УДК 517.537.7

Разложение функций в ряды Дирихле операторным методом

Акимов В.А., Гончарова С.В.
Белорусский национальный технический университет

Ряды Дирихле являются обобщением классических рядов, что хорошо видно из формулы $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\ln n^2}$.

Ниже проиллюстрируем возможности операторного метода на конкретном примере разложения гладкой функции в ряд Дирихле с вещественными показателями $e^{ax}=A_1e^x+A_2e^{2x}+A_3e^{3x}$. Используя изложенную в [1]теорию, получим разложение

$$e^{ax}=\frac{(a-2)(a-3)}{2}e^x-(a-1)(a-3)e^{2x}+\frac{(a-1)(a-2)}{2}e^{3x}.$$

Для удобства проведения анализа сходимости этого разложения введем неявную функцию $\Phi(a,x)=0$,

где $\Phi(a,x)=e^{ax}-\frac{(a-2)(a-3)}{2}e^x+(a-1)(a-3)e^{2x}-\frac{(a-1)(a-2)}{2}e^{3x}$.

Легко проверить свойства этой функции $\Phi(a,0)\equiv 0$, а также $\Phi(1,x)=\Phi(2,x)=\Phi(3,x)\equiv 0$.

Проведем её осреднение на интервале

$$(0,1):\overline{\Phi}(a)=\int_0^1\Phi(a,x)dx=\frac{e^a-1}{a}-(e-1)(a-2)(a-3)+$$

$$+\frac{(e^2-1)}{4}(a-1)(a-3)+\frac{(e^3-1)}{6}(a-1)(a-2)$$

Теперь её можно исследовать на экстремум как функцию одной переменной.

В более общем случае, задаваясь произвольной областью, например, $0\le x\le 1$, $-4\le a\le 4$ и привлекая современные вычислительные средства типа Math.Cad, Math.Lab и другие, можно оценить невязку $\Phi(a,x)=0$ графически.

Литература:

1. Акимов В.А. Операторный метод решения задач теории упругости. – Минск: УП «Технопринт», 2003. – 101 с.