УДК 519.210

Проблема моментов и рекуррентное интегрирование

Волкович П.Ф., Рутко Д.Ф.
Белорусский национальный технический университет,
Академия управления при Президенте Республики Беларусь

Проблема моментов – весьма важная для теории вероятностей и ее приложений – формулируется следующим образом: дана числовая последовательность

$$\alpha_0 = 1, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k, ... ; \tag{1}$$

при каких условиях существует такая функция распределения $F(x)$, для которой при всех $k = 0,1,2,...$ имеют место равенства

$$\alpha_k = \int x^k \, dF(x);$$

когда функция $F(x)$ – единственна?

Решение проблемы моментов в такой постановке для случая непрерывных распределений сформулировано в виде: одномерное распределение вероятностей случайной величины непрерывного типа однозначно определяется своими начальными моментами $\alpha_0, \alpha_1, ...$, если все они существуют и являются рекуррентно вычислимыми. Последнее означает, что плотность распределения $f(x) = F'(x)$ в этом случае является целой функцией, представимой равномерно сходящимся степенным рядом, а общий член α_k последовательности (1), как общий член рекуррентной числовой последовательности, – представим комбинаторной суммой. К числу таких распределений относятся экспоненциальное, нормальное, синусоидальное, косинусоидальное, Рэлея, Максвелла, Лапласа, Вейбулла, гамма-распределение, распределение χ-квадрат, арксинуса и другие.

К сожалению, условия однозначного определения функций распределения своими начальными моментами не являются выполнимыми для всего класса непрерывных распределений. Известны распределения, для которых указанные условия не выполняются: например, распределение Коши с плотностью распределения $f(x) = \dfrac{a}{\pi\left(x^2 + a^2\right)}$, $a > 0$, для которого не существуют начальные моменты первого и более высоких порядков, или равномерное распределение, плотность распределения которого, являясь алгебраическим многочленом нулевой степени, не представляется равномерно сходящимся степенным рядом.