**Министерство образования
Республики Беларусь**

**БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ**

Кафедра «Теоретическая механика»

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

Лабораторный практикум

Часть 1

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ И ИХ СИСТЕМ

**Минск
БНТУ
2010**

Министерство образования Республики Беларусь
БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра «Теоретическая механика»

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

Лабораторный практикум
для студентов специальности
1-55 01 03 «Компьютерная мехатроника»

В 2 частях

Часть 1

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ И ИХ СИСТЕМ

М и н с к
БНТУ
2 0 1 0

УДК 519.6 (076.5)
ББК 22.193я7
Ч 67

С о с т а в и т е л и:
И.С. Куликов, Ю.А. Довга

Р е ц е н з е н т ы:
профессор, доктор физ.-мат. наук *А.В. Чигарев*
доцент, кандидат физ.-мат. наук *М.Г. Ботогова*

Ч 67 Численные методы: лабораторный практикум для студентов специальности 1-55 01 03 «Компьютерная мехатроника»: в 2 ч. / сост.: И.С. Куликов, Ю.А. Довга. – Минск: БНТУ, 2010. – Ч. 1: Численные методы решения уравнений и их систем. – 52 с.

ISBN 978-985-525-186-7 (Ч. 1).

Издание представляет собой сборник заданий для лабораторных работ по дисциплине «Численные методы» для студентов специальности 1-55 01 03 с использованием СКМ Mathematica. В текст включено краткое изложение основных теоретических сведений, знание которых необходимо для сознательного решения задач.

УДК 519.6 (076.5)
ББК 22.193я7

ISBN 978-985-525-186-7 (Ч. 1)
ISBN 978-985-525-188-1

Лабораторная работа №1

ОСНОВЫ РАБОТЫ С MATHEMATICA

Цель: изучить основы работы с пакетом Mathematica.

Теоретические сведения

Система компьютерной математики Mathematica работает с документами класса notebook. В интерфейсе предусмотрены выбираемые пользователем и свободно перемещаемые по экрану инструментальные палитры с множеством пиктограмм ввода математических символов, функций и команд управления системой. Они выводятся с помощью меню **File|Palettes (Файл|Палитры).**

Для выполнения простых арифметических операций достаточно набрать необходимое математическое выражение и нажать клавиши одновременно **Shift+Enter** (сама по себе клавиша **Enter** используется только для перевода строки внутри текущей строки ввода) или боковую клавишу ввода.

Mathematica оперирует с тремя основными классами данных:

1) *численными данными*, представляющими числа различного вида;

2) *символьными данными*, представляющими символы, тексты и математические выражения (формулы);

3) *списками* – данными в виде множества однотипных или разнотипных данных.

Численные данные

1. Двоичные числа, биты и байты. Бит – минимальная единица информации в компьютерной технике. Именно с битами работает микропроцессор на нижнем уровне операций.

2. Десятичные числа.

Обозначение	Тип чисел	Диапазон	
Integer	Целочисленные	123	-345
Rational	Рациональные	123/567	-23/67
Real	Вещественные	123	-123.456 10^6
Complex	Комплексные	-3,5+0,56 I	

Целочисленные данные (Integer) – это целые числа, которые представляются системой без погрешности и ограничения разрядности. Арифметические операции над ними система выполняет также без погрешностей и ограничения числа цифр.

Рациональные данные задаются отношением целых и также представляют результат точно.

Вещественные числа могут иметь различную форму представления. Целая часть от мантиссы отделяется точкой. Для представления выражения **expr** в форме вещественного числа используется функция **N[expr]** или **N[exp**r**, число_цифр_резуль-тата].** Вещественные числа всегда имеют некоторую погрешность из-за неизбежного округления и существования так называемого машинного нуля – наименьшего числа, которое воспринимается как нуль. Mathematica имеет две системные переменные, позволяющие вывести максимально и минимально возмож-ные значения чисел (рис. 1.1.), с которыми оперирует система. Функции **IntegerPart[x]** и **FractionalPart[x]** обеспечивают возврат целой и дробной частей вещественного числа *x*.

In[5]:= **$MaxMachineNumber**

Out[5]= 1.79769×10^{308}

In[6]:= **$MinMachineNumber**

Out[6]= 2.22507×10^{-308}

Рис. 1.1. Вывод максимально и минимально возможных значений чисел

Комплексные числа (рис. 1.2) задаются в форме

$$z = \mathrm{Re}[z] + I\,\mathrm{Im}[z],$$

где I – мнимая единица,

$\mathrm{Re}[z]$ – действительная часть комплексного числа,

$\mathrm{Im}[z]$ – мнимая часть комплексного числа.

```
In[7]:= 2 + I 3

Out[7]= 2 + 3 ⅈ

In[8]:= 2 + 3 * I

Out[8]= 2 + 3 ⅈ

In[9]:= Re[2 + 3 I]

Out[9]= 2

In[10]:= Im[2 + 3 I]
```

Рис. 1.2. Действия с комплексными числами

3. Числа с произвольным основанием.

Для вычисления чисел с произвольным основанием (рис. 1.3) используется конструкция **Основание^^Число**

Числа с произвольным основанием.

```
In[1]:= 16^^123abcde

Out[1]= 305839326

In[3]:= BaseForm[87, 2]

ut[3]//BaseForm=
        1010111₂
```

Рис.1.3. Запись чисел с произвольным основанием

Символьные данные и строки

Символьные данные в общем случае могут быть отдельными символами (a, b, c, …), строками (strings) и математическими выражениями expr, представленными в символьном виде.

Символьные строки задаются в кавычках. В них используются управляющие символы для строчных объектов:

\n – новая строка;

\t – табуляция.

Списки и массивы

{1, 2, 3} – список из трех целых чисел;

{a, b, c} – список из трех символьных данных;

{{a, b}, {c, d}} – список эквивалентный матрице.

Выражения в Mathematica ассоциируются с математическими формулами.

При записи арифметических выражений:

- знак умножения может быть заменен пробелом;
- встроенные функции начинаются с большой буквы;
- круглые скобки **( )** используются для задания последовательности вычисления частей выражения;
- параметры функций задаются в квадратных скобках **[]**;
- фигурные скобки **{}** используются при задании списков.

In[11]:= `2*Sin[x]`

Out[11]= 2 Sin[x]

In[12]:= `2 Sin[x]`

Out[12]= 2 Sin[x]

In[13]:= `(a+b^2+c^3)/(3*d-4*e)`

Out[13]= $\frac{a+b^2+c^3}{3d-4e}$

In[14]:= `Sqrt[2]`

Out[14]= $\sqrt{2}$

In[15]:= `Integrate[Sin[x], x]`

Out[15]= -Cos[x]

Рис. 1.4. Вычисление некоторых математических выражений

Задания к лабораторной работе

Задание 1. Вычислить значение числового выражения, приведенного в таблице, используя палитру BasicInput. Используя функцию N отобразить 9 цифр результата. Вывести целую и дробную части от полученного результата.

№	Выражение	№	Выражение	№	Выражение	№	Выражение
1	$\sqrt{101}$	2	$\lvert -10 \rvert$	3	$10!$	4	e^2
5	$\sum_{k=1}^{5} \frac{1}{k}$	6	$\frac{1}{3}$	7	10^{16}	8	$\sqrt[3]{5}$
9	i^2	10	$\sqrt{-1}$	11	$\sqrt{-58}$	12	$\lvert -1.2 \rvert$
13	$8!$	14	e^{π}	15	$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k$	16	$\frac{1}{6}$
17	10^4	18	$\sqrt[3]{-8}$	19	$i^{\frac{1}{2}}$	20	$\sqrt{-4}$

Задание 2. Определить переменные a, b, c и выражения $z = \frac{2ab + \sqrt[3]{c}}{\sqrt{(a^2 + b^{a+c})c}}$; $N = e^{\sin(c)} \cos\frac{a}{b}$. Вычислить выражения.

№	a	b	c	№	a	b	c	№	a	b	c
1	3.4	6.22	0.146	2	4.17	0.25	1.05	3	0.22	1.05	6.42
4	1.68	5.81	2.17	5	0.96	8.45	3.48	6	1.11	4.01	0.02
7	5.1	9.8	7.14	8	4.56	7.25	4.65	9	4.23	7.25	1.21
10	0.25	0.14	0.77	11	2.56	43.55	85.4	12	0.25	0.45	0.89
13	1.26	0.25	8.36	14	4.2	1.2	0.23	15	2.56	6.21	0.45

Задание 3. Вывести на экран значение локальной константы π.

Задание 4. Задать два комплексных числа $z1 = 1 + 2i$ и $z = -n + (n-1)i$, где n – номер варианта. Выполнить следующие операции с комплексными числами: найти модуль, действительную и мнимую части, извлечь корень, возвести в третью степень. Вычислить: $z1+z$, $z-z1$, $z1\cdot z$, $\frac{z}{z1}$.

Задание 5. Выполнить следующие операции:

$$\sum_{i=1}^{n} i\,,\ \prod_{i=1}^{n}(i+1)\,,\int_0^n x^2\sin(x+2)\,dx\,,\ \int_1^{\pi}\ln(x\cdot n)\,dx\,,\ \frac{d}{dx}(x^n)\,,\frac{d}{dx}(\sin(nx))\,,$$

где n – номер варианта.

Задание 6. Построить график функции на заданном отрезке:

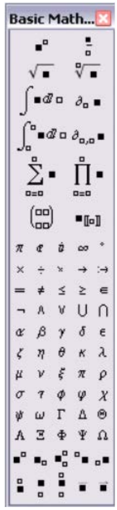
№	$[a,b]$	$F(x)$	№	$[a,b]$	$F(x)$ функция
1	$[0,1]$	$\sqrt{1+x}$	2	$[0,1]$	$x^2\sqrt{1-x^3}$
3	$[0,1]$	$\left(e^x-1\right)^2 e^x$	4	$[2,e]$	$\frac{dx}{x\sqrt{1+\ln(x)}}$
5	$[2,5]$	$\frac{Cos^2 x}{\ln x}$	6	$[1,2]$	$\sqrt[x]{x\cdot e}$
7	$[0,\pi/2]$	$x\cdot Cosx$	8	$[0,1]$	$Cos\left(x+x^3\right)$
9	$[0,1]$	$Sin\left(x+x^3\right)$	10	$[0,1]$	$Cos\left(xe^{-3x}\right)$
11	$[0,1]$	$Sin\left(xe^{-3x}\right)$	12	$[0,1]$	chx^2
13	$[1/2,1]$	$\ln x\left(x+x^{-1}\right)$	14	$[\pi,\pi/2]$	$\sqrt{x}e^{-x}$
15	$[0,1]$	$Cos\left(x^3\right)$	16	$[1,2]$	$x^{-1}\ln(1+x)$
17	$[1,2]$	$x^{-1}e^x$	18	$[0,1]$	$Cos\left(x^2+x\right)$

Задание 7. Вывести на экран все натуральные числа из промежутка [0;50), которые делятся на номер вашего варианта.

Пример выполнения лабораторной работы

Задание 1.

Вычислить значение выражения, используя палитру BasicInput :



In[1]:= e^2

Out[1]= e^2

Первые 9 цифр :

In[2]:= `N[%, 9]`

Out[2]= `7.38905610`

Целая часть числа :

In[3]:= `IntegerPart[%]`

Out[3]= `7`

Дробная часть числа :

In[4]:= `FractionalPart[%%]`

Out[4]= `0.38905610`

Задание 2.

Определить переменные, и выражения

In[5]:= `a = 0.17; b = 3.45; c = 1.22;`

In[6]:= myFun1[x_, y_, z_] := $\dfrac{\sqrt[3]{x + y^z}}{x - z}$;

myFun2[x_, y_, z_] := $\dfrac{\mathrm{Sin}[x - y]}{e^z}$;

In[8]:= `myFun1[a, b, c]`

Out[8]= `-1.59535`

In[9]:= `myFun2[a, b, c]`

Out[9]= `0.0407317`

In[10]:= `myFun1[x, y, z]`

Out[10]= $\dfrac{(x + y^z)^{1/3}}{x - z}$

Задание 3.

In[11]:= π

Out[11]= π

In[12]:= N[%]

Out[12]= 3.14159

Задание 4.

```
134]:= n = 27;
z = n/2 + (n - 3) i;
Print[" |z|=", Abs[z], "\n действительная часть:", Re[z],
 "\n мнимая часть:", Im[z]]
Print[" z=", z, "\n z1=", z1, "\n z+z1=", z + z1, "\n z-z1=", z - z1,
 "\n z*z1=", z z1, "\n z/z1=", z / z1]
Print["В виде десятичных дробей:"]
Print[" |z|=", N[Abs[z]], "\n действительная часть:", N[Re[z]],
 "\n мнимая часть:", N[Im[z]]]
Print[" z=", N[z], "\n z1=", N[z1], "\n z+z1=", N[z + z1], "\n z-z1=",
 N[z - z1], "\n z*z1=", N[z z1], "\n z/z1=", N[z / z1]]
```

$|z| = \frac{3\sqrt{337}}{2}$

действительная часть: $\frac{27}{2}$

мнимая часть:24

$z = \frac{27}{2} + 24\,i$

$z1 = -7 + 2\,i$

$z+z1 = \frac{13}{2} + 26\,i$

$z-z1 = \frac{41}{2} + 22\,i$

$z*z1 = -\frac{285}{2} - 141\,i$

$z/z1 = -\frac{93}{106} - \frac{195\,i}{53}$

В виде десятичных дробей:

|z|=27.5363

действительная часть:13.5

мнимая часть:24.

z=13.5 + 24. i

z1=-7. + 2. i

Задание 5.

In[141]:= $\sum_{i=1}^{n} i$

Out[141]= 378

In[142]:= $\prod_{i=1}^{n} (i + 1)$

Out[142]= 304 888 344 611 713 860 501 504 000 000

In[144]:= $\int_0^n x^2$ Log[10, x + 2] dx // N

Out[144]= 8737.99

In[147]:= $\int_1^\pi \frac{\text{Sin[x]}}{x} dx$ // N

Out[147]= 0.905854

In[148]:= $\partial_x x^n$

Out[148]= $27\, x^{26}$

In[149]:= D[Sin[n x], x]

Out[149]= 27 Cos[27 x]

In[150]:= x = n

Out[150]= 27

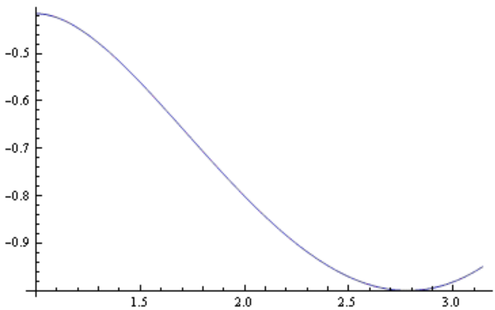
Задание 6.

Построить график функции на заданном отрезке :

In[161]:= myFun3[x_] := Cos$\left[x + x^{-1}\right]$;
a = 1;
b = π;
myFun3[X]
Plot[myFun3[x], {x, a, b}]

Out[164]= $\text{Cos}\left[\frac{1}{X} + X\right]$

Out[165]=



Задание 7.

Вывести на экран все натуральные числа из промежутка[0; 150), которые делятся на номер вашего варианта.
n = 27

```
In[167]:= For[i = 1, i < 150, i++,
    If[FractionalPart[i/n] == 0, Print[i], ];
  ];
```

27
54
81
108
135

Пример выполнения задания с помощью функции пользователя:

```
In[168]:= myOstatok[variant_, maxVal_] := Block[{i},
      For[i = 1, i < maxVal, i++,
        If[FractionalPart[i/variant] == 0, Print[i], ];
      ];
    ];
  myOstatok[n, 150]
```

27
54
81
108
135

Лабораторная работа № 2

ТЕОРИЯ ПОГРЕШНОСТЕЙ И МАШИННАЯ АРИФМЕТИКА

Цель: изучить теорию погрешностей.

Теоретические сведения

Пусть a – точное значение, a^* – приближенное значение некоторой величины. Абсолютной погрешностью приближенного значения a^* называется величина $\Delta(a^*) = \left|a^* - a\right|$. Относительной погрешностью значения a^* (при $a \neq 0$) называется величина $\boldsymbol{\delta}(a^*) = \dfrac{\Delta(a^*)}{|a|}$. Так как значение величины a, как правило, неизвестно, чаще получают оценки погрешностей вида $\left|a - a^*\right| \leq \overline{\Delta}(a^*)$; $\dfrac{\left|a - a^*\right|}{|a|} \leq \overline{\boldsymbol{\delta}}(a^*)$. Величины $\overline{\Delta}(a^*)$ и $\overline{\boldsymbol{\delta}}(a^*)$ называют верхними границами (или просто границами) абсолютной и относительной погрешностей.

Значащую цифру числа a^* называют верной, если абсолютная погрешность числа не превосходит единицы разряда, соответствующего этой цифре.

Задания к лабораторной работе

Задание 1. Дан ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$. Найти сумму ряда аналитически. Вычислить значения частичных сумм ряда $S_N = \sum\limits_{n=0}^{N} a_n$ и найти величину погрешности при значениях $N = 10, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5$.

ПОРЯДОК РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ:

1. Найти сумму ряда S аналитически как предел частичных сумм ряда.

2. Используя функцию $S_N = \sum_{n=0}^{N} a_n$, вычислить значения частичных сумм ряда при указанных значениях N.

3. Для каждого N вычислить величину абсолютной погрешности $|S(N) - S|$ и определить количество верных цифр в $S(N)$.

4. Представить результаты в виде гистограммы.

№	a_n	№	a_n	№	a_n
1	$\dfrac{2}{n^2+5n+6}$	11	$\dfrac{60}{11(n^2+12n+35)}$	21	$\dfrac{24}{7(n^2+8n+15)}$
2	$\dfrac{36}{11(n^2+5n+4)}$	12	$\dfrac{144}{5(n^2+6n+8)}$	22	$\dfrac{36}{n^2+5n+4}$
3	$\dfrac{9}{n^2+7n+12}$	13	$\dfrac{36}{n^2+7n+10}$	23	$\dfrac{46}{n^2+5n+6}$
4	$\dfrac{48}{5(n^2+6n+8)}$	14	$\dfrac{48}{n^2+8n+15}$	24	$\dfrac{96}{n^2+9n+20}$
5	$\dfrac{48}{5(n^2+6n+5)}$	15	$\dfrac{20}{n^2+4n+3}$	25	$\dfrac{60}{n^2+6n+8}$
6	$\dfrac{72}{5(n^2+6n+8)}$	16	$\dfrac{32}{n^2+5n+6}$	26	$\dfrac{72}{n^2+7n+10}$
7	$\dfrac{24}{n^2+8n+15}$	17	$\dfrac{144}{n^2+18n+80}$	27	$\dfrac{24}{n^2+4n+3}$
8	$\dfrac{32}{n^2+9n+20}$	18	$\dfrac{24}{n^2+4n+3}$	28	$\dfrac{96}{n^2+8n+15}$
9	$\dfrac{216}{7(n^2+8n+15)}$	19	$\dfrac{180}{n^2+20n+99}$	29	$\dfrac{72}{n^2+6n+8}$
10	$\dfrac{84}{13(n^2+14n+48)}$	20	$\dfrac{112}{15(n^2+16n+63)}$	30	$\dfrac{12}{5(n^2+6n+8)}$

Задание 2. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$. В каждый из диагональных элементов матрицы A по очереди внести погрешность в 1%. Как изменился определитель матрицы A? Указать количество верных цифр и вычислить величину относительной погрешности определителя в каждом случае.

№	A	№	A	№	A
1	$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 33 & 28 & 24 \\ 360 & 320 & 270 \end{pmatrix}$	2	$\begin{pmatrix} 30 & 34 & 19 \\ 314 & 34 & 200 \\ 2 & 8 & 13 \end{pmatrix}$	3	$\begin{pmatrix} 1.3 & 1 & 13 \\ 3.4 & 1.4 & 23 \\ 5 & 3 & 1.5 \end{pmatrix}$
4	$\begin{pmatrix} 9 & 5 & 6 \\ 17 & 9 & 11 \\ 7 & 4 & 5 \end{pmatrix}$	5	$\begin{pmatrix} -7 & -7 & -1 \\ 0 & -2 & -6 \\ 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$	6	$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 13 \\ 5 & 3 & 15 \\ 11 & 5 & 40 \end{pmatrix}$

Задание 3. Для заданной матрицы A найти обратную матрицу (если это возможно). Затем в элемент a_{11} внести погрешность в 10% и снова найти обратную матрицу. Объяснить полученные результаты.

№	A	N	A	№	A
1	$\begin{pmatrix} 2 & 16 & -6 \\ 3 & 24 & 5 \\ 1 & 8 & 11 \end{pmatrix}$	2	$\begin{pmatrix} 2 & 4.4 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -5 & 0 \end{pmatrix}$	3	$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 3 \\ 9 & 15 & 9 \\ 6 & 7 & 2 \end{pmatrix}$
4	$\begin{pmatrix} 48 & 3 & 6 \\ 32 & 2 & 4 \\ 5 & -1 & 2 \end{pmatrix}$	5	$\begin{pmatrix} 2 & 0.4 & 6 \\ 1.1 & 0.2 & 3 \\ 2.3 & 1.2 & 4 \end{pmatrix}$	6	$\begin{pmatrix} 5 & 5.5 & 5.5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Задание 4. Найти ранг заданной матрицы *A*. Затем внести погрешность в 0.1%: а) в элемент a_{11}; б) во все элементы матрицы, и снова найти ранг. Объяснить полученные результаты.

№	*A*	№	*A*	№	*A*
1	$\begin{pmatrix} 1.1 & 0.1 & 0.8 & 1.6 \\ 1.3 & -0.3 & 1.2 & 2.1 \\ 0.9 & 0.5 & 0.4 & 1.1 \\ -0.4 & -3.8 & 2 & 1.3 \end{pmatrix}$	2	$\begin{pmatrix} 0.6 & 4.5 & 0.3 & 3 \\ -2.4 & -12 & 0.9 & -7 \\ 1.2 & 9 & 0.6 & 6 \\ -1.2 & 3 & 3.6 & 4 \end{pmatrix}$	3	$\begin{pmatrix} 1.8 & 4 & 0 & 1.9 \\ 20.9 & 37 & -25 & 19.2 \\ 0.5 & 3 & 5 & 1.1 \\ 10.6 & 16 & -20 & 8.9 \end{pmatrix}$
4	$\begin{pmatrix} 2 & 15 & 22 & 7 \\ 1 & 14.1 & 18.8 & 2.3 \\ 2 & 4 & 9 & 9 \\ -0.4 & 2.5 & 2.1 & -2.4 \end{pmatrix}$	5	$\begin{pmatrix} 1.9 & 9 & 1.6 & 0.1 \\ 11.3 & 23 & 6.8 & -3.7 \\ 0.5 & 10 & 1.1 & 1.1 \\ 0.9 & -11 & -0.6 & -2.1 \end{pmatrix}$	6	$\begin{pmatrix} 1.2 & 9 & 0.6 & 6 \\ 1.6 & 23 & -7.2 & 9 \\ 2 & 4 & 9 & 9 \\ 2 & 37 & -15 & 12 \end{pmatrix}$

Задание 5. Дано квадратное уравнение $a + bx + c = 0$. Предполагается, что один из коэффициентов уравнения (в индивидуальном варианте помечен *) получен в результате округления. Произвести теоретическую оценку погрешностей корней в зависимости от погрешности коэффициента. Вычислить корни уравнения при нескольких различных значениях коэффициента в пределах заданной точности. Сравнить полученные результаты.

№	Коэффициенты	№	Коэффициенты	№	Коэффициенты
1	b* = -39.6 c = -716.85	2	b = 27.4 c* = 187.65	3	b* = 37.4 c = 187.65
4	b = -30.9 c* = 238.7	5	b* = -3.29 c = 2.706	6	b = -3.29 c* = 2.706

Задание 6. Для пакета Mathematica найти значения машинного нуля, машинной бесконечности.

Задание 7. Три вектора a_1, a_2, a_3 заданы своими координатами в базисе i, j, k. Что можно сказать о компланарности этих векторов, если: 1) координаты векторов заданы точно;

2) координаты векторов заданы приближённо с относительной погрешностью: а) $\delta = \alpha$ %; б) $\delta = \beta$ %.

№	a_1	a_2	a_3	α	β
1	(10, 15, 1)	(0.7, 5.7, -9)	(11, 16, 2)	0.05	0.1
2	(-2, -5, 13)	(14.2, 11.2, 28)	(0, -3, 15)	0.5	0.1
3	(24, 28, 13)	(21.1, 25.1, 10)	(18, 22, 7)	0.05	0.01
4	(9, 17, 1)	(27, 5, -18)	(6, 14, 4)	0.5	0.1
5	(14, 4, 17)	(33.9, 23.9, 38)	(13, 3, 16)	0.05	0.1
6	(9, 17, 1)	(27, 35, -18)	(6, 14, 4)	0.5	0.1

Лабораторная работа № 3

РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Цель: изучить методы решения нелинейных уравнений.

Теоретические сведения

Расчетные формулы методов решения нелинейного уравнения $f(x) = 0$.

Упрощенный метод Ньютона $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_0)}$, n = 0,1,….

Метод ложного положения $x_{n+1} = x_n - \dfrac{c - x_n}{f(c) - f(x_n)} f(x_n)$, n = 0,1,…; c – фиксированная точка из окрестности корня. Метод секущих $x_{n+1} = x_n - \dfrac{x_{n-1} - x_n}{f(x_{n-1}) - f(x_n)} f(x_n)$, n=0,1,…

Метод Стеффенсена $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f(x_n + f(x_n)) - f(x_n)} f(x_n)$, n=0,1,…

Модифицированный метод Ньютона для поиска кратных корней $x_{n+1} = x_n - m\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ $x_{n+1} = x_n - m\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, n=0,1,…, m=1,2,…

Задания к лабораторной работе

Задание 1. Даны два уравнения $f(x)=0$ и $g(x)=0$. Найти с точностью $\varepsilon=10^{-10}$ все корни уравнений, содержащиеся на отрезке [a, b]. Для решения задачи использовать *метод бисекции*. Найти корни с помощью встроенной функции **Solve** пакета Mathematica.

ПОРЯДОК РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ:

1. Найти аналитическое решение уравнения $f(x)=0$.
2. Используя пакет Mathematica, локализовать корни $f(x)=0$ графически.
3. Найти корни уравнения $f(x)=0$ с точностью ε с помощью метода бисекции.
4. Используя встроенную функции **Solve** пакета Mathematica, найти корни уравнения $f(x)=0$ с использованием опции **WorkingPrecision**, устанавливающей число цифр промежуточных вычислений.
5. Аналогично п. 1–4 попытаться найти корни уравнения $g(x)=0$. Объяснить полученные результаты.

№	$f(x)$	$g(x)$	$[a, b]$
1.1	$(\sin x)^2-\frac{5}{6}\sin x+\frac{1}{6}$	$(\sin x)^2-\sin x+\frac{1}{4}$	[0, 1]
1.2	$(\sin x)^2+\frac{7}{12}\sin x+\frac{1}{12}$	$(\sin x)^2+\frac{2}{3}\sin x+\frac{1}{9}$	[–1, 0]
1.3	$(\sin x)^2-\frac{1}{30}\sin x-\frac{1}{30}$	$(\sin x)^2-\frac{2}{5}\sin x+\frac{1}{25}$	[–0.5, 0.5]
1.4	$(\cos x)^2-\frac{2}{35}\cos x-\frac{1}{35}$	$(\cos x)^2-\frac{2}{7}\cos x+\frac{1}{49}$	[0, 2]
1.5	$(\cos x)^2-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{4}\right)\cos x+\frac{1}{4\sqrt{2}}$	$(\cos x)^2-\frac{2}{\sqrt{2}}\cos x+\frac{1}{2}$	[5, 25]
1.6	$(\cos x)^2+\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{18}$	$(\cos x)^2+\frac{1}{3}\cos x+\frac{1}{36}$	[0, 2]

№	$f(x)$	$g(x)$	$[a, b]$
1.7	$(\ln x)^2 - 5\ln x + 6$	$(\ln x)^2 - 4\ln x + 4$	[5, 25]
1.8	$(\ln x)^2 - \ln x - 2$	$(\ln x)^2 + 2\ln x + 1$	[0.1, 10]
1.9	$(\ln x)^2 - \frac{3}{4}\ln x + \frac{1}{8}$	$(\ln x)^2 - \ln x + \frac{1}{4}$	[0.1, 2]
1.10	$(\mathrm{tg}\, x)^2 - (\sqrt{3} - 1)\mathrm{tg}\, x - \sqrt{3}$	$(\mathrm{tg}\, x)^2 - 2\mathrm{tg}\, x + 1$	[−1.2, 1]
1.11	$(\mathrm{tg}\, x)^2 - \frac{28}{9}\mathrm{tg}\, x + \frac{1}{3}$	$(\mathrm{tg}\, x)^2 - 6\mathrm{tg}\, x + 9$	[0, 1.5]
1.12	$(\mathrm{tg}\, x)^2 - \frac{53}{6}\mathrm{tg}\, x - \frac{3}{2}$	$(\mathrm{tg}\, x)^2 - \frac{1}{3}\mathrm{tg}\, x + \frac{1}{36}$	[−0.5, 1.5]
1.13	$x^4 - 7x^2 + 10$	$x^4 - 4x^2 + 4$	[0, 3]
1.14	$x^4 - \frac{10}{3}x^2 + 1$	$x^4 - 6x^2 + 9$	[0, 2]
1.15	$x^4 - \frac{13}{2}x^2 + 3$	$x^4 - x^2 + \frac{1}{4}$	[0, 3]
1.16	$(\sin x)^2 + \frac{5}{6}\sin x + \frac{1}{6}$	$(\sin x)^2 + \frac{2}{3}\sin x + \frac{1}{9}$	[−1, 0]
1.17	$(\sin x)^2 - \frac{7}{12}\sin x + \frac{1}{12}$	$(\sin x)^2 - \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{16}$	[0, 1]
1.18	$(\sin x)^2 + \frac{1}{30}\sin x - \frac{1}{30}$	$(\sin x)^2 + \frac{1}{3}\sin x + \frac{1}{36}$	[−0.5, 0.5]
1.19	$(\cos x)^2 - \frac{2}{35}\cos x - \frac{1}{35}$	$(\cos x)^2 - \frac{2}{5}\cos x + \frac{1}{25}$	[0, 3]
1.20	$(\cos x)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{4}\right)\cos x - \frac{1}{4\sqrt{2}}$	$(\sin x)^2 - \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{16}$	[0, 2]
1.21	$(\cos x)^2 - \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{18}$	$(\cos x)^2 - \frac{2}{3}\cos x + \frac{1}{9}$	[0, 2]
1.22	$(\lg x)^2 + \frac{5}{3}\lg x - \frac{2}{3}$	$(\lg x)^2 - \frac{2}{3}\lg x + \frac{1}{9}$	[0.001, 3]
1.23	$(\lg x)^2 - \lg x - \frac{3}{4}$	$(\lg x)^2 - 3\lg x + \frac{9}{4}$	[0.1, 35]
1.24	$(\lg x)^2 + \frac{3}{4}\lg x - \frac{1}{4}$	$(\lg x)^2 + 2\lg x + 1$	[0.01, 3]

№	$f(x)$	$g(x)$	$[a, b]$
1.25	$(\mathrm{tg}\,x)^2-(1+\frac{1}{\sqrt{3}})\mathrm{tg}\,x+\frac{1}{\sqrt{3}}$	$(\mathrm{tg}\,x)^2-2\mathrm{tg}\,x+1$	$[0,1]$
1.26	$(\mathrm{tg}\,x)^2-\frac{7}{4}\mathrm{tg}\,x-\frac{1}{2}$	$(\mathrm{tg}\,x)^2+\frac{1}{2}\mathrm{tg}\,x+\frac{1}{16}$	$[-0.5,1.5]$
1.27	$(\mathrm{tg}\,x)^2+\frac{37}{6}\mathrm{tg}\,x+1$	$(\mathrm{tg}\,x)^2+12\mathrm{tg}\,x+36$	$[-1.5,0]$
1.28	x^4-11x^2+24	x^4-6x^2+9	$[1,3]$
1.29	$x^4-\frac{26}{5}x^2+1$	x^4-10x^2+25	$[0,3]$
1.30	$x^4-\frac{21}{2}x^2+5$	$x^4-x^2+\frac{1}{4}$	$[0,5]$

Задание 2. Найти указанный в варианте корень уравнения $f(x)=0$ с точностью $\varepsilon = 10^{-5}$, двумя способами.

1. Использовать *метод бисекции*. Предварительно определить отрезок локализации $[a, b]$.

2. Использовать *метод Ньютона.* В качестве начального приближения для метода Ньютона взять середину отрезка локализации из п. 1. Сравнить число итераций в п. 1 и 2.

№	$f(x)$	Найти корень	№	$f(x)$
2.1	$e^{-x}-2+x^2$	отрицательный	3.1	$\sin x+2x^2+4x$
2.2	xe^x-x-1	положительный	3.2	$e^{-x}-\lg(1-x^2)-2$
2.3	$e^x+1-\sqrt{9-x^2}$	положительный	3.3	$\sin(x+2)-x^2+2x-1$
2.4	$(x+1)e^{x+1}-x-2$	наибольший по модулю	3.4	$(x-1)sh(x+1)-x$
2.5	$\sqrt{x}-\cos x$	все корни	3.5	$x-e^{-x^2}$

Задание 3. Локализовать корни уравнения $f(x)=0$ (таблица к заданию 2) и найти их с точностью $\varepsilon=10^{-5}$, используя метод *простой итерации*. К виду $x=\varphi(x)$, удобному для итераций, уравнение $f(x)=0$ привести двумя способами.

1). преобразовать уравнение к виду $x = x - \alpha f(x)$, где $\alpha = 2/(M+m)$, $0<m\le f'(x)\le M$, а x принадлежит отрезку локализации $[a, b]$;

2). любым другим преобразованием уравнения. Проверить достаточное условие сходимости метода.

Использовать критерий окончания итерационного процесса вида $\left|x^{(n)} - x^{(n-1)}\right| < \frac{1-q}{q}\boldsymbol{\varepsilon}$, где в п. 1. $q=(M-m)/(M+m)$, в п. 2. $q = \max\limits_{x\in[a,b]} \left|\varphi'(x)\right|$.

Сравнить число итераций и значения величины q в п. 1 и 2.

Задание 4. Локализовать корни уравнения $f(x)=0$. Найти их с точностью $\varepsilon = 10^{-8}$, используя методы *простой итерации и Ньютона*. Сравнить скорость сходимости методов (по числу итераций).

$f(x) \equiv P_5(x) = x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$					
№	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0
4.1	4.545004	-3.055105	-18.06895	4.002429	4.722482
4.2	-2.656764	-3.406111	10.89372	-1.752935	-3.423612
4.3	-4.556062	2.93309	9.274868	-10.32081	0.422098
4.4	7.809249	16.28542	-2.771356	-27.95304	-11.33921
4.5	-13.0072	60.24546	-122.0716	105.6798	-30.19201

Задание 5. Найти приближенно корень уравнения $f(x)=0$, принадлежащий отрезку $[a, b]$ с точностью $\varepsilon = 10^{-5}$, используя *модификацию метода Ньютона для случая кратного корня* при значениях $m = 1, 2, 3, 4, 5$. По числу итераций определить кратность корня.

№	$f(x)$	$[a, b]$
5.1	$36\cos x + 18\sqrt{3}x + 9x^2 + \pi^2 - 18 - 6\sqrt{3}\pi - 6\pi x$	[0.8,1.2]
5.2	$144\sin x + 12\sqrt{3}\pi + 36x^2 + \pi^2 - 72 - 12\pi x - 72\sqrt{3}x$	[0.3,0.7]
5.3	$32\sqrt{2}\sin x + 8\pi + 16x^2 + \pi^2 - 32 - 8\pi x - 32x$	[0.5,1]
5.4	$ctgx + 2x + \pi x - 1 - \pi/2 - 2x^2 - \pi^2/8$	[0,1]
5.5	$\sqrt{3}ctgx + 4\sqrt{3}x + 4\pi x - 3 - 2\pi/\sqrt{3} - 12x^2 - \pi^2/3$	[0,0.7]

Задание 6. Локализовать корни уравнения $f(x)$=0. Найти их с точностью $\varepsilon = 10^{-5}$ и $\varepsilon = 10^{-12}$, *используя метод Ньютона и метод*, указанный *в индивидуальном варианте*. Сравнить скорость сходимости методов (по числу итераций) для каждого значения ε.

№	$f(x)$	Метод	№	$f(x)$
6.1	$e^x - 3\sqrt{x}$	упрощенный метод Ньютона	7.1	$x\ln x - x^2 + 3x - 1$
6.2	$\sqrt{2 - x^2} - e^x$	метод ложного положения	7.2	$x^3 - 0.9x^2 - x - 0.1$
6.3	$\ln x - 2\cos x$	метод простой итерации	7.3	$e^{-x} - 5x^2 + 10x$
6.4	$\sqrt{x}e^{\cos x} - 1$	метод секущих	7.4	$\ln(2x - x^2) + 2 - \sqrt{x}$
6.5	$e^{-(x+1)} + x^2 + 2x - 1$	метод Стеффенсена	7.5	$\sqrt{x} + x^2 - 10$

Задание 7. Локализовать корни уравнения $f(x)$=0 (таблица к заданию 6). Найти их с точностью $\varepsilon = 10^{-5}$ и $\varepsilon = 10^{-12}$, используя *метод Ньютона*, *упрощенный метод Ньютона и метод секущих.* Сравнить скорость сходимости методов (по числу итераций) для каждого значения ε.

Задание 8. Найти приближенно все (в том числе комплексные) корни уравнения $f(x)$=0 с точностью $\varepsilon = 10^{-5}$, используя *метод Ньютона.*

УКАЗАНИЕ. Для поиска комплексных корней следует использовать комплексные начальные приближения.

№	$f(x)$	№	$f(x)$
8.1	$x^3 - 2x - 5$	9.1	$3x^3 - 77x^2 + 605x - 1331$
8.2	$x^4 - 2.7x^3 + 3$	9.2	$3x^3 - 35x^2 + 125x - 125$
8.3	$x^4 - 2.7x^3 + x - 1$	9.3	$x^3 - 7x^2 + 15x - 9$
8.4	$x^5 + 3x^4 + 2x^3 - 1$	9.4	$x^3 - 5.5x^2 + 9.5625x - 5.0625$
8.5	$x^5 + 2x^4 + 4x^3 - 5x + 2.7$	9.5	$3x^3 - 28x^2 + 80x - 64$

Задание 9. a) Локализовать корни уравнения $f(x)=0$ (таблица к заданию 8). Уточнить их с точностью $\varepsilon = 10^{-7}$, используя метод Ньютона. Для поиска кратного корня и определения его кратности следует использовать модификацию *метода Ньютона для случая кратного корня* с m = 1, 2, 3. При любых ли начальных приближениях такой метод сходится?

b) Рассмотреть уравнение $f(x)+\delta = 0$, где $\delta = 10^{-8}$. Найти корень кратности 1, используя метод Ньютона. Применить для нахождения кратного корня соответствующую модификацию метода Ньютона. Удается ли найти кратный корень? Если нет, то использовать метод Ньютона с комплексными начальными приближениями. Сохранился ли кратный корень? Объяснить результаты.

Задание 10. Функция $y = f(x)$ задана неявно уравнением $F(x,y)=0$. На отрезке [1, 5] построить таблицу значений функции $y = f(x)$ с шагом $h = 0.5$, применяя один из методов численного решения нелинейного уравнения (с точностью $\varepsilon = 10^{-7}$). Построить график функции $y = f(x)$ на заданном отрезке.

№	$F(x,y)$
10.1	$sh\left(ye^y - \dfrac{x}{20}\right) + arctg\left(20ye^y - x\right) - 0.5$, $1 \le x \le 5$, $0.1 \le y \le 1.2$
10.2	$ch\left(ye^y + \dfrac{x}{20}\right) + \dfrac{1}{arctg(20ye^y + x)} - 13$, $1 \le x \le 5$, $1 \le y \le 1.5$
10.3	$e^{xy} - \cos(xy^3)$, $0.5 \le x \le 1.5$, $-1.3 \le y \le -0.3$
10.4	$e^{xy} - \cos\left(x\sqrt[3]{y}\right)$, $4.5 \le x \le 7.2$, $-1.2 \le y \le -0.2$
10.5	$\ln(xy) - \sin(yx^2)$, $1 \le x \le 2.5$, $0.5 \le y \le 2.5$

Схема вариантов к лабораторной работе

№	Выполняемые задачи	№	Выполняемые задачи	№	Выполняемые задачи
1	1.1, 2.1, 10.1	11	1.11, 6.2, 9.4	21	1.21, 4.4, 8.2
2	1.2, 3.1, 9.1	12	1.12, 7.2, 8.4	22	1.22, 5.4, 10.3
3	1.3, 4.1, 8.1	13	1.13, 2.3, 10.5	23	1.23, 6.4, 9.3
4	1.4, 5.1, 10.2	14	1.14, 3.3, 9.5	24	1.24, 7.4, 8.3
5	1.5, 6.1, 9.2	15	1.15, 4.3, 8.5	25	1.25, 2.5, 10.4
6	1.6, 7.1, 8.2	16	1.16, 5.3, 10.1	26	1.26, 3.5, 9.4
7	1.7, 2.2, 10.3	17	1.17, 6.3, 9.1	27	1.27, 4.5, 8.4
8	1.8, 3.2, 9.3	18	1.18, 7.3, 8.1	28	1.28, 5.5, 10.5
9	1.9, 4.2, 8.3	19	1.19, 2.4, 10.2	29	1.29, 6.5, 9.5
10	1.10, 5.2, 10.4	20	1.20, 3.4, 9.2	30	1.30, 7.5, 8.5

Лабораторная работа № 4

РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ПРЯМЫМИ МЕТОДАМИ. ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ

Цель: изучить прямые методы решения систем ЛАУ.

Теоретические сведения

На решение СЛУ прямым методом сильное влияние оказывает погрешность округления, т.к. требуется огромное количество арифметических действий.

Для оценки неустранимой погрешности при решении линейных систем необходимы некоторые сведения о нормах векторов и матриц.

Нормой вектора X называется положительное число, обозначаемое $\|x\|$ и удовлетворяющее условиям:

1) $\|x\| \geq 0$, $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

2) $\|a \cdot x\| = |a| \cdot \|x\|$, где a – скаляр;

3) $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$ (неравенство треугольника).

Способ введения нормы может быть различен, например:

$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$, $\|x\|_2 = \sqrt{\sum x_i^{\ 2}}$ (Евклидова норма), $\|x\|_1 = \max_{i=1,n} |x_i|$ (равномерная норма).

Пространство с введенной в нем нормой называется нормированным и метрическим, поскольку норма определяет метрику $r(x, y)$ – расстояние между элементами: $r(x, y) = \|x - y\|$.

Нормой квадратной матрицы A называется положительное число, обозначаемое $\|A\|$, и удовлетворяющее условиям:

1) $\|A\| \ge 0$, $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$;

2) $\|a \cdot A\| = |a| \cdot \|A\|$, где a – скаляр;

3) $\|A + B\| \le \|A\| + \|B\|$ (неравенство треугольника);

4) $\|A \cdot B\| \le \|A\| \cdot \|B\|$.

Норма матрицы вводится с помощью нормы вектора. Норма матрицы $\|A\|$ называется согласованной с нормой вектора $\|x\|$, если $\|A \cdot x\| \le \|A\| \cdot \|x\|$.

Некоторые подчиненные нормы матриц

$$\|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^{n} |a_{i\,j}|,\ \|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)},\ \|A\|_3 = \max_j \sum_{j=1}^{n} |a_{i\,j}|.$$

Теорема об оценке погрешности решения по погрешностям входных данных.

Пусть x – решение системы $Ax = b$, а x^* – решение системы $A^* x^* = b^*$, тогда $\delta(x^*) \le cond(A) \cdot (\delta(b^*) + \delta(A^*))$, где $cond(A) = \|A^{-1}\| \cdot \|A\|$ – относительное число обусловленности системы.

Если число обусловленности больше 10, то система является плохо обусловленной, так как возможен сильный рост погрешности результата.

Задания к лабораторной работе

Задание 1. Дана система уравнений $Ax = b$ порядка n. Исследовать зависимость погрешности решения x от погрешностей правой части системы b.

ПОРЯДОК РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ:

1. Задать матрицу системы A и вектор правой части b. Используя встроенную функцию Solve пакета Mathematica, найти решение x системы $Ax = b$.

2. Вычислить число обусловленности матрицы A.

3. Принимая решение x, полученное в п. 1, за точное, вычислить вектор $d = (d_1,\ldots,d_n)^{\mathrm{T}}$, $d_i = \dfrac{\left\|x - x^i\right\|_\infty}{\left\|x\right\|_\infty}$, $i=1, \ldots, n$, относительных погрешностей решений x^i систем $Ax^i = b^i$, $i=1, \ldots,$ n, где компоненты векторов b^i вычисляются по формулам

$$b_k^i = \begin{cases} b_k + \Delta, & k = i, \\ b_k, & k \neq i, \end{cases} \qquad k=1, \ldots, n$$

($\Delta -$ произвольная величина погрешности).

4. На основе вычисленного вектора d построить гистограмму. По гистограмме определить компоненту b_m вектора b, которая оказывает наибольшее влияние на погрешность решения.

5. Оценить теоретически погрешность решения x^m по формуле $\delta(x^m) \leq cond(A)\cdot\delta(b^m)$. Сравнить значение $\delta(x^m)$ со значением практической погрешности d_m. Объяснить полученные результаты.

Компоненты вектора b во всех вариантах задаются формулой $b_i = N$, $\forall_i = 1 \ldots n$ коэффициенты $c = c_{ij} = 0.1 \cdot N \cdot i \cdot j$, $\forall i, j = 1 \ldots n$, N – номер варианта.

№	n	a_{ij}	№	n	a_{ij}
1.1	6	$\dfrac{15}{4 \cdot c^5 + 6 \cdot c + 1}$	1.16	5	$\dfrac{100}{(3 + 0.3 \cdot c)^5}$
1.2	6	$\dfrac{125}{(4 + c \cdot 0.25)^6}$	1.17	4	$\dfrac{115}{3c + 4c^3}$
1.3	6	$\dfrac{12}{4c + 4}$	1.18	5	$\dfrac{123}{2c^3 + 5c^2}$
1.4	7	$\dfrac{55}{c^2 + 3 \cdot c + 100}$	1.19	5	$\dfrac{100}{(11 + c)^5}$
1.5	7	$\dfrac{135}{(2 + 0.3 \cdot c)^5}$	1.20	6	$\cos\left(\dfrac{c}{25}\right)$
1.6	7	$\dfrac{3}{c^4 - 4 \cdot c^3}$	1.21	6	$\dfrac{1000}{3c^2 + c^3}$
1.7	6	$\dfrac{256}{(5 + c \cdot 0.256)^5}$	1.22	5	$\dfrac{150}{13c^3 + 777c}$
1.8	6	$\dfrac{1}{\sqrt{c^2 + 0.58 \cdot c}}$	1.23	5	$\dfrac{11.7}{(1 + c)^7}$
1.9	5	$\dfrac{3}{(1 + c)^2}$	1.24	4	$\dfrac{159}{10c^3 + c^2 + 25}$
1.10	5	$\sin\left(\dfrac{c}{8}\right)$	1.25	5	$\dfrac{321}{(1 + c)^6}$
1.11	4	$\dfrac{1}{67 + c^4}$	1.26	5	$\dfrac{31}{\sqrt{c^2 + 6c}}$
1.12	4	$\dfrac{111}{c^4 + 13 + 3c}$	1.27	6	$\dfrac{350}{(5 + 0.35c)^3}$

№	n	a_{ij}	№	n	a_{ij}
1.13	5	$\dfrac{1}{(1+c)^3}$	1.28	5	$\dfrac{500}{(8\cdot c-5)^2}$
1.14	7	$\dfrac{1.5}{0.001c^3-2.5c}$	1.29	6	$\dfrac{10}{0.3c^3+10c}$
1.15	6	$\dfrac{88.5}{c+0.03c^2}$	1.30	5	$\dfrac{1}{0.4c^3+20c}$

Задание 2. Для системы уравнений $Ax = b$ из **задания 1** исследовать зависимость погрешности решения системы от погрешностей коэффициентов матрицы A (аналогично **заданию 1**). Теоретическая оценка погрешности в этом случае имеет вид

$$\delta(x^*) \le cond(A)\cdot\delta(A^*),$$

где x^*– решение системы с возмущенной матрицей A^*.

Задание 3. Дана матрица A. Найти число обусловленности матрицы, используя вычислительный эксперимент.

ПОРЯДОК РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ:

1. Выбрать последовательность линейно независимых векторов b^i, $i = 1,\dots k$. Решить k систем уравнений $Ax^i = b^i$, $i=1,\dots, k$, используя встроенную функцию **Solve[].**

2. Для каждого найденного решения x^i вычислить отношение $\dfrac{\|x^i\|}{\|b^i\|}$, $i = 1, \dots, k$.

3. Вычислить норму матрицы A^{-1} по формуле $\|A^{-1}\| \approx \max\limits_{1\le i\le k}\dfrac{\|x^i\|}{\|b^i\|}$, вытекающей из неравенства $\|x\| \le \|A^{-1}\|\cdot\|b\|$.

4. Вычислить число обусловленности матрицы *A* по формуле $cond(A) \approx \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$.

№	A	№	A
3.1	1 2 3 4 5 1 1 2 3 4 1 2 1 2 3 1 3 2 1 2 1 4 3 2 1	3.5	1 1 1 1 1 16 8 4 2 1 81 27 9 3 1 256 64 16 4 1 625 125 25 5 1
3.2	3 1 0 0 0 1 2 1 0 0 0 1 1 1 0 0 0 1 0 1 0 0 0 1 1	3.6	611 196 -192 407 196 899 113 -192 -192 113 899 196 407 -192 196 611
3.3	1 1 1 1 1 1 2 3 4 5 1 3 6 10 15 1 4 10 20 35 1 5 15 3 70	3.7	1 0.5 0.333 0.25 0.2 0.5 0.333 0.25 0.2 0.167 0.333 0.25 0.2 0.167 0.125 0.2 0.167 0.143 0.125 0.111
3.4	1 1 1 1 8 4 2 1 27 9 3 1 64 16 4 1	3.8	1 1 1 1 1 2 3 4 1 3 6 10 1 4 4 20

Задание 4. Решить систему уравнений $Ax = b$ из **задания 1,** используя LU-разложение матрицы *A*.

ПОРЯДОК РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ:

1. Используя встроенную функцию **LUDecomposition**, получить LU-разложение матрицы *A*.

2. Преобразовать вектор *b* по формулам прямого хода метода Гаусса. С помощью обратной подстановки найти решение системы *x*.

Задание 5. Дана система уравнений $Ax = b$ порядка n с симметричной положительно определенной матрицей *A*. Решить систему методом Холецкого.

ПОРЯДОК РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ:

1. Используя встроенную функцию **CholeskyDecomposition**, получить LL^T-разложение матрицы *A*.

2. Решить последовательно системы $Ly=b$ и $L^Tx = y$ треугольными матрицами.

Элементы матрицы *A* вычисляются по формулам

$$A_{ij} = \begin{cases} \dfrac{i+j}{m+n}, & i \neq j, \\ n+m^2+\dfrac{j}{m}+\dfrac{i}{n}, & i = j, \end{cases}$$

где i, j = 1,…n. Элементы вектора b задаются в индивидуальном варианте.

№	*n*	*m*	b_i, i = 1, ..., n	№	n	m	b_i, i=1, ..., n
5.1	40	10	$b_i = n \cdot i + m$	5.4	50	15	$b_i = m \cdot n - i^3$
5.2	20	8	$b_i = 200 + 50 \cdot i$	5.5	30	20	$b_i = m \cdot i + n$
5.3	30	9	$b_i = i^2 - 100$	5.6	25	10	$b_i = i^2 - n$

Задание 6*. Дана система уравнений $Ax = b$ порядка n, где $A = A(t)$, t - параметр. Исследовать зависимость решения системы $Ax = b$ от вычислительной погрешности при заданных значениях параметра t.

ПОРЯДОК РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ:

1. Составить программу, реализующую метод Гаусса для произвольной системы $Ax = b$. Используя составленную программу, найти решение заданной системы $Ax = b$.

2. Составить программу округления числа до m знаков после запятой. Вычислить элементы матрицы A и вектора b по фор-

* Задачи 6–10 выполняются на АЛГОРИТМИЧЕСКОМ ЯЗЫКЕ. Для проверки правильности работы запрограммированных алгоритмов необходимо провести расчет для тестового примера.

мулам индивидуального варианта, производя округление до m знаков после запятой (в результате будут получены матрица $A1$ и вектор $b1$).

3. Решить систему уравнений $A1x1 = b1$ методом, указанным в п.1, обращаясь каждый раз к программе округления. Оценить практически полученную погрешность решения.

4. Сравнить результаты, полученные при разных значениях параметра t.

Элементы матрицы A вычисляются по формулам

$$A_{ij} = \begin{cases} q_M^j, & i \neq j, \\ q_M^j + t, & i = j, \end{cases}$$

где $q_M = 0.993 + (-1)^M \cdot M \cdot 10^{-4}$, $i, j = 1,\ldots n$. Параметр $t = 0.0001$, 1, 10000. Элементы вектора b вычисляются по формулам
$b_j = q_M^{(n+1-j)}$, $j = 1,\ldots n$

№	M	n	m	№	M	n	m	№	M	n	m
6.1	1	50	6	6.3	3	40	7	6.5	5	45	4
6.2	2	100	5	6.4	4	120	4	6.6	6	100	6

Задание 7*. Исследовать зависимость числа обусловленности матрицы A из **задания 1** от порядка n матрицы.

ПОРЯДОК РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ:

1. Составить программу, выполняющую LU-разложение матрицы произвольного порядка n (схема единственного деления).

2. Используя составленную программу, для каждого n = 1, 2, 3,..., k (k – максимально возможное значение, при котором удается решить задачу) найти обратную матрицу A^{-1}.

3. Вычислить число обусловленности матрицы по формуле $cond(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$ для каждого значения n.

4. Построить график зависимости $cond(A)$ от n.

Задание 8*. Дана система уравнений $Az(x)=b(x)$ порядка n. Построить график функции $y(x)=\sum_{i=1}^{n} z_i(x)$ на отрезке $[a,\ b]$; здесь, $z(x)=(z_1(x), z_2(x),..., z_n(x))^T$ – решение системы. Для решения системы уравнений использовать метод Гаусса (схема полного выбора).

Элементы матрицы A вычисляются по формулам

$$A_{ij}=\begin{cases} q_M^{i+j}+0.1\cdot(j-i), & i\neq j, \\ (q_M-1)^{i+j}, & i=j, \end{cases}$$

где $q_M=1.001-2\cdot M\cdot 10^{-3},\ i,j=1,...n$.

Элементы вектора b задаются в индивидуальном варианте. Во всех вариантах отрезок $[a, b]$ = [-5, 5].

№	M	n	b_i, i=1, ..., n	№	M	n	b_i, i=1, ..., n
8.1	1	50	$n\cdot e^{\frac{x}{i}}\cdot\cos(x)$	8.4	4	100	$n\cdot\exp\left(\frac{x}{i}\right)\cdot\cos(x)$
8.2	2	40	$\lvert x-\frac{n}{10}\rvert\cdot i\cdot\sin(x)$	8.5	5	100	$\lvert x-\frac{n}{10}\rvert\cdot i\cdot\sin(x)$
8.3	3	30	$x\cdot\exp\left(\frac{x}{i}\right)\cdot\cos\left(\frac{x}{i}\right)$	8.6	6	100	$x\cdot\exp\left(\frac{x}{i}\right)\cdot\cos\left(\frac{x}{i}\right)$

Задание 9*. Решить систему уравнений $Ax = b$ порядка n из **задания 5** методом Холецкого. Вычислить число обусловленности матрицы A.

ПОРЯДОК РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ:

1. Составить программу, выполняющую LL^T-разложение симметричной положительно определенной матрицы произвольного порядка n .

2. Используя составленную программу, найти решение системы $Ax = b$ и обратную матрицу A^{-1}.

3. Вычислить число обусловленности матрицы по формуле $cond(A) \approx \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$.

Задание 10*. Дана система уравнений $Ax = b$ порядка n с разреженной матрицей A. Решить систему методом прогонки.

№	n	A	b_i, i=1, ..., n
10.1	50	На главной диагонали элементы равны 1000, на первой наддиагонали элементы равны 1, на 3 наддиагонали элементы равны 1, на 1 поддиагонали элементы равны 1	$b_i = i \cdot e^{\frac{18}{i}}$
10.2	35	На главной диагонали элементы равны 100, на 1, 2 и 3 наддиагоналях элементы равны 1, на 1 поддиагонали элементы равны 1	$b_i = i \cdot e^{\frac{22}{i}} \sin\left(\frac{9}{i}\right)$
10.3	40	На главной диагонали элементы равны 100, на 1и 2 наддиагоналях элементы равны 1, на 2 поддиагонали элементы равны 3	$b_i = i \cdot e^{\frac{10}{i}}$
10.4	50	На главной диагонали элементы равны 100, на первой наддиагонали элементы равны 1, на 1 поддиагонали элементы равны 2, $a_{1,n-1} = a_{2,n} = 1$	$b_i = i \cdot e^{\frac{10}{i}} \cos\left(\frac{9}{i}\right)$
10.5	40	На главной диагонали элементы равны 100, на 1 наддиагонали элементы равны 2, на 1 и 2 поддиагоналях элементы равны 7	$b_i = i \cdot e^{\frac{10}{i}}$
10.6	30	На главной диагонали элементы равны 100, на 1 наддиагонали элементы равны 47, на 20 наддиагонали 1, на 1 поддиагонали 47, на 20 поддиагонали 1	$b_i = i \cdot e^{\frac{22}{i}}$

Схема вариантов к лабораторной работе

№	Выполняемые задачи	№	Выполняемые задачи	№	Выполняемые задачи
1	1.1, 5.1, 10.1	11	1.11, 3.3, 10.3	21	1.21, 5.6, 6.5
2	1.2, 4, 9.1	12	1.12, 2, 9.3	22	1.22, 4, 7
3	1.3, 3.1, 8.1	13	1.13, 5.4, 8.3	23	1.23, 3.6, 8.5
4	1.4, 2, 7	14	1.14, 4, 7	24	1.24, 3.2, 9.5
5	1.5, 5.2, 6.1	15	1.15, 3.4, 6.3	25	1.25, 3.7, 10.5
6	1.6, 4, 10.2	16	1.16, 2, 10.4	26	1.26, 4, 7
7	1.7, 3.2, 9.2	17	1.17, 5.5, 9.4	27	1.27, 3.7, 6.6
8	1.8, 2, 8.2	18	1.18, 4, 8.4	28	1.28, 2, 10.6
9	1.9, 5.3, 7	19	1.19, 3.5, 7	29	1.29, 3.8, 8.6
10	1.10, 4, 6.2	20	1.20, 2, 6.4	30	1.30, 4, 9.6

Лабораторная работа № 5

РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ИТЕРАЦИОННЫМИ МЕТОДАМИ

Цель: изучить итерационные методы решения ЛАУ.

Теоретические сведения.

Матрицы, в которых большинство элементов равно нулю, называются *разреженными*. Будем говорить, что элементы матрицы $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots, a_{nn}$ образуют главную диагональ; элементы матрицы $a_{1k}, a_{2k+1}, a_{3k+2}, \ldots, a_{n,n-k+1}$ образуют (k-1)-ю наддиагональ; элементы $a_{k,1}, a_{k+1,2}, a_{k+2,3}, \ldots, a_{n-k+1,n}$ образуют (k-1)-ю поддиагональ.

Пример. Ниже представлены две матрицы: матрица A – трехдиагональная матрица размера 5х5, элементы главной диагонали равны 10, элементы первой наддиагонали равны 3, элементы первой поддиагонали равны –1, матрица В – симметричная матрица размера 5x5, на главной диагонали которой все элементы равны 10, на второй наддиагонали элементы равны 5, а на третьей наддиагонали элементы равны 2.

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 10 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 10 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 10 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 10 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 5 & 2 \\ 5 & 0 & 10 & 0 & 5 \\ 2 & 5 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

Задания к лабораторной работе

Задание 1. Дана система уравнений $Ax = b$. Найти решение системы с помощью метода Гаусса. Выполнить 10 итераций по методу Зейделя. Принимая решение, полученное с помощью метода Гаусса за точное, найти величину абсолютной погрешности итерационного решения.

ПОРЯДОК РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ:

1. Задать матрицу системы A и вектор правой части b. Используя встроенную функцию **LinearSolve[m, b]** пакета Mathematica, найти решение системы $Ax = b$ с помощью метода Гаусса.

2. Преобразовать систему $Ax = b$ к виду $x = Bx + c$, удобному для итераций. Проверить выполнение достаточного условия сходимости итерационных методов $\|B\|_\infty < 1$.

3. Используя функцию **zeid** , выполнить 10 итераций по методу Зейделя; взять любое начальное приближение. Принимая решение, полученное в п. 1 за точное, найти величину абсолютной погрешности итерационного решения (использовать норму $\|\cdot\|_\infty$).

4. Взять другое начальное приближение. Объяснить полученные результаты.

Варианты 1.N–1.15+N, N=1,2…15 имеют одну и ту же матрицу A и отличаются векторами правых частей.

№	A					b	№	b
1.1	79.2	0	35	19.8	24	86	1.16	-468.1
	39.6	85	0	19.8	25	55		122.3
	19.8	-15	45	0	0	77		-257.2
	49.5	18	20	89.1	0	5		-223.6
	9.9	15	20	-49.5	95	-64		35.9
1.2	29.7	2	0	19.8	2	26.2	1.17	29.2
	9.9	-21	0	-9.9	1	-41.1		99.9
	-9.9	11	29	6.6	1	97.4		-174.7
	9.9	7.5	2	-19.8	0	99.8		75.05
	-49.5	-1	23	9.9	84	27.1		-185.9
1.3	89.1	29	0	59.4	0	260.2	1.18	200.5
	39.6	-84	0	-39.6	4	-313.2		-64.4
	-29.7	31	86	19.8	3	293.3		-95.1
	49.5	39	8	-99	0	-212.4		-40.7
	-59.4	0	24	13.2	98	230.8		12.6
1.4	39.6	0	17.5	9.9	12	38.5	1.19	-34.35
	79.2	120	0	39.6	0	38.8		-530
	19.8	-21	46	0	5	93.7		102.1
	49.5	19	19	89.1	0	43		-286.5
	9.9	25	10	-39.6	85	-49.7		101.3
1.5	99	28	0	69.3	0	40.2	1.20	-58.7
	49.5	-94	3	-29.7	10	91.5		-156.9
	39.6	24	-96	-29.7	0	93.4		-405.5
	29.7	24	23	79.2	0	84.7		239.6
	69.3	0	21	-3.3	-98	-1.5		-306.5
1.6	7.92	3.36	-2.24	1.98		-1.956	5.1.21	14.556
	-13.86	18.20	0	3.96		62.8		-100.54
	-2.97	0.20	4.80	0		-4.16		-1.27
	5.94	0	-10.60	16.83		48.31		-71.31
1.7	4.95	1.12	2.9	0.66		-3.41	1.22	-31.024
	8.91	19.9	-4.0	6.93		50.33		-37.81
	-2.97	2.2	-5.8	0		19.49		28.58
	5.94	1.3	10.5	17.82		-45.88		9.32
1.8	118.8	-14	-5	-89.1		-92.5	1.23	451.5
	-59.4	194	5	128.7		-340.1		-1158.3
	148.5	12	-310	148.5		-898		5700
	0	18.5	90	-108.9		184.1		-2060.7
1.9	118.8	-14	-5	-89.1		444.5	1.24	943
	-14.85	-20	-5	0		-41.05		-80.7
	297	16	320	0		-635		2602.8
	0	6	-30	-36.3		209.3		1.1

1.10	49.5 12.52 16.12 19.80 0 27.1 1.64 23.76 12.87 11.52 40 -14.85 0 4.32 0.12 6.27	-92.98 25.46 -26.76 -1.15	1.25	-51.176 101.46 -178.846 14.084
1.11	3.96 -1.5 0 -0.99 -1.4 0 3.96 18.3 1.6 6.93 4.3 1.5 0 4.6 -13 4.29 -1.4 2.3 3.96 0.4 0 5.94 1.5 0 5.94 3.1 3.4 0.99 14.4 0.9 -2.97 -1.2 0.8 4.95 -2.7 12.7	32.83 91.31 29.91 98.8 56.97 37.92	1.26	11.95 -64.89 -38.57 -23.82 -84.83 30.35
1.12	9.9 3.0 4.0 0 1.3 1.5 1.98 9.8 0.8 5.94 0.42 -0.6 3.96 -4.8 19.7 9.9 0.72 0.3 1.98 1.2 1.1 6.93 0.81 -1.2 9.9 -7.5 2.1 -9.9 29.5 0 -2.97 -1.2 0.8 4.95 2.7 12.7	-73.34 -37.456 - 126.316 -82.528 96.66 7.41	1.27	72.45 77.48 31.33 10.03 -78.74 64.22
1.13	2.97 0.4 0.3 1.98 0 0.1 0.99 4.9 0.4 2.97 0.2 -0.3 0 -1.8 6.6 3.3 0.6 0.8 4.95 1.6 1.2 8.91 0.8 0.3 1.98 -1.5 0.4 -1.98 6.1 0 9.9 1.4 2.4 5.94 3.2 23.3	4.69 12.18 -3.64 21.05 0.42 -13.91	1.28	-10.45 -8.28 4.48 -26.93 11.82 38.84
1.14	5.94 0.8 0.6 -3.96 0.2 0.3 2.97 6.4 0 -2.97 0.2 0.2 2.97 3.5 8.7 1.98 0.2 0 4.95 1.6 1.2 -8.91 0.8 0.3 -0.99 2.5 1.1 -3.96 9 0.4 5.94 1.4 2.4 0 3.2 13	11.44 -54.75 -4.64 20.47 -95.86 26.92	1.29	22.08 29.99 38.7 37.19 36.74 67.34
1.15	0.33 0.1 0.1 0 0.02 0.1 0.99 4.9 0.4 2.97 0.21 -0.3 1.32 -1.6 6.6 3.3 0.24 0.1 1.98 1.2 1.1 6.93 0.81 -1.2 1.98 -1.5 0.4 -1.98 6.1 0 0.99 0.4 0.3 1.65 0.9 4.3	1.620 23.365 -14.010 18.955 24.880 -1.500	1.30	0.94 18.68 12.50 5.56 -10.28 12.29

Задание 2. Для системы уравнений Ax=b из задания 1 найти решение по методу Зейделя с точностью ε=10^{-6}, взяв любое начальное приближение. Для этого модифицировать функцию zeid так, чтобы решение вычислялось с заданной точностью ε. Предусмотреть подсчет количества итераций, потребовавшихся для достижения точности ε.

Задание 3. Для системы уравнений Ax=b из задания 1 выполнить 10 итераций по методу простой итерации. Оценить абсолютную погрешность полученного решения теоретически. Найти реальную величину абсолютной погрешности, приняв за точное решение - решение, полученное с помощью встроенной функции LinearSolve[m, b] пакета Mathematica. Объяснить результаты.

Задание 4. Дана система уравнений x=Bx+c, где B=B(t), $t=-1,-0.8,\dots,0.8,1$ - параметр. Построить график (или гистограмму) зависимости нормы $\|B\|_\infty$ от параметра t. По графику определить, при каких перечисленных выше значениях t выполнено достаточное условие сходимости итерационных методов. Найти решение системы x=Bx+c с точностью $\varepsilon=10^{-5}$ для наибольшего значения параметра t, при котором выполнено условие сходимости.

№	B(t)	c	№	B(t)	c
4.1	$\begin{matrix} 0.2 & 0.3 & -0.1 \\ 0.1 & 0.25 & \cos(0.5\pi t) \\ \sin(10\pi t) & 0.1 & 0.3 \end{matrix}$	1 2 1	4.9	$\begin{matrix} 0.2 & 0.3 & -0.1 \\ 0.1 & -0.25 & 0.3 \\ 0.2 & \sin(2\pi t) & 0.3 \end{matrix}$	1 2 1
4.2	$\begin{matrix} 0.2 & 0.3 & -0.1 \\ \cos(6\pi t) & -0.25 & 0.3 \\ 0.2 & \sin(10\pi t) & 0.3 \end{matrix}$	1 2 1	4.10	$\begin{matrix} 0.2 & 0.3 & -0.1 \\ \cos(2\pi t) & -0.25 & 0.3 \\ 0.2 & 0.1 & 0.3 \end{matrix}$	1 2 1
4.3	$\begin{matrix} 0.2 & 0.3 & \sin(3\pi t) \\ 0.1 & -0.25 & 0.3 \\ 0.2 & 0.1 & 0.3 \end{matrix}$	1 2 1	4.11	$\begin{matrix} -0.2 & \cos(3t) & 0.1 & 0.3 \\ 0.1 & 0.11 & 0.4 & -0.05 \\ 0.3 & 0.1 & 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & -0.12 & 0.1 & 0.09 \end{matrix}$	0 1 2 3
4.4	$\begin{matrix} -0.2 & \cos(3t) & 0.1 & 0.3 \\ 0.1 & 0.11 & 0.4 & -0.05 \\ 0.3 & 0.1 & \sin(3t)+\cos(2t) & 0.1 \\ 0.2 & -0.12 & 0.1 & 0.09 \end{matrix}$	0 1 2 3	4.12	$\begin{matrix} -0.2 & 0.15 & 0.1 & 0.3 \\ 0.1 & 0.11 & 0.4 & \sin(5t) \\ 0.3 & 0.1 & 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & -0.12 & 0.1 & \sin(t) \end{matrix}$	0 1 2 3
4.5	$\begin{matrix} \sin(t) & 0.15 & 0.1 & 0.3 \\ 0.1 & \sin(t) & 0.4 & -0.05 \\ 0.3 & 0.1 & \sin(t) & 0.1 \\ 0.2 & -0.12 & 0.1 & \sin(t) \end{matrix}$	0 1 2 3	4.13	$\begin{matrix} \sin(t) & 0.15 & 0.1 & 0.3 \\ 0.1 & 0.11 & 0.4 & -0.05 \\ 0.3 & 0.1 & 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & -0.12 & 0.1 & \sin(5t) \end{matrix}$	0 1 2 3
4.6	$\begin{matrix} 0.01 & 0.12 & 0.5 & -0.1 \\ -0.1 & -0.15 & -0.01 & -0.4 \\ 0.15 & 0 & t-0.5 & 0.2 \\ 0 & -0.1 & 0.25 & 0.1 \end{matrix}$	3 2 1 0	4.14	$\begin{matrix} 0.01 & 0.12 & 0.5 & -0.1 \\ -0.1 & -0.15 & -0.01 & t^2-1.5t \\ 0.15 & 0 & t & 0.2 \\ 0 & -0.1 & 0.25 & 0.1 \end{matrix}$	3 2 1 0

4.7	$2t$ 0.12 0.5 -0.1 -0.1 -0.15 -0.01 -0.4 0.15 0 0.3 0.2 0 -0.1 0.25 0.1	3 2 1 0	4.15	0.01 0.12 0.5 -0.1 -0.1 -0.15 -0.01 -0.4 0.15 t^2 0.3 0.2 0 -0.1 0.25 0.1	3 2 1 0
4.8	0.01 0.12 0.5 -0.1 -0.1 t -0.01 -0.4 0.15 0 $2t$ 0.2 0 -0.1 0.25 0.1	3 2 1 0	4.16	0.01 -0.1 0.12 t 0.2 0.1 0.08 -0.09 0 0.2 t 0.15 -0.06 0.1 0 0.3 0.1 -0.01 0.2 -0.2 0.01 0.07 -0.1 0 0.1	1 1 0 2 3

Задание 5. Дана система уравнений Ax=b, где A – симметричная положительно определенная матрица. Найти решение системы с точностью $\varepsilon = 10^{-5}$ с помощью метода релаксации (для этого модифицировать функцию zeid, реализующую метод Зейделя). Определить экспериментально параметр релаксации ω, при котором точность ε достигается при наименьшем числе итераций. Построить график зависимости числа итераций от параметра релаксации.

УКАЗАНИЕ. Параметр релаксации ω следует задавать из условия сходимости

метода: $\omega \in (0,2)$. Например: ω=0.2, 0.4, …, 1.8.

№	A	b	№	A	b
5.1	3.5 -1 0.9 0.2 0.1 -1 7.3 2 0.3 2 0.9 2 4.9 -0.1 0.2 0.2 0.3 -0.1 5 1.2 0.1 2 0.2 1.2 7	1 2 3 4 5	5.2	3.2 0.3 0.9 -0.7 1.1 0.3 8.1 1.8 -2 0.8 0.9 1.8 4.1 -0.1 0.2 -0.7 -2 -0.1 3.6 -0.6 1.1 0.8 0.2 -0.6 4	1 0 3.2 -2 -3
5.3	8.2 1.2 2.1 0.1 -0.1 1.2 8.1 2.5 -1.3 0.2 2.1 2.5 10.2 -1.7 0.3 0.1 -1.3 -1.7 9.6 1.6 -0.1 0.2 0.3 1.6 3.5	0.1 6 3.2 0.2 -0.7	5.4	5.7 2.1 -0.2 -1.1 2.1 4.6 -1.2 0.1 -0.2 -1.2 4.5 -0.3 -1.1 0.1 -0.3 4.7	0.1 -0.9 0.5 1.1
5.5	7.8 0.7 -2.1 -2.4 0.7 3 0.3 0.9 -2.1 0.3 4.7 -1.2 -2.4 0.9 -1.2 5.1	2 4 2.6 -0.8	5.6	2.9 0.4 0.3 1.8 0.4 4.9 0.4 2.8 0.3 0.4 6.6 4.6 1.8 2.8 4.6 9.6	2.2 -8.3 1.6 7.1

Задание 6. Дана система уравнений Ax=b, где A – симметричная положительно определенная разреженная матрица размерности n x n. Методом Зейделя найти решение системы с точностью $\varepsilon = 10^{-9}$. Определить число итераций, потребовавшихся для достижения заданной точности.

УКАЗАНИЕ. Компактное хранение элементов матрицы A в памяти ЭВМ организовать с использованием одномерных массивов.

№	n	A	b
6.1	50	на главной диагонали элементы равны 218, на первой наддиагонали элементы равны 38, на 4 наддиагонали элементы равны 8, на 9 наддиагонали элементы равны 3.	$b_i = i \cdot e^{\frac{18}{i}}$
6.2	35	на главной диагонали элементы равны 220, на первой наддиагонали элементы равны 22, на 4 наддиагонали равны 2.	$b_i = i \cdot e^{\frac{22}{i}} \cos\left(\frac{11}{i}\right)$
6.3	40	на главной диагонали элементы равны 150, на первой наддиагонали элементы равны 33, на 5 наддиагонали элементы равны 17, на 6 наддиагонали равны 2, на 8 наддиагонали равны 1	$b_i = i \cdot e^{\frac{10}{i}}$
6.4	50	на главной диагонали элементы равны 100, на первой наддиагонали элементы равны 27, на 3 наддиагонали элементы равны 15, на 7 наддиагонали элементы равны 1.	$b_i = i \cdot e^{\frac{10}{i}} \cos\left(\frac{9}{i}\right)$
6.5	40	на главной диагонали элементы равны 195, на первой наддиагонали элементы равны 27, на 4 наддиагонали элементы равны 13, на 9 наддиагонали равны 1.	$b_i = i \cdot e^{\frac{10}{i}}$
6.6	50	на главной диагонали элементы равны 114, на второй наддиагонали элементы равны 31, на 3 наддиагонали элементы равны 2	$b_i = i \cdot e^{\frac{18}{i}}$
6.7	35	на главной диагонали элементы равны 120, на первой наддиагонали элементы равны 2, на 6 наддиагонали равны -2.	$b_i = i \cdot e^{\frac{11}{i}} \sin\left(\frac{11}{i}\right)$
6.8	40	на главной диагонали элементы равны 450, на первой наддиагонали элементы равны 55, на 7 наддиагонали элементы равны 7, на 8 наддиагонали равны 2	$b_i = i^2 \cdot e^{\frac{5}{i}}$

Задание 7. Дана система уравнений Ax=b, где A – симметричная положительно определенная матрица размерности n x n. Найти решение системы с точностью $\varepsilon=10^{-6}$ с помощью метода простой итерации с оптимальным выбором итерационного параметра, а также с помощью метода, указанного в индивидуальном варианте. (Для метода релаксации обосновать выбор параметра релаксации ω.) Сравнить скорость сходимости методов.

УКАЗАНИЕ. При проверке необходимого и достаточного условия сходимости итерационных методов для нахождения собственных значений матриц воспользоваться встроенной функцией Eigenvalues[m] пакета Mathematica , возвращающей собственные значения матрицы M.

Элементы матрицы A задаются формулами:

$$a_{ij} = \begin{cases} \tau + (q^i + q^j) \cdot t_m, & i \neq j, \\ \tau + 2 \cdot q^i \cdot t_m + (t_m)^2, & i = j, \end{cases}$$

i,j=1,…n , n, m - указаны в варианте.

Параметр $q^i = (q_m)^i$, где $q_m = 0.993 + (-1)^m \cdot m \cdot 10^{-4}$, параметр $\tau = \sum_{i=1}^{n} q^{2i}$, коэффициент $t_m = (m+n)$. Элементы вектора правых частей b задаются формулами: $b_i = t_m \cdot (q_m)^i$, $i = 1, \ldots n$.

№	n	m	метод
7.1	20	1	метод Зейделя
7.2	30	2	метод простой итерации
7.3	40	3	метод релаксации
7.4	50	4	метод Зейделя
7.5	40	5	метод простой итерации
7.6	30	6	метод релаксации

Задание 8. Дана система уравнений Ax=b, где A – симметричная положительно определенная матрица размерности n x n. Найти решение системы с помощью явного и неявного нестационарных методов с чебышевским набором параметров с точностью $\varepsilon=10^{-6}$. Сравнить скорость сходимости методов.

УКАЗАНИЕ. При подсчете числа итераций, достаточного для получения заданной точности ε, для нахождения собственных значений матрицы воспользоваться встроенной функцией Eigenvalues[m] пакета Mathematica.

Элементы матрицы A задаются формулами:

$$a_{ij} = \begin{cases} 2\tau + (q^i + q^j)\cdot t_m, & i \neq j, \\ 2\cdot q^i \cdot t_m^2, & i = j, \end{cases}$$

i,j=1,…n , n, m - указаны в варианте.

Параметр $q^i = (q_m)^i$, где $q_m = 1.05 + (-1)^m \cdot m \cdot 10^{-2}$, параметр $\tau = \sum_{i=1}^{n} q^{2i}$,коэффициент $t_m = (m+n)$. Элементы вектора правых частей b задаются формулами: $b_i = \tau + 3(q_m)^i$, $i = 1,\ldots n$.

№	n	m	матрица B для неявного метода
8.1	50	1	B - диагональная матрица, причем элементы на диагонали равны диагональным элементам матрицы A
8.2	45	1	B - трехдиагональная матрица, причем элементы на главной диагонали, на первой наддиагонали и на первой поддиагонали равны соответствующим элементам матрицы A
8.3	40	1	см. B для варианта 8.1
8.4	35	1	см. B для варианта 8.2
8.5	30	2	см. B для варианта 8.1
8.6	25	2	см. B для варианта 8.2
8.7	45	3	B –двух-диагональная матрица, причем элементы на диагоналях равны диагональным элементам матрицы A
8.8	50	3	см. B для варианта 5.8.7

Задание 9. Дана система уравнений Ax=b , где A – симметричная положительно определенная матрица размерности n x n. Найти решение системы с помощью итерационного метода со спектрально эквивалентным оператором.

№	n	A	b
9.1	50	на главной диагонали элементы равны 1000, на первой наддиагонали элементы равны 350, на восьмой наддиагонали элементы равны 75.	$b_i = i^3$
9.2	60	на главной диагонали элементы равны 900, на первой наддиагонали элементы равны 15, на 4 наддиагонали равны 2.	$b_i = 1000 \cdot \ln(i)$
9.3	50	на главной диагонали элементы равны 1000, на первой наддиагонали элементы равны 450, на 9 наддиагонали элементы равны 1, на 13 наддиагонали равны 13.	$b_i = 100 \cdot i^2$
9.4	90	на главной диагонали элементы равны 1700, на первой наддиагонали элементы равны 300, на 5 наддиагонали элементы равны 17, на 7 наддиагонали элементы равны 2, на 9 наддиагонали элементы равны 1.	$b_i = i \cdot e^{\frac{17}{i}}$
9.5	100	на главной диагонали элементы равны 218, на первой наддиагонали элементы равны 38, на 4 наддиагонали элементы равны 8, на 9 наддиагонали равны 3.	$b_i = 100\sqrt{i}$
9.6	70	на главной диагонали элементы равны 150, на второй наддиагонали элементы равны 35, на шестой наддиагонали элементы равны 5.	$b_i = i^3$
9.7	80	на главной диагонали элементы равны 700, на четвертой наддиагонали элементы равны 150, на 6 наддиагонали равны 20.	$b_i = 1000 \cdot \ln(i)$
9.8	50	на главной диагонали элементы равны 400, на первой наддиагонали элементы равны 30, на 15 наддиагонали элементы равны 10, на 17 наддиагонали элементы равны 12.	$b_i = 100 \cdot i^2$

Схема вариантов к лабораторной работе №5

№	Выполняемые задачи	№	Выполняемые задачи	№	Выполняемые задачи
1	1.1, 4.1, 9.1	11	1.11, 4.5, 6.3	21	1.21, 2, 7.6
2	1.2, 2, 7.1	12	1.12, 4.6 , 7.3,	22	1.22, 3, 8.6
3	1.3, 3, 6.1	13	1.13, 4.7, 8.3,	23	1.23, 5.6, 9.6
4	1.4, 5.1, 8.1	14	1.14, 4 .8, 9.4	24	1.24, 4.12, 6.6
5	1.5, 4.2, 9.2	15	1.15, 2, 7.4	25	1.25, 4.13, 9.7
6	1.6, 2, 7.2	16	1.16, 3, 6.4	26	1.26, 4.14, 8.7
7	1.7, 3, 6.2	17	1.17, 5.3, 8.4	27	1.27, 4.15, 8.8
8	1.8, 5.1, 8.2	18	1.18, 4.9, 9.5	28	1.28, 4.16, 9.8
9	1.9, 4.3, 9.3	19	1.19, 4.10 , 7.5	29	1.29, 3, 6.7
10	1.10, 4.4, 7.3	20	1.20, 4.11 , 6.5,	30	1.30, 2, 6.8

Фрагмент решения лабораторной работы №5.

Метод Зейделя

Метод Зейделя

```
x = Table[0, {i, 1, 4}];
y = Table[0, {i, 1, 4}];
x0 = Table[0, {i, 1, 4}];
y = x0;
K = Table[Null, {i, 1, 4}, {j, 1, 4}];
For[m = 1, m < 11, x = y;
  For[i = 1, i ≤ 4, u = 0; j = 1;
   While[1 ≤ j < i, u = u + B[[i,j]] * y[[i]]; j = j + 1];
   While[i < j ≤ 4, u = u + B[[i,j]] * x[[j]]; j = j + 1];
   y[[i]] = u + c[[i]];
   j = i + 1;
   i++];
  For[i = 1, i ≤ 4, K[[m,i]] = y[[i,1]]; i++];
  m++];
```

Лабораторная работа № 6. Решение систем нелинейных уравнений.

Цель: Изучить методы решения систем нелинейных уравнений.

Теоретические сведения.

Обобщенные координаты на эллипсоиде $\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2+\left(\frac{x_2}{a_2}\right)^2+\left(\frac{x_3}{a_3}\right)^2=1$ вводятся следующим образом:

$$x_1 = a_1 \cdot \sin(\phi) \cdot \sin(\theta)$$

$$x_2 = a_2 \cdot \cos(\phi) \cdot \sin(\theta)$$

$$x_3 = a_3 \cdot \cos(\phi)$$

.

Обобщенные координаты на эллиптическом параболоиде $\frac{x_1^2}{a_1} + \frac{x_2^2}{a_2} = 2x_3$ вводятся следующим образом:

$$x_1 = \sqrt{a_1} \cdot u \cdot \cos(\theta)$$
$$x_2 = \sqrt{a_2} \cdot u \cdot \sin(\theta)$$
$$x_3 = 0.5 \cdot u^2$$

Задания к лабораторной работе № 6

Задание 1. Найти с точностью $\varepsilon = 10^{-6}$ все корни системы нелинейных уравнений $\begin{matrix} f_1(x_1, x_2) = 0, \\ f_2(x_1, x_2) = 0, \end{matrix}$ используя метод Ньютона для системы нелинейных уравнений. Найти корни с помощью встроенной функции пакета Mathematica.

ПОРЯДОК РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ:

1. Используя пакет Mathematica, локализовать корни системы уравнений графически.

2. Составить программу-функцию, вычисляющую корень системы двух нелинейных уравнений по методу Ньютона с точностью ε. Предусмотреть подсчет количества итераций. Для решения соответствующей системы линейных алгебраических уравнений использовать встроенную функцию NSolve пакета Mathematica.

3. Используя составленную программу, вычислить все корни заданной системы с точностью ε.

4. Сравнить с результатами, полученнными в п. 2.

УКАЗАНИЕ. В п. 1 привести уравнения системы к виду $x_2 = g_i(x_1)$ (либо $x_1 = g_i(x_2)$), i=1, 2, можно с помощью встроенной функции Solve: Solve[x+y*y=0,y].

№	Система уравнений	№	Система уравнений

1.1	$\sin(x_1+x_2)-x_2-1.2=0$ $2x_1+\cos x_2-2=0$	1.16	$\sin(0.5x_1+x_2)-1.2x_1-1=0$ $x_1^2+x_2^2-1=0$
1.2	$\cos(x_1-1)+x_2-0.5=0$ $\sin x_1+2x_2-2=0$	1.17	$\tan(x_1x_2+0.3)-x_1^2=0$ $0.9x_1^2+2x_2^2-1=0$
1.3	$\sin x_1+2x_2-2=0$ $\cos x_1+x_2-1.5=0$	1.18	$\sin(x_1+x_2)-1.3x_1-1=0$ $x_1^2+0.2x_2^2-1=0$
1.4	$\cos x_1+x_2-1.5=0$ $2x_1-\sin(x_2-0.5)-1=0$	1.19	$\tan(x_1x_2)-x_1^2=0$ $0.8x_1^2+2x_2^2-1=0$
1.5	$\sin(x_1+1.5)-x_2+2.9=0$ $\cos(x_2-2)+x_1=0$	1.20	$\sin(x_1+x_2)-1.5x_1-0.1=0$ $3x_1^2+x_2^2-1=0$
1.6	$\cos(x_1+0.5)+x_2-0.8=0$ $\sin x_2-2x_1-1.6=0$	1.21	$\tan(x_1x_2)-x_1^2=0$ $0.7x_1^2+2x_2^2-1=0$
1.7	$\sin(x_1-1)+x_2-0.1=0$ $x_1-\sin(x_2+1)-0.8=0$	1.22	$\sin(x_1+x_2)-1.2x_1-0.1=0$ $x_1^2+x_2^2-1=0$
1.8	$\cos(x_1+x_2)+2x_2=0$ $x_1+\sin x_2-0.6=0$	1.23	$\tan(x_1x_2+0.2)-x_1^2=0$ $0.6x_1^2+2x_2^2-1=0$
1.9	$\cos(x_1+0.5)-x_2-2=0$ $\sin x_2-2x_1-1=0$	1.24	$\sin(x_1+x_2)-x_1+0.1=0$ $x_2-\cos(3x_1)+0.1=0$
1.10	$\sin(x_1+x_2)-x_2-1.5=0$ $x_1+\cos(x_2-0.5)-0.5=0$	1.25	$\cos(x_1+0.5)+x_2-1=0$ $\sin x_2-2x_1-2=0$
1.11	$\sin(x_2+1)-x_1-1.2=0$ $2x_1^2+x_2-2=0$	1.26	$\cos(x_2-2)+x_1=0$ $\sin(x_1+0.5)-x_2+2.9=0$
1.12	$\cos(x_2-1)+x_1-0.5=0$ $x_2-\cos x_1-3=0$	1.27	$\sin(x_1-1)+x_2-1.5=0$ $x_1-\sin(x_2-1)-1=0$
1.13	$\tan(x_1x_2+0.4)-x_1^2=0$ $0.6x_1^2+2x_2^2-1=0$	1.28	$\sin(x_2+1)-x_1-1=0$ $2x_2+\cos x_1-0.5=0$
1.14	$\sin(x_1+x_2)-1.6x_1-1=0$ $x_1^2+x_2^2-1=0$	1.29	$\cos(x_2-1)+x_1-0.8=0$ $x_2-\cos x_1-2=0$
1.15	$\tan(x_1x_2+0.1)-x_1^2=0$ $x_1^2+2x_2^2-1=0$	1.30	$\cos(x_1-1)+x_2-1=0$ $\sin x_2+2x_1-1.6=0$

Задание 2. Локализовать корни системы уравнений

$$f_1(x_1, x_2, \alpha) = 0,$$
$$f_2(x_1, x_2, \alpha) = 0$$

при трех значениях параметра α. Уточнить их с точностью $\varepsilon = 10^{-5}$, используя упрощенный метод Ньютона для решения системы нелинейных уравнений.

№	$f_1(x_1, x_2, \alpha)$	$f_2(x_1, x_2, \alpha)$	α
2.1	$x_1^2 - x_2 + \alpha$	$-x_1 + x_2^2 + \alpha$	-2, 0, 1
2.2	$x_1^2 - x_2 + \alpha$	$-x_1 + x_2^2 + \alpha$	2, 0.25, -0.25
2.3	$\sin(x_2) - x_1 - 0.2\alpha$	$3x_1^2 - x_2 - \alpha$	0.5, -1, 3
2.4	$x_1 - x_2^3 + 0.5\alpha$	$\cos(2x_1) - x_2 - \alpha$	0, 1, -0.5
2.5	$\sin(\alpha x_2) - x_1 - x_2^2$	$\cos(x_1) - x_2 - \alpha$	0.2 , 3, 2.5

Задание 3. Найти с точностью $\varepsilon = 10^{-6}$ корень системы нелинейных уравнений

$$f_1(x_1, x_2) = 0,$$
$$f_2(x_1, x_2) = 0,$$

используя метод простой итерации для системы нелинейных уравнений. Проверить выполнение достаточного условия сходимости метода (использовать норму $\|\cdot\|_\infty$).

№	$f_1(x_1, x_2)$	$f_2(x_1, x_2)$
3.1	$0.7x_1 - (\sin x_2)/3 - 2$	$1.1x_1 + 2x_2 - \sin(x_1/5) + 1$
3.2	$x_1 - 0.3x_2 - 0.25\cos x_1 - 7.5$	$-0.05x_1 - x_2 + 0.5\sin x_1$
3.3	$x_1 x_2 + 0.3x_1 - 0.1$	$5x_2 + \cos x_1 - 1$
3.4	$x_1 - \sin x_2 - \cos x_2 + 0.8$	$x_2 - 0.01\sin x_1^2 - 02x_1$
3.5	$\tan x_1 + x_2 + 7$	$x_1 + \cos 2x_2 + 1$

Задание 4. Плоская однородная пластина имеет форму геометрической фигуры, образованной пересечением двух кривых второго порядка. Определить площадь фигуры.

ПОРЯДОК РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ:

1. Составить уравнения заданных кривых второго порядка.
2. На одном чертеже построить графики заданных кривых. По чертежу определить форму пластины.
3. С помощью построенного чертежа локализовать координаты точек пересечения кривых.
4. Используя функцию, составленную при решении задания 1, вычислить координаты точек пересечения кривых с точностью $\varepsilon = 10^{-6}$.
5. Вычислить площадь пластины, используя средства пакета Mathematica.

№	Уравнение кривой 1	Вид кривой 2	F_1	F_2	a
4.1	$x^2/36 + y^2/4 = 1$	эллипс	(-2.6, -0.6)	(2.6, 4.6)	$3\sqrt{2}$
4.2	- “ -	эллипс	(-2.3, 6.6)	(1.3, -0.6)	$2\sqrt{5}$
4.3	- “ -	гипербола	(-3.1, -0.3)	(1.1, -1.7)	1
4.4	- “ -	гипербола	(0.0, -3.0)	(2.0, 2.0)	1.2
4.5	$x^2/36 - y^2/4 = -1$	эллипс	(-2.3, 6.6)	(1.3, -0.6)	$2\sqrt{5}$
4.6	- “ -	эллипс	(-3.7,-0.8)	(5.7, 3.8)	5.6
№	Уравнение кривой 1	Вид кривой 2	F	Директриса	
4.7	$x^2/36 + y^2/4 = 1$	парабола	(0, 1.0)	x+2y+3.25=0	
4.8	- “ -	-‘-	(-2.0, -3.0)	x+2y+8.5=0	
4.9	$x^2/16 - y^2/4 = -1$	- “ -	(-2.0, -4.0)	x+2y+11=0	
4.10	- “ -	- “ -	(0, -1.0)	-x+2y-2=0	

Задание 5. Даны координаты точек P_i, i=1, 2, 3 и уравнение поверхности S в пространстве R^3. Определить ближайшую к поверхности точку и наиболее удаленную от поверхности точку. Построить на одном чертеже точечный график поверхности S и заданные точки P_i.

УКАЗАНИЯ. 1) Под расстоянием между точками $Q(x_1, x_2, x_3)$ и $P(x_1^0, x_2^0, x_3^0)$ в пространстве R^3 понимается величина $\rho(Q,P) = \sqrt{\sum_{o=1}^{3}\left(x_j - x_j^0\right)^2}$. Поэтому для решения задачи следует составить целевую функцию $H(x_1, x_2, x_3) = \sum_{o=1}^{3}\left(x_j - x_j^0\right)^2$ и минимизировать ее с помощью метода Ньютона при условии принадлежности точки поверхности S.

2) Условие принадлежности точки указанной поверхности S легко учесть, если ввести обобщенные координаты на этой поверхности.

3) При выборе начального приближения следует учесть, что все координаты заданных точек P_i, i=1, 2, 3, положительны.

Для вариантов 5.N, где N – четное, поверхность S задается уравнением:

$$\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{a_2}\right)^2 + \left(\frac{x_3}{a_3}\right)^2 = 1,$$

где

$$a_1 = 8.5 - N*0.25$$
$$a_2 = 2.3 + N*0.3$$
$$a_3 = 4 + N*0.1.$$

Для вариантов 5.N, где N – нечетное, поверхность S задается уравнением: $\frac{x_1^{\ 2}}{a_1} + \frac{x_2^{\ 2}}{a_2} = 2x_3$, где $a_1 = 8.5 - N*0.25$, $a_2 = 2.3 + N*0.3$.

№	Координаты точки P_1	Координаты точки P_2	Координаты точки P_3
5.1	(16.5, 5.2, 11.597)	(8.75, 4.777, 8.697)	(15.469, 2.815, 5.125)
5.2	(16, 5.8, 11.879)	(8.485, 5.328, 8.91)	(15, 3.139, 5.25)
5.3	(15.5, 6.4, 12.162)	(8.22, 5.879, 9.122)	(14.531, 3.464, 5.375)
5.4	(15, 7, 12.445)	(7.955, 6.43, 9.334)	(14.062, 3.789, 5.5)
5.5	(14.5, 7.6, 12.728)	(7.69, 6.981, 9.546)	(13.594, 4.114, 5.625)
5.6	(14, 8.2, 13.011)	(7.425, 7.532, 9.758)	(13.125, 4.438, 5.75)
5.7	(13.5, 8.8, 13.294)	(7.159, 8.083, 9.97)	(12.656, 4.763, 5.875)
5.8	(13, 9.4, 13.576)	(6.894, 8.634, 10.182)	(12.187, 5.088, 6)
5.9	(12.5, 10, 13.859)	(6.629, 9.186, 10.394)	(11.719, 5.413, 6.125)
5.10	(12, 10.6, 14.142)	(6.364, 9.737, 10.607)	(11.25, 5.737, 6.25)

ЛИТЕРАТУРА

1. Амосов А.А., Дубинский Ю.А., Копченова Н.В. Вычислительные методы для инженеров. М.: Высшая школа, 1994.

2. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. М.: Наука, 1989.

Содержание

Учебное издание

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

Лабораторный практикум
для студентов специальности
1-55 01 03 «Компьютерная мехатроника»

В 2 частях

Часть 1

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ
И ИХ СИСТЕМ

С о с т а в и т е л и :
КУЛИКОВ Иван Семенович
ДОВГА Юлия Алексеевна

Редактор Л.Н. Шалаева
Компьютерная верстка С.В. Бондаренко

Подписано в печать 06.04.2010.
Формат $60\times84^{1}/_{16}$. Бумага офсетная.
Отпечатано на ризографе. Гарнитура Таймс.
Усл. печ. л. 3,02. Уч.-изд. л. 2,36. Тираж 50. Заказ 716.

Издатель и полиграфическое исполнение:
Белорусский национальный технический университет.
ЛИ № 02330/0494349 от 16.03.2009.
Проспект Независимости, 65. 220013, Минск.