УДК 517.946

# О приближенном решении некоторых дифференциальных вариационных задач

Мелешко И.Н.
Белорусский национальный технический университет

Вариационные методы часто применяют для решения разных дифференциальных задач механики и математической физики. Представляется интересным вопрос о решении вариационных задач с помощью методов решения дифференциальных краевых задач.

Как известно, краевые задачи для уравнений Лапласа и Пуассона эквивалентны задаче вариационного исчисления – о минимуме интеграла, для которого данное дифференциальное уравнение является уравнением Эйлера-Лагранжа.

Например, задача о минимуме интеграла

$$\iint_D \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + 2 f\left(x, y\right) u \right] dxdy, \tag{1}$$

где область D ограничена контуром L, ставится так: найти функцию $u = u(x, y)$, непрерывную в области D вместе с частными производными первого и второго порядка при граничном условии

$$u\big|_L = g\left(s\right), \ s \in L \ \text{(условие Дирихле)} \tag{2}$$

и дающую интегралу (1) минимальное значение.

В данном случае вариационная задача (1), (2) приводится к задаче Дирихле для уравнения Пуассона: $\Delta u = f\left(x, y\right)$.

Если $f(x, y) = 0$, то интеграл (1) принимает вид

$$\iint_D \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dxdy \ \text{(интеграл Дирихле).}$$

Задача о минимуме этого интеграла эквивалентна задаче Дирихле для уравнения Лапласа: $\Delta u = 0$.

Известны также вариационные проблемы, приводящие к уравнениям Лапласа и Пуассона при граничных условиях Неймана, а также к смешанной краевой задаче.

С помощью специальных функций – полилогарифмов нами получены эффективные приближенные представления решений, упомянутых выше, краевых задач для уравнения Лапласа в случае, когда область D – единичный круг, которые могут служить одновременно приближенными решениями эквивалентных задач вариационного исчисления.