УДК 517.39

Рекуррентные (возвратные) последовательности и рекуррентно вычислимые интегралы

Волкович П.Ф., Рутко Д.Ф.
Белорусский национальный технический университет,
Академия управления при Президенте Республики Беларусь

Пусть общий член интегральной рекуррентной последовательности представлен первообразной функцией

$$I_n = \int \varphi_n(x)dx \tag{1}$$

и пусть $\varphi_n(x) = x^n f(x), n = 0,1,2,3,...$, где $f(x)$ – целая функция, которая по определению представляется равномерно сходящимся степенным рядом. Тогда, как известно, и произведение $x^n f(x)$ также представляется равномерно сходящимся степенным рядом, который, следовательно, можно почленно интегрировать. Применяя обобщенную формулу интегрирования по частям, в этом случае получим интегральное рекуррентное соотношение

$$\begin{gathered}\int x^n f(x)dx = \sum_{\nu=0}^{r-1}(-1)^\nu n(n-1)(n-2)...(n-\nu)x^{n-\nu} f_{(\nu)}(x) + \\ + (-1)^r n(n-1)(n-2)...(n-r)\int x^{n-r} f_{(r)}(x)dx,\end{gathered} \tag{2}$$

где r – порядок целой функции $f(x)$;

$f_{(0)}(x) = f(x)$, $f_{(\nu)}(x) = \frac{d}{dx} f_{(\nu+1)}(x)$ – интегрированные ядра разложения (2).

Аналогично, рекуррентным соотношением представляется интегральная рекуррентная последовательность, если подынтегральная функция $\varphi_n(x)$ ее общего члена (1) является композицией целой степенной и трансцендентной функций или композицией целой степенной и целой функции, представимой равномерно сходящимся степенным рядом, или произведением двух аналогичных композиций.

Решения рекуррентных соотношений методом математической индукции в указанных случаях представляются комбинаторными суммами. Такое представление служит цели снижения сложности вычислительных алгоритмов при проведении научных исследований, инженерных и экономических расчетов.