полуокружность $|z|=1$ от точки $z_0=1$ до точки $z_1=-1$, лежащая в верхней полуплоскости;

6) $\oint\limits_\gamma \frac{dz}{(z-1)^3(z+1)^3}, \quad \gamma: |z+1|=1{,}5$**;** **7)** $f(z)=\sin\frac{1}{(z-2)}, \quad z_0=2$**;** **8)** $f(z)=\frac{(z+6)\sin(z+5)}{(z^4-z^2)(z^2-25)}$**;**

9) $f(z)=\frac{\cos z}{z^3}$**;** **10)** $\oint\limits_\gamma \frac{dz}{(z+2)(z-1)}, \quad \gamma: |z|=3.$

Вариант 5

1) $f(z)=Ln\,z, \quad z_0=3+4i$**;** **2)** $w=e^{z^2}$**;** **3)** $u=x^2-y^2+xy, \quad f(0)=0$**;**

4) $w=\frac{z+i}{z-i}, \quad G$: квадрант $\operatorname{Re} z>0, \quad \operatorname{Im} z\le 0$;

5) $\int\limits_\gamma \operatorname{Re} z\,dz, \quad \gamma$ – окружность $|z-a|=R$, пробегаемая против часовой стрелки;

6) $\oint\limits_\gamma \frac{e^z\,dz}{(z+i)^2}, \quad \gamma: |z|=1{,}5$**;** **7)** $f(z)=\frac{e^z}{z^2}, \quad z_0=0$**;** **8)** $f(z)=\frac{z^2+1}{z-1}$**;**

9) $f(z)=\frac{z}{(z-1)^2}$**;** **10)** $\oint\limits_\gamma \frac{z\,dz}{z^2-1}, \quad \gamma$ – эллипс $\frac{(x-1)^2}{1}+\frac{y^2}{9}=1$.

Вариант 6

1) $f(z)=e^{z}, \quad z_0=2-3i$**;** **2)** $w=\operatorname{sh} z$**;** **3)** $v=x^3+6x^2y-3xy^2-2y^3, \quad f(0)=0$**;**

4) $w=\dfrac{1}{z+1}$, G: полуплоскость $\operatorname{Re} z \ge 0$;

5) $\int\limits_{\gamma} \bar{z} dz$, где γ – дуга параболы $y=x^2$ от точки (0,0) до точки (1,1);

6) $\oint\limits_{\gamma} \dfrac{e^z dz}{(z+2)^4}, \quad \gamma: |z+1|=1{,}5$**;** **7)** $f(z)=(z-2)^3 e^{\frac{1}{z-2}}, \quad z_0=2$**;** **8)** $f(z)=\dfrac{z^2}{1-\cos z}$**;**

9) $f(z)=\dfrac{\sin z}{z^3-z}$**;** **10)** $\oint\limits_{\gamma} \dfrac{dz}{(z^2+1)(z-1)}, \quad \gamma: |z-1-i|=2$**.**

Вариант 7

1) $f(z)=\cos z, \quad z_0=i$**;** **2)** $w=z^2 e^{z}$**;** **3)** $u=x^2-y^2+2x, \quad f(i)=2i-1$**;**

4) $w=z^2$, G: прямоугольник $0 \le \operatorname{Re} z \le 1, \quad 0 \le \operatorname{Im} z \le 2$;

5) $\int\limits_{\gamma} z\bar{z} dz, \quad \gamma$ – дуга окружности $|z|=1$, $0 \le \arg z \le \pi$;

6) $\oint\limits_{\gamma} \dfrac{dz}{(z+1)^2(z+2)}, \quad \gamma: |z|=1{,}5$**;** **7)** $f(z)=\dfrac{e^z}{z^5}, \quad z_0=0$**;** **8)** $f(z)=\dfrac{z}{\sin^2 z}$**;**

9) $f(z)=\dfrac{z^4}{z^2-1}$**;** **10)** $\oint\limits_{\gamma} \dfrac{e^z dz}{z^4+2z^2+1}, \quad \gamma: |z-i|=1$**.**

Вариант 8

1) $f(z)=\sin z, \quad z_0=1+2i$**;** **2)** $w=z^2-|z|$**;** **3)** $u=-2e^x \sin y, \quad f(0)=2i$**;**

4) $w=e^z$, G: полоса $-\infty < \operatorname{Re} z < +\infty, \quad -\pi \le \operatorname{Im} z \le 0$;

5) $\int\limits_{\gamma} z^2 dz, \quad \gamma$ – ломаная с вершинами в точках $z_0=0$, $z_1=1, \quad z_2=1+i$;

6) $\oint\limits_{\gamma} \dfrac{dz}{z^2+2z}, \quad \gamma: |z|=1$**;** **7)** $f(z)=\dfrac{1}{z^2+1}, \quad z_0=i$**;** **8)** $f(z)=\dfrac{\cos z}{z-\frac{\pi}{2}}$**;**

9) $f(z)=\dfrac{\cos z}{(z+4)z^2}$**;** **10)** $\oint\limits_{\gamma} (z-1)^2 \dfrac{1}{z+1} dz, \quad \gamma: |z+1|=0$**.**

Вариант 9

1) $f(z)=Ln\,z,\quad z_0=3+4i;$ **2)** $w=e^z\operatorname{Re}z;$ **3)** $u=x^3-3xy^2,\ f(0)=i;$

4) $w=z^2,\quad G:$ полуполоса $0\le\operatorname{Re}z\le1,\ \operatorname{Im}z\ge0;$

5) $\int\limits_\gamma\left(2-3z+z^2\right)dz,\quad \gamma$ – произвольный контур, соединяющий точку $z_1=0$ с точкой $z_2=i;$

6) $\oint\limits_\gamma\dfrac{zdz}{z^2+9},\quad \gamma:|z+2i|=2;$ **7)** $f(z)=\dfrac{1}{z(z-1)^2},\ z_0=1;$ **8)** $f(z)=\operatorname{tg}z;$

9) $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z+2)};$ **10)** $\oint\limits_\gamma\dfrac{z+1}{(z-2)^2}dz,\quad \gamma:|z|=3.$

Вариант 10

1) $f(z)=2^z,\quad z_0=1-i;$ **2)** $w=z^3+\operatorname{Im}z;$ **3)** $v=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x},\quad (x>0),\quad f(1)=0;$

4) $w=i(2-z),\ G:$ квадрат $0\le\operatorname{Re}z\le1,\ 0\le\operatorname{Im}z\le1;$

5) $\int\limits_\gamma\bar z\,dz,\quad \gamma$ – отрезок прямой от точки $z_0=0$ до точки $z_1=1+i;$

6) $\oint\limits_\gamma\dfrac{\cos zdz}{(z-i)^2},\quad \gamma:|z|=2;$ **7)** $f(z)=\dfrac{1}{z(z+5)},\ z_0=0;$ **8)** $f(z)=\dfrac{1}{\left(z^2+1\right)^3};$

9) $f(z)=\dfrac{\cos z}{z^4};$ **10)** $\oint\limits_\gamma\dfrac{(z+3)dz}{(z-1)(z+1)^2},\quad \gamma:\left|z-\dfrac12\right|=1.$

Вариант 11

1) $f(z)=Ln\,z,\quad z_0=-i;$ **2)** $w=(z+i)e^z;$ **3)** $v=y^2-2y-x^2+1,\quad f(2i)=i-1;$

4) $w=(1+i)z+3,\quad G:$ круг $|z|\le1;$ **5)** $\int\limits_\gamma\operatorname{Re}z\,dz,\quad \gamma$ – радиус–вектор точки $z_0=2+i;$

6) $\oint\limits_\gamma\dfrac{e^zdz}{z(z-1)^3},\quad \gamma:|z+1|=1{,}5;$ **7)** $f(z)=\dfrac{1}{(z-i)(z-1)},\ z_0=i;$ **8)** $f(z)=\dfrac{e^{\sqrt z}-e^{-\sqrt z}}{\sqrt z};$

9) $f(z)=\dfrac{z+1}{z^3+4z};$ **10)** $\oint\limits_\gamma\dfrac{zdz}{(z-1)(z-2)^2},\quad \gamma:|z-2|=0{,}5.$

Вариант 12

1) $f(z)=\cos z,\quad z_0=5-i;$ **2)** $w=e^{z+i};$ **3)** $v=3x^2y-y^3+3y-1,\quad f(1+i)=2+4i;$

4) $w=\dfrac{z-i}{z+i},\quad G:$ квадрант $\operatorname{Re}z>0,\ \operatorname{Im}z>0;$

5) $\int\limits_{\gamma} \bar{z}\, dz$, γ – отрезок прямой, соединяющий точку $z_0 = 0$ с точкой $z_1 = 2 + i$;

6) $\oint\limits_{\gamma} \frac{dz}{z^2(z^2+4)}$, $\gamma: |z+2i| = 1$; **7)** $f(z) = z^3 e^{\frac{1}{z}}$, $z_0 = 0$; **8)** $f(z) = \frac{1}{z^2 + 5z + 4}$**;**

9) $f(z) = \frac{\cos z}{z^2\left(z - \frac{\pi}{2}\right)}$**;** **10)** $\oint\limits_{\gamma} \frac{\sin z dz}{z\left(z - \frac{\pi}{2}\right)^2}$, $\gamma: |z| = 2$**.**

Вариант 13

1) $f(z) = \mathrm{Arccos}\, z$, $z_0 = 2$; **2)** $w = z^2 + \mathrm{Re}\, z$; **3)** $u = e^{1+y} \cos x$, $f(-i) = 1 + 3i$;

4) $w = \frac{1+z}{1-z}$, G: полуплоскость $\mathrm{Re}\, z \le 0$;

5) $\int\limits_{\gamma} z^2 dz$, γ – произвольный контур, соединяющий точку $z_1 = 0$ с точкой $z_2 = 1 + i$;

6) $\oint\limits_{\gamma} \frac{e^z dz}{z(z-1)}$, $\gamma: |z-2| = 1{,}5$; **7)** $f(z) = z^2 \sin \frac{1}{z}$, $z_0 = 0$; **8)** $f(z) = \frac{z}{(4+z^2)\sin z}$**;**

9) $f(z) = \frac{z-1}{z^2+1}$**;** **10)** $\oint\limits_{\gamma} \frac{dz}{z^3 + 4z^2}$, $\gamma: |z| = 1$**.**

Вариант 14

1) $f(z) = \mathrm{Arccos}\, z$, $z_0 = 2i$; **2)** $w = z^3\, \mathrm{Im}\, z$; **3)** $v = e^{1+2y} \sin 2x$, $f\left(-\frac{i}{2}\right) = 3$;

4) $w = (1-i)z + 2i$, G: круг $|z| \le 1$;

5) $\int\limits_{\gamma} \mathrm{Re} z\, dz$, γ – дуга параболы $y = x^2$ от точки (0,0) до точки (1,1);

6) $\oint\limits_{\gamma} \frac{dz}{z^2 + 4z}$, $\gamma: |z| = 1$; **7)** $f(z) = z \cos \frac{1}{z}$, $z_0 = 0$; **8)** $f(z) = z^2 \sin \frac{1}{z}$**;**

9) $f(z) = \frac{e^{-z}}{z^2}$**;** **10)** $\oint\limits_{\gamma} \frac{1}{1-z^2} dz$, $\gamma: |z| = 1{,}5$**.**

Вариант 15

1) $f(z)=\mathrm{Ln}\,z,\quad z_0=1+i;$ **2)** $w=(z+i)^2;$ **3)** $u=x^4-6x^2y^2+y^4,\quad f(0)=0;$

4) $w=-i(2z-1),\quad G:$ полуплоскость $\mathrm{Re}z\ge 0;$

5) $\int\limits_\gamma \sin z dz,\quad \gamma-$ произвольный контур, соединяющий точку $z_0=0$ с точкой $z_1=\dfrac{\pi}{2}+i;$

6) $\oint\limits_\gamma \dfrac{\sin 2z\,dz}{(z+1)^4},\quad \gamma:|z|=2;$ **7)** $f(z)=(z-3i)\sin\dfrac{1}{z-3i},\quad z_0=3i;$ **8)** $f(z)=\dfrac{\cos z}{\left(z-\dfrac{\pi}{2}\right)(z^2+1)^2}$**;**

9) $f(z)=\dfrac{1}{(z^2+9)^2}$**;** **10)** $\oint\limits_\gamma \dfrac{e^z}{(z+1)^2\cdot z}dz,\quad \gamma:|z|=\dfrac{1}{2}$**.**

Вариант 16

1) $f(z)=\mathrm{Arcsin}\,z,\quad z_0=2;$ **2)** $w=\dfrac{\mathrm{Re}\,z}{z};$ **3)** $u=\dfrac{x}{x^2+y^2},\quad f(2)=\dfrac{1}{2};$

4) $w=(1+i)z,\quad G:$круг $|z-1|\le 1;$

5) $\int\limits_\gamma |z|dz,\quad \gamma-$отрезок прямой, соединяющий точку $z_1=-1$ с точкой $z_2=1;$

6) $\oint\limits_\gamma \dfrac{z^2dz}{(z-2)^3},\quad \gamma:|z|=3;$ **7)** $f(z)=\dfrac{1}{z(z^2+1)},\quad z_0=0;$ **8)** $f(z)=\dfrac{z-1}{\cos z}$**;**

9) $f(z)=\dfrac{z^2+1}{(z+2)^2(z-3)}$**;** **10)** $\oint\limits_\gamma \dfrac{\cos z}{z^2}dz,\quad \gamma:|z|=3$**.**

Вариант 17

1) $f(z)=e^z,\quad z_0=\dfrac{\pi i}{2};$ **2)** $w=z^2\sin z;$ **3)** $u=x^3-3xy^2+3x^2-6x-3y^2,\quad f(0)=0;$

4) $w=\dfrac{z+i}{z-i},\quad G:$полуплоскость $\mathrm{Re}\,z>0;$

5) $\int\limits_\gamma \mathrm{Re}\,z\,dz,\quad \gamma-$отрезок прямой, соединяющий точку $z_1=i$ с точкой $z_2=2-i;$

6) $\oint\limits_\gamma \dfrac{dz}{z^2+1},\quad \gamma:|z-i|=1;$ **7)** $f(z)=\cos\dfrac{1}{z-3},\quad z_0=3;$ **8)** $f(z)=\dfrac{e^z-z-1}{z^2}$**;**

9) $f(z)=\dfrac{e^{\frac{1}{z}}}{z-1}$; 10) $\oint\limits_{\gamma}\dfrac{z-2}{z(z-1)}dz, \quad \gamma:|z+0{,}5|=3$.

Вариант 18

1) $f(z)=z^{1+i}, \quad z_0=i$; 2) $w=\dfrac{\cos z}{z}$; 3) $v=x+y-3, \quad f(0)=0$;

4) $w=\dfrac{z}{z+i}$, G: полуплоскость $\operatorname{Re} z>0$;

5) $\int\limits_{\gamma}|z|dz$, γ – полуокружность $|z|=1$ от точки $z_1=-1$ до точки $z_2=1$, лежащая в верхней полуплоскости;

6) $\oint\limits_{\gamma}\dfrac{dz}{z^3+4z}, \quad \gamma:|z-3i|=2$; 7) $f(z)=\dfrac{1}{(z+1)(z-3)}, \quad z_0=3$; 8) $f(z)=\dfrac{z}{\operatorname{tg} z}$;

9) $f(z)=e^{\frac{1}{z}}$; 10) $\oint\limits_{\gamma}\dfrac{\sin z}{z\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^2}dz, \quad \gamma:|z|=2$.

Вариант 19

1) $f(z)=\cos z, \quad z_0=1+i$; 2) $w=Ln\, z$; 3) $v=2xy, \quad f(0)=0$;

4) $w=3z^2$, G: полуплоскость $\operatorname{Im} z>0$;

5) $\int\limits_{\gamma}z^3dz$, γ – произвольный контур, соединяющий точку $z_0=0$ с точкой $z_1=1+i$;

6) $\oint\limits_{\gamma}\dfrac{e^z dz}{z^2+\pi^2}, \quad \gamma:|z-i|=3$; 7) $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-3)}, \quad z_0=1$; 8) $f(z)=\dfrac{z^3}{\sin^4 z}$;

9) $f(z)=\dfrac{z^6}{(z-1)^3}$; 10) $\oint\limits_{\gamma}\dfrac{z-1}{z^2+4}dz, \quad \gamma:|z|=3$.

Вариант 20

1) $f(z)=\cos z, \quad z_0=2-i$; 2) $w=z^i$; 3) $u=x^2-y^2, \quad f(0)=0$;

4) $w=(1+\sqrt{3}i)z-2i$, G: круг $|z|\le 1$;

5) $\int\limits_{\gamma}\operatorname{Im} z\, dz$, γ – отрезок прямой, соединяющий точку $z_0=0$ с точкой $z_1=2+i$;

6) $\oint\limits_{\gamma}\frac{(z^2+1)dz}{z^2-1}$, $\gamma:|z+1|=1$; **7)** $f(z)=\frac{1}{z(z-1)}$, $z_0=0$**;** **8)** $f(z)=\frac{\cos z}{z-i}$**;**

9. $f(z)=\frac{\sin z}{z(z^2+4)}$**;** **10)** $\oint\limits_{\gamma}\frac{dz}{(1+z)^2(z+2)}$, $\gamma:|z|=1{,}5$**.**

Вариант 21

1) $f(z)=z^i$, $z_0=1+i$; **2)** $w=\frac{\operatorname{Im} z}{z}$; **3)** $v=4x^3y-4xy^3$, $f(0)=0$**;**

4) $w=i(3z-1)$, G: полуплоскость $\operatorname{Im} z>0$;

5) $\int\limits_{\gamma}(z^2+iz-2)dz$, γ – произвольный контур, соединяющий точку $z_1=0$ с точкой $z_2=i-1$;

6) $\oint\limits_{\gamma}\frac{dz}{(z^2+9)^2}$, $\gamma:|z-2i|=2$; **7)** $f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)^3}$, $z_0=2$**;** **8)** $f(z)=\frac{\sin z}{z^2}$**;**

9) $f(z)=\frac{z-1}{z^2+1}$**;** **10)** $\oint\limits_{\gamma}\frac{dz}{\sin z}$, $\gamma:|z|=2$**.**

Вариант 22

1) $f(z)=\operatorname{Arcsin} z$, $z_0=3$; **2)** $w=|z|\cos z$; **3)** $v=3x^2y+6xy-6y-x^3$, $f(0)=0$**;**

4) $w=(1-i)(1+z)$, G: треугольник с вершинами в точках $z_1=0$, $z_2=-i$, $z_3=-1$;

5) $\int\limits_{\gamma}z|z|dz$, γ – дуга параболы $y=x^2$ от точки $z_1=0$ до точки $z_2=1+i$;

6) $\oint\limits_{\gamma}\frac{\sin z dz}{(z+i)^3}$, $\gamma:|z|=1{,}5$; **7)** $f(z)=ze^{-\frac{1}{z^2}}$, $z_0=0$; **8)** $f(z)=\frac{z^2}{(z^2+1)^2}$**;**

9) $f(z)=\frac{1}{z^3(z-i)}$**;** **10)** $\oint\limits_{\gamma}\frac{\cos z}{z^3}dz$, $\gamma:|z-1|=2$**.**

Вариант 23

1) $f(z)=e^z$, $z_0=3+i$; **2)** $w=z^{3i}$; **3)** $u=x^2-y^2+3x$, $f(0)=0$**;**

4) $w=e^{z+3}$, G: полоса $-\infty<\operatorname{Re} z<+\infty$, $0\le\operatorname{Im} z\le\pi$;

5) $\int\limits_{\gamma}\operatorname{Im} z\,dz$, γ – ломаная линия, соединяющая точки $z_0=0$, $z_1=i$, $z_2=2+i$;

6) $\oint\limits_{\gamma}\frac{dz}{z^2+4}, \quad \gamma:|z-2i|=1;$ 7) $f(z)=\frac{1}{z(z-1)}, \ z_0=1;$ 8) $f(z)=\frac{z+1}{z^2+4z}$;

9) $f(z)=\frac{2}{(z-i)(z+1)}$; 10) $\oint\limits_{\gamma}\frac{e^{iz}dz}{(z-\pi)^3}dz, \quad \gamma:|z|=4$.

Вариант 24

1) $f(z)=Lnz, \quad z_0=3-4i;$ 2) $w=z\cos z;$ 3) $v=2xy+3y, \quad f(0)=0$;

4) $w=\frac{z+i}{z}, \quad G$: полоса $\operatorname{Re} z>0, \ \operatorname{Im} z>0$;

5) $\int\limits_{\gamma}\bar{z}\,dz, \quad \gamma$ – отрезок прямой, соединяющий точку $z_1=2i$ с точкой $z_2=1-i$;

6) $\oint\limits_{\gamma}\frac{zdz}{(z-1)^2(z+3)}, \quad \gamma:|z|=2;$ 7) $f(z)=z^2\cos\frac{1}{z^2}, \ z_0=0;$ 8) $f(z)=\frac{\sin 2z}{(z+1)^2}$;

9) $f(z)=\frac{z}{(z+1)^3}$; 10) $\oint\limits_{\gamma}\frac{e^{-z}dz}{z^2}, \quad \gamma:|z|=3$.

Вариант 25

1) $f(z)=\cos z, \quad z_0=2i;$ 2) $w=\frac{z^2+i}{z};$ 3) $u=x^3-3xy^2-2y, \quad f(0)=0$;

4) $w=i(1-z), \quad G$: треугольник с вершинами в точках $z_1=0, z_2=1, z_3=-i$;

5) $\int\limits_{\gamma}(z+2)\,dz, \quad \gamma$ – произвольный контур, соединяющий точку $z_1=0$ с точкой $z_2=i$;

6) $\oint\limits_{\gamma}\frac{\sin zdz}{(z+i)^3}, \quad \gamma:|z|=1{,}5;$ 7) $f(z)=\frac{1}{z(z^2+5)}, \ z_0=0;$ 8) $f(z)=\sin\frac{1}{z}$;

9) $f(z)=\frac{z^4}{(z+i)^2}$; 10) $\oint\limits_{\gamma}\frac{e^z}{z^2+1}dz, \quad \gamma:|z|=3$.

Вариант 26

1) $f(z)=Ln\,z, \quad z_0=2+\sqrt{3}\,i;$ 2) $w=ze^z;$ 3) $u=x^2-y^2+2x+y, \quad f(0)=i$;

4) $w=i(3z+1), \ G$: квадрант $\operatorname{Re} z\ge 0, \ \operatorname{Im} z\ge 0$;

5) $\int\limits_{\gamma}\operatorname{Re} zdz$, γ – отрезок прямой от точки $z_0=0$ до точки $z_1=3+i$;

6) $\oint\limits_{\gamma}\frac{zdz}{z^2+1}, \quad \gamma:|z+i|=4;$ 7) $f(z)=z^2e^{\frac{1}{z}}, \quad z_0=0;$ 8) $f(z)=\frac{z+3}{(z-1)^3(z+1)};$

9) $f(z)=\frac{z}{(z-3)\sin z};$ 10) $\oint\limits_{\gamma}\frac{dz}{\left(z^2+2\right)^2}, \quad \gamma:|z+2i|=1.$

Вариант 27

1) $f(z)=z^{2i}, \quad z_0=i;$ 2) $w=\sin z;$ 3) $u=x^3-5xy^2+2, f(0)=2+i;$

4) $w=e^{3z}+i, G:$ полоса $-\infty<\operatorname{Re}z<+\infty, 0\le\operatorname{Im}z\le\pi;$

5) $\int\limits_{\gamma}\bar{z}dz,$ где γ – ломаная с вершинами в точках $z_0=0, z_1=1, z_2=1+i;$

6) $\oint\limits_{\gamma}\frac{e^zdz}{(z-i)^3}, \quad \gamma:|z|=4;$ 7) $f(z)=\sin\frac{1}{z}, \quad z_0=0;$ 8) $f(z)=\frac{1}{\left(z^2+i\right)^3};$

9) $f(z)=\frac{e^z}{z^2(z+3)};$ 10) $\oint\limits_{\gamma}\frac{\operatorname{tg}z}{z+4}dz, \quad \gamma:|z+2|=2.$

Вариант 28

1) $f(z)=e^z, \quad z_0=4+\frac{\pi}{4}i;$ 2) $w=\operatorname{ch}z;$ 3) $v=3e^x\cos y, \quad f(0)=2(1+i);$

4) $w=(1-i)(1+z), \quad G:$ треугольник с вершинами в точках $z_1=0, z_2=-i, z_3=1;$

5) $\int\limits_{\gamma}z^2dz, \quad \gamma$ – отрезок прямой, соединяющий точку $z_0=0$ с точкой $z_1=2+i;$

6) $\int\limits_{\gamma}\frac{z^2dz}{(z-2i)^2}, \quad \gamma:|z-i|=4;$ 7) $f(z)=\frac{1}{(z+3)(z-2)^4}, \quad z_0=1;$ 8) $f(z)=\cos\frac{1}{z+2i};$

9) $f(z)=\frac{z^5}{z^2-1};$ 10) $\int\limits_{\gamma}\frac{e^z}{2z}dz, \quad \gamma:|z|=1.$

Вариант 29

1) $f(z)=3^z, \quad z_0=1+i;$ 2) $w=\cos z;$ 3) $u=x^2-y^2+4x+y-\frac{y}{x^2+y^2}, f(1)=6-2i \quad (|z|>0);$

4) $w=\frac{1}{z+i}, \; G:$ полуплоскость $\operatorname{Im}z\ge 0;$

5) $\int\limits_{\gamma}\frac{dz}{\sqrt{z}}, \quad \gamma$ – полуокружность $|z|=2$ от точки $z_0=1$ до точки $z_1=2$, лежащая в верхней полуплоскости;

6) $\oint\limits_{\gamma} \frac{dz}{(z-1)^3(z+1)^3}, \quad \gamma: |z+1| = 1{,}5$**;** **7)** $f(z) = \sin\frac{1}{(z+3)}, \quad z_0 = 3$**;** **8)** $f(z) = \frac{(z+6)\sin(z+5)}{(z^4 - z^2)(z^2 - 25)}$**;**

9) $f(z) = \frac{\cos z}{z^2}$**;** **10)** $\oint\limits_{\gamma} \frac{dz}{(z+3)(z-1)}, \quad \gamma: |z| = 3$**.**

Вариант 30

1) $f(z) = Ln\, z, \quad z_0 = 2 + 4i$**;** **2)** $w = e^{z^2}$**;** **3)** $u = x^2 - 2y^2 + xy, \quad f(0) = 0$**;**

4) $w = \frac{z+i}{z-i}$, G: квадрант $\operatorname{Re} z > 0$, $\operatorname{Im} z \le 0$;

5) $\int\limits_{\gamma} \operatorname{Re} z\, dz$, γ – окружность $|z - a| = R$, пробегаемая против часовой стрелки;

6) $\oint\limits_{\gamma} \frac{e^z dz}{(z+i)^2}, \quad \gamma: |z| = 3$**;** **7)** $f(z) = \frac{e^z}{z^3}, \quad z_0 = 0$**;** **8)** $f(z) = \frac{z^2 + 1}{z - 2}$**;**

9) $f(z) = \frac{z}{(z-2)^2}$**;** **10)** $\oint\limits_{\gamma} \frac{zdz}{z^2 - 1}$, γ – эллипс $\frac{(x-2)^2}{1} + \frac{y^2}{9} = 1$.

ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЙ РАЗДЕЛ
ПО УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ «МАТЕМАТИКА. ЧАСТЬ 2»

Программа дисциплины

40.01.01 – Программное обеспечение информационных технологий;

40.01.02 – Информационные системы и технологии;

Направление 1– 40.01.02–04 Информационные системы и технологии в обработке и представлении информации;

Направление 1– 40.01.02 – 01 Информационные системы и технологии в проектировании и производстве;

53.01.02 – Автоматизированные системы обработки информации.

Ряды

1. Числовые ряды. Основные определения и свойства. Необходимый признак сходимости числовых рядов.
2. Достаточные признаки сходимости числовых рядов.
3. Знакочередующиеся и знакопеременные ряды. Признак Лейбница. Абсолютная и условная сходимость.
4. Функциональные ряды. Признак Вейерштрасса. Свойства равномерно сходящихся рядов.
5. Степенные ряды. Теорема Абеля. Радиус и интервал сходимости.
6. Дифференцирование и интегрирование степенных рядов.
7. Ряды Тейлора и Маклорена. Условия разложимости в ряд Тейлора.
8. Разложение основных элементарных функций в ряд Маклорена. Приложения рядов.
9. Тригонометрические ряды. Ряды Фурье. Вычисление коэффициентов.
10. Ряды Фурье для четных и нечетных функций. Разложение непериодических функций в ряд Фурье.
11. Интеграл Фурье. Преобразование Фурье.

Элементы теории функций комплексного переменного (ТФКП)

12. Понятие ФКП. Предел, непрерывность.
13. Основные элементарные ФКП.
14. Дифференцирование ФКП. Условия Коши – Римана.

15. Интеграл от ФКП.
16. Теорема Коши. Интегральная формула Коши.
17. Числовые и функциональные ряды в комплексной плоскости.
18. Ряды Тейлора и Лорана ФКП. Особые точки ФКП.
19. Вычеты. Основная теорема о вычетах. Вычисление и применение вычетов.

Операционное исчисление

20. Преобразование Лапласа, основные теоремы.
21. Дифференцирование и интегрирование оригиналов и изображений.
22. Теорема Бореля. Нахождение оригиналов.
23. Применение операционного исчисления к решению дифференциальных уравнений и систем.

Экзаменационные вопросы для студентов 2 курса (3 семестр)

«Ряды»

1. Числовой ряд. Основные определения и свойства.
2. Необходимое условие сходимости числового ряда. Достаточный признак расходимости числового ряда. Гармонический ряд.
3. Признак сравнения.
4. Предельный признак сравнения.
5. Критерии Коши сходимости знакоположительных числовых рядов.
6. Признак Д'Аламбера.
7. Радикальный признак Коши.
8. Интегральный признак Коши.
9. Знакопеременные числовые ряды. Достаточный признак сходимости знакопеременных рядов. Свойства абсолютно сходящихся числовых рядов.
10. Знакочередующиеся числовые ряды. Признак Лейбница.
11. Функциональные ряды. Свойства. Признак Вейерштрасса.
12. Степенные ряды. Теорема Абеля.
13. Вывод формул для нахождения радиуса сходимости степенных рядов.
14. Ряды Тейлора.
15. Разложение основных функций в ряд Маклорена.
16. Приложения степенных рядов.
17. Тригонометрическая система функций. Тригонометрический ряд Фурье.
18. Разложение в ряд Фурье четных и нечетных функций. Ряд Фурье для функций с периодом $2l$.

«Теория функций комплексной переменной»

1. Функция комплексной переменной. Основные определения.
2. Основные элементарные функции комплексной переменной.
3. Дифференцирование Ф.К.П.
4. Интегрирование Ф.К.П.
5. Теорема Коши. Интегральная формула Коши. Дифференцирование интегральной формулы Коши.
6. Числовые и функциональные ряды Ф.К.П.
7. Ряды Тейлора Ф.К.П. Теорема Лиувилля. Основная теорема алгебры.
8. Ряды Лорана Ф.К.П..

9. Классификация особых точек. Ф.К.П.
10. Нули аналитической функции. Связь между нулями и полюсами.
11. Вычет функции комплексной переменной в особой точке. Вычисление вычетов Основная теорема о вычетах. Приложения вычетов.

«Элементы операционного исчисления»

1. Преобразования Лапласа. Основные понятия и свойства. Примеры.
2. Основные теоремы операционного исчисления: теорема линейности, теорема подобия, теорема смещения, теорема запаздывания.
3. Дифференцирование и интегрирование оригиналов и изображений.
4. Свёртка двух функций. Теореме о свертке двух функций. Теорема Дюамеля.
5. Первая теорема разложения изображения, являющегося дробно-рациональной функцией.
6. Вторая теорема разложения изображения, являющегося дробно-рациональной функцией. Следствия из теоремы.
7. Применение операционного исчисления к решению дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений.

Перечень учебно-методических пособий

1. Гусак, А.А. Высшая математика. Т. 2. – Мн.: ТетраСистемс, 2009.
2. Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления (для втузов). Т. 2. – М.: Наука, 1985.
3. Письменный, Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. – М.: Айрис Пресс, 2010.
4. Сборник задач по математике для втузов. Ч. 2. Под редакцией А.В. Ефимова и Б.П. Демидовича. – М.: Наука, 1985.
5. Данко, П.Е. и др. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. 2. – М.: Оникс, 2005.
6. Белько, И.В. Высшая математика для инженеров в 2 ч. Ч. 2 / И.В. Белько, К.К. Кузьмич, Р.М. Жевняк – М.: Новое знание, 2007.
7. Краснов, М.Л. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости / М.Л. Краснов, А.И. Киселев, Г.И.Макаренко. – М.: Наука, 1981.
8. Гусак, А.А. Справочное пособие к решению задач. Теория функций комплексной переменной и операционное исчисление / А.А. Гусак, Г.М. Гусак, Е.А. Бричикова. – Мн.: ТетраСистемс, 2002.
9. Воронович, Г.К. Элементы операционного исчисления. Методические указания и контрольные задания / Г.К. Воронович [и др.]. – Мн.: БНТУ, 2009.
10. Андриянчик, А.Н. Сборник тестов по высшей математике для студентов II курса инженерно-технических специальностей вузов / А.Н. Андриянчик [и др.].− Мн.: БНТУ, 2013, 1788 с.
11. Математика [Электронный ресурс]: контрольная работа N3 для студентов инженерно-технических специальностей заочной формы обучения : методические указания и индивидуальные задания / Андриянчик А.Н., Казакевич В.А., Микулик Н.А., Раевская Л.А., Юринок В.И., Яцкевич Т.С., кол. авт. Белорусский национальный технический университет, Кафедра «Высшая математика N1». – Электрон. дан. – Минск: БНТУ, 2011. – elib trud.