УДК 517.925

Использование числа вращения для исследования устойчивости линейных систем второго порядка

Веременюк В.В.
Белорусский национальный технический университет

Рассматривается линейная система 2-го порядка

$$\dot{x} = A(t)x,\ t \in [0;+\infty),\ x \in \mathbf{R}^2, \qquad (1)$$

с ω-периодической непрерывной матрицей коэффициентов $A(t)$, удовлетворяющей условию на след этой матрицы $\int_0^{\omega} SpA(t)dt \le 0$. Обозначим $u_x(t) = arg(x(t))$, где $x(t) \ne 0$ – решение (1). Нетрудно проверить, что эта функция удовлетворяет уравнению

$$\dot{u}_x = a_{21} cos^2 u_x - a_{12} sin^2 u_x + (a_{22} - a_{11}) sin u_x \, cos u_x, \qquad (2)$$

где $a_{i,j}(t)$ – элементы матрицы $A(t)$. Значение предела $R_x = \lim_{t \to \infty} \frac{u_x(t)}{t}$ называется числом вращения решения $x(t)$. Известно (см., например [1]), что для любого решения $x(t) \ne 0$ системы (1) число вращения R_x существует и не зависит от выбора решения. Значение $R_A \equiv R_x$ называется числом вращения системы (1). Из [3] следует, что $\left| R_A - \frac{u_x(n\omega)}{n\omega} \right| \le \frac{\pi}{n\omega}$, Это позволяет оценивать число вращения численными методами, используя уравнение (2).

Теорема. Если система (1) неустойчива, то число $\frac{\omega}{\pi} R_A$ – целое.

Для доказательства достаточно увидеть, что в силу теории Флоке (см., например [2]) получаем, что уравнение (1) неустойчиво только, если оно имеет действительный мультипликатор $|\rho| > 1$.

Надо отметить, из теории Флоке следует, что нарушение условия на след матрицы $A(t)$ системы (1) влечет неустойчивость этой системы.

Литература:

1. Арнольд В.И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Наука. – 1978.
2. Демидович Б.П., Лекции по математической теории устойчивости. – М.: Наука. – 1967.
3. Веременюк В.В. // Дифференц. уравнения. – 1995. – Т. 31, №1. –

С.158–159.

УДК 625.855.3

Расчет температуры многослойной дорожной одежды

Занкович М.В., Кожевец С.Д.
Белорусский национальный технический университет

Для расчета температуры дорожного покрытия воспользуемся уравнением нестационарной теплопроводности [1], которое позволяет учитывать изменения параметров внешней среды и теплоинерционные свойства дорожной конструкции. Итак, ищем функцию $T(t,x)$ – значение температуры в момент времени t на глубине x. Предполагается, что дорожная одежда состоит из n слоев $0 = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n$; каждый слой имеет характеристики: λ_k – коэффициент теплопроводности, $a_k^2 = \dfrac{\lambda_k}{c_k \rho_k}$ – коэффициент температуропроводности, c_k – удельная теплоемкость, ρ_k – плотность. Рассмотрим функции $T_k(t,x) = T(t,x)$, $x \in [x_{k-1}; x_k]$, $k = 1,...,n$, – значения температуры в точках k-го слоя. Эти функции ищем как решения системы уравнений

$$a_k^2 \frac{\partial^2 T_k}{\partial x^2} = \frac{\partial T_k}{\partial t}, \ k = 1,...,n, \tag{1}$$

с граничными и начальным условием

$$\lambda_k \frac{\partial T_k}{\partial x}\bigg|_{x=x_k} = \lambda_{k+1} \frac{\partial T_{k+1}}{\partial x}\bigg|_{x=x_k}, \ T_k(t,x_k) = T_{k+1}(t,x_k), \ k = 1,...,n-1, \tag{2}$$

$$T(0,x) = T_0(x), \ T_n(t,x_n) = T_0(x_n). \tag{3}$$

Для учета внешних условий ставится условие

$$\alpha \cdot (T_п - T_в) + w_п = -\lambda_1 \cdot \frac{\partial T_п}{\partial x}, \tag{4}$$

где $T_п = T_1(t,0)$ – температура на поверхности покрытия, $w_п$ – плотность теплового воздействия на покрытие, зависящая от интенсивности солнечной радиации, интенсивности движения транспорта на данном участке дороги, α – коэффициент температуропроводности.

Решение задачи (1)-(4) реализовано в виде компьютерной программы и использует неявную схему Эйлера и метод прогонки [2].

Научный руководитель работы – В.В. Веременюк.

Литература:

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики: