УДК 372.881

Исследование и поиск решения комбинированных уравнений и неравенств, содержащих функцию модуль.

Чернявская С.В., Ревтович В.Н.
Белорусский национальный технический университет

Комбинированные задачи, в состав которых усложняющим элементом входит модуль, традиционно достаточно сложны и вызывают интерес с точки зрения поиска оптимальных методов их решения. Существует множество подходов к решению таких задач, среди которых можно назвать метод оценки, метод замены функций, обобщенный метод интервалов, графический способ, применение свойств функций и т.п. Рассмотрим синтез некоторых из них на следующем примере:

Пример 1. Необходимо найти сумму корней уравнения, принадлежащих отрезку $x \in [-21; -12]$.

Решение. Рассмотрев отдельно очевидный случай $\left|\cos\frac{\pi x}{3}\right| = 1$, получим множество $x = 3k, k \in Z$. Заданному в условии промежутку принадлежат числа -21, -18, -15, -12. Покажем, что других решений уравнение не имеет. Воспользуемся методом оценки и свойствами тригонометрических функций. Так как $0 < \left|\cos\frac{\pi x}{3}\right| < 1$, то $x^2 - 2x + \frac{1}{\left|\cos\frac{\pi x}{3}\right|} > (x-1)^2$. Отсюда получим, что $\sqrt{x^2 - 2x + \frac{1}{\left|\cos\frac{\pi x}{3}\right|}} - |x-1| > 0$. Из последнего неравенства, с учетом того, что $\log_{\frac{\pi}{10}}\left|\cos\frac{\pi x}{3}\right| > 0$, заключим, что левая часть исходного уравнения положительна. Поэтому сумма корней уравнения равна -33.

Пример 2. Необходимо найти все решения неравенства $|\cos x|^{\sqrt{2x-3}\cdot\log_{|\cos x|}\left(\frac{1+2\sqrt{3}|\sin x|}{8(1-2\cos^2 x)}\right)} \geq 1$ на множестве $x \in \left(0^\circ; 270^\circ\right)$.

(Решение не приводится.) Ответ: $x \in (120^\circ; 135^\circ) \cup (225^\circ; 240^\circ) \cup \left\{\frac{3}{2}\right\}$.

Эти примеры показывают разнообразие и сложность комбинированных задач и вариативность в выборе метода решения.