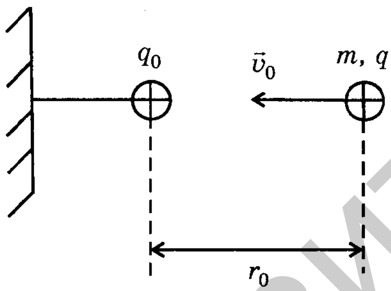
ДВИЖЕНИЕ И ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ОДНОИМЁННО ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ

К. А. Петров /orion-22@yandex.by/, **_Т. И. Развина, Ю. В. Развин, С. Н. Соколова_**

Анализ выполнения заданий централизованного тестирования по физике показывает, что учащиеся испытывают значительные трудности при решении задач, основанных на комплексном применении законов механики и электромагнетизма. В настоящей работе проведён анализ решения ряда задач, в условиях которых представлено движение заряженных частиц относительно друг друга.

Задача 1, *а*. Частица массой $m = 1$ г с зарядом $q = 1$ мкКл движется к закреплённому одноимённому заряду $q_0 = 2$ мкКл. На расстоянии $r_0 = 10$ см от заряда скорость частицы $v_0 = 30$ м/с. Определим минимальное расстояние, на которое частица приблизится к закреплённому заряду. Сопротивлением воздуха и гравитационным взаимодействием пренебречь.

Решение



Двигаясь в электрическом поле одноимённого заряда q_0, частица приближается к заряду на некоторое минимальное расстояние $r_{\min}$ и останавливается. Система *частица — закреплённая частица* является замкнутой. Для определения расстояния $r_{\min}$ воспользуемся законом сохранения энергии: $\frac{mv_0^2}{2} + \frac{kq_0q}{r_0} = \frac{kq_0q}{r_{\min}}$, где $\frac{mv^2}{2}$ — кинетическая энергия частицы, $\frac{kq_0q}{r_0}$ и $\frac{kq_0q}{r_{\min}}$ — начальная и конечная энергии взаимодействия заряда q_0 и заряженной частицы q.

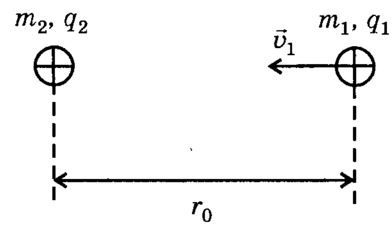
Покажем несколько нетрадиционный подход к расчёту минимального расстояния $r_{\min}$ между частицами:

$$\frac{kqq_0(r_0 - r_{\min})}{r_0 r_{\min}} = \frac{mv^2}{2} \Rightarrow \frac{r_{\min}}{r_0 - r_{\min}} = \frac{2kqq_0}{mr_0} = 0{,}4 \Rightarrow$$

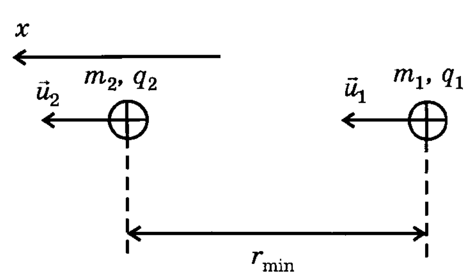
$$r_{\min} = \frac{0{,}4r_0}{1{,}4} \approx 3 \text{ см.}$$

1, *б*. Изменим условие задачи. Пусть частица массой m_1 и зарядом q_1 движется со скоростью v_1 из бесконечности к покоящейся вначале частице массой m_2 и зарядом q_2. Определим в данном случае минимальное расстояние $r_{\min}$ между заряженными частицами.

Решение



По мере приближения первой заряженной частицы ко второй вторая начинает движение по направлению от первой. Минимальное расстояние между частицами будет в тот момент, когда относительная скорость частиц станет равной нулю, т.е. скорости частиц будут направлены в одну сторону и равны по величине ($u_1 = u_2 = u$).



Воспользуемся законами сохранения импульса в проекции на ось Ox:

$m_1v_1 = (m_1 + m_2)u = p$ (импульс системы $p = \text{const}$)

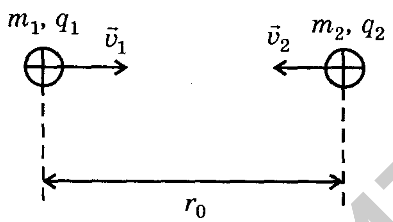
и энергии: $\frac{m_1v_1^2}{2} = \frac{(m_1+m_2)u^2}{2} + \frac{kq_1q_2}{r_{\min}}$ или

$\frac{p^2}{2m_1} = \frac{p^2}{2(m_1+m_2)} + \frac{kq_1q_2}{r_{\min}}$. Отсюда $r_{\min} =$

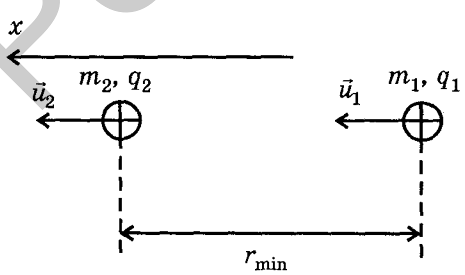
$$= \frac{2kq_1q_2m_1(m_1+m_2)}{p^2m_2} = \frac{2kq_1q_2(m_1+m_2)}{m_1m_2v_1^2},$$

$$[r] = \frac{\text{Н}\cdot\text{м}^2\cdot\text{Кл}^2\cdot\text{кг}\cdot\text{с}^2}{\text{Кл}^2\cdot\text{кг}^2\cdot\text{м}^2} = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}\cdot\text{с}^2}{\text{с}^2\cdot\text{кг}} = \text{м}.$$

1, *в*. Рассмотрим случай, когда эти две одноимённо заряженные частицы ($m_1 > m_2$) движутся навстречу друг другу со скоростями v_1 и v_2 соответственно. Первоначальное расстояние между ними r_0. Определим минимальное расстояние, на которое сблизятся частицы.



В процессе движения мгновенные силы кулоновского отталкивания будут равны. Из второго закона Ньютона следует, что модуль мгновенного ускорения будет больше у частицы меньшей массы. На некотором расстоянии r её скорость становится равной нулю, и она начинает движение в противоположном направлении, совпадающим с направлением движения первой частицы.



В момент времени, когда скорости частиц станут одинаковыми ($u_1 = u_2 = u$), т.е. их относительная скорость станет равной нулю, расстояние между частицами станет минимальным. Запишем закон сохранения импульса в проекции на ось Ox:

$$m_1v_1 - m_2v_2 = (m_1 + m_2)u.$$

Закон сохранения энергии будет иметь вид:

$$\frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_2v_2^2}{2} + \frac{kq_1q_2}{r_0} = \frac{(m_1+m_2)u^2}{2} + \frac{kq_1q_2}{r_{\min}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{kq_1q_2(r_0 - r_{\min})}{r_0r_{\min}} = \frac{m_1v_1^2 + m_2v_2^2 - (m_1+m_2)u^2}{2}.$$

$$\frac{r_0 - r_{\min}}{r_{\min}} = \frac{r_0(m_1v_1^2 + m_2v_2^2 - (m_1+m_2)u^2)}{2kq_1q_2}.$$

Если $m_1 = 2\cdot10^{-3}$ кг, $m_2 = 10^{-3}$ кг, $v_1 = 5\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$, $v_2 = 4\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$, $q_1 = 2\cdot10^{-6}$ Кл, $q_2 = 10^{-6}$ Кл, $r_0 = 10$ м, то $u = 2\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$.

$$\frac{r_0 - r_{\min}}{r_{\min}} = \frac{10(2\cdot10^{-3}\cdot25 + 10^{-3}\cdot16 - 3\cdot10^{-3}\cdot4)}{2\cdot9\cdot10^9\cdot2\cdot10^{-12}} = 15.$$

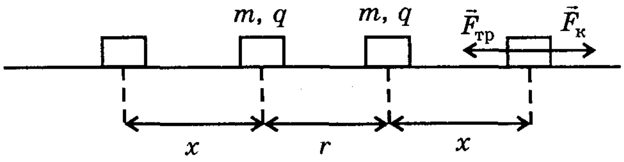
Тогда $r_{\min} = 0{,}625$ м $= 62{,}5$ см.

2, *а*. Два тела с зарядом $q = 10$ мкКл и массой $m = 5$ г каждое удерживают на горизонтальной поверхности на расстоянии $r = 1$ м друг от друга. Тела отпускают, и они начинают скользить по поверхности, коэффициент трения о которую $\mu = 0{,}5$. Определим максимальную скорость, которую разовьют тела, и расстояние, которое они пройдут до остановки.

Решение

В начальный момент сила кулоновского отталкивания $F_\text{к} = \frac{kq^2}{r^2}$ больше, чем максимальная сила трения $F_\text{тр} = \mu mg\left(F_\text{к} > F_{\text{тр}_{\max}}\right)$. Поэтому, как только тела освобождают, они начинают двигаться ускоренно до тех пор, пока сила кулоновского отталкивания не станет равна силе трения по модулю.

В этот момент времени ускорение становится равным нулю ($a = 0$), а скорость каждого тела — максимальной ($v_{\max}$). Для определения этой скорости воспользуемся теоремой об изменении энергии системы:



$$\frac{kq^2}{r+2x}+2\frac{mv_{\max}^2}{2}-\frac{kq^2}{r}=-2\mu mgx \Rightarrow$$

$$v_{\max}=\sqrt{\frac{kq^2 2x}{mr(r+2x)}-2\mu gx},$$

где $\frac{kq^2}{r+2x}$ — потенциальная энергия электрического взаимодействия тел на расстоянии $(r+2x)$; $\frac{mv_{\max}^2}{2}$ — максимальная кинетическая энергия каждого тела на расстоянии $(r+2x)$ друг от друга; $\frac{kq^2}{r}$ — начальная потенциальная энергия электрического взаимодействия тел на расстоянии r; $-\mu mgx$ — работа силы трения, действующей на каждое тело при прохождении расстояния x.

Определим $(r+2x)$ и $2x$ из условия, что сила кулоновского взаимодействия равна силе трения $\frac{kq^2}{(r+2x)^2}=\mu mg \Rightarrow r+2x=\sqrt{\frac{kq^2}{\mu mg}}$;

$$2x=\sqrt{\frac{kq^2}{\mu mg}}-r.$$

Чтобы не усложнять расчёты, сразу определим $r+2x=6$ м, $2x=5$ м; $v_{\max}\approx 13{,}2\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$.

Для определения расстояния s, после прохождения которого тела остановятся, также воспользуемся теоремой об изменении энергии и запишем:

$$\frac{kq^2}{r+2s}-\frac{kq^2}{r}=-2\mu mgs \Rightarrow \frac{kq^2}{r(r+2s)}=\mu mg.$$

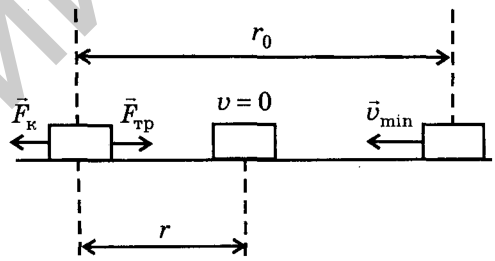
Тогда $r+2s=\frac{kq^2}{\mu mgr} \Rightarrow s=\frac{kq^2}{2\mu mgr}-\frac{r}{2}$.

$$[s]=\frac{\text{Н}\cdot\text{м}^2\cdot\text{Кл}^2}{\text{Кл}^2\cdot\text{м}\cdot\text{Н}}=\text{м}.$$

$s=17{,}5$ м.

2, *б*. Изменим условие предыдущей задачи. Пусть два тела находятся на расстоянии $r_0=10$ м друг от друга. Определим минимальную скорость, которую нужно сообщить одному из тел, чтобы второе тело сдвинулось с места.

Расчёт показывает, что в начальный момент времени сила трения покоя больше силы кулоновского отталкивания. Поскольку частицы одноимённо заряженные, то очевидно, что необходимо сообщить одному из тел скорость в направлении ко второму. Когда оно окажется на некотором расстоянии r от второго тела, сила кулоновского отталкивания, действующая на второе тело, станет равной силе трения и в этот момент оно сдвинется с места. Так как требуется определить минимальную скорость, сообщаемую первому телу, чтобы сдвинуть второе, то считаем, что первое тело в этот момент остановится. Это случится на некотором расстоянии r между телами.



Определим это расстояние из условия равенства

$$\mu mg=\frac{kq^2}{r^2} \Rightarrow r=\sqrt{\frac{kq^2}{\mu mg}}=6\text{ м}.$$

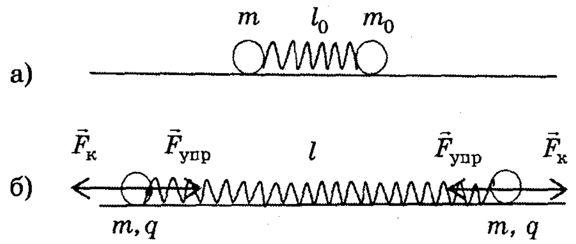
И вновь воспользуемся теоремой об изменении энергии системы:

$$\frac{kq^2}{r}-\frac{kq^2}{r_0}-\frac{mv_{\min}^2}{2}=-\mu mg(r_0-r).$$

Определим минимальную скорость

$$v_{\min}=\sqrt{\frac{2(r_0-r)(kq^2+\mu mgrr_0)}{mrr_0}}=8\,\frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

3, *а*. Перейдём к рассмотрению взаимодействия двух маленьких шариков массой $m=150$ г каждый, соединённых непроводящей недеформированной пружиной длиной $l_0 = 50$ см, жёсткостью $k = 10\,\dfrac{\text{Н}}{\text{м}}$. После сообщения шарикам одинаковых зарядов длина пружины становится $l = 100$ см. Определим минимальную скорость, которую надо сообщить каждому шарику, чтобы они смогли сблизиться до прежнего расстояния l_0.



При сообщении шарикам одинаковых зарядов на каждый из них начинают действовать сила упругости со стороны пружины и сила кулоновского отталкивания. Момент времени, когда эти две силы становятся равными, соответствует максимальному растяжению пружины до длины l. Поверхность гладкая — силы трения отсутствуют. Силы упругости и Кулона являются потенциальными (консервативными), следовательно, можем воспользоваться законом сохранения энергии:

$$\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 l} + 2\frac{mv_{\min}^2}{2} + \frac{k(l-l_0)^2}{2} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 l_0}, \qquad (1)$$

где $\dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 l}$ и $\dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 l_0}$ — начальная и конечная энергии электрического взаимодействия шариков; $\dfrac{mv_{\min}^2}{2}$ — минимальная кинетическая энергия, сообщаемая каждому шарику (так как имеется в виду минимальная скорость, сообщаемая шарикам, то конечная кинетическая энергия их должна стать равной нулю); $\dfrac{k(l-l_0)^2}{2}$ — потенциальная энергия упруго деформированной пружины в начальный момент времени.

Заряды, сообщаемые шарикам, неизвестны. Определим их из условия, что при растяжении пружины до длины l силы упругости и Кулона становятся равными:

$$k(l-l_0) = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 l^2} \Rightarrow \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0} = kl^2(l-l_0). \qquad (2)$$

Преобразуем выражение (1) к виду

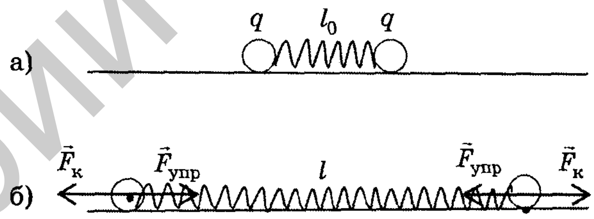
$$mv_{\min}^2 = \frac{q^2(l-l_0)}{4\pi\varepsilon_0 l l_0} - \frac{k(l-l_0)^2}{2}.$$

Воспользуемся выражением (2), получим

$$v_{\min} = \sqrt{\frac{kl(l-l_0)^2}{ml_0} - \frac{k(l-l_0)^2}{2m}} =$$

$$= (l-l_0)\sqrt{\frac{k(2l-l_0)}{2ml_0}},\ v_{\min} = 5\,\frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

3, *б*. Теперь представим, что после сообщения одинаковым шарикам, соединённым непроводящей недеформированной пружиной длиной $l_0 = 8$ см, заряда $q = 1$ мкКл каждому шарики приходят в колебательное движение на горизонтальной поверхности. Постепенно колебания прекращаются, длина пружины остаётся равной $l = 10$ см. Определим количество энергии, перешедшей в тепло, при затухании колебаний.



В начальный момент времени система обладает потенциальной энергией электрического взаимодействия шариков $W_{\text{I}} = \dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 l_0}$.

После прекращения колебаний энергия системы станет равной сумме потенциальных энергий электрического взаимодействия шариков и упруго деформированной пружины:

$$W_{\text{II}} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 l} + \frac{k(l-l_0)^2}{2}.$$

Количество энергии Q, перешедшей в тепло в этих затухающих колебаниях, определится разностью энергий начального и конечного состояний системы:

$$Q = W_{\text{I}} - W_{\text{II}} \text{ или}$$

$$Q = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 l_0} - \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 l} - \frac{k(l-l_0)^2}{2} = \frac{q^2(l-l_0)}{4\pi\varepsilon_0 l_0 l} - \frac{k(l-l_0)^2}{2}. \qquad (3)$$

Для нахождения коэффициента жёсткости пружины k воспользуемся конечным состоянием системы, когда сила кулоновского отталкивания становится равной силе упругости:

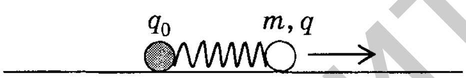
$$\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 l^2} = k(l - l_0) \Rightarrow k = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 l^2 (l - l_0)}. \quad (4)$$

Подставим (4) в (3), получим:

$$Q = \frac{q^2(l - l_0)}{4\pi\varepsilon_0 l_0 l} - \frac{q^2(l - l_0)^2}{8\pi\varepsilon_0 l^2 (l - l_0)} = \frac{q^2(l - l_0)(2l - l_0)}{8\pi\varepsilon_0 l_0 l^2}.$$

Расчёт показал, что в тепло перешло $Q = 0{,}135$ Дж энергии.

3, *в*. Рассмотрим два заряженных шарика, соединённых непроводящей пружиной и расположенных на гладкой горизонтальной поверхности. Шарик с зарядом $q_0 = 1$ мкКл закреплён, шарик массой $m = 10$ г и зарядом $q = 2$ мкКл подвижен и колеблется так, что минимальная длина пружины составляет $l_1 = 10$ см, а длина её в недеформированном состоянии $l_0 = 30$ см. Определим максимальную скорость движения колеблющегося шарика, если в этот момент длина пружины $l_2 = 40$ см.



Данная система замкнутая, воспользуемся законом сохранения энергии:

$$\frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 l_2} + \frac{k(l_2 - l_0)^2}{2} + \frac{m v_{\max}^2}{2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 l_1} + \frac{k(l_1 - l_0)^2}{2}. \quad (5)$$

В этом выражении левая часть представляет сумму энергий: электрического взаимодействия заряженных шариков, упругой деформации пружины и максимальной кинетической энергии шарика соответственно. Правая часть — сумма энергий системы в состоянии максимальной деформации пружины: энергия электрического взаимодействия заряженных шариков на расстоянии l_1 и потенциальная энергия упругой деформации пружины соответственно.

Из выражения (5):

$$\frac{m v_{\max}^2}{2} = \frac{q_1 q_2 (l_2 - l_1)}{4\pi\varepsilon_0 l_1 l_2} + \frac{k}{2}\left((l_1 - l_0)^2 - (l_2 - l_0)^2\right) = \frac{q_1 q_2 (l_2 - l_1)}{4\pi\varepsilon_0 l_1 l_2} + \frac{k}{2}\left(l_1^2 - 2l_0(l_1 - l_2) - l_2^2\right). \quad (6)$$

Жёсткость пружины определим из условия задачи: скорость шарика максимальна, когда его ускорение равно нулю, значит, на расстоянии l_2 силы кулоновского отталкивания и упругости становятся равными:

$$k(l_2 - l_0) = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 l_2^2} \Rightarrow$$

жёсткость пружины $k = \dfrac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 l_2^2 (l_2 - l_0)}$. (7)

Подставив (7) в (6), определим максимальную скорость каждого шарика:

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{q_1 q_2 (l_2 - l_1)}{2\pi\varepsilon_0 m l_1 l_2} + \frac{q_1 q_2 \left(l_1^2 - 2l_0(l_1 - l_2) - l_2^2\right)}{4\pi\varepsilon_0 l_2^2 (l_2 - l_0) m}} = \sqrt{\frac{q_1 q_2}{2\pi\varepsilon_0 m}\left(\frac{l_2 - l_1}{l_1 l_2} + \frac{l_1^2 - 2l_0(l_1 - l_2) - l_2^2}{2 l_2^2 (l_2 - l_0)}\right)},$$

$$v_{\max} = 5{,}5\ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Список использованных источников

1. *Черноуцан, А. И.* Физика. Задачи с ответами и решениями / А. И. Ченоуцан. — М. : КДУ, 2005. — 352 с.
2. Физика: 3800 задач для школьников и поступающих в вузы. — М. : Дрофа, 2000. — 672 с.
3. *Развина, Т. И.* Физика. Электродинамика / Т. И. Развина. — Минск : БНТУ, 2011. — 389 с.