Министерство образования Республики Беларусь

БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра «Высшая математика № 2»

Матвеева Л.Д.    Бань Л.В.    Рудый А.Н.

# УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ ДЛЯ СТУДЕНТОВ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ «МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ. Часть 2».

Минск 2015

УДК 519.85 (075.8)

ББК 18.87я7

М 54

Авторы: Л.Д. Матвеева, Бань Л.В., А.Н. Рудый

Рецензент: В.И.Юринок

Настоящее издание является продолжением пособия [9] «Математический анализ.1 семестр» . В пособии излагается теоретический материал и разбираются примеры по темам «Исследование функций», «Построение графиков», «Неопределенный интеграл».
По всем темам приводятся примеры решения типовых задач.
Издание содержит список рекомендуемой литературы. Пособие предназначено для студентов 1 курса энергетического факультета БНТУ. Оно может быть также полезно преподавателям, ведущим практические занятия по данному курсу.

Белорусский национальный технический университет
пр-т Независимости, 65, г. Минск, Республика Беларусь
Тел.(017) 292-77-52 факс (017) 292-91-37
Регистрационный № БНТУ/ЭФ41-35.2015

СОДЕРЖАНИЕ

## § 15. Введение.

Интенсивное развитие новых наукоемких технологий делают особенно важной задачу подготовки инженерных кадров высокой квалификации способных решать поставленные перед ними задачи . Важную роль в системе такой подготовки играет курс Высшей математики, являющийся базовым для всех других естественно-научных курсов.

В представленном пособии изложен теоретический материал охватывающий следующие разделы курса математики:

1) Исследование функций с помощью производных;
2) Построение графиков;
3) Неопределенный интеграл.

В каждом параграфе приводятся практические примеры и упражнения, позволяющие закрепить теоретический материал. В приложении дается самостоятельная работа. Работа состоит из шести вариантов. К пяти первым приведены ответы. Шестой приводится с решением.

Номерация параграфов является продолжением номерации пособия [9].

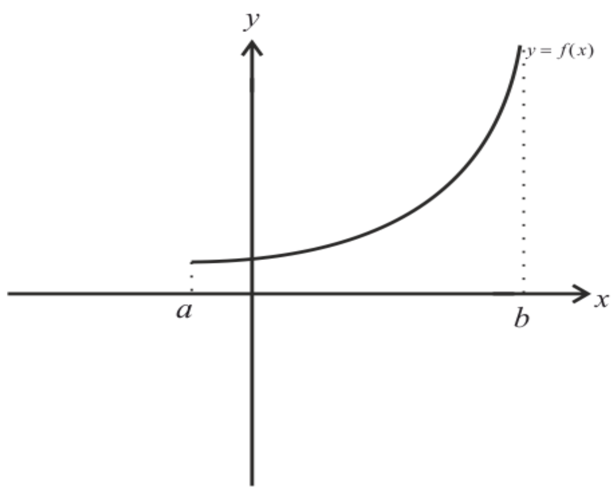
Авторы благодарят Е.Л.Бохан за помощь при работе над рукописью.

## § 15. Исследование функций с помощью производных.

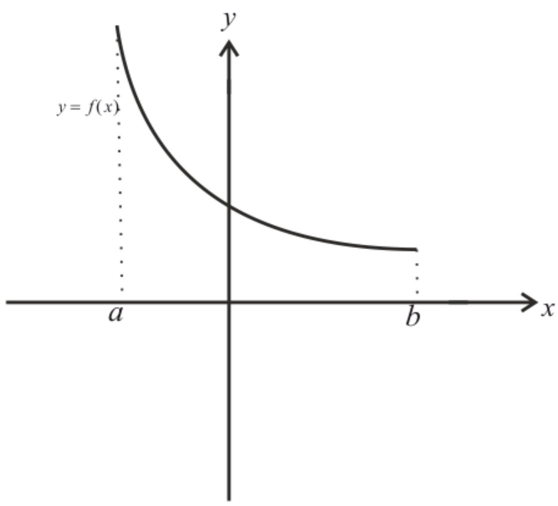
**Определение 1.** Функция $y = f(x)$ называется возрастающей (убывающей) на интервале $(a, b)$, если $\forall x_1, x_2 \in (a,b) : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ ($\forall x_1, x_2 \in (a,b) : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$).

Функция $y = f(x)$ называется неубывающей (невозрастающей) на интервале $(a, b)$, если $\forall x_1, x_2 \in (a,b) : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$ ($\forall x_1, x_2 \in (a,b) : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \ge f(x_2)$).

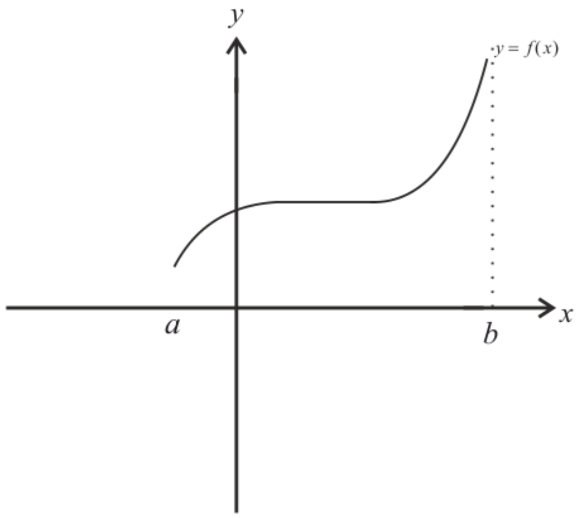
Возрастает:



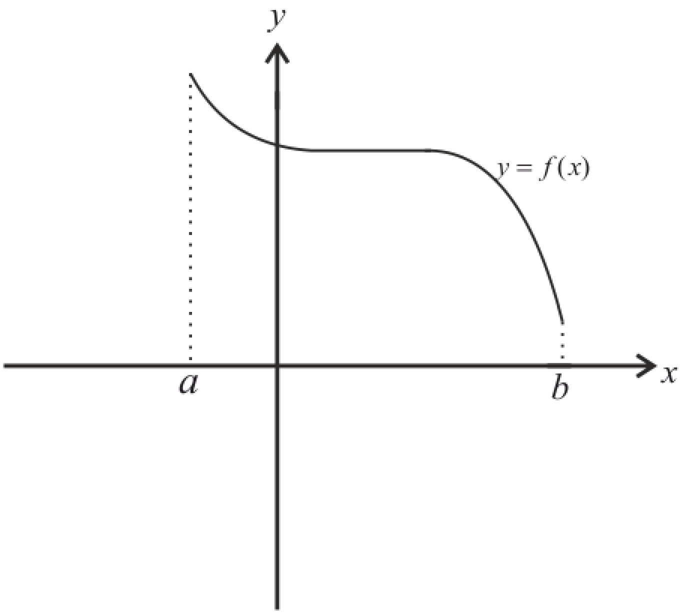

Убывает:



Неубывает:




Невозрастает:




Функции из определения 1 называются монотонными.

**Теорема 1.** Для того, чтобы дифференцируемая на интервале $(a, b)$ функция $y = f(x)$ не убывала (не возрастала) на этом интервале необходимо и достаточно, чтобы $f'(x) \geq 0 ( f'(x) \leq 0), \forall x \in (a, b)$.

Доказательство. Необходимость. Рассмотрим случай, когда $f(x)$ не убывает и докажем, что производная $f'(x)$ необходимо $\geq 0$.

Пусть $x_0 < x \Rightarrow f(x_0) \leq f(x) \Rightarrow \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$.

Пусть $x < x_0 \Rightarrow f(x) \le f(x_0) \Rightarrow \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \ge 0$.

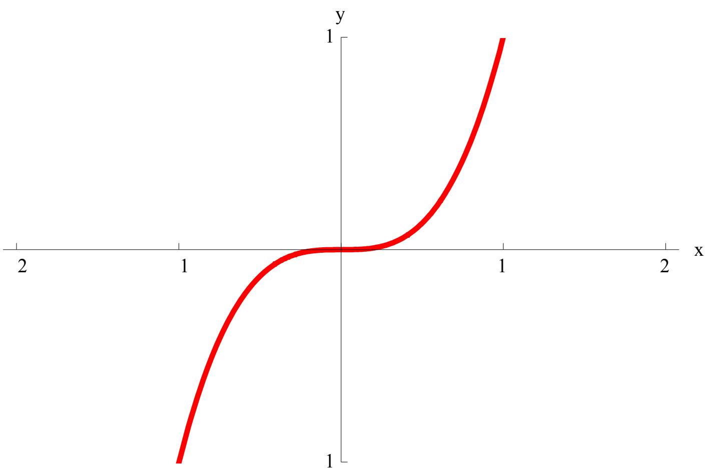
Таким образом $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \ge 0$, что и требовалось доказать.

Достаточность. Рассмотрим случай, когда $f'(x) \ge 0$ и докажем, что этого достаточно для того, чтобы функция не убывала. Пусть $x_1, x_2 \in (a, b), x_1 < x_2$. Тогда по теореме Лагранжа (теорема 4 § 12) $\exists$ точка $c \in (x_1, x_2)$ такая, что $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$; $f'(c) \ge 0; x_2 - x_1 > 0 \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) \ge 0$ что и требовалось доказать.

**Теорема 2.** Для того, чтобы дифференцируемая на интервале $(a, b)$ функция $y = f(x)$ возрастала (убывала) на этом интервале достаточно, чтобы $f'(x) > 0 (f'(x) < 0), \forall x \in (a, b)$.

Доказательство теоремы аналогично доказательству достаточности в теореме 1. Нужно заметить, что условие $f'(x) > 0 (f'(x) < 0)$ не является необходимым для возрастания (убывания) функции.

Пример 1. Рассмотрим функцию $y = x^3$. Она возрастает на промежутке $(-1; 1)$. Но условие $f'(x) > 0$ не выполнено в точке $x_0 = 0: f'(x) = 3x^2; f'(0) = 0$.




**Теорема 3.** (необходимое условие экстремума).

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки $x_0$ и имеет в этой точке локальный экстремум(см. определение 1 §12). Тогда ее производная в этой точке равна 0 или не существует.

Доказательство. Если производная $f'(x)$ в точке $x_0$ не существует, то все доказано. Предположим, что $f'(x_0)$ - существует. Тогда по теореме Ферма(теорема 1 §12) $f'(x_0) = 0$, что и требовалось доказать.

**Определение 2.** Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна в точке $x_0$ и производная $f'(x_0)$ равна 0 или не существует. Тогда точка $x_0$ называется критической точкой для функции $y = f(x)$ или точкой возможного экстремума.

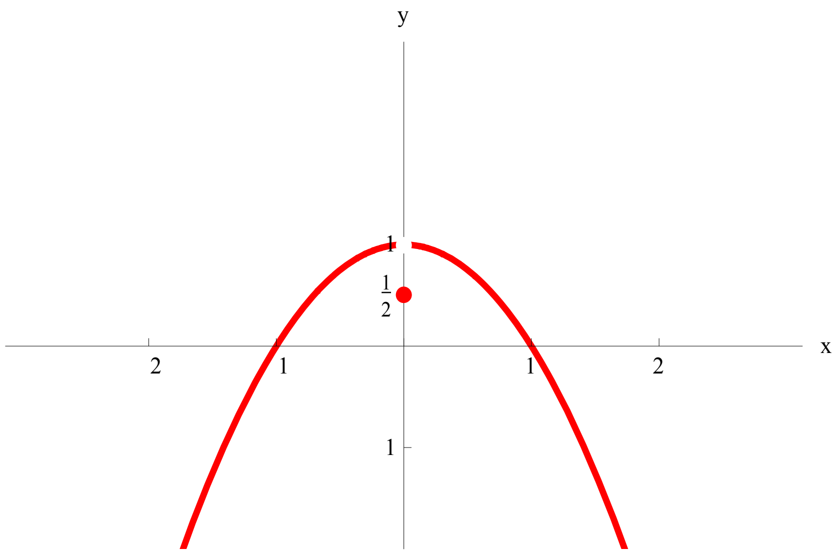
**Замечание.** Для непрерывной функции любая точка локального экстремума будет критической. Наоборот – не верно.

**Пример 2.** Для функции $y = x^3$, точка $x_0 = 0$ - критическая, но не является точкой локального экстремума.

Для функции $y = \begin{cases} x;\ x < -1 \\ 1 - x^2;\ -1 \le x \le 1 \\ x - 1;\ x > 1 \end{cases}$

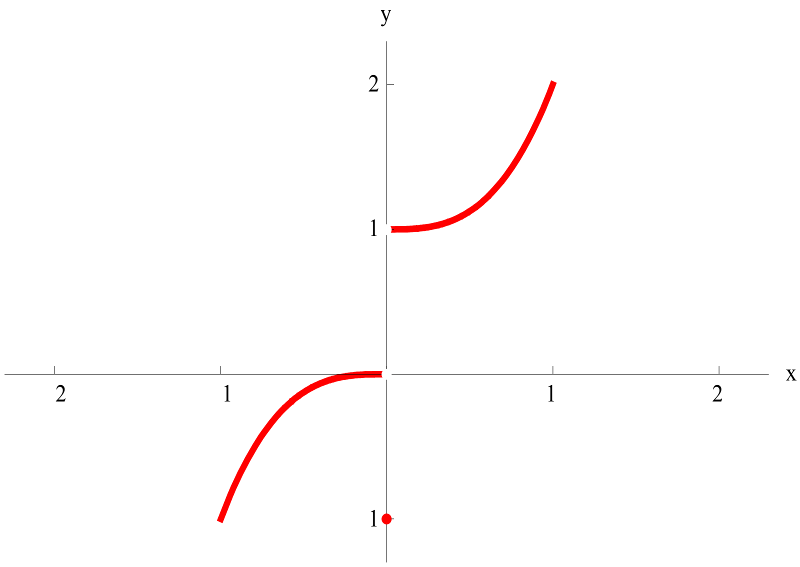
(см. пример 9 §5) $x_0 = 0$ - критическая и локальный максимум; $x_0 = 1$ - критическая и локальный минимум.

Для функции $y = \begin{cases} 1 - x^2,\ x \ne 0 \\ \dfrac{1}{2},\ x = 0 \end{cases}$




точка $x_0 = 0$ - локального минимума, производная $y'$ в точке $x_0$ не существует. Точка $x_0$ не является критической( в точке $x_0$ - разрыв 1-ого рода).

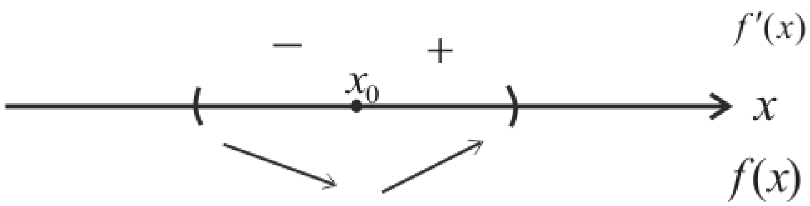
Для функции $y = \begin{cases} x^3; x < 0 \\ -1; x = 0 \\ 1 + x^3; x > 0 \end{cases}$




точка $x_0 = 0$ - точка локального минимума. Точка $x_0$ не является критической( в точке $x_0$ - разрыв 1-ого рода).

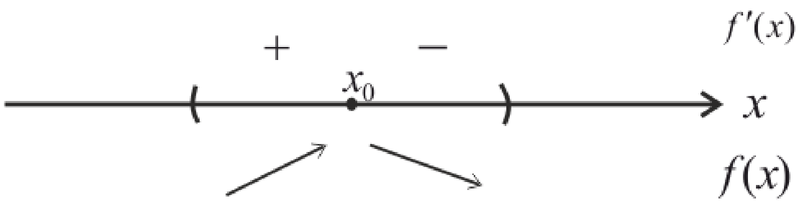
**Теорема 4.** (достаточное условие экстремума функции). Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в некоторой окрестности $O_\delta(x_0)$ своей критической точки $x_0$ за исключением может быть самой точки $x_0$.

а) Пусть при переходе через точку $x_0$ производная $f'(x)$ меняет знак с «–» на «+» :




Тогда $x_0$ - точка локального минимума .

Пусть при переходе через точку $x_0$ производная $f'(x)$ меняет знак с «+»на «–» :




Тогда $x_0$ - точка локального максимума.

б) Пусть при переходе через точку $x_0$ производная $f'(x)$ не меняет знака. Тогда $x_0$ не является точкой локального экстремума.

Доказательство следует из теоремы 2. При этом важно, чтобы функция $y = f(x)$ была непрерывна в точке $x_0$ (см. пример 2), а также то, что $x_0$ - изолированная критическая точка.

**Теорема 5.** (второе достаточное условие экстремума функции).

Пусть $x_0$ - стационарная точка для функции $y = f(x)$, то есть $f'(x_0) = 0$. Пусть $f''(x_0) > 0$ $(f''(x_0) < 0)$. Тогда $x_0$ - точка локального минимума (локального максимума).

Доказательство. Запишем формулу Тейлора 2-ого порядка для функции $y = f(x)$ в окрестности точки $x_0$:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2) \qquad (1)$$

(см. теорему 1 §14).

$f'(x_0) = 0$, поэтому из (1) следует:

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2)$$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)^2} = \frac{f''(x_0)}{2!} + \frac{o((x - x_0)^2)}{(x - x_0)^2}. \qquad (2)$$

Из (2) следует, что $\exists$ окрестность точки $x_0$, такая что знак $f(x) - f(x_0)$ совпадает со знаком $f''(x_0)$, $\forall x$ из этой окрестности, что и требовалось доказать.

**Теорема 6.** Пусть функция $y = f(x)$ имеет в точке $x_0$ n производных, причем

$f'(x_0) = f''(x_0) = ... = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ и $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Тогда:

1) если n – четное и $f^{(n)}(x_0) > 0$, то $x_0$ - точка локального минимума;

2) если n – четное и $f^{(n)}(x_0) < 0$, то $x_0$ - точка локального максимума;

3) если n – нечетное, то в точке $x_0$ локального экстремума нет.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 5.

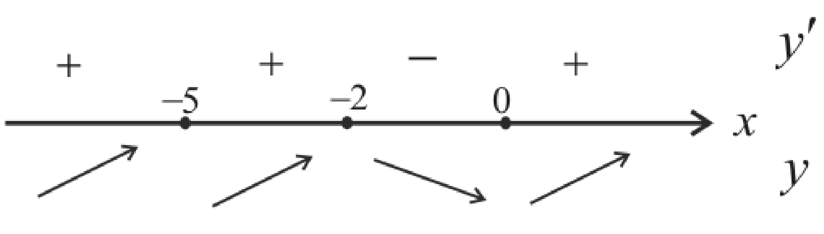
**Пример 3.** Исследовать на экстремум функцию $y = x^2(5 + x)^3$.

Решение. Функция непрерывна $\forall x \in R$.

$y' = 2x(5 + x)^3 + 3x^2(5 + x)^2 = x(5 + x)^2(2(5 + x) + 3x) =$

$= x(5 + x)^2(10 + 5x)$.

Найдем критические точки: $x(5 + x)^2(10 + 5x) = 0;\ x = 0;\ x = -5;\ x = -2$.




$x = -2$ - точка локального максимума: $y(-2) = 108$;

$x = 0$ - точка локального минимума; $y(0) = 0$.

$x = -5$ - не является точкой экстремума.

При исследовании функции на экстремум точки разрыва(если они есть) также наносят на числовую прямую. При переходе через эти точки может изменятся направление возрастания (убывания) функции.

**Упражнение 1.** Исследовать на экстремум функции:

1) $y = x^3(7+x)^4$;

2) $y = x^4(7+x)^3$;

3) $y = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

4) $y = \begin{cases} x \cdot e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

**Замечание.** При решении ряда технических и экономических задач приходится находить не локальные, а глобальные экстремумы(наибольшие и наименьшие значения функций на некотором множестве). Из теоремы Вейерштрасса(см.теорему 1 §11) следует, что для непрерывной функции $y = f(x)$ заданной на отрезке $[a, b]$ глобальные min и max существуют. При этом точки $c_1$ и $c_2$ – глобального min и max лежат либо на концах отрезка $[a, b]$, либо являются критическими для функции $f(x)$.

**Пример 4.** Найти наибольшее и наименьшее значение функции $y = x^3 - 4x^2 + 4x$ на отрезке $[0, 3]$.

Решение. Функция непрерывна $\forall x \in R$. Найдем критические точки:

$y' = 3x^2 - 8x + 4 = 0$.

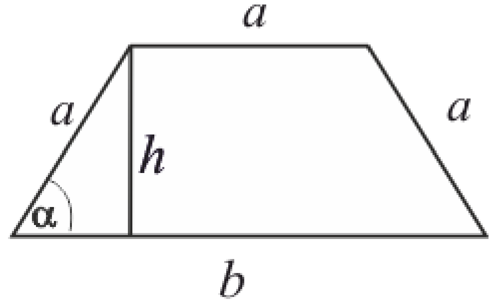
$x_1 = 2;\ x_2 = \frac{2}{3}$ - критические точки.

$x_3 = 0;\ x_4 = 3$ - концы отрезка.

$y(2) = 0;\ y\left(\frac{2}{3}\right) = 1\frac{5}{27};\ y(0) = 0;\ y(3) = 3$

$y_{\max} = y(3) = 3;\ y_{\min} = y(2) = y(0) = 0$.

**Пример 5.** Боковые стороны и меньшее основание трапеции =*a*. Найти длину большего основания, при котором площадь трапеции – наибольшая.

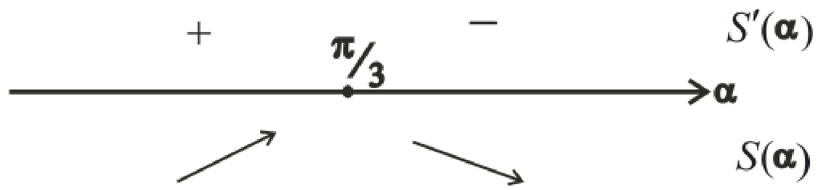


$S = \frac{1}{2}(a+b)\cdot h = \frac{1}{2}(a + (a + 2a\cos\alpha))\cdot a\cdot\sin\alpha$

$S(\alpha) = a^2(1+\cos\alpha)\cdot\sin\alpha$

$S'(\alpha) = a^2((1+\cos\alpha)\cos\alpha - \sin^2\alpha) = a^2(\cos\alpha + \cos 2\alpha) = 2a^2\cos\frac{3}{2}\alpha\cdot\cos\frac{\alpha}{2}$;

$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. $\alpha = \frac{\pi}{3}$ - критическая точка для функции $S(\alpha)$.




$x = \frac{\pi}{3}$ - точка локального максимума.

$S\left(\frac{\pi}{3}\right) = a^2\left(1+\frac{1}{2}\right)\frac{\sqrt{3}}{2} = a^2\frac{3\sqrt{3}}{4}$ - наибольшее значение площади, при этом $b = a + 2a\cos\alpha = a + 2a\cos\frac{\pi}{3} = 2a$ -длина большего основания.

## Упражнения к § 15.

**Упражнение 15.1.** Найти экстремумы функций:

1. $y = x^2 e^{\frac{1}{x}}$. 2. $y = \frac{x^2}{(x+2)^2}$. 3. $y = \frac{\ln x}{x}$.

4. $y = 1 - \ln^3 x$. 5. $y = x + 2\operatorname{arcctg} x$. 6. $y = 1 + \ln^2 x$.

7. $y = \arcsin\frac{1-x^2}{1+x^2}$. 8. $y = \frac{x^4}{x^3 - 1}$. 9. $y = e^{\frac{3}{5-x}}$.

10. $y = \frac{e^{3x}+2}{e^{2x}}$. 11. $y = \frac{x}{x^2 - 6x - 16}$. 12. $y = x\cdot\ln^2 x$.

13. $y = (x+2)\cdot x^{\frac{2}{3}}$. 14. $y = x - \operatorname{arctg} x$.

15. $y = \begin{cases} x^2 \ \ при \ \ x \ge 0, \\ -x \ \ при \ \ x < 0. \end{cases}$ 16. $y = \begin{cases} x^2 + 2 \ \ при \ \ x \ge 0, \\ -x \ \ при \ \ x < 0. \end{cases}$

**Упражнение 15.2.** Определить коэффициенты p и q квадратного трехчлена $y = x^2 + px + q$ так, чтобы он имел минимум $y = 3$ при $x = 1$.

**Упражнение 15.3.** Доказать справедливость неравенств:

1. $x > \ln(1+x)$. 2. $x^4 - 2x^2 > 5$ при $x \in (-1; 0)$.

3. $\dfrac{x}{x^2 - 6x - 16} < 0$. 4. $\operatorname{arctg} x > x$ при $x \in (0; +\infty)$. 5. $\ln^3 x > 1$.

**Упражнение 15.4.** Найти наибольшее и наименьшее значения функции на указанных промежутках.

1. $y = x^3 - 3x^2 + 3x$ на $[-1; 2]$.
2. $y = \dfrac{x}{1+x^2}$ на $(-\infty; +\infty)$.
3. $y = x\ln x$ на $[1; e]$.
4. $y = x^3$ на $[-1; 3]$.
5. $y = \dfrac{1-x+x^2}{1+x-x^2}$ на $[0; 1]$.
6. $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$ на $[-1; 5]$.
7. $y = \dfrac{1}{1+x^2}$ на $(-\infty; +\infty)$.
8. $y = \sin^4 x + \cos^4 x$ на $(-\infty; +\infty)$.
9. $y = 2\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^2 x$ на $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$.
10. $y = \sqrt{x - x^2}$ на $[0; 1]$.
11. $y = (x-2)e^x$ на $[-2; 1]$.
12. $y = (x+2)e^{1-x}$ на $[-2; 2]$.
13. $y = 4 - e^{-x^2}$ на $[0; 1]$.
14. $y = \sqrt[3]{1-x^3}$ на $[0; 2]$.
15. $y = \dfrac{2x}{8+x}$ на $[0; 4]$.
16. $y = \ln(9-x^2)$ на $[-2; 2]$.
17. $y = e^{\frac{1}{6-x}}$ на $[0; 2]$.
18. $y = x - \operatorname{arctg} x$ на $[0; 1]$.

**Упражнение 15.5.** Положительное число $a$ разложить на два положительных слагаемых так, чтобы сумма их кубов была наименьшей.

**Упражнение 15.6.** Изгородью длиной $l$ огородить прямоугольный участок наибольшей площади, примыкающей одной стороной к данной стене.

**Упражнение 15.7.** Заработная плата каждого сотрудника Q (рублей) и число x сотрудников фирмы связаны соотношением $Q = L - x^2 - \dfrac{a}{x}$, где L и $a$ – постоянные, характеризующие трудовые способности коллектива. Согласно «золотому правилу роста» x следует определять так, чтобы Q принимало наибольшее из возможных значений. При $L = 1500, a = 16000$ найти по указанному правилу оптимальной число сотрудников.

**Упражнение 15.8.** Сила действия кругового электрического тока на небольшой магнит, ось которого расположена перпендикулярно к плоскости круга, проходящего через его центр выражается формулой $F = \dfrac{cx}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$, где $a$ – радиус круга, x – расстояние от центра круга до магнита $(0 < x < +\infty)$, c – постоянная.

При каком значении x величина F будет наибольшей?

**Упражнение 15.9.** Из квадратного листа картона со стороной $a$ сделать открытую коробочку наибольшей вместимости, вырезав по углам квадраты и загнув выступы получившейся фигуры.

**Упражнение 15.10.** Лампа висит над центром круглого стола радиусом R. При какой высоте лампы над столом освещенность предмета будет наилучшей, если освещенность вычисляется по формуле $f = \dfrac{I\cos\varphi}{r^2}$, где $\varphi$ - угол падения лучей, r – расстояние до источника, I – характеристика источника.

**Упражнение 15.11.** Проволоку длиной $l$ предполагают разрезать на две части, из которых одну требуется согнуть в виде окружности, другую – в виде квадрата. При какой длине каждой из частей сумма площадей круга и квадрата, окажется наибольшей?

**Ответы на упражнения к § 15.**

**15.1.** 1. $x = \dfrac{1}{2}$ - точка локального минимума, $y\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{e^2}{4}$.

2. $x = 0$ - точка локального минимума, $y(0) = 0$.

3. $x = e$ - точка локального максимума, $y(e) = \dfrac{1}{e}$.

4. функция не имеет экстремумов, т.к. везде убывает.

5. $x_1 = -1$ - точка локального максимума, $y(-1) = \dfrac{-2-\pi}{2}; x_2 = 1$ - точка локального минимума, $y(1) = \dfrac{2+\pi}{2}$.

6. $x = 1$ - точка локального минимума, $y(1) = 1$.

7. $x = 0$ - точка локального минимума, $y(0) = \dfrac{\pi}{2}$.

8. $x_1 = 0$ - точка локального максимума, $y(0) = 0; x_2 = \sqrt[3]{4}$ - точка локального минимума, $y(\sqrt[3]{4}) = \dfrac{4\sqrt[3]{4}}{3}$.

9. Функция не имеет экстремумов, т.к. везде возрастает.

10. $x=\ln\sqrt[3]{4}$ - точка локального минимума, $y(\ln\sqrt[3]{4})=\dfrac{3}{\sqrt[3]{2}}$.

11. Функция не имеет экстремумов, т.к. везде убывает.

12. $x_1=\dfrac{1}{e^2}$ - точка локального максимума, $y\left(\dfrac{1}{e^2}\right)=4e^{-2}; x_2=1$ - точка локального минимума, $y(1)=0$.

13. $x_1=-\dfrac{4}{5}$ - точка локального максимума, $y(-\dfrac{4}{5})=\dfrac{12}{5}\sqrt[3]{\dfrac{2}{25}}; x_2=0$ - точка локального минимума, $y(0)=0$.

14. Функция не имеет экстремумов, т.к. везде возрастает.

15. $x=0$ - точка локального минимума, $y(0)=0$

16. Функция не имеет экстремумов, т.к. в критической точке $x=0$ имеет разрыв 1-ого рода.

**15.2.** $p=-2,\ q=4$.

**15.4.** 1. $y_{наиб.}=y(2)=2, y_{наим.}=y(-1)=-7$ .

2. $y_{наиб.}=y(1)=\dfrac{1}{2}, y_{наим.}=y(-1)=-\dfrac{1}{2}$ .

3. $y_{наиб.}=y(e)=e, y_{наим.}=y(1)=0$ .

4. $y_{наиб.}=y(3)=27, y_{наим.}=y(-1)=-1$ .

5. $y_{наиб.}=y(0)=y(1)=1, y_{наим.}=y\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{3}{5}$ .

6. $y_{наиб.}=y(5)=266, y_{наим.}=y(1)=-6$ .

7. $y_{наиб.}=y(0)=1$ , наименьшего значения функция не достигает.

8. $y_{наиб.}=y\left(\dfrac{\pi k}{2}\right)=1, y_{наим.}=y\left(\dfrac{\pi(2k+1)}{4}\right)=\dfrac{1}{2}, k\in Z$ .

9. $y_{наиб.}=y\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=1$, наименьшего значения функция не достигает.

10. $y_{наиб.}=y\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}, y_{наим.}=y(0)=y(1)=0$ .

11. $y_{наиб.}=y(-2)=-\dfrac{4}{e^2}, y_{наим.}=y(1)=-e$ .

12. $y_{наиб.}=y(-1)=e^2, y_{наим.}=y(-2)=0$ .

13. $y_{наиб.}=y(1)=4-\dfrac{1}{e}, y_{наим.}=y(0)=3$ .

14. $y_{наиб.}=y(0)=1, y_{наим.}=y(2)=-1$ .

15. $y_{наиб.}=y(4)=\dfrac{2}{3}, y_{наим.}=y(0)=0$ .

16. $y_{наиб.}=y(0)=\ln 9, y_{наим.}=y(-2)=y(2)=\ln 5$ .

17. $y_{наиб.} = y(2) = e^{\frac{1}{4}}, y_{наим.} = y(0) = e^{\frac{1}{6}}$ .

18. $y_{наиб.} = y(1) = \frac{4-\pi}{4}, y_{наим.} = y(0) = 0$ .

**15.5.** $x = y = \frac{a}{2}$**.**

**15.6.** $S_{наиб.} = \frac{l^2}{16}$ при $x = \frac{l}{4}$ - сторона квадрата.

**15.7.** $x = 20$**.**

**15.8.** $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$.

**15.9.** Сторона квадрата равна $\frac{a}{6}$.

**15.10.** $\frac{R}{\sqrt{2}}$.

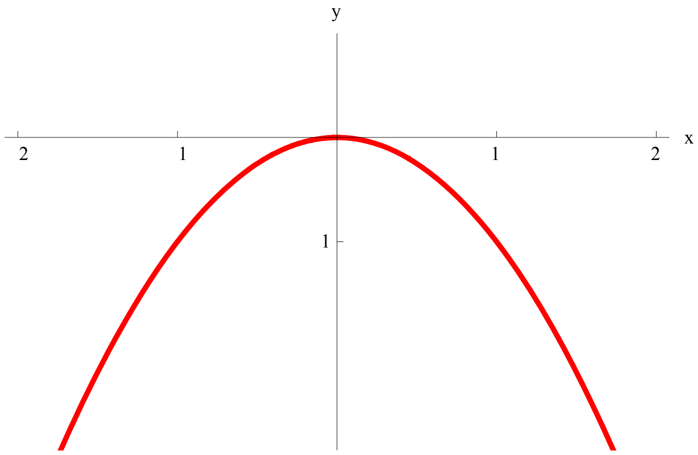
**15.11.** Если сделан только круг.

## § 16. Исследование функций с помощью производных(часть вторая).

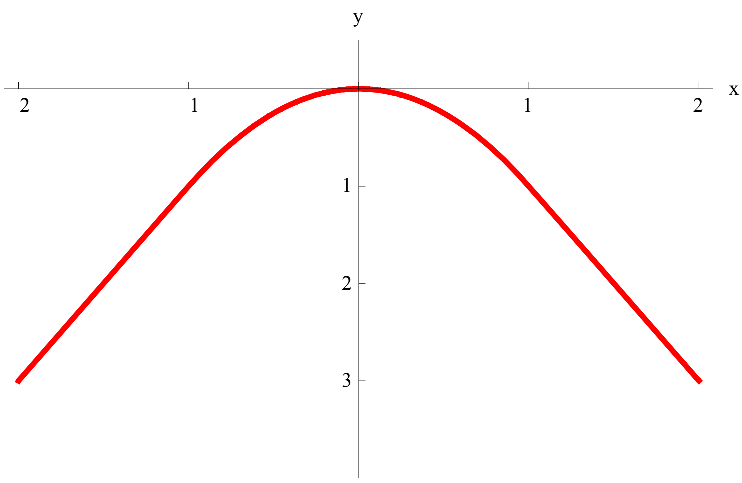
**Определение 1.** Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема на интервале $(a, b)$. И пусть $\forall x_0 \in (a,b)$ график функции $y = f(x)$ расположен ниже (не выше), чем касательная $y = y(x)$ к нему в точке $M_0(x_0, f(x_0))$, то есть $f(x) < y(x), \forall x \in (a,b), x \neq x_0$ $(f(x) \leq y(x), \forall x \in (a,b))$. Тогда $f(x)$ называется выпуклой(нестрого выпуклой вверх).

Пусть $\forall x_0 \in (a,b)$ график функции $y = f(x)$ расположен выше (не ниже), чем касательная $y = y(x)$ к нему в точке $M_0(x_0, f(x_0))$, то есть $f(x) > y(x), \forall x \in (a,b), x \neq x_0$ $(f(x) \geq y(x), \forall x \in (a,b))$. Тогда $f(x)$ называется вогнутой(нестрого вогнутой).

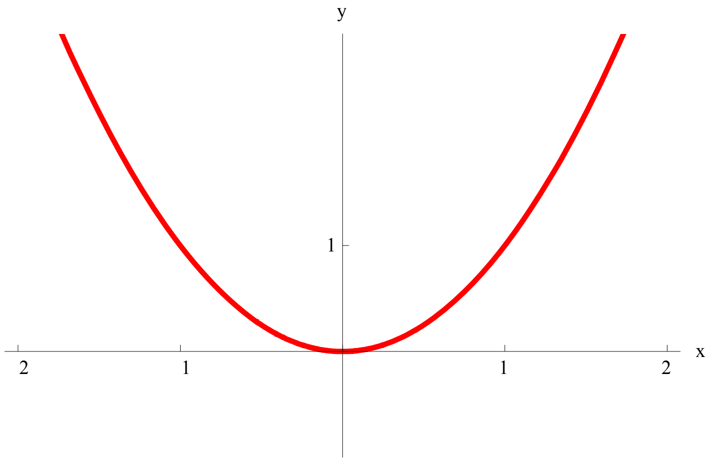
**Пример 1.** а) $y = -x^2$ выпукла на всей оси $(-\infty; +\infty)$:



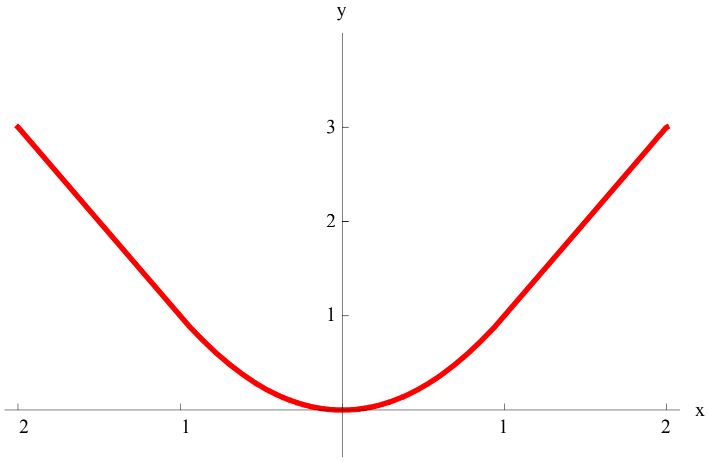

б) $y = \begin{cases} -x^2, |x| \leq 1 \\ 1 - 2|x|, |x| > 1 \end{cases}$ нестрого выпукла вверх на всей оси $(-\infty; +\infty)$




в) $y = x^2$ вогнута на всей оси $(-\infty; +\infty)$:




г) $y=\begin{cases} x^2, |x| \le 1 \\ 2|x|-1, |x|>1 \end{cases}$ нестрого вогнута на всей оси $(-\infty; +\infty)$




**Теорема 1.** Для того, чтобы дифференцируемая функция $y=f(x)$ была вогнутой (выпуклой) на интервале $(a,b)$ необходимо и достаточно, чтобы ее производная $y=f'(x)$ возрастала(убывала) на этом интервале.

Докажем для случая, когда $y=f(x)$- вогнута.

Необходимость. Пусть $x_1, x_2 \in (a, b), x_1 < x_2$,

$y_1(x)=f(x_1)+f'(x_1)(x-x_1)$,

$y_2(x)=f(x_2)+f'(x_2)(x-x_2)$ - касательные к графику $y=f(x)$ в точках $M_1(x_1, f(x_1)), M_2(x_2, f(x_2))$. Так как $y=f(x)$ - вогнута, то $f(x_2)>y_1(x_2) \Rightarrow f(x_2)-y_1(x_2)>0$, $f(x_1)>y_2(x_1) \Rightarrow f(x_1)-y_2(x_1)>0$.

$$\begin{cases} f(x_2)-(f(x_1)+f'(x_1)(x_2-x_1))>0 \\ f(x_1)-(f(x_2)+f'(x_2)(x_1-x_2))>0. \end{cases}$$

Сложим эти неравенства:

$$-f'(x_2)(x_1-x_2)-f'(x_1)(x_2-x_1)>0 \Leftrightarrow (f'(x_2)-f'(x_1))(x_2-x_1)>0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow f'(x_2)-f'(x_1)>0$ что и требовалось доказать.

Достаточность. Пусть $f'(x)$ - возрастает. Докажем, что $y=f(x)$ - вогнута. Пусть $x_0 \in (a, b)$ и $y(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ - уравнение касательной в точке

$(x_0, f(x_0))$. Пусть $x \in (a, b), x > x_0$. Найдем разность $f(x) - y(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) =$
$\left| \textit{по теореме Лагранжа (терема 4 параграфа 12)} \right| =$
$= f'(c)(x - x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = (f'(c) - f'(x_0))(x - x_0) > 0$ что и требовалось доказать.

**Теорема 2.** Для того, чтобы дифференцируемая функция $y = f(x)$ была нестрого вогнутой (нестрого выпуклой) на интервале $(a,b)$ необходимо и достаточно, чтобы производная $y = f'(x)$ неубывала (невозрастала) на этом интервале.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1.

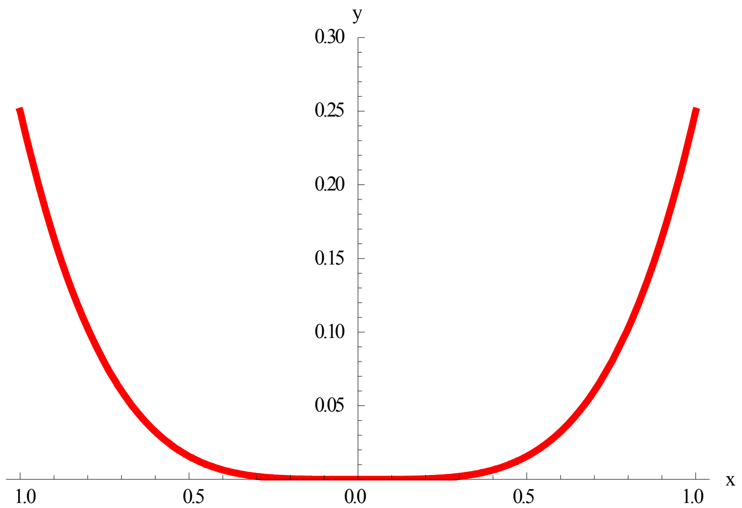
**Теорема 3.** Для того, чтобы дважды дифференцируемая на интервале $(a,b)$ функция $y = f(x)$ была не строго вогнутой (не строго выпуклой) необходимо и достаточно, чтобы $f''(x) \geq 0$ $(f''(x) \leq 0), \forall x \in (a, b)$.

Доказательство следует из теоремы 2 и теоремы 1 §15.

**Теорема 4.** Для того, чтобы дважды дифференцируемая на интервале $(a,b)$ функция $y = f(x)$ была вогнутой (выпуклой) на этом интервале достаточно, чтобы $f''(x) > 0$ $(f''(x) < 0), \forall x \in (a, b)$.

Доказательство следует из теоремы 1 и теоремы 2 §15. Нужно заметить, что условие $f''(x) > 0$ $(f''(x) < 0)$ не является необходимым для вогнутости(выпуклости) функции.

**Пример 2.** Рассмотрим функцию $y = \frac{1}{4}x^4$. Она вогнута на интервале $(-1; 1)$.
Но условие $f''(x) > 0$ не выполнено в точке $x_0 = 0$: $f''(x) = 3x^2$; $f''(0) = 0$ .




**Определение 2.** Пусть функция $y = f(x)$ имеет касательную в точке $x_0$ (см. определение1, 2 § 9, определение 5 §6) и пусть при переходе через точку $x_0$ направление выпуклости меняется на противоположное. Тогда точка $x_0$ называется точкой перегиба.

**Теорема 5**(необходимое условие точки перегиба). Пусть $y = f(x)$ дифференцируема в некоторой окрестности точки $x_0$ за исключением может быть самой точки $x_0$ и точка $x_0$ является точкой перегиба. Тогда ее вторая производная $f''(x_0)$ в этой точке равна 0 или не существует.

Доказательство. Если $f''(x_0)$ не существует, то все доказано. Предположим, что $f''(x_0)$ существует. Тогда $f'(x)$ - непрерывна в точке $x_0$ и, так как $x_0$ - точка перегиба, то согласно теореме 1, $x_0$ - точка локального экстремума для функции $f'(x)$, поэтому по теореме 3 §15 $f''(x_0) = (f'(x))'(x_0) = 0$, что и требовалось доказать.

**Определение 3.** Пусть вторая производная $y = f''(x)$ функции $y = f(x)$ равна 0 или не существует в точке $x_0$ и пусть функция $y = f(x)$ имеет касательную в точке $x_0$. Тогда точка $x_0$ называется точкой возможного перегиба.

**Замечание.** Согласно теореме 5 для дифференцируемой функции $y = f(x)$ любая точка перегиба будет удовлетворять определению 3. Наоборот неверно.

Для функции $y = \frac{1}{4}x^4$ из примера 2 точка $x = 0$ - точка возможного перегиба, но эта точка не будет точкой перегиба.

**Теорема 6**(достаточное условие перегиба функции). Рассмотрим функцию $y = f(x)$ дважды дифференцируемую в некоторой окрестности $O_\delta(x_0)$ точки возможного перегиба $x_0$ за исключением может быть самой точки $x_0$. Предположим также, что вторая производная $f''(x)$ меняет знак при переходе через точку $x_0$. Тогда $x_0$ будет точкой перегиба для функции $y = f(x)$.

Доказательство следует из теоремы 4.

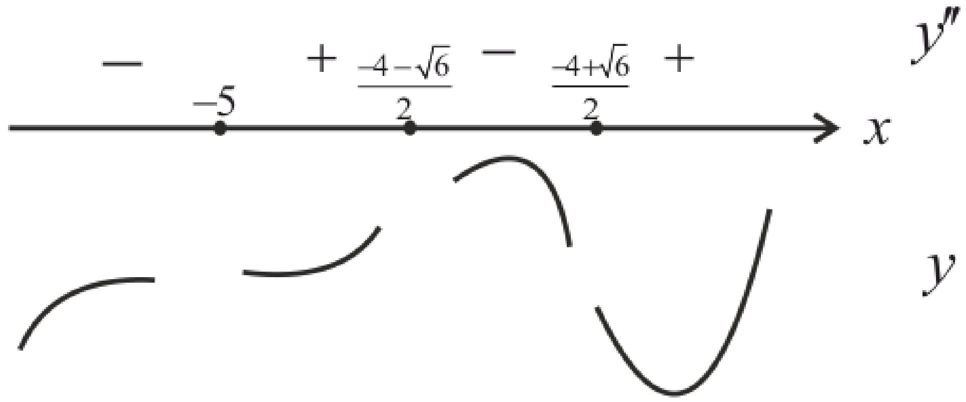
**Пример 3.** Найдем точки перегиба и интервалы выпуклости-вогнутости функции $y = x^2(5+x)^3$ из примера 3 §15.

Решение. $y' = (5+x)^2(10x+5x^2)$ (см. пример 3 §15).

$$y'' = 2(5+x)(10x+5x^2) + (5+x)^2(10+10x) = 10(5+x)(2x+x^2+(5+x)(x+1)) =$$
$$= 10(5+x)(2x^2+8x+5).$$

Найдем точки возможного перегиба(точки, где $y''$ равна 0 или не существует).

$$x_1 = -5;\ 2x^2+8x+5 = 0;\ x_{2,3} = \frac{-4 \pm \sqrt{6}}{2}.$$




$x_1 = -5;\ x_2 = \dfrac{-4-\sqrt{6}}{2};\ x_3 = \dfrac{-4+\sqrt{6}}{2}$ - точки перегиба функции.

При нахождении интервалов выпуклости-вогнутости точки, где функции $f(x), f'(x)$ имеют разрывы также наносят на числовую прямую. При переходе через эти точки может меняться направление выпуклости-вогнутости.

**Определение 4.** Прямая $y = kx + b$ называется наклонной асимптотой функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty\ (x \to -\infty)$, если $f(x) = kx + b + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ бесконечно-малая функция при $x \to +\infty\ (x \to -\infty)$, то есть

$$\lim_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty)}} \alpha(x) = 0.$$

**Теорема 7.** Для того, чтобы прямая $y = kx + b$ была наклонной асимптотой для функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty\ (x \to -\infty)$ необходимо и достаточно, чтобы существовали пределы

$$\lim_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty)}} \frac{f(x)}{x} = k \text{ и } \lim_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty)}} (f(x) - kx)) = b. \qquad (1)$$

Доказательство. Рассмотрим, например, случай $x \to +\infty$.

Необходимость. Пусть $f(x) = kx + b + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ бесконечно-малая функция. Докажем, что выполняются пределы (1).

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx)) = \lim_{x\to+\infty} (b + \alpha(x)) = b$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{kx + b + \alpha(x)}{x} = k + \lim_{x\to+\infty} \frac{b + \alpha(x)}{x} = k$$ что и требовалось доказать.

Достаточность. Пусть выполняется (1). Докажем, что $y = kx + b$ - асимптота для $y = f(x)$.

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx)) = b \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx - b) = 0 \Leftrightarrow f(x) - kx - b) = \alpha(x),$$ где $\alpha(x)$ бесконечно-малая функция при $x \to +\infty$, что и требовалось доказать. Таким образом теорема доказана.

**Замечание.** Наличие наклонной асимптоты значит, что при $x \to +\infty$ $(x \to -\infty)$ график функции очень близок к прямой линии $y = kx + b$.

**Пример 4.** Для функции $y = \dfrac{x^2+1}{x-1}$(см. пример 1 §5) $y = x+1$ - наклонная асимптота при $x \to \pm\infty$ .

Для функции $y = \dfrac{x-2}{x^2-5x+6}$(пример 8 §5) $y = 0$ - горизонтальная асимптота при $x \to \pm\infty$ $(k = 0)$.

Для функции $y = \dfrac{2}{1-3^{\frac{x}{x-2}}}$(пример 10 §5) $y = -1$ - горизонтальная асимптота при $x \to \pm\infty$ .

Для функции $y = a^x$, $a > 1$ $(0 < a < 1)$(пример 2 §5) $y = 0$ - горизонтальная асимптота при $x \to -\infty$ $(x \to +\infty)$.

**Определение 5.** Прямая $x = x_0$ называется вертикальной асимптотой функции $y = f(x)$, если хотя бы один из пределов $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ или $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$ равен $\infty$.

**Пример 5.** Для функции $y = \dfrac{x^2+1}{x-1}$(см. пример 1 §5) прямая $x = 1$ - вертикальная асимптота, для функции $y = \dfrac{x-2}{x^2-5x+6}$(пример 8 §5) прямая $x = 3$ - вертикальная асимптота, для функции $y = \dfrac{2}{1-3^{\frac{x}{x-2}}}$(пример 10 §5) прямая $x = 0$ - вертикальная асимптота, для функции $y = 1-3^{\frac{x}{x-2}}$ из упражнения 1 §5 прямая $x = 2$ - вертикальная асимптота $\left(\lim\limits_{x \to 2+0} f(x) = -\infty\right)$.

При построении графиков функции используют результаты §15, 16. Это можно проводить по следующей схеме:

1. Найти область определения $D(f)$ функции и исследовать поведение функции в граничных точках $D(f)$. Определить точки разрыва, вертикальные асимптоты, нули функции, исследовать функцию на периодичность, четность, нечетность.
2. Найти наклонные асимптоты.
3. Найти интервалы монотонности, точки локального экстремума.
4. Найти интервалы выпуклости, вогнутости, точки перегиба.
5. Построить график.

**Пример 6.** Провести полное исследование и построить график функции $y = \dfrac{x^4}{x^3 - 1}$.

1. $D(y) = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$

$\lim\limits_{x \to 1-0} \dfrac{x^4}{x^3 - 1} = -\infty;\ \lim\limits_{x \to 1+0} \dfrac{x^4}{x^3 - 1} = +\infty;\ x = 1$ - вертикальная асимптота.

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x^4}{x^3 - 1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{1 - \dfrac{1}{x}} = \pm\infty;$

.

*Нули функции* $: x = 0 \Rightarrow y = 0; y = 0 \Rightarrow x = 0$

Таким образом график пересекает оси координат в точке O(0; 0). Функция ни четная, ни нечетная, не периодическая.

2. Наклонные асимптоты. По формулам (1);

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^3}{x^3 - 1} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{1 - \dfrac{1}{x^3}} = 1;$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \to \pm\infty} \left( \frac{x^4}{x^3 - 1} - x \right) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x}{x^3 - 1} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\dfrac{1}{x^2}}{1 - \dfrac{1}{x^3}} = 0.$$

$y = x$ - наклонная асимптота при $x \to \pm\infty$.

3. $y' = \dfrac{4x^3(x^3 - 1) - 3x^2 \cdot x^4}{(x^3 - 1)^2} = \dfrac{x^6 - 4x^3}{(x^3 - 1)^2} = \dfrac{x^3(x^3 - 4)}{(x^3 - 1)^2}$.

Точки, где $y'$ равна 0 или не существует: $x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = \sqrt[3]{4}$.

| x | $(-\infty; 0)$ | 0 | $(0; 1)$ | 1 | $(1; \sqrt[3]{4})$ | $\sqrt[3]{4}$ | $(\sqrt[3]{4}; +\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y | $\nearrow$ | т.лок. max | $\searrow$ | т.разр. 2-ого рода | $\searrow$ | т.лок. min | $\nearrow$ |
| $y'$ | + | 0 | - | | - | 0 | + |

$x = 0$ - точка локального максимума; $x = \sqrt[3]{4}$ - точка локального минимума; $y(0) = 0;\ y(\sqrt[3]{4}) = \dfrac{4}{3}\sqrt[3]{4}$.

4. $y'' = \left( \dfrac{x^6 - 4x^3}{(x^3 - 1)^2} \right)' = \dfrac{(6x^5 - 12x^2)(x^3 - 1)^2 - (x^6 - 4x^3)6x^2(x^3 - 1)}{(x^3 - 1)^4} =$

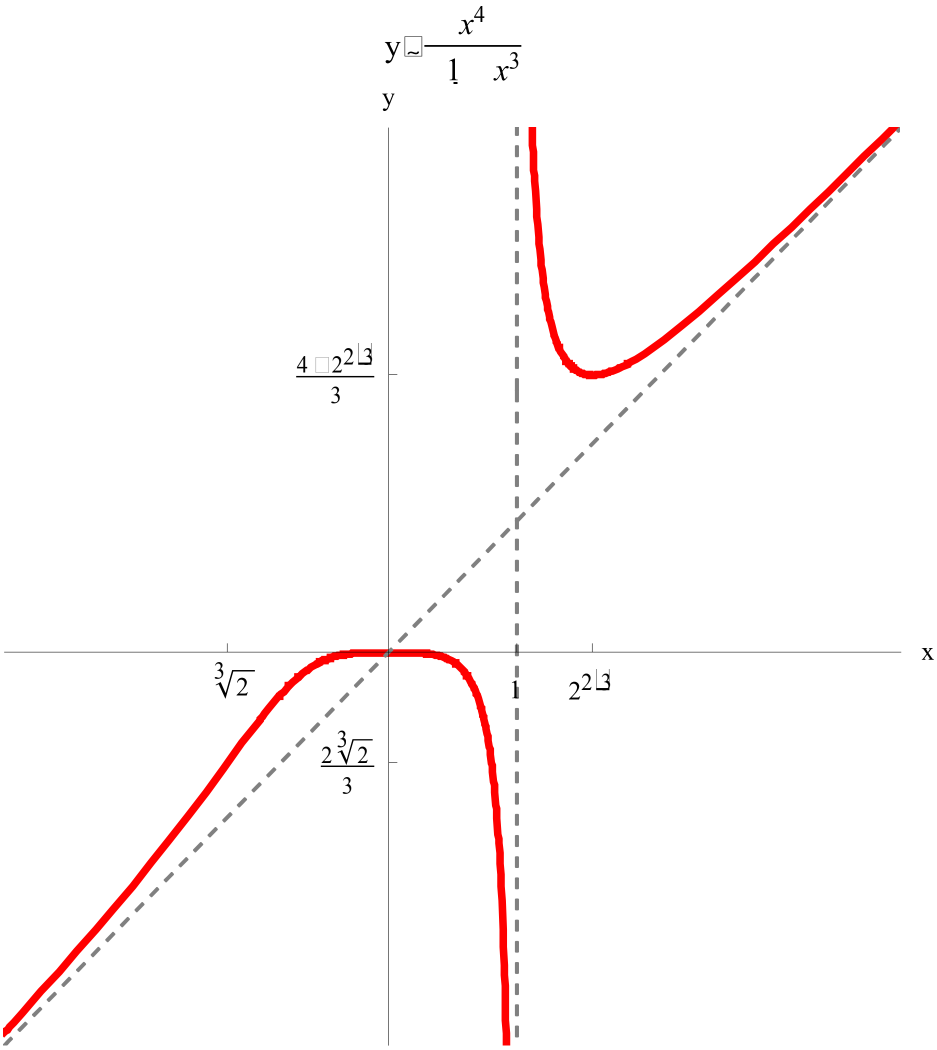
$= \dfrac{6x^2(x^3 + 2)}{(x^3 - 1)^3}$.

Точки где $y''$ равна 0 или не существует: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = -\sqrt[3]{2}$ .

| x | $(-\infty; -\sqrt[3]{2})$ | $-\sqrt[3]{2}$ | $(-\sqrt[3]{2};0)$ | 0 | (0; 1) | 1 | $(1; +\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y | | т. перегиба | | не явл. точкой перегиба | | т.разр. | |
| $y''$ | + | 0 | - | | - | 0 | + |

$x = -\sqrt[3]{2}$ - точка перегиба; $y(-\sqrt[3]{2}) = -\frac{2}{3}\sqrt[3]{2}$ .

5. График функции.



## Упражнения к § 16.

**Упражнение 16.1.** Найти точки перегиба и интервалы выпуклости и вогнутости.

1) $y=e^{-x^2}$; 2) $y=4e^x$; 3) $y=\ln(x^2-1)$;

4) $y=\dfrac{1}{(x-2)^3}$; 5) $y=\sqrt[3]{x+2}$; 6) $y=e^{\sin x}$, $x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$;

7) $y=e^{\operatorname{arctg} x}$; 8) $y=\dfrac{1}{x}+4x^2$; 9) $y=x^{\frac{5}{3}}$;

10) $y=\begin{cases} 2, \text{ если } x\le 1, \\ x^2+2, \text{ если } x>1; \end{cases}$ 11) $y=\begin{cases} e^{2x}, \text{ при } x\le 0, \\ 1-x, \text{ при } 0<x\le 3, \\ \sqrt{x}, \text{ при } x>3; \end{cases}$

12) $y=\begin{cases} \ln x, \text{ при } 0<x\le 1, \\ x-2, \text{ при } 1<x\le 3, \\ 3, \text{ при } x>3; \end{cases}$ 13) $y=\begin{cases} e^{-x^2}, \text{ при } x\le 0, \\ \dfrac{x^2}{2}, \text{ при } x>0; \end{cases}$

14) $y=\begin{cases} \sin x, \text{ при } x\le 0, \\ x^3, \text{ при } 0<x\le 1, \\ \sqrt{x}, \text{ при } x>1. \end{cases}$

**Упражнение 16.2.** При каких значениях a и b точка M(1,3) является точкой перегиба кривой $y=ax^3+bx^2$?

**Упражнение 16.3.** При каких значениях a кривая $y=e^x+ax^3$ имеет точки перегиба?

**Упражнение 16.4.** Найти асимптоты кривых:

1) $y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+3}}$; 2) $y=xe^{\frac{1}{x^2}}$; 3) $y=x+\ln x$; 4) $y=x\ln\left(e+\dfrac{1}{x}\right)$;

5) $y=xe^{\frac{1}{x}}$; 6) $y=\dfrac{x^3}{x^2-4}$; 7) $y=(x+2)e^{\frac{1}{x}}$; 8) $y=\dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$;

9) $y=(x-5)\cdot x^{\frac{2}{3}}$; 10) $y=\arccos\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$.

**Упражнение 16.5.** Исследовать функции и построить их графики:

1) $y=\left(\dfrac{x+1}{1-x}\right)^4$; 2) $y=\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{5}{2}x^2+6x$;

3) $y=\dfrac{x}{\sqrt[3]{(x-2)^4}}$; 4) $y=x^2e^{\frac{1}{x}}$; 5) $y=x^3e^{-x}$;

6) $y=(x+2)e^{\frac{1}{x}}$; 7) $y=\operatorname{accsin}\dfrac{2x}{1+x^2}$;

8) $y=x+\ln(x^2-1)$; 9) $y=\dfrac{x^2(x-1)}{(x+1)^2}$; 10) $y=\operatorname{ac}\cos\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$;

11) $y=\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}$; 12) $y=x^2\cdot\ln x$;

13) $y=\dfrac{e^x}{x+1}$; 14) $y=4e^{-x^2+2x}$;

15) $y=\dfrac{\ln x}{x}$; 16) $y=\dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$;

17) $y=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}$; 18) $y=\dfrac{3x^2-7x-16}{x^2-x-6}$;

19) $y=\sqrt[3]{1-x^3}$; 20) $y=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$;

21) $y=x+\ln(x^2+4)$; 22) $y=x^3\cdot\ln x$.

## Ответы на упражнения к § 16.

**16.1.** 1) $x_1=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $x_2=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, вогнута при $x\in\left(-\infty;-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\cup\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}};+\infty\right)$, выпукла при $x\in\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}};\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

2) вогнута везде;

3) выпукла везде;

4) выпукла при $x\in(-\infty;2)$, вогнута при $x\in(2;+\infty)$, точек перегиба нет;

5) $x=-2$, вогнута при $x\in(-\infty;-2)$, выпукла при $x\in(-2;+\infty)$, точек перегиба нет;

6) $x=\arcsin\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$, вогнута при $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2};\arcsin\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$, выпукла при $x\in\left(\arcsin\dfrac{\sqrt{5}-1}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$;

7) $x=\dfrac{1}{2}$, вогнута при $x\in\left(-\infty;\dfrac{1}{2}\right)$, выпукла при $x\in\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$;

8) $x_1=-\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}$, вогнута при $x\in\left(-\infty;-\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}\right)\cup(0;+\infty)$, выпукла при $x\in\left(-\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}};0\right)$;

9) $x=0$, выпукла при $x\in(-\infty;0)$, вогнута при $x\in(0;+\infty)$;

10) произвольна при $x \in (-\infty; 1)$, т.к. $y''(x) = 0$, вогнута при $x \in (1; +\infty)$, точек перегиба нет;

11) вогнута при $x \in (-\infty; 0)$, произвольна при $x \in (0; 3)$, выпукла при $x \in (0; +\infty)$, точек перегиба нет;

12) выпукла при $x \in (0; 1)$, произвольна при $x \in (1; +\infty)$, точек перегиба нет;

13) $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, вогнута при $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cup (0; +\infty)$, выпукла при $x \in \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; 0\right)$;

14) $x = -2\pi k,\, x = -\pi(2k+1)$, вогнута при $x \in (-\pi(2k+1); -2\pi k) \cup (0;1)$, выпукла при $x \in (-2\pi(k+1); -\pi(2k+1)) \cup (1; +\infty),\ k = 0, 1, 2, \ldots$ .

**16.2.** $a = -\frac{3}{2};\ b = \frac{9}{2}$.

**16.3.** $a \in \left(-\infty; -\frac{e}{6}\right] \cup (0; +\infty)$.

**16.4.** 1) $y = 1, y = -1$ - горизонтальные асимптоты.

2) $x = 0$ - вертикальная асимптота, $y = x$ - наклонная асимптота.

3) $x = 0$ - вертикальная асимптота.

4) $x = -\frac{1}{e}$ - вертикальная асимптота, $y = x + \frac{1}{e}$ - наклонная асимптота.

5) $x = 0$ - вертикальная асимптота, $y = x + 1$ - наклонная асимптота.

6) $x = -2, x = 2$ - вертикальные асимптоты, $y = x$ - наклонная асимптота.

7) $x = 0$ - вертикальная асимптота, $y = x + 3$ - наклонная асимптота.

8) $x = 1$ - вертикальная асимптота, $y = 0$ - горизонтальная асимптота.

9) асимптот нет.

10) $y = \pi$ - горизонтальная асимптота.

## § 17. Вычисления в среде Mathematica.

Mathematica (далее М.) является системой символьной математики. Такие системы позволяют пользователю, набрав несколько команд, подключиться к готовым программам самой системы и провести необходимые вычисления.

После запуска М. или открытия уже существующего файла набирают нужный текст или математическую команду. М. воспринимает то, что набрано, как Input.

Обработка Input выполняется при нажатии клавиш: Shift+Enter. М. помечает Input меткой In[n]: и результат обработки выводит в Output, помечая его Out[n].

Текст и команды находятся в ячейках, которые М. объединяет в группы. Каждая ячейка (cell) имеет свой стиль. Границы групп и стиль ячеек показываются М. справа рабочего окна в виде квадратных скобок.

Можно выбирать стиль ячейки, используя команду Format. По умолчанию, автоматически открываемая ячейка, имеет стиль Input (Input style), который позволяет проводить математические вычисления. Если есть необходимость открыть новую ячейку, двигают курсор вниз ячейки, пока не появится горизонтальная линия. Если после этого нажать клавишу Enter – вы окажетесь в новой ячейке.

Синтаксис команд в М. соответствует здравому смыслу и широко распространенным языкам программирования.

Переменные в М. являются глобальными, названия стандартных функций пишутся с заглавной буквы, например: $y = x^2$ пишут $y = \mathrm{Sqr}[x]$, причем аргументы функций – в квадратных скобках. В М. имеется два операнда присваивания. Обыкновенное присваивание, например $a = 3$ и задержанное присваивание, например $a := 3$.

Разница видна из примеров.

**Пример 1.** Обыкновенное присваивание.

```
In[1]:=
    a = 12
    b =  9
    c = Sqrt[a^2 + b^2]
Out[1] = 12
Out[2] = 9
Out[3] = 15
```

**Пример 2.** Задержанное присваивание.

```
In[1]:=
    a := 12
    b :=  9
    c = Sqrt[a^2+b^2]
Out[1] = 15
```

**Замечание.** Во втором случае значения a и b хранятся в оперативной памяти и не выводятся в Output. Интерфейс в М. достаточно приятен. Можно активно использовать Help. Например, копировать там шаблоны стандартных функций и переносить их в свой документ. При этом Copy, Cut, Paste такие же как и в MS Word. Более подробно среда М. описана, например, в [7].

Рассмотрим функции М., позволяющие построить графики Plot, PolarPlot, ParametricPlot, Plot3D. Синтаксис любой такой функции примерно одинаков.

Например для команды Plot:

$\mathrm{Plot}[\mathrm{f}, \{x, x_{\min}, x_{\max}\}]$ - (1)

график функции f[x] независимой переменной $x$ в диапазоне от $x_{\min}$ до $x_{\max}$;

$\mathrm{Plot}[\{\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, ..., \mathrm{f}_n\}, \{x, x_{\min}, x_{\max}\}]$ - (2)

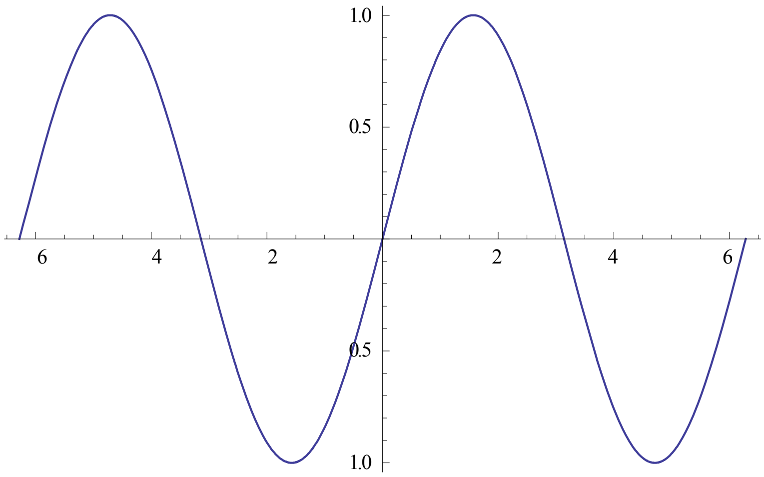
аналогично (1) – графики функций $\mathrm{f}_1[x], \mathrm{f}_2[x], ..., \mathrm{f}_n[x]$.

$\mathrm{Plot}[\mathrm{f}, \{x, x_0, x_1, ..., x_k\}]$ - (3)

график функции f($x$) на промежутке от $x_0$ до $x_k$ исключая точки $x_1, ...$.

**Пример 1.** Построим график функции $y = \sin x,\ x \in [-2\pi;\ 2\pi]$. Используем команду:

$\mathrm{Plot}[\mathrm{Sin}[x], \{x, -2\pi, 2\pi\}]$




При построении графика в примере 1 М. использовала по умолчанию опции, касающиеся стиля графика и вида осей координат. Пользователь может изменять эти опции, задавая их в команде Plot. Например, для команды (1):

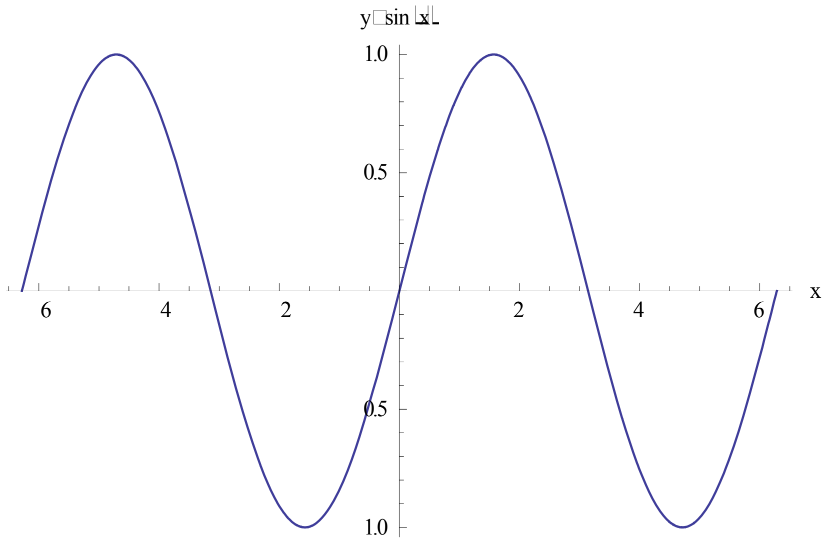
$\mathrm{Plot}[\mathrm{f}, \{x, x_{\min}, x_{\max}\}, \textit{опция} \to \textit{значение опции}]$.

Рассмотрим некоторые опции.

1. $\mathrm{AxesLabel} \to \{"\textit{ось\_x}", "\textit{ось\_y}"\}$ - метки горизонтальной и вертикальной осей координат.

**Пример 2.** Для построения графика функции $y = \sin x,\ x \in [-2\pi;\ 2\pi]$, используем команду:

$\mathrm{Plot}[\mathrm{Sin}[x], \{x, -2\mathrm{Pi}, 2\mathrm{Pi}\}, \mathrm{AxesLabel} \to \{"x", "y = \sin(x)"\}]$.



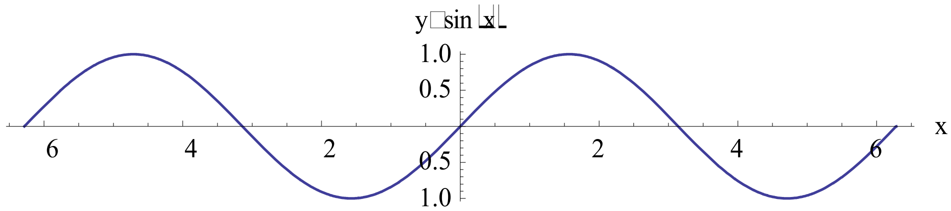

2. $\mathrm{AspectRatio} \to \textit{число}$; число задает отношение $y$ – протяженности графика к $x$ – протяженности.

$\mathrm{AspectRatio} \to \mathrm{Automatic}$ - масштаб на обеих осях одинаков.

**Пример 3.** Команда:

$\mathrm{Plot}[\mathrm{Sin}[x], \{x, -2\mathrm{Pi}, 2\mathrm{Pi}\}, \mathrm{AxesLabel} \to \{"x", "y = \sin(x)"\}, \mathrm{AspectRatio} \to \mathrm{Automatic}]$

Результат:

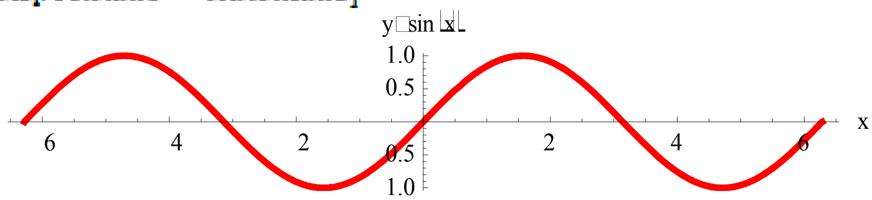



3. $\mathrm{PlotStyle} \to \{\textit{опции}\}$ - опции определяют стиль рисования.

**Пример 4.** Команда:

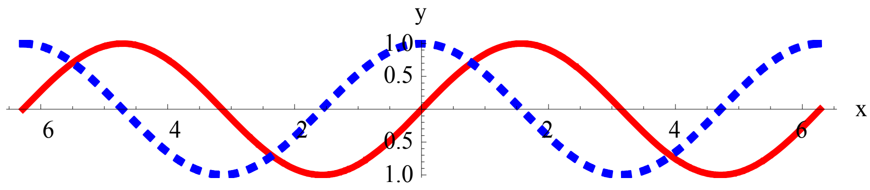
```
Plot[Sin[x], {x, -2Pi, 2Pi}, PlotStyle → {Directive[Red, Thickness[0.008]]}, AxesLabel → {"x", "y
        = sin(x)"}, AspectRatio → Automatic]
```

Результат:




**Пример 5.** Команда:

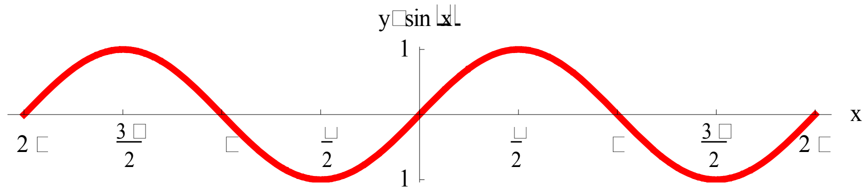
```
Plot[{Sin[x], Cos[x]}, {x, -2Pi, 2Pi}, PlotStyle ->
{Directive[Red, Thickness[0.008]], Directive[Blue, Thickness[0.008], Dashed]}, AxesLabel ->
{"x", "y"}, AspectRatio -> Automatic]
```

Результат: 

4. Ticks $\to \{\{метки\_на\_Ox\},\{метки\_на\_Oy\}\}$ - метки на осях Ox и Oy .

**Пример 6.** Команда:

```
Plot[Sin[x], {x, -2Pi, 2Pi}, PlotStyle -> {Directive[Red, Thickness[0.008]]}, AspectRatio
        -> Automatic, Ticks
        -> {{-Pi/2, -Pi, -3 Pi/2, -2Pi, 0, Pi/2, Pi, 3 Pi/2, 2Pi}, {-1, 1}}, AxesLabel
        -> {"x", "y = sin(x)"}]
```

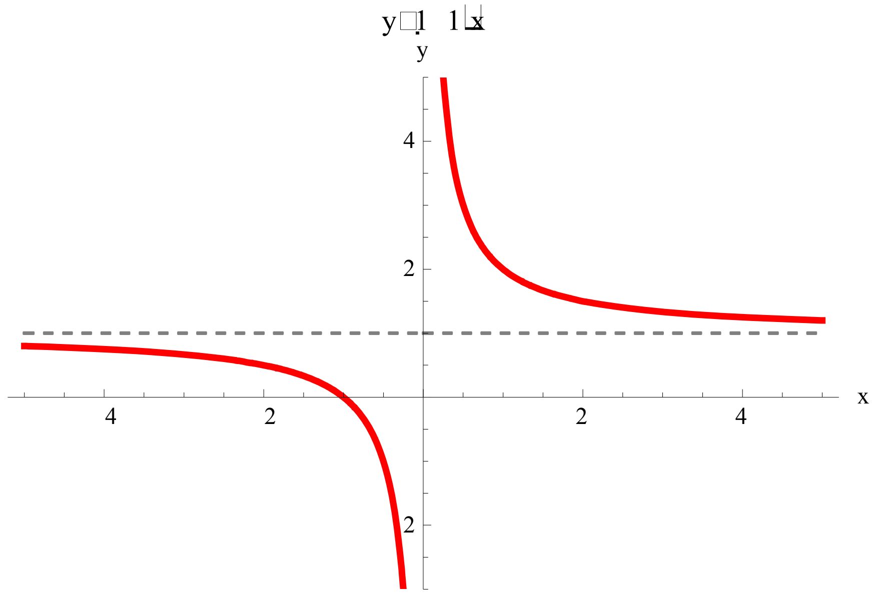
Результат: 

Список всех опций можно просмотреть командой Options[Plot] и использовать их по мере надобности. Например, при построении графика $y = \dfrac{1}{x} + 1$ необходимо исключить точку разрыва $x = 0$. Это делается опцией Exclusion .

**Пример 7.** Команды:

```
ff = (1/x) + 1
gg = 1
Plot[{ff, gg}, {x, -5, 5}, Exclusions -> {0}, PlotLabel -> "y = 1 + 1/x", PlotStyle
        -> {Directive[Red, Thickness[0.008]], {Dashed, Gray}},
PlotRange -> {-3, 5}, AxesLabel -> {"x", "y"}]
```

Результат:




Рассмотрим еще несколько примеров с командами , PolarPlot, ParametricPlot, Plot3D.

Синтаксис команды ParametricPlot:

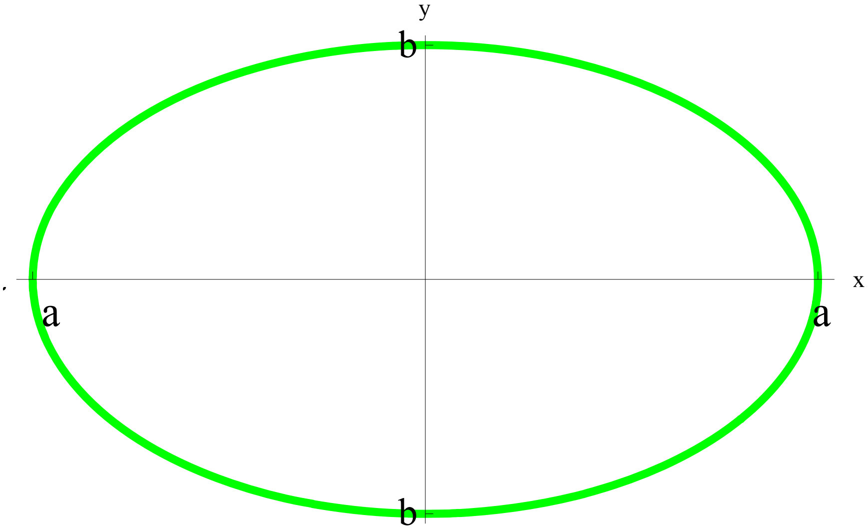
$\text{ParametricPlot}[\{x[t], y[t]\}, \{t, t_{\min}, t_{\max}\}, \textit{опция} \to \textit{значение опции}]$ - график параметрически заданной функции $\begin{cases} x = x[t] \\ y = y[t] \end{cases}$ параметра при изменении t в диапазоне от $t_{min}$ до $t_{max}$ .

**Пример 8.** Построим график эллипса:

$$\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1.$$

Команды:

```
{a,b}={5,3}
ParametricPlot[{a*Cos[t],b*Sin[t]},{t,0,2Pi},Ticks→{{{-a,HoldForm[Text[Style[" -a",FontSize→18]]]},{a,HoldForm[Text[Style[" a",FontSize→18]]]}}, {{-b,HoldForm[Text[Style["-b",FontSize→16]]]},{b,HoldForm[Text[Style["b",FontSize→16]]]}}},PlotStyle→{Directive[Green,Thickness[0.01]]} ,AxesLabel→{"x","y"}]
```




Синтаксис команды Plot3D:

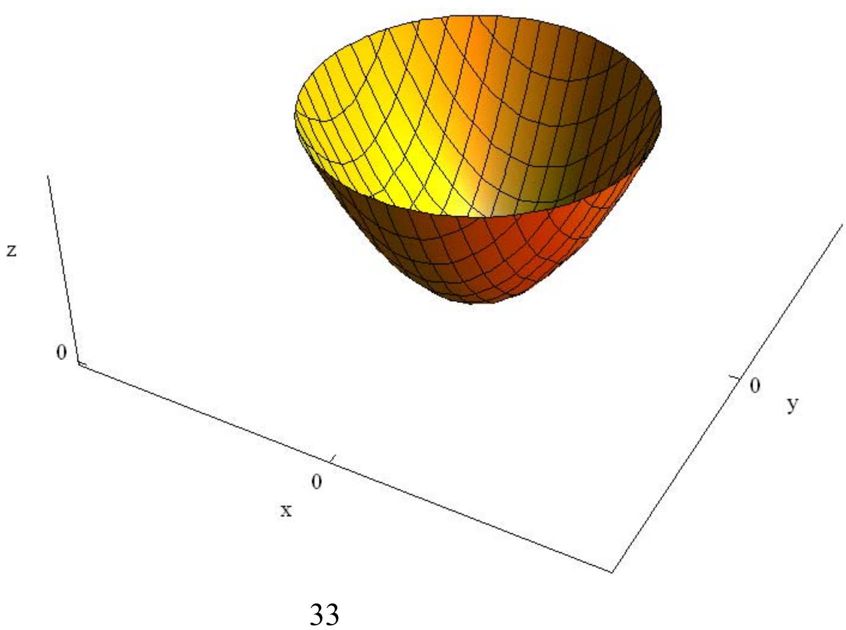
$\text{Plot3D}[z[x,y],\{x,x_{\min},x_{\max}\},\{y,y_{\min},y_{\max}\},\textit{опция} \to \textit{значение опции}]$ - график поверхности $z = z[x, y]$ при изменении $x$ в диапазоне от $x_{min}$ до $x_{max}$ , $y$ в диапазоне от $y_{min}$ до $y_{max}$ .

**Пример 9.** Построим график параболоида:

$z = \frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{5^2}$ при ограничениях на x и y: $\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{5^2} \le 10$

Команда:

```
{a,b}={4,5}
Plot3D[(x^2)/(a^2)+(y^2)/(b^2),{x,-5a,5a},{y,-5b,5b},Axes→True,Ticks→{{0},{0},{0}},AxesLabel→{"x","y","z"},RegionFunction→Function[{x,y,z},(x^2)/(a^2)+(y^2)/(b^2)≤10],PlotStyle→Directive[Yellow,Specularity[White,20],Opacity[2.4]],Boxed→False]
```




Результат:

При этом пояснения соответствующих опций можно легко найти в Help.

Синтаксис команды PolarPlot:

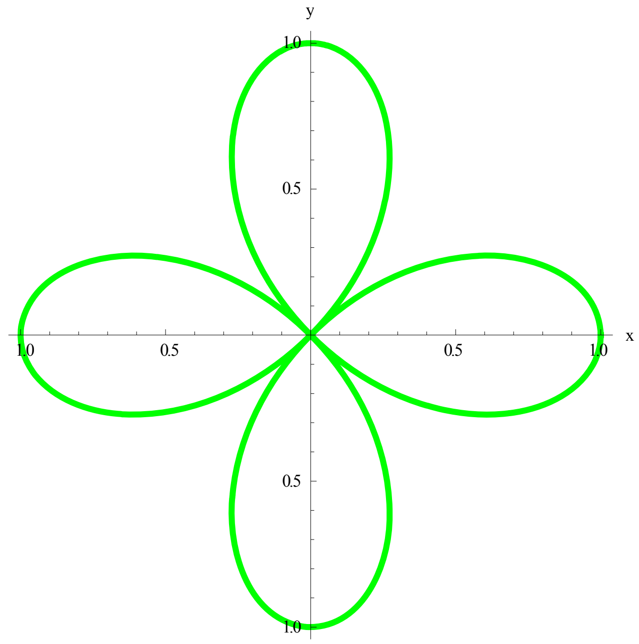
$\text{PolarPlot}[r[\varphi], \{\varphi, \varphi_{\min}, \varphi_{\max}\}, \textit{опция} \to \textit{значение опции}]$ - график кривой $r = r[\varphi]$ в обобщенных полярных координатах при изменении $\varphi$ в диапазоне от $\varphi_{\min}$ до $\varphi_{\max}$.

**Пример 10.** Построим график $r = \cos(2\varphi),\ 0 \le \varphi \le 2\pi$.

Команда:

```
PolarPlot[Cos[2ϕ],{ϕ,0,2Pi},PlotStyle → {Directive[Green,Thickness[0.01]]},AxesLabel
        → {"x","y"}]
```

Результат:




## Упражнения к § 17.

**Упражнение 17.1.** Используя среду Mathematica построить графики функций:

а) $y = \frac{1}{4}x^2(x^2-3)^2$;  б) $y = \frac{x^3}{2(x-1)^2}$;  в) $y = \frac{x^4}{x^3-1}$;

г) $y = \sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x-1}$;  д) $y = \frac{x}{2} + \operatorname{arctg} x$;

е) $\begin{cases} x = t \cdot e^t \\ y = t \cdot e^{-t} \end{cases}$;  ж) $x = t^2 - 2t,\ y = t^2 + 2t$;

з) $x = \cos^3 t,\ y = \sin^3 t,\ t \in [0;\ 2\pi]$;  и) $r = \sin 3\varphi$;  к) $r = \sin 4\varphi$;

л) $r^2 = \cos 2\varphi$;  м) $r = (1+\cos\varphi)$;  н) $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$;

о) $\begin{cases} x = \cos t + t\sin t \\ y = \sin t - t\cos t \end{cases}$;     п) $r = \dfrac{1}{\varphi}$;     р) $y^2 = x^2 \dfrac{a+x}{a-x}$;

с) $\begin{cases} x = \dfrac{3t}{1+t^3} \\ y = \dfrac{3t^2}{1+t^3} \end{cases}$.

## § 18. Неопределенный интеграл.

**Определение 1.** Пусть $\Delta$ − промежуток действительной оси. Функция $y = F(x)$ называется первообразной для функции $y = f(x)$ на промежутке $\Delta$, если $F(x)$ − дифференцируема на $\Delta$ и

$$F'(x) = f(x),\ \forall x \in \Delta. \tag{1}$$

**Пример 1.** а) $F(x) = x$ − первообразная для $f(x) = 1$: $x' = 1,\ \forall x \in R$.

б) $F(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1},\ n \neq -1$ − первообразная для $f(x) = x^n$:

$\left(\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\right)' = \dfrac{1}{n+1}\cdot(n+1)\cdot x^n = x^n$, − на любом промежутке из области определения функции *f(x)*.

в) $F(x) = \ln|x|$ − первообразная для $f(x) = x^{-1} = \dfrac{1}{x}$. Действительно,

$\ln|x| = \begin{cases} \ln x,\ x > 0 \\ \ln(-x),\ x < 0, \end{cases}$ и $\ln'|x| = \begin{cases} \ln' x = \dfrac{1}{x},\ x > 0 \\ \ln'(-x) = \dfrac{1}{x},\ x < 0 \end{cases}$ − на любом промежутке, не содержащем точку 0.

**Упражнение 1.** Найти первообразную для функций:

$y = \sqrt[3]{x};\ y = \dfrac{1}{\sqrt{x^3}};\ y = x^2 + x + 1;\ y = x + \dfrac{1}{x}$.

**Упражнение 2.** $f(x) = \eta(x)$ − единичная функция Хевисайда (см. пример 4 §5). Найти первообразные для *f(x)*:

1) на промежутке (0, 2); 2) на промежутке (− 2, 0); 3) на промежутке (− 2; 2).

**Упражнение 3.** $f(x) = \begin{cases} x^3,\ x \le 0 \\ x^2,\ x > 0. \end{cases}$ Найти первообразные для *f(x)* на промежутках (0, 2); (− 2, 0); (− 2; 2).

**Замечание.** Первообразная функция определена не однозначно. А именно,

$F(x)=x+C$, где C – любая константа также будет первообразной для $f(x)=1:(x+C)'=1$.

В общем случае верна теорема:

**Теорема 1.** Две дифференцируемые на промежутке $\Delta$ функции $F_1(x)$ и $F_2(x)$ будут первообразными для одной и той же функции $y=f(x)$ тогда и только тогда, когда $F_1(x)-F_2(x)=C,\ \forall x\in\Delta$ .

Доказательство. Необходимость. $F_1'(x)=F_2'(x)=f(x),\ \forall x\in\Delta$ . Докажем, что они отличаются на константу. Пусть $F(x)=F_1(x)-F_2(x)$.

Тогда $F'(x)=F_1'(x)-F_2'(x)=f(x)-f(x)=0,\ \forall x\in\Delta$. Пусть $x_1,\ x_2\in\Delta,\ x_1<x_2$. По теореме Лагранжа (теорема 4 § 12):
$F(x_2)-F(x_1)=F'(c)(x_2-x_1)$, где $c\in(x_1,\ x_2)$. Но $F'(x)=0,\ \forall x\in\Delta$, поэтому $F(x_2)-F(x_1)=0$, то есть $F(x)=C$ и $F_1(x)-F_2(x)=C$, что и требовалось.

Достаточность. $F_1(x)-F_2(x)=C$, $F_1(x)=F_2(x)+C$. Обозначим $F_2'(x)=f(x)$.

Тогда $F_1'(x)=(F_2(x)+C)'=F_2'(x)=f(x)$, то есть $F_1(x)$ и $F_2(x)$ - первообразные для одной и той же функции $y=f(x)$, что и требовалось доказать.

**Определение 2.** Множество всех первообразных для функции $y=f(x)$ на промежутке $\Delta$ называется неопределенным интегралом от функции $f(x)$ и обозначается $\int f(x)dx$.

Если $F(x)$ - одна из первообразных, то , согласно теореме 1,

$$\int f(x)dx=F(x)+C. \qquad (2)$$

Свойства неопределенного интеграла.

1. Если $F(x)$ - дифференцируема на $\Delta$, то $\int F'(x)dx=F(x)+C$, (3)

или $\int d(F(x))=F(x)+C$.

2. $d(\int f(x)dx)=f(x)dx$, (4)

здесь под записью $\int f(x)dx$ подразумеваем одну из первообразных.

3. Если $f(x)$ имеет первообразную на $\Delta$, то $\lambda f(x)$ также имеет первообразную на $\Delta$ и ,если $\lambda\neq 0$, то $\int \lambda f(x)dx=\lambda\cdot\int f(x)dx$. (5)

4. Если $f_1(x)$ и $f_2(x)$ имеют первообразную на $\Delta$, тогда $f_1(x)\pm f_2(x)$ также имеет первообразную на $\Delta$ и:

$$\int (f_1(x)\pm f_2(x))dx=\int f_1(x)dx\pm\int f_2(x)dx. \qquad (6)$$

Свойства 1 – 4 легко выводятся из определения первообразной и интеграла и соответствующих свойств производной.

Докажем, например, свойство 3.

Пусть $F(x)$ - первообразная для $f(x)$ на промежутке $\Delta$. Тогда $F'(x)=f(x)\Rightarrow(\lambda F(x))'=\lambda f(x)$, то есть $\lambda F(x)$ - первообразная для $\lambda f(x)\Rightarrow$

$\int \lambda f(x)dx = \lambda F(x) + C = \lambda\left( F(x) + \frac{C}{\lambda} \right) = \lambda \cdot \int f(x)dx$, что и требовалось доказать.

Из определений 1,2 следует, что интегрирование – действие обратное дифференцированию (находится функция, производная которой равна данной).

Таблица интегралов.

1. $\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C\left(\alpha \neq -1\right)$; $\int 1 \cdot dx = \int dx = x + C$;
2. $\int x^{-1} dx = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$;
3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$, $\left(a > 0, a \neq 1\right)$; $\int e^x du = e^x + C$;
4. $\int \cos x dx = \sin x + C$;
5. $\int \sin x dx = -\cos x + C$;
6. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$;
7. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$;
8. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$, $a \neq 0$;
9. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$, $a > 0$;
10. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$; $a \neq 0$;
11. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$;
12. $\int \frac{du}{\sin x} = \ln\left|\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right| + C$;
13. $\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C$;
14. $\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C$;
15. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$;
16. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$.

При вычислении интегралов в простых случаях применяют свойства 1 – 4.

**Пример 2.** $\int \left( \frac{5}{\sqrt[3]{x^2}} + \frac{\sqrt{x^3}}{5} + \frac{3}{x} + 7 \right) dx = \int \left( 5x^{-\frac{2}{3}} + \frac{1}{5} x^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{x} + 7 \right) dx =$

$$= 5\cdot\frac{x^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}}+\frac{1}{5}\cdot\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}+3\ln|x|+7x+C=15\sqrt[3]{x}+2\sqrt{x^5}+3\ln|x|+7x+C.$$

**Пример 4.** $\int\frac{dx}{4+3x^2}=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{\frac{4}{3}+x^2}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{4}{3}}}\cdot\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{\frac{4}{3}}}\right)+C=\frac{\sqrt{3}}{6}\operatorname{arctg}\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)+C$.

**Теорема 1.** Если $y=f(x)$ - непрерывна на промежутке $\Delta$, то для нее $\exists$ первообразная функция $y=F(x)$ на этом промежутке.

### Упражнения к § 18.

**Упражнение 18.1.** Вычислить неопределенные интегралы:

1. $\int\left(\frac{3x^3}{\sqrt{x}}+\sqrt[4]{x^5}-\frac{13}{x^2}+\frac{2}{x}-4\right)dx$. 2. $\int\left(\sqrt[7]{x^3}+\frac{4}{x^3}-\frac{5}{3x}+\frac{7}{\sqrt[3]{x^2}}\right)dx$.

3. $\int\frac{x^3-\sqrt{x^5}+35x-8}{x^2}dx$. 4. $\int\frac{dx}{8x^2-16}$. 5. $\int\frac{dx}{6x^2+24}$.

6. $\int\frac{dx}{\sqrt{7x^2+42}}$. 7. $\int\frac{3dx}{\sqrt{16-4x^2}}$. 8. $\int\frac{dx}{7+8x^2}$. 9. $\int\frac{5dx}{\sqrt{7-2x^2}}$.

10. $\int\frac{13dx}{5x^2+30}$. 11. $\int\frac{3dx}{\sqrt{45+9x^2}}$. 12. $\int\frac{5dx}{2-3x^2}$. 13. $\int\frac{7dx}{10+5x^2}$.

14. $\int\frac{dx}{\sqrt{5x^2-20}}$. 15. $\int\frac{3\cos^2 x+1}{\cos^2 x}dx$ . 16 $\int\frac{3+\sin^2 x}{\cos^2 x}dx$ .17. $\int(\frac{3^x}{5}+\frac{2}{5^{-x}})dx$

18. $\int\frac{5+2x}{x^2}dx$ 19. $\int\frac{(1+2x)^2}{x}dx$ 20. $\int\frac{x^2-1}{x^2+1}dx$ 21. $\int\frac{x^3+8x+1}{x^2+8}dx$

**Упражнение 18.2.** 1. $f(x)=2x+1$. Найти первообразные функции $F_1(x), F_2(x)$ для функции $f(x)$, проходящие через точки (1, 0); (1, 2). Построить график $F_1(x), F_2(x)$.

2. $f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$. Найти первообразную функцию $F(x)$ для функции $f(x)$, проходящую через точку $(-8;-1)$.

**Упражнение 18.3.** Вычислить интегралы:

1. $\int|x|dx$; 2. $\int\frac{dx}{|x|}$; 3. $\int x\cdot|x|dx$.

**Упражнение 18.4.** Найти первообразные для $f(x)$ на промежутках $(0, 3), (-3, 0), (-3, 3)$.

1. $f(x)=|x|$; 2. $f(x)=\operatorname{sign}x$.

## Ответы на упражнения к § 18.

**18.1.** 1. $\frac{6}{7}\sqrt{x^7}+\frac{4}{9}\sqrt[4]{x^9}+\frac{13}{x}+2\ln|x|-4x+C$.

2. $\frac{7}{10}\sqrt[7]{x^{10}}-\frac{2}{x^2}-\frac{5}{3}\ln|x|+21\sqrt[3]{x}+C$. 3. $\frac{x^2}{2}-\frac{2\sqrt{x^3}}{3}+35\ln|x|+\frac{8}{x}+C$.

4. $\frac{1}{16\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right|+C$. 5. $\frac{1}{12}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C$. 6. $\frac{1}{\sqrt{7}}\ln\left|x+\sqrt{x^2+6}\right|+C$.

7. $\frac{3}{2}\arcsin\frac{x}{2}+C$. 8. $\sqrt{\frac{8}{7}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{8}x}{\sqrt{7}}+C$. 9. $\frac{5}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{7}}+C$.

10. $\frac{13}{5\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{6}}+C$. 11. $\ln\left|x+\sqrt{5+x^2}\right|+C$.

12. $\frac{5}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}x+\sqrt{2}}{\sqrt{3}x-\sqrt{2}}\right|+C$. 13. $\frac{7}{5\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}+C$.

14. $\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|x+\sqrt{x^2-4}\right|+C$.

**18.2.** 1. $F_1(x)=x^2+x-2,\ F_2(X)=x^2+x$;

2. $F(x)=3\sqrt[3]{x}+5$.

**18.3.** 1. $\frac{x\cdot|x|}{2}+C$; 2. $\operatorname{sign}x\cdot\ln|x|+C$; 3. $\frac{1}{3}|x|^3+C$.

**18.4.** 1. $\frac{x^2}{2}+C;\ -\frac{x^2}{2}+C;\ \begin{cases}\frac{x^2}{2}+C\\ -\frac{x^2}{2}+C\end{cases}$.

2. $x+C;\ -x+C$; не существует.

## § 19. Замена переменной в неопределенном интеграле.

**Теорема 1.** Пусть функция $y = F(t)$ - первообразная для функции $y = f(t)$ на промежутке $\Delta_t$ то есть $F'(t) = f(t)$. Пусть $t = \varphi(x)$ - дифференцируема на промежутке $\Delta_x$ и $\varphi(\Delta_x) \subset \Delta_t$ . Тогда $y = F(\varphi(x))$ - первообразная для $y = f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$, то есть

$$\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)dx = F(\varphi(x)) + C. \qquad (1)$$

Доказательство. $(F(\varphi(x))' = F'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$, что и требовалось доказать.

**Замечание.** Формулу (1) можно переписать в виде

$$\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)dx = \int f(t)dt\Big|_{t=\varphi(x)} \text{ -} \qquad (2)$$

формула интегрирования с помощью подстановки $\varphi(x) = t$ или в виде:

$$\int f(\varphi(x))d(\varphi(x)) = \int f(t)dt\Big|_{t=\varphi(x)} \text{ -} \qquad (3)$$

Формула интегрирования с помощью поднесения под дифференциал, когда подынтегральную функцию $f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)dx$ записывают в виде $f(\varphi(x))d(\varphi(x))$, занося $\varphi'(x)$ под дифференциал.

**Пример 1.**

$$\int \sin^3 x \cdot \cos x dx = \int \sin^3 x d(\sin x) = \left|\sin x = t\right| = \int t^3 dt = \frac{1}{4}t^4 + C = \frac{1}{4}\sin^4 x + C.$$

**Пример 2.** $\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\ln\left|\cos x\right| + C$.

**Пример 3.** $\int \frac{xdx}{1+x^4} = \int \frac{d\left(\frac{1}{2}x^2\right)}{1+x^4} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2)}{1+x^4} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x^2) + C$.

При поднесении под дифференциал можно использовать свойства дифференциала (см. § 6)

$dx = d(x+c)$; $dx = \frac{1}{c}d(c \cdot x)$, где с – константа.

**Пример 4.** $\int \frac{xdx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2)}{1+x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$.

**Пример 5.** $\int \frac{dx}{4+3x^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{d(\sqrt{3}x)}{4+(\sqrt{3}x)^2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) + C$ (сравните с примером 4 §18).

**Пример 6.**

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}} = \int \frac{dx}{x\cdot|x|\cdot\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}} = \begin{cases} \int \frac{dx}{x^2\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}};\ x>0 \\ -\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}};\ x<0 \end{cases} = \begin{cases} -\frac{1}{2}\int \frac{d\left(\frac{2}{x}\right)}{\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}} \\ \frac{1}{2}\int \frac{d\left(\frac{2}{x}\right)}{\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}} \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} -\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{2}{x}\right)+C,\ x>0 \\ \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{2}{x}\right)+C,\ x<0 \end{cases} = -\frac{1}{2}\arcsin\frac{2}{|x|}+C.$$

Иногда в формуле (2) легче вычислять левую часть, чем правую:

$$\int f(t)dt = \int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx\Big|_{x=\varphi^{-1}(t)}. \qquad (5)$$

Формула (5) – формула интегрирования с помощью замены переменной $t=\varphi(x)$; при этом $x=\varphi^{-1}(t)$ - обратная функция.

**Пример 7.** $\int\sqrt{1-t^2}dt = \left| \begin{array}{c} t=\sin x;\ x=\arcsin t \\ dt=\cos x dx \\ -1\le t\le 1 \\ -\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2} \end{array} \right| = \int\sqrt{1-\sin^2 x}\cos x dx =$

$$= \int\cos^2 x dx = \left|\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)\right| = \frac{1}{2}\int(1+\cos 2x)dx = \frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\sin 2x\right)\Big|_{x=\arcsin t}+C=$$

$$= \frac{1}{2}\left(\arcsin t+\frac{1}{2}\sin 2(\arcsin t)\right)+C = \frac{1}{2}\arcsin t+\frac{1}{4}\cdot 2\sin(\arcsin t)\cdot\cos(\arcsin t)+C=$$

$$= \frac{1}{2}\arcsin t+\frac{1}{2}t\sqrt{1-t^2}+C.$$

## Упражнения к § 19.

**Упражнение 19.1.** Вычислить неопределенные интегралы, применив соответствующую подстановку:

1. $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{5+3x}}$. 2. $\int\sqrt[3]{7-8x}dx$. 3. $\int\sin(4-5x)dx$.

4. $\int\cos(5x-2)dx$. 5. $\int e^{8x+3}dx$. 6. $\int\frac{dx}{5x+2}$.

7. $\int\frac{xdx}{\sqrt{8-3x^2}}$. 8. $\int\frac{2xdx}{\sqrt{4x^2-5}}$. 9. $\int\frac{3xdx}{7-2x^2}$.

10. $\int \frac{5xdx}{\sqrt{9+x^2}}$. 11. $\int \frac{7x-3}{\sqrt{7-x^2}}dx$. 12. $\int \frac{xdx}{5+4x^2}$.

13. $\int \frac{\ln^3 x}{5x}dx$. 14. $\int \frac{\sqrt{\ln(2x+1)}}{2x+1}dx$. 15. $\int \sin^4(7x+2)\cdot\cos(7x+2)dx$.

16. $\int \frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos^5 x}}dx$. 17. $\int \frac{\cos 4x}{\sin^5 4x}dx$. 18. $\int \frac{\ln^7(x+2)}{x+2}dx$.

19. $\int \frac{2\sin xdx}{5-3\cos x}$. 20. $\int \frac{5\cos xdx}{\sqrt[3]{3\sin x-7}}$. 21. $\int \frac{\mathrm{tg}^3 2x}{\cos^2 2x}dx$.

22. $\int \frac{dx}{\mathrm{ctg}^3 x\cdot\sin^2 x}$. 23. $\int \frac{dx}{\cos^2 3x\sqrt[5]{\mathrm{tg}^4 3x}}$. 24. $\int \frac{e^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

25. $\int \frac{\arccos^3 x}{\sqrt{1-x^2}}dx$. 26. $\int \frac{\mathrm{arcctg}^5 x}{1+x^2}dx$. 27. $\int \frac{dx}{\arcsin^2 x\sqrt{1-x^2}}$

28. $\int \frac{dx}{(1+4x^2)\cdot\sqrt{\mathrm{arcctg}\,2x}}$. 29. $\int e^{x^3+2}\cdot 5x^2dx$. 30. $\int \cos(x^4-3)\cdot 3x^3dx$.

31. $\int \left(x^2+1\right)\cdot e^{x^3+3x}dx$. 32. $\int \frac{x-x^3}{\sqrt{4-x^4}}dx$. 33. $\int \frac{x+5}{3+x^2}dx$.

34. $\int \frac{1}{x\cdot\sqrt{4-x^2}}dx$. 35. $\int \frac{2x-1}{\sqrt{x^2+2}}dx$. 36. $\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x}}dx$.

37. $\int \frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}dx$. 38. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$. 39. $\int \frac{dx}{x\cdot\ln^5 x}$.

40. $\int \frac{dx}{x\cdot\ln x\cdot\ln^2(\ln x)}$. 41. $\int \frac{\cos(\ln x)}{x}dx$. 42. $\int \frac{\sin x+\cos x}{3+\sin 2x}dx$.

43. $\int \frac{\cos x-\sin x}{1+\sin 2x}dx$. 44. $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$. 45. $\int tgxdx$.

46. $\int \frac{\cos x+\sin 2x}{\sqrt{4+\sin^2 x}}dx$.

### Ответы на упражнения к § 19.

**19.1.** 1. $\frac{1}{2}\sqrt[3]{(5+3x)^2}+C$. 2. $-\frac{3}{32}\sqrt[3]{(7-8x)^4}+C$.

3. $\frac{1}{5}\cos(4-5x)+C$. 4. $\frac{1}{5}\sin(5x-2)+C$.

5. $\frac{1}{8}e^{8x+3}+C$. 6. $\frac{1}{5}\ln|5x+2|+C$. 7. $-\frac{1}{3}\sqrt{8-3x^2}+C$.

8. $\frac{1}{2}\sqrt{4x^2-5}+C$. 9. $-\frac{3}{4}\ln\left|7-2x^2\right|+C$. 10. $5\sqrt{9+x^2}+C$.

11. $-7\sqrt{7-x^2}-3\arcsin\frac{x}{\sqrt{7}}+C$. 12. $\frac{1}{8}\ln\left|5+4x^2\right|+C$.

13. $\frac{\ln^4 x}{20}+C$. 14. $\frac{1}{2}\sqrt{\ln^3(2x+1)}+C$ . 15. $\frac{\sin^5(7x+2)}{3}+C$.

16. $\frac{3}{2\sqrt[3]{\cos^2 x}}+C$. 17. $-\frac{1}{16\sin^4 4x}+C$. 18. $\frac{\ln^6(x+2)}{6}+C$.

19. $\frac{2}{3}\ln\left|5-3\cos x\right|+C$. 20. $\frac{5}{4}\sqrt[3]{(3\sin x-7)^4}+C$. 21. $\frac{\mathrm{tg}^4 2x}{8}+C$ .

22. $\frac{1}{2\,\mathrm{ctg}^2 x}+C$. 23. $\frac{5\sqrt[5]{\mathrm{tg}\,3x}}{3}+C$. 24. $e^{\arcsin x}+C$.

25. $-\frac{\arccos^4 x}{4}+C$. 26. $\frac{\mathrm{arcctg}^6 x}{6}+C$. 27. $-\frac{1}{\arcsin x}+C$.

28. $-\sqrt{\mathrm{arcctg}\,2x}+C$. 29. $\frac{5e^{x^3+2}}{3}+C$. 30. $\frac{3\sin(x^4-3)}{4}+C$.

## § 20. Интегрирование по частям в неопределенном интеграле.

**Теорема 1.** Пусть функция $u(x)$ и $v(x)$ – дифференцируемы на промежутке $\Delta$ и на этом промежутке $\exists \int v(x)\cdot u'(x)dx = \int v(x)d(u(x))$. Тогда на этом промежутке $\exists$ и $\int u(x)d(v(x))$ и

$$\int udv = uv - \int vdu, \qquad (1)$$

формула интегрирования по частям.

Доказательство. $d(u\cdot v) = udv + vdu$; (см. § 6).
$udv = d(u\cdot v) - vdu, \int d(uv) = uv + C$ (по свойству 1 § 18), $\int vdu$ существует по условию теоремы, поэтому $\int udv$ - существует и $\int udv = \int d(u\cdot v) - \int vdu = uv - \int vdu$.

**Пример 1.** $\int (2x+1)\cos 3xdx = \left| \begin{array}{c} u = 2x+1 \Rightarrow du = 2dx \\ \cos 3x = dv \Rightarrow v = \frac{1}{3}\sin 3x \end{array} \right| =$

$= (2x+1)\cdot \frac{1}{3}\sin 3x - \frac{2}{3}\int \sin 3xdx = \frac{1}{3}(2x+1)\cdot \sin 3x + \frac{2}{9}\cos 3x + C$.

**Пример 2.** $\int (2x+1)\ln 3xdx = \left| \begin{array}{c} u = \ln 3x \Rightarrow du = \frac{1}{x}dx \\ dv = (2x+1)dx \Rightarrow v = x^2 + x \end{array} \right| =$

$= (x^2+x)\cdot \ln 3x - \int (x^2+x)\cdot \frac{1}{x}dx = (x^2+x)\cdot \ln 3x - \int (x+1)dx =$

$= (x^2+x)\cdot \ln 3x - \frac{1}{2}x^2 - x + C$.

**Замечание.** 1. При интегрировании выражений вида:

$\int P_n(x)\cdot \sin\alpha xdx, \int P_n(x)\cdot \cos\alpha xdx, \int P_n(x)\cdot e^{\alpha x}dx$, где $P_n(x)$ - многочлен степени n полагают: $u = P_n(x), dv = \sin\alpha xdx, dv = \cos\alpha xdx, dv = e^{\alpha x}dx$. После интегрирования по частям степень многочлена уменьшается на 1(см. пример 1).

2. При интегрирования выражений вида:

$\int P_n(x)\cdot \ln\alpha xdx, \int P_n(x)\cdot \arcsin\alpha xdx, \int P_n(x)\cdot \arccos\alpha xdx, \int P_n(x)\cdot \mathrm{arctg}\,\alpha xdx$, $\int P_n(x)\cdot \mathrm{arcctg}\,\alpha xdx$ полагают:

$u = \ln\alpha x, u = \arcsin\alpha x, u = \arccos\alpha x, u = \mathrm{arctg}\,\alpha x$, $u = \mathrm{arcctg}\,\alpha x, dv = P_n(x)dx$ ($P_n(x)$ - многочлен). После интегрирования по частям интеграл упрощается (см. пример 2).

**Пример 3.** $\int x^2\cos xdx = \left| \begin{array}{c} u = x^2 \Rightarrow du = 2xdx \\ dv = \cos xdx \Rightarrow v = \sin x \end{array} \right| = x^2\cdot \sin x - 2\int x\sin xdx =$

$$=\left|\begin{matrix} u=x\Rightarrow du=dx \\ dv=\sin xdx\Rightarrow v=-\cos x\end{matrix}\right|=x^2\sin x-2(-x\cos x+\int\cos xdx)=$$

$$=x^2\cdot\sin x+2x\cos x-2\sin x+C.$$

**Пример 4.** $\int e^{ax}\cdot\cos bxdx=\left|\begin{matrix} u=e^{ax}\Rightarrow du=a\cdot e^{ax}dx \\ dv=\cos bxdx\Rightarrow v=\dfrac{1}{b}\sin bx\end{matrix}\right|=$

$$=\frac{1}{b}e^{ax}\cdot\sin bx-\frac{a}{b}\int e^{ax}\sin bxdx=\left|\begin{matrix} u=e^{ax}\Rightarrow du=a\cdot e^{ax}dx \\ dv=\sin bxdx\Rightarrow v=-\dfrac{1}{b}\cos bx\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{1}{b}e^{ax}\cdot\sin bx-\frac{a}{b}\left(-\frac{1}{b}e^{ax}\cdot\cos bx+\frac{a}{b}\int e^{ax}\cos bxdx\right).$$

То есть $\int e^{ax}\cos bxdx=\dfrac{1}{b}e^{ax}\cdot\sin bx+\dfrac{a}{b^2}e^{ax}\cdot\cos bx-\dfrac{a^2}{b^2}\int e^{ax}\cos bxdx$.

Таким образом, проинтегрировав дважды по частям, получили уравнение, содержащее $\int e^{ax}\cos bxdx$ в правой и левой части. Решив его, получим:

$$\int e^{ax}\cos bxdx=\frac{e^{ax}(b\sin bx+a\cos bx)}{a^2+b^2}+C.$$

**Упражнение 1.** Вычислить $\int e^{ax}\sin bxdx;\ \int\cos(\ln x)dx;\int\sin(\ln x)dx$ .

## Упражнения к § 20.

**Упражнение 20.1.** Вычислить неопределенные интегралы.

| | | |
|---|---|---|
| 1. $\int(x+2)e^{8x-3}dx$. | 2. $\int(2x-8)e^{5x+4}dx$. | 3. $\int(3x+4)7^{5x-3}dx$. |
| 4. $\int(8x-3)2^{3x+5}dx$. | 5. $\int(5x+11)\sin 2xdx$. | 6. $\int(7x-5)\cos 10xdx$. |
| 7. $\int(x^2+4)e^{3x}dx$. | 8. $\int(2x^2+5)4^{5x}dx$. | 9. $\int 4x^2\sin 8xdx$. |
| 10. $\int(3x^2-8)\cos 4xdx$. | 11. $\int(x^2+x)e^{-x}dx$. | 12. $\int(x^3+3)\sin xdx$. |
| 13. $\int\ln(5+x)dx$. | 14. $\int x\ln(x+1)dx$. | 15. $\int x^2\ln xdx$. |
| 16. $\int x\ln^2 xdx$. | 17. $\int(x^2-x+1)\ln xdx$. | 18. $\int x\,\mathrm{arctg}\,2xdx$. |
| 19. $\int x\,\mathrm{arcctg}\,xdx$. | 20. $\int\arccos 2xdx$. | 21. $\int\arcsin 2xdx$. |
| 22. $\int x^2\,\mathrm{arctg}\,xdx$. | 23. $\int\mathrm{arctg}(x+5)dx$. | 24. $\int x^2\,\mathrm{arcctg}\,xdx$. |

**Упражнение 20.2.** Вычислить неопределенные интегралы, применяя технику интегрирования по частям.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1. $\int x\sin^2 xdx$. | 2. $\int x^2\sin^2 xdx$. | 3. $\int\dfrac{x}{\cos^2 x}dx$. | 4. $\int x\,\mathrm{ctg}^2 xdx$. |
| 5. $\int\ln\dfrac{2-x}{2+x}dx$. | 6. $\int\sin(\ln x)dx$. | 7. $\int x\,\mathrm{arctg}^2 xdx$. | 8. $\int\sqrt{1-x}\arccos\sqrt{x}dx$. |

9. $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{x+1}}dx$. 10. $\int \frac{x \operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}}dx$.

## Ответы на упражнения к § 20.

**20.1.** 1. $\frac{2}{25}x\sin 5x - \frac{x^2-21}{5}\cos 5x + C$. 2. $\frac{e^{5x+4}\cdot(10x-42)}{25} + C$.

3. $\frac{3x+4}{5\ln 7}\cdot 7^{5x-3} - \frac{3}{25\ln^2 7}\cdot 7^{5x-3} + C$. 4. $\frac{8x-3}{3\ln 2}\cdot 2^{3x+5} - \frac{8}{9\ln^2 2}\cdot 2^{3x+5} + C$.

5. $-\frac{(5x+11)\cos 2x}{2} + \frac{5\sin 2x}{4} + C$. 6. $\frac{(7x-5)\sin 10x}{10} + \frac{7\cos 10x}{100} + C$.

7. $\frac{e^{3x}}{27}(9x^2-6x+38)+C$. 8. $\frac{4^{5x}}{5\ln 4}\left(2x^2+5-\frac{x}{5\ln 4}+\frac{1}{25\ln^2 4}\right)+C$.

9. $\frac{1}{64}\left(8x\sin 8x+\cos 8x-32x^2\cos 8x\right)+C$. 10. $\frac{3x\cos 4x}{8}+\frac{\sin 4x(24x^2-67)}{32}+C$.

11. $-x^2e^{-x}-3xe^{-x}-3e^{-x}+C$. 12. $2x\sin x-(x^2+1)\cos x+C$.

13. $\ln(5+x)(5+x)-x+C$. 14. $\frac{x^2}{2}\ln(x+1)-\frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\ln(x+1)+C$.

15. $\frac{x^3}{3}\ln x-\frac{x^3}{9}+C$. 16. $\frac{x^2}{2}\ln^2 x-\frac{x^2}{2}\ln x+\frac{x^2}{4}+C$.

17. $\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x\right)\ln x-\frac{x^3}{9}+\frac{x^2}{4}-x+C$. 18. $\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} 2x-\frac{x}{4}+\frac{1}{8}\operatorname{arctg} 2x+C$.

19. $\frac{x^2}{2}\operatorname{arcctg} x+\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\operatorname{arcctg} x+C$. 20. $x\cdot\arccos 2x-\frac{1}{2}\sqrt{1-4x^2}+C$.

21. $x\cdot\arcsin 2x+\frac{1}{2}\sqrt{1-4x^2}+C$. 22. $\frac{x^3}{3}\operatorname{arctg} x-\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{6}\ln(x^2+1)+C$.

23. $x\operatorname{arctg}(x+5)-\frac{1}{2}\ln\left|x^2+10x+26\right|+5\operatorname{arctg}(x+5)+C$.

24. $\frac{x^3}{3}\operatorname{arcctg} x+\frac{x^2}{6}-\frac{1}{6}\ln(x^2+1)+C$.

**20.2.** 1. $\frac{x^2}{4}-\frac{x}{4}\sin 2x-\frac{1}{8}\cos 2x+C$. 2. $\frac{x^3}{6}-\frac{x^2}{4}\sin 2x+\frac{x}{4}\cos 2x+\frac{1}{8}\sin 2x+C$.

3. $x\operatorname{tg} x+\ln\left|\cos x\right|+C$. 4. $\ln\left|\sin x\right|-x\operatorname{ctg} x-\frac{x^2}{2}+C$.

5. $x\ln\frac{2-x}{2+x}-2\ln\left|4-x^2\right|+C$. 6. $\frac{x}{2}\sin(\ln x)-\cos(\ln x)+C$.

7. $\left(\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\right)\operatorname{arctg}^2 x-x\operatorname{arctg} x+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C$.

8. $\frac{2}{9}\sqrt{x^3}-\frac{2}{3}\sqrt{x}-\frac{2}{3}\sqrt{(1-x)^3}\arccos\sqrt{x}+C$.

9. $2\sqrt{x+1}\arcsin x+4\sqrt{1-x}+C$. 10. $\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{arctg}\,x-\ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right|+C$.

## § 21. Интегрирование рациональных дробей.

**Определение 1.** Рациональной дробью называется произвольная функция вида:

$$R(x)=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+...+b_{m-1}x+b_m},$$

( $P_n(x), Q_m(x)$ - многочлены степени n и m). Дробь $R(x)$ - правильная, если $n<m$.

Если $n\ge m$, то $R(x)$ - неправильная дробь.

Элементарными рациональными дробями называются дроби вида:

$$\frac{A}{(x-a)^n},\ \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n};\ n\ge 1,\ p^2-4q<0.$$

### Интегрирование элементарных дробей.

1. $\int\frac{A}{x-a}dx=A\int\frac{d(x-a)}{x-a}=A\cdot\ln|x-a|+C$.

2. $\int\frac{A}{(x-a)^n}dx=A\int\frac{d(x-a)}{(x-a)^n}=A\cdot\frac{(x-a)^{-n+1}}{-n+1}+C,\ n\ne 1$.

3. $\int\frac{xdx}{x^2+a^2}=\frac{1}{2}\ln(x^2+a^2)+C$.

4. $\int\frac{xdx}{(x^2+a^2)^n}=\frac{1}{2}\frac{(x^2+a^2)^{-n+1}}{-n+1}+C,\ n\ne 1$.

5. $\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^n}=I_n,\ n\in N$.

Найдем рекуррентную формулу для вычисления $I_n$.

Пусть $n>1$.

$$I_n=\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^n}=\frac{1}{a^2}\int\frac{(a^2+x^2)-x^2}{(x^2+a^2)^n}dx=\frac{1}{a^2}\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}}-\frac{1}{a^2}\int\frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^n}=$$

$$=\frac{1}{a^2}I_{n-1}-\frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{2}\int\frac{xd(x^2+a^2)}{(x^2+a^2)^n}=\left|\begin{array}{c} u=x\Rightarrow du=dx \\ dv=\dfrac{d(x^2+a^2)}{(x^2+a^2)^n}\Rightarrow \\ v=\dfrac{(x^2+a^2)^{-n+1}}{-n+1}=\dfrac{1}{(x^2+a^2)^{n-1}(-n+1)}\end{array}\right|=$$

$$=\frac{1}{a^2}I_{n-1}-\frac{1}{2a^2}\left(\frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}(-n+1)}+\frac{1}{n-1}\cdot\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}}\right)=$$

$$= I_{n-1}\cdot\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{2a^2(n-1)}\right)+\frac{x}{2a^2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}}=$$

$$=\frac{2n-3}{2a^2(n-1)}\cdot I_{n-1}+\frac{x}{2a^2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}}. \qquad (1)$$

Вычисление интегралов $\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx$ и $\int\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}\,dx,\, n>1$ сведется к случаям 3 – 5, если выделить полный квадрат в трехчлене $x^2+px+q=$ $=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)$ и сделать подстановку $x+\frac{p}{2}=t$.

**Пример 1.** $\int\frac{dx}{x^2+4x+7}=\int\frac{d(x+2)}{(x+2)^2+3}=\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{\sqrt{3}}+C$.

**Пример 2.** $\int\frac{3x+1}{x^2+4x+7}dx=\int\frac{3x+1}{(x+2)^2+3}d(x+2)=\begin{vmatrix}x+2=t\\ x=t-2\end{vmatrix}=\int\frac{3(t-2)+1}{t^2+3}dt=$

$$=\int\frac{3t-5}{t^2+3}dt=3\int\frac{t}{t^2+3}dt-5\int\frac{dt}{t^2+3}=\frac{3}{2}\int\frac{d(t^2+3)}{t^2+3}-5\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{3}}+C=$$

$$=\frac{3}{2}\ln(t^2+3)-\frac{5}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{3}}+C=\frac{3}{2}\ln((x+2)^2+3)-\frac{5}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{\sqrt{3}}+C.$$

**Пример 3.** $\int\frac{dx}{(x^2+4x+7)^2}=\int\frac{d(x+2)}{((x+2)^2+3)^2}=\begin{vmatrix}x+2=t\\ x=t-2\end{vmatrix}=$

$$=\int\frac{dt}{(t^2+3)^2}=I_2=\left|\textit{по формуле } (1)\right|=\frac{1}{2\cdot 3}\cdot I_1+\frac{t}{2\cdot 3\cdot(t^2+3)}=\frac{1}{6}\int\frac{dt}{t^2+3}+\frac{t}{6(t^2+3)}=$$

$$=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{3}}+\frac{t}{6(t^2+3)}=\frac{1}{6\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{\sqrt{3}}+\frac{x+2}{6(x^2+4x+7)}+C.$$

**Теорема 1.** Рассмотрим правильную рациональную дробь:

$$R(x)=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{P_n(x)}{(x-\alpha)^k(x-\beta)^l(x^2+px+q)^s}.$$

Дробь $R(x)$ можно единственным образом разложить в сумму элементарных дробей:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{A_1}{x-\alpha}+\frac{A_2}{(x-\alpha)^2}+\ldots+\frac{A_k}{(x-\alpha)^k}+\frac{B_1}{(x-\beta)}+\frac{B_2}{(x-\beta)^2}+\ldots+\frac{B_l}{(x-\beta)^l}+$$

$$+\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2}+\ldots+\frac{M_sx+N_s}{(x^2+px+q)^s}. \qquad (2)$$

Коэффициенты $A_1,\ldots,A_k,B_1,\ldots,B_l,M_1,N_1,\ldots,M_s,N_s$ находятся, если правую часть равенства (2) привести к общему знаменателю и приравнять числители правой и левой части. Если дробь $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ - неправильная, то делят $P_n(x)$ на $Q_m(x)$ уголком и представляют дробь в виде:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = S_{n-m}(x) + \frac{R(x)}{Q_m(x)}, \tag{3}$$

где $S_{n-m}(x)$ - частное, $R(x)$ - остаток.

**Пример 4.** $\int \frac{x^4 - x + 7}{x^3 - 8} dx$. Дробь $\frac{x^4 - x + 7}{x^3 - 8}$ - неправильная. По формуле (3):

$$\frac{x^4 - x + 7}{x^3 - 8} = x + \frac{7x + 7}{x^3 - 8} = x + 7 \cdot \frac{x+1}{(x-2)(x^2+2x+4)}.$$

По формуле (2):

$$\frac{x+1}{(x-2)(x^2+2x+4)} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+4}.$$

$$x + 1 = A(x^2 + 2x + 4) + (Bx + C)(x - 2)$$

$$x + 1 = x^2(A + B) + x(2A - 2B + C) + (4A - 2C). \tag{4}$$

Для того, чтобы равенство (4) выполнялось $\forall x \in R$ необходимо, чтобы равнялись друг другу коэффициенты при одинаковых степенях *x*.

$$\begin{aligned} &x^2 : A + B = 0 \\ &x^1 : 2A - 2B + C = 1 \\ &x^0 : 4A - 2C = 1. \end{aligned} \tag{5}$$

Решив систему уравнений (5), получим:

$$A = \frac{1}{4},\ B = -\frac{1}{4},\ C = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{x+1}{(x-2)(x^2+2x+4)} = \frac{\frac{1}{4}}{x-2} - \frac{\frac{1}{4}x}{x^2+2x+4} \Rightarrow$$

$$\int \frac{x^4 - x + 7}{x^3 - 8} dx = \int x dx + 7\int \frac{x+1}{(x-2)(x^2+2x+4)} dx =$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + 7\left( \int \frac{\frac{1}{4}}{x-2} dx - \int \frac{\frac{1}{4}x}{x^2+2x+4} dx \right) =$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + \frac{7}{4}\ln|x-2| - \frac{7}{4}\int \frac{(x+1)-1}{(x+1)^2+3} d(x+1) = |x+1 = t| =$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + \frac{7}{4}\ln|x-2| - \frac{7}{4}\int \frac{t-1}{t^2+3} dt = \frac{1}{2}x^2 + \frac{7}{4}\ln|x-2| - \frac{7}{4}\int \frac{t}{t^2+3} dt + \frac{7}{4}\int \frac{dt}{t^2+3} =$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + \frac{7}{4}\ln|x-2| - \frac{7}{8}\ln(t^2+3) + \frac{7}{4\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{3}} + C =$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + \frac{7}{4}\ln|x-2| - \frac{7}{2}\ln((x+1)^2+3) + \frac{7}{4\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

Если корни знаменателя $Q_m(x)$ - действительны и имеют кратности 1, то коэффициенты в формуле (2) можно найти более простым способом.

**Пример 5.** $\int \frac{5x+2}{x(x-2)(x+1)}dx$.

$$\frac{5x+2}{x(x-2)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+1}.$$

$$5x+2 = A(x-2)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(x-2)$$

Подставляя в правую и левую части равенства конкретные значения $x$,получим:

$x=0: 2=-2A;\ A=-1$.

$x=-1: -3=3C;\ C=-1$.

$x=2: 12=6B;\ B=2$.

$$\frac{5x+2}{x(x-2)(x+1)} = \frac{-1}{x} + \frac{2}{x-2} - \frac{1}{x+1}.$$

$$\int \frac{5x+2}{x(x-2)(x+1)}dx = -\int\frac{dx}{x} + 2\int\frac{dx}{x-2} - \int\frac{dx}{x+1} = -\ln|x| + \ln|x-2| - \ln|x+1| + C.$$

**Упражнение 1.** Найти $\int \frac{dx}{x^3(1+x^2)}$.

## Упражнения к § 21.

**Упражнение 21.1.** Вычислить неопределенные интегралы.

1. $\int \frac{x+5}{x^2+x-2}dx$. 2. $\int \frac{2x-1}{3x^2-2x+6}dx$. 3. $\int \frac{3x-2}{5x^2-3x+2}dx$.

4. $\int \frac{dx}{(x^2+9)^3}$. 5. $\int \frac{(x-1)dx}{(x^2+1)^2}$. 6. $\int \frac{xdx}{(x-1)(x^2+x+1)^2}$.

7. $\int \frac{6x^2+6x-6}{(x+1)(x^2+x-2)}dx$. 8. $\int \frac{3x^2+3x-24}{(x^2-x-2)(x-3)}dx$.

9. $\int \frac{x^2-19x+6}{(x-1)(x^2+5x+6)}dx$. 10. $\int \frac{6xdx}{x^3+2x^2-x-2}$.

11. $\int \frac{3x-x^2-2}{x(x+1)^2}dx$. 12. $\int \frac{x^2-6x+8}{x^3+8}dx$. 13. $\int \frac{36dx}{(x+2)(x^2-2x+10)}$.

14. $\int \frac{4x+2}{x^4+4x^2}dx$. 15. $\int \frac{5x}{x^4+3x^2-4}dx$. 16. $\int \frac{2x^5-2x+1}{1-x^4}dx$.

17. $\int \frac{x^4}{x^4+5x^2+4}dx$. 18. $\int \frac{2xdx}{(x+1)(x^2+1)^2}$. 19. $\int \frac{x^3+1}{(x^2-4x+5)^2}dx$.

20. $\int \frac{6x^4}{(x^2-1)(x+2)}dx$. 21. $\int \frac{x^3+1}{x^3-x^2}dx$. 22. $\int \frac{2x^3+1}{x^2(x+1)}dx$.

23. $\int \frac{4x^4+8x^3-1}{(x^2+x)(x+1)}dx$.

## Ответы на упражнения к § 21.

**21.1.**

1. $\frac{1}{2}\ln\left|x^2+x-2\right|+\frac{3}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|+C$.
2. $\frac{1}{3}\ln\left|3x^2-2x+6\right|-\frac{1}{3\sqrt{17}}\operatorname{arctg}\frac{3x-1}{\sqrt{17}}+C$.
3. $\frac{3}{10}\ln\left|5x^2-3x+2\right|-\frac{11}{5\sqrt{31}}\operatorname{arctg}\frac{10x-3}{\sqrt{31}}+C$.
4. $\frac{x}{216(x^2+9)}+\frac{x}{36(x^2+9)^2}+\frac{1}{648}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}+C$.
5. $-\frac{1}{4}\left(\frac{x+1}{(x^2+1)^2}+\frac{3x}{2(x^2+1)}+\frac{3}{2}\operatorname{arctg}x\right)+C$.
6. $\frac{1}{9}\ln\left|x-1\right|-\frac{1}{18}\ln\left(x^2+x+1\right)+\frac{x+1}{3(x^2+x+1)}+\frac{\sqrt{3}}{9}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$.
7. $3\ln\left|x+1\right|+\ln\left|x-1\right|+2\ln\left|x+2\right|+C$.
8. $2\ln\left|x-2\right|+3\ln\left|x-3\right|-2\ln\left|x+1\right|+C$.
9. $18\ln\left|x+3\right|-\ln\left|x-1\right|-16\ln\left|x+2\right|+C$.
10. $\ln\left|x-1\right|+3\ln\left|x+1\right|-4\ln\left|x+2\right|+C$.
11. $\ln\left|x+1\right|-2\ln\left|x\right|-\frac{6}{x+1}+C$.
12. $2\ln\left|x+2\right|-\frac{1}{2}\ln\left|x^2-2x+4\right|-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{\sqrt{3}}+C$.
13. $2\ln\left|x+2\right|-\ln\left|x^2-2x+10\right|+2\operatorname{arctg}\frac{x-1}{3}+C$.
14. $\ln\left|x\right|-\frac{1}{2x}-\frac{1}{2}\ln\left|x^2+4\right|-\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C$.
15. $\frac{1}{2}\ln\left|x-1\right|+\frac{1}{2}\ln\left|x+1\right|-\frac{1}{2}\ln\left|x^2+4\right|+C$.
16. $\frac{1}{4}\ln\left|x+1\right|-x^2-\frac{1}{4}\ln\left|x-1\right|+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C$.
17. $x+\frac{1}{3}\operatorname{arctg}x-\frac{8}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C$.

18. $\dfrac{x-1}{2(x^2+1)}-\dfrac{1}{2}\ln|x+1|+\dfrac{1}{4}\ln\left(1+x^2\right)+C$.

19. $\dfrac{3x-11}{2(x^2-4x+5)}+\dfrac{1}{2}\ln\left(x^2-4x+5\right)+\dfrac{15}{2}\operatorname{arctg}(x-2)+C$.

20. $3x^2-12x+\ln|x-1|-3\ln|x+1|+32\ln|x+2|+C$.

21. $x+\dfrac{1}{x}-\ln|x|+2\ln|x-1|+C$.

22. $2x-\ln|x|-\dfrac{1}{x}-\ln|x+1|+C$.

23. $x^2-\ln|x|-3\ln|x+1|-\dfrac{5}{x+1}+C$.

## § 22. Интегрирование иррациональных функций.

**Определение 1.** Функция вида $R(u_1, u_2, ..., u_n) = \dfrac{P(u_1, u_2, ..., u_n)}{Q(u_1, u_2, ..., u_n)}$, где $P(u_1, u_2, ..., u_n)$ и $Q(u_1, u_2, ..., u_n)$ многочлены от переменных $u_1, u_2, ..., u_n$ называются рациональными.

**Пример 1.** $R(u,v) = \dfrac{u^3 + uv + 1}{u + v}$ - рациональная функция переменных u и v, при этом:

$$R\left(x, \sqrt{\frac{x+2}{x+1}}\right) = \frac{x^3 + x\sqrt{\dfrac{x+2}{x+1}} + 1}{x + \sqrt{\dfrac{x+2}{x+1}}}, \quad R(\sin x, \cos x) = \frac{\sin^2 x + \sin x \cos x + 1}{\sin x + \cos x}$$

### п.1. Интегралы вида:

$\int R\left(x, \left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, ..., \left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_k}{n_k}}\right)dx$, **где** $m_i, n_i \in Z,\ i = 1, 2, ..., k, \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$ **и** $R(u_1, u_2, ..., u_{k+1})$ **- рациональная функция.**

Пусть s – общий знаменатель дробей $\dfrac{m_1}{n_1}, \dfrac{m_2}{n_2}, ..., \dfrac{m_k}{n_k}$. Тогда подстановка $\dfrac{ax+b}{cx+d} = t^s$ делает подинтегральную функцию рациональной.

**Пример 2.** $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2x-1} + \sqrt[3]{2x-1}} = \begin{vmatrix} 2x - 1 = t^6 \\ x = \dfrac{1}{2}(t^6 + 1) \\ dx = 3t^5 dt \end{vmatrix} = \int \frac{3t^5 dt}{t^3 + t^2} =$

$$= 3\int \frac{t^3}{t+1} dt = 3\int \frac{(t^3+1) - 1}{t+1} dt = 3\int \left((t^2 - t + 1) - \frac{1}{t+1}\right) dt =$$

$$= 3\left(\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + t - \ln|t+1|\right) + C =$$

$$= (2x-1)^{\frac{1}{2}} - \frac{3}{2}(2x-1)^{\frac{1}{3}} + 3(2x-1)^{\frac{1}{6}} - 3\ln\left|(2x-1)^{\frac{1}{6}} + 1\right| + C.$$

**Пример 3.** $\int \frac{1}{(1-x)^2}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx = \left| \begin{array}{c} \frac{1-x}{1+x} = t^2;\, 1-x = t^2(1+x) \\ x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ dx = -\frac{4t}{(t^2+1)^2}dt \end{array} \right| =$

$$= \int \frac{1}{\left(1-\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2}\cdot t\left(\frac{-4t}{(t^2+1)^2}\right)dt = -\int \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{t} + C = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + C$$

**п.2. Интегралы вида** $\int x^m (a+bx^n)^p\, dx$ **,**

(1)

$(m, n, p \in Q)$ **- интегралы от дифференциального бинома.**

Интегралы вида (1) выражаются через элементарные функции в следующих случаях:

а) $p \in Z$ - интегралы рассмотрены в п.1.

б) $\frac{m+1}{n} \in Z$, тогда подстановка $a + bx^n = t^s$, где s – знаменатель p приводит интегральную функцию к рациональной.

в) $\frac{m+1}{n} + p \in Z$ , тогда подстановка $(ax^{-n} + b) = t^s$, где s – знаменатель p приводит интегральную функцию к рациональной.

Во всех других случаях интегралы (1) выразить через элементарные функции нельзя (теорема Чебышева).

**Пример 4.** $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx = \int x^{-\frac{1}{2}}(1+x^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{3}}dx = \left| \begin{array}{c} \frac{m+1}{n} = \frac{-\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{4}} = 2 \in Z \\ 1+x^{\frac{1}{4}} = t^3;\; x = (t^3-1)^4 \\ dx = 4(t^3-1)^3\cdot 3t^2 dt \end{array} \right| =$

$$= \int \frac{t}{(t^3-1)^2}\cdot 12t^2(t^3-1)^3 dt = 12\int t^3(t^3-1)dt =$$

$$= 12\int (t^6 - t^3)dt = \frac{12}{7}t^7 - 3t^4 + C = \frac{12}{7}(1+x^{\frac{1}{4}})^{\frac{7}{3}} - 3(1+x^{\frac{1}{4}})^{\frac{4}{3}} + C\,.$$

**Пример 5.** $\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}dx = \int x^2(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}dx = \left| \begin{array}{c} \frac{m+1}{n}+p=\frac{2+1}{2}-\frac{1}{2}=1\in Z \\ x^{-2}+1=t^2;\ x=(t^2-1)^{-\frac{1}{2}} \\ dx=-t\cdot(t^2-1)^{-\frac{3}{2}}dt \end{array} \right| =$

$$= -\int (t^2-1)^{-1}\left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot t(t^2-1)^{-\frac{3}{2}}dt = -\int \frac{dt}{(t^2-1)^2} =$$

$$= -\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)^2 dt = -\frac{1}{4}\left(\int\frac{dt}{(t-1)^2}+\int\frac{dt}{(t+1)^2}-2\int\frac{dt}{t^2-1}\right)=$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{t-1}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{t+1}+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C = \frac{1}{2}x(1+x^2)^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^2}-x}{\sqrt{1+x^2}+x}\right|+C$$

**п.3. Интегралы вида $\int \frac{Mx+N}{\sqrt{x^2+px+q}}dx$.**

Вычисление интегралов проводится аналогично интегралам $\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx$ выделением полного квадрата в трехчлене $x^2+px+q$ (см. § 21, примеры 1, 2).

**Пример 6.** $\int \frac{3x+2}{\sqrt{x^2+6x+5}}dx = \int \frac{3x+2}{\sqrt{(x+3)^2-4}}d(x+3) = \left| \begin{array}{l} x+3=t \\ x=t-3 \end{array} \right| =$

$$= \int \frac{3(t-3)+2}{\sqrt{t^2-4}}dt = \int \frac{3t-7}{\sqrt{t^2-4}}dt = 3\int\frac{tdt}{\sqrt{t^2-4}} - 7\int\frac{dt}{\sqrt{t^2-4}} =$$

$$= \frac{3}{2}\int\frac{d(t^2-4)}{(t^2-4)^{\frac{1}{2}}} - 7\ln\left|t+\sqrt{t^2-4}\right|+C = 3\sqrt{t^2-4}-7\ln\left|t+\sqrt{t^2-4}\right|+C=$$

$$= 3\sqrt{(x+3)^2-4}-7\ln\left|(x+3)+\sqrt{(x+3)^2-4}\right|+C.$$

**Упражнение 1.** Вычислить $\int \frac{dx}{x\cdot\sqrt{3x^2+2x+1}}$

**п 4. Интегралы вида $\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{x^2+px+q}}dx$, где $P_n(x)$ - многочлен степени n.**

Для вычисления интегралов используют равенство:

$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{x^2+px+q}}dx = Q_{n-1}(x)\cdot\sqrt{x^2+px+q}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+px+q}}$, где $Q_{n-1}(x)$ - многочлен степени $n-1$. Коэффициенты многочлена $Q_{n-1}(x)$, а также число $\lambda$ находятся , если продифференцировать правую и левую часть равенства (2).

**Пример 7.** $\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}dx = (a_0x + a_1)\sqrt{1+x^2} + \lambda\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$. После взятия производной:

$$\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} = (a_0x + a_1)'\sqrt{1+x^2} + (a_0x + a_1)\cdot(\sqrt{1+x^2})' + \frac{\lambda}{\sqrt{1+x^2}}.$$

$$\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} = a_0 \cdot \sqrt{1+x^2} + \frac{x(a_0x + a_1)}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{\lambda}{\sqrt{1+x^2}}.$$

$$x^2 = a_0(1+x^2) + a_0x^2 + a_1x + \lambda.$$

Приравниваем друг к другу коэффициенты при одинаковых степенях x в правой и левой частях.

$$\begin{aligned} &x^2 : 2a_0 = 1 \\ &x^1 : a_1 = 0 \\ &x^n : a_0 + \lambda = 0. \end{aligned} \qquad (3)$$

Решив систему (3), получим :

$a_0 = \frac{1}{2};\ a_1 = 0;\ \lambda = -\frac{1}{2}$.То есть

$\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}dx = \frac{1}{2}x\cdot\sqrt{1+x^2} - \frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2}x\sqrt{1+x^2} - \frac{1}{2}\ln\left|x + \sqrt{1+x^2}\right| + C$ (сравни с примером 5).

**Упражнение 2.** Вычислить $\int \frac{x^2}{\sqrt{1+2x-x^2}}dx$.

**Упражнение 3.** Вычислить $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

1) с помощью подстановки Чебышева.
2) разложением по формуле (2).

**п.5. Интегралы вида** $\int R(x,\sqrt{a^2-x^2})dx;\ \int R(x,\sqrt{a^2+x^2})dx;\ \int R(x,\sqrt{x^2-a^2})dx$**.**

В данных интегралах можно избавиться от иррациональности, если применить подходящую тригонометрическую или гиперболическую подстановку.

$x = a\sin t$; или $x = a\cos t$ - для первого интеграла,

$x = a\,\mathrm{tg}\,t$; или $x = a\,\mathrm{sh}\,t$ - для второго,

$x = \frac{a}{\sin t}$; или $x = a\,\mathrm{ch}\,t$ - для третьего (см. § 23).

**Пример 8.** $\int\sqrt{-x^2+4x}dx = \int\sqrt{(-x^2+4x-4)+4}dx = \int\sqrt{4-(x-2)^2}d(x-2) =$

$$=\left|\begin{matrix} x-2=2\sin t,\ -\dfrac{\pi}{2}\le t\le\dfrac{\pi}{2} \\ t=\arcsin\left(\dfrac{x-2}{2}\right) \\ d(x-2)=2\cos t dt \end{matrix}\right|=\int\sqrt{4-4\sin^2 t}\cdot 2\cos t dt=$$

$$=4\int\cos^2 t dt=2\int(1+\cos 2t dt)=2t+\sin 2t+C=2\arcsin\left(\frac{x-2}{2}\right)+\sin\left(2\arcsin\left(\frac{x-2}{2}\right)\right)+C=$$

$$=2\arcsin\left(\frac{x-2}{2}\right)+2\sin\left(\arcsin\left(\frac{x-2}{2}\right)\right)\cdot\cos\left(\arcsin\left(\frac{x-2}{2}\right)\right)+C=$$

$$=2\arcsin\left(\frac{x-2}{2}\right)+(x-2)\sqrt{1-\frac{(x-2)^2}{4}}+C.$$

**Пример 9.** $\displaystyle\int\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}dx=\left|\begin{matrix} x=\operatorname{sh} t \\ dx=\operatorname{ch} t dt \\ t=\operatorname{arsh} x\end{matrix}\right|=\int\frac{\operatorname{sh}^2 t}{\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 t}}\cdot\operatorname{ch} t dt=\int\operatorname{sh}^2 t dt=$

$=\big|$ см. § 4, 4.1 $\big|==\displaystyle\frac{1}{2}\int(\operatorname{ch}2t-1)dt=\frac{1}{4}\operatorname{sh}2t-\frac{1}{2}t+C=$

$$=\frac{1}{4}\operatorname{sh}(2\operatorname{arsh} x)-\frac{1}{2}\operatorname{arsh} x+C=\frac{1}{2}\operatorname{sh}(\operatorname{arsh} x)\cdot\operatorname{ch}(\operatorname{arsh} x)-\frac{1}{2}\operatorname{arsh} x+C=$$

$=\displaystyle\frac{1}{2}x\sqrt{1+x^2}-\frac{1}{2}\operatorname{arsh} x+C$ (сравни с примерами 7; 5).

## Упражнения к § 22.

**Упражнение 22.1.** Вычислить интеграл, применяя соответствующую подстановку.

1. $\displaystyle\int\frac{\sqrt[4]{x}+\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}dx$. 2. $\displaystyle\int\frac{(\sqrt[3]{x}+1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt[6]{x^5}}dx$. 3. $\displaystyle\int\frac{\sqrt{2x+1}+\sqrt[3]{2x+1}}{\sqrt{2x+1}}dx$.

4. $\displaystyle\int\frac{\sqrt[6]{x-1}}{\sqrt[3]{x-1}+\sqrt{x-1}}dx$. 5. $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}+\sqrt[6]{x}}dx$. 6. $\displaystyle\int\frac{x+1+\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[6]{x+1}}{(x+1)(1+\sqrt[3]{x+1})}dx$.

7. $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt[4]{x}}dx$. 8. $\displaystyle\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx$. 9. $\displaystyle\int\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[6]{x}}}{\sqrt{x}}dx$.

10. $\displaystyle\int\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^4}dx$. 11. $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x^2+4}}{4}dx$. 12. $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x^2+9}}{x}dx$.

13. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$. 14. $\displaystyle\int\frac{\sqrt{(4-x^2)^3}}{x^6}$. 15. $\displaystyle\int x^3\sqrt{9-x^2}dx$.

16. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$. 17. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2-1}}$. 18. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}$.

19. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-x-1}}$. 20. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x-1}}$. 21. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{1+x-x^2}}$.

22. $\int \frac{2x+5}{\sqrt{4x^2+8x+9}}dx$. 23. $\int \frac{2x-8}{\sqrt{1-x+x^2}}dx$. 24. $\int \frac{2x-10}{\sqrt{1+x-x^2}}dx$.

25. $\int \frac{3x+4}{\sqrt{x^2+6x+13}}dx$. 26. $\int \frac{4x+1}{\sqrt{2+x-x^2}}dx$. 27. $\int \frac{x-7}{\sqrt{3x^2-2x+1}}dx$.

## Ответы на упражнения к § 22.

**22.1.**

1. $x+\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}-2\sqrt{x}-4\sqrt[4]{x}+2\ln\left|\sqrt{x}+1\right|+4\operatorname{arctg}\sqrt[4]{x}+C$.

2. $x+\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt{x}+6\sqrt[6]{x}+C$.

3. $\frac{1}{2}(2x+1)+\frac{3}{5}\sqrt[6]{(2x+1)^5}+C$.

4. $\frac{2}{3}\sqrt[3]{(x-1)^2}-2\sqrt{x-1}+3\sqrt[3]{x-1}-6\sqrt[6]{x-1}+6\ln\left|\sqrt[6]{x-1}+1\right|+C$.

5. $x+\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}-\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-\frac{1}{2}\ln\left|\sqrt[3]{x}+1\right|-6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}+C$.

6. $\frac{3}{2}\sqrt[3]{(x+1)^2}+6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x+1}+C$.

7. $-\frac{4}{5}\sqrt[4]{x^5}-x-\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}-2\sqrt{x}-4\sqrt[4]{x}-4\ln\left|1-\sqrt[4]{x}\right|+C$.

8. $\sqrt{1-x^2}-2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+C$.

10. $-\frac{1}{3}\frac{\sqrt{(1-x^2)^3}}{x^3}+C$. 11. $\sqrt{4+x^2}+\ln\left|\frac{2-\sqrt{4+x^2}}{2+\sqrt{4+x^2}}\right|+C$.

12. $\sqrt{x^2+9}+\frac{3}{2}\ln\left|\frac{3-\sqrt{x^2+9}}{3+\sqrt{x^2+9}}\right|+C$. 13. $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+C$.

14. $-\frac{\sqrt{(4-x^2)^5}}{20x^5}+C$. 15. $\frac{1}{5}\sqrt{(9-x^2)^5}-3\sqrt{(9-x^2)^3}+C$.

16. $\ln\left|\frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}}\right|+C$. 17. $\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+C$.

18. $-\ln\left|\dfrac{1+\sqrt{x^2-x+1}}{x}-\dfrac{1}{2}\right|+C$.

19. $-\arcsin\dfrac{x+2}{\sqrt{5}x}+C$.

20. $-\arcsin\dfrac{x+3}{\sqrt{5}(x+1)}+C$.

21. $\arcsin\dfrac{3x+1}{\sqrt{5}(x+1)}+C$.

22. $\dfrac{1}{2}\sqrt{4x^2+8x+9}+\dfrac{3}{2}\ln\left|x+1+\dfrac{1}{2}\sqrt{4x^2+8x+9}\right|+C$.

23. $2\sqrt{1-x+x^2}-7\ln\left|x-\dfrac{1}{2}+\sqrt{x^2-x+1}\right|+C$.

24. $2\sqrt{1-x+x^2}-7\ln\left|x-\dfrac{1}{2}+\sqrt{x^2-x+1}\right|+C$.

25. $3\sqrt{x^2+6x+13}-5\ln\left|x+3+\sqrt{x^2+6x+13}\right|+C$.

26. $-4\sqrt{2+x-x^2}+3\arcsin\dfrac{2x-1}{3}+C$.

27. $\dfrac{1}{3}\sqrt{3x^2-x+1}-\dfrac{20}{3\sqrt{3}}\ln\left|x-\dfrac{1}{3}+\sqrt{x^2-\dfrac{2}{3}x+\dfrac{1}{3}}\right|+C$.

## § 23. Интегрирование тригонометрических выражений.

При вычислении интегралов вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$, (1)

где $R(u, v)$ - рациональная функция часто используют те или иные подстановки, делающие подинтегральную функцию рациональной.

**п 1. Универсальная тригонометрическая подстановка.**

С помощью подстановки $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$ интеграл (1) – рационализируется. При этом

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2},\ \cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2};\ x = 2\operatorname{arctg} t;\ dx = \frac{2dt}{1+t^2}. \quad (2)$$

**Пример 1.** $\int \frac{dx}{7+6\cos x - 7\sin x} = \left| \begin{matrix} \operatorname{tg}\frac{x}{2} = t \\ \textit{применим формулы } (2) \end{matrix} \right| =$

$$= \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{7+\frac{6(1-t^2)}{1+t^2} - 7\cdot\frac{2t}{1+t^2}} = 2\int \frac{dt}{t^2-14t+13} = 2\int \frac{d(t-7)}{(t-7)^2-36} =$$

$$= 2\cdot\frac{1}{12}\ln\left|\frac{(t-7)-6}{(t-7)+6}\right| + C = \frac{1}{6}\ln\left|\frac{t-13}{t-1}\right| + C = \frac{1}{6}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-13}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1}\right| + C.$$

**Упражнение 1.** $\int \frac{dx}{\sin^3 x}$.

В некоторых случаях удобно применять другие подстановки – получаются более простые интегралы.

**п.2.** $\int R(\sin x, \cos x)dx$**, где** $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x) : \cos x = t$**.**

$R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x) : \sin x = t$.

В частности, если $\int R(\sin x, \cos x)dx = \sin^m x \cdot \cos^n x$, где m и n - целые и хотя бы одно из них нечетное.

**Пример 2.** $\int \sin^5 x \cdot \cos^2 x dx = \left| R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x) \right| =$

$$= -\int \sin^4 x \cdot \cos^2 x d(\cos x) = -\int (1-\cos^2 x)^2 \cos^2 x d(\cos x) = \left| \cos x = t \right| =$$

$$= -\int (1-t^2)^2 \cdot t^2 dt = -\int (t^2 - 2t^4 + t^6)dt = -\frac{1}{3}t^3 + \frac{2}{5}t^5 - \frac{1}{7}t^7 + C =$$

$$= -\frac{1}{3}\cos^3 x + \frac{2}{5}\cos^5 x - \frac{1}{7}\cos^7 x + C.$$

**Упражнение 2.** $\int \frac{\sin x dx}{\sin^2 x - 2\cos^2 x}$

**Упражнение 3.** $\int \frac{dx}{\cos^3 x}$

**п.3.** $\int R(\sin x, \cos x)dx$**, где** $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x) : \operatorname{tg} x = t$**.**

**Пример 3.** $\int \frac{dx}{1+\cos^2 x} = \left| R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x) \right| =$

$$= \int \frac{dx}{\cos^2 x\left(\frac{1}{\cos^2 x} + 1\right)} = \int \frac{dx}{\cos^2 x\left(2 + \operatorname{tg}^2 x\right)} =$$

$$= \int \frac{d(\operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg}^2 x + 2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}\right) + C;\ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n .$$

**Пример 4.** $\int \frac{dx}{\sin^3 x \cdot \cos^5 x} = \left| R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x) \right| =$

$$= \int \frac{dx}{\operatorname{tg}^3 x \cdot \cos^8 x} = \int \frac{d(\operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg}^3 x \cdot \cos^6 x} = \int \frac{(1+\operatorname{tg}^2 x)^3}{\operatorname{tg}^3 x} d(\operatorname{tg} x) =$$

$$= \left| \operatorname{tg} x = t \right| = \int \frac{1 + 3t^2 + 3t^4 + t^6}{t^3} dt =$$

$$= -\frac{1}{2t^2} + 3\ln t + \frac{3}{2}t^2 + \frac{1}{4}t^4 + C = -\frac{1}{2\operatorname{tg}^2 x} + 3\ln\left|\operatorname{tg} x\right| + \frac{3}{2} \cdot \operatorname{tg}^2 x + \frac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x + C .$$

**Пример 5.** $\int \operatorname{tg}^3 x dx = \int \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg}^2 x dx = \int \operatorname{tg} x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx =$

$$= \int \operatorname{tg} x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx - \int \operatorname{tg} x dx = \int \operatorname{tg} x d(\operatorname{tg} x) - \int \frac{\sin x}{\cos x} dx =$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x + \int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x + \ln\left|\cos x\right| + C .$$

**Замечание.** Если $R(\sin x, \cos x) = \sin^m x \cdot \cos^n x$, где m, n – целые четные неотрицательные числа, то применяют формулы понижения степени:

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x);\ \sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x) .$$

**Пример 6.** $\int \sin^4 x dx = \int \left(\frac{1}{2}(1-\cos 2x)\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x) dx =$

$$= \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}\int (1+\cos 4x)dx = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{32}\sin 4x + C .$$

**п.4. Интегралы вида** $\int \sin\alpha x \cdot \cos\beta x dx, \int \sin\alpha x \cdot \sin\beta x dx, \int \cos\alpha x \cdot \cos\beta x dx$ **.**

При вычислении можно воспользоваться формулами:

$$\sin\alpha x \cdot \cos\beta x = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)x + \sin(\alpha-\beta)x) .$$

$$\cos\alpha x\cdot\cos\beta x=\frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta)x+\cos(\alpha-\beta)x).$$

$$\sin\alpha x\cdot\sin\beta x=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)x-\cos(\alpha+\beta)x).$$

**Пример 7.** $\int\sin x\cdot\cos^2 3xdx=\frac{1}{2}\int\sin x(1+\cos 6x)dx=$

$$=\frac{1}{2}\int\sin xdx+\frac{1}{2}\int\sin x\cdot\cos 6xdx=-\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{4}\int(\sin 7x-\sin 5x)dx=$$

$$=-\frac{1}{2}\cos x-\frac{1}{28}\cos 7x+\frac{1}{20}\cos 5x+C.$$

## Упражнения к § 23.

**Упражнение 23.1.** Вычислить неопределенные интегралы.

1. $\int\frac{dx}{5+3\cos x-5\sin x}$. 2. $\int\frac{dx}{3+2\cos x-\sin x}$. 3. $\int\frac{dx}{5-3\cos x}$.

4. $\int\frac{dx}{5+4\sin x}$. 5. $\int\frac{7+6\sin x-5\cos x}{1+\cos x}dx$. 6. $\int\frac{6\sin x+\cos x}{1+\cos x}dx$.

7. $\int\frac{dx}{1+3\cos^2 x}$. 8. $\int\frac{2\operatorname{tg}x+3}{\sin^2 x+2\cos^2 x}dx$. 9. $\int\frac{dx}{4\sin^2 x-5\cos^2 x}$.

10. $\int\frac{\sin 2x}{\sin^4 x+\cos^4 x}dx$. 11. $\int\frac{dx}{\cos x\sin^3 x}$. 12. $\int\cos^4 3x\sin^2 3xdx$.

13. $\int\sqrt[5]{\sin^4 x}\cos^3 xdx$. 14. $\int\cos^4 x\sin^3 xdx$. 15. $\int\frac{\cos^3 x}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}dx$.

16. $\int\frac{3\sin^3 x}{\cos^4 x}dx$. 17. $\int\sqrt[3]{\cos^2 x}\sin^3 xdx$. 18. $\int\sin^2 2x\cos^4 2xdx$.

19. $\int\sin 3x\cos 5xdx$. 20. $\int\cos 7x\cos 9xdx$. 21. $\int\operatorname{tg}^5 4xdx$.

22. $\int\operatorname{tg}^2(5x+1)dx$. 23. $\int\operatorname{ctg}^4 xdx$. 24. $\int(1-\operatorname{ctg}x)^2dx$.

25. $\int\operatorname{ctg}^3 3xdx$ 26. $\int\cos^3 4xdx$. 27. $\int\cos^4 xdx$.

28. $\int(1-\cos 3x)^2dx$. 29. $\int\frac{\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{ctg}^2 x}$. 30. $\int\frac{\sin 2x}{\sin^4 x+4\cos^4 x}dx$.

## Ответы на упражнения к § 23.

**23.1.**

1. $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)-4}{\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)-1}\right|+C$. 2. $\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)-1}{2}+C$. 3. $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+C$.

4. $\frac{2}{3}\operatorname{arctg}\frac{5\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)+4}{3}+C$. 5. $12\operatorname{tg}\frac{x}{2}+6\ln\left|\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+1\right|-5x+C$.

6. $6\ln\left|\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+1\right|-\operatorname{tg}\frac{x}{2}+x+C$.

7. $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\operatorname{tg}\frac{x}{2}+C$.

8. $\ln\left|\operatorname{tg}^2x+3\right|+\frac{3}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}x}{\sqrt{2}}+C$.

9. $\frac{1}{4\sqrt{5}}\ln\left|\frac{2\operatorname{tg}x-\sqrt{5}}{2\operatorname{tg}x+\sqrt{5}}\right|+C$.

10. $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}^2x)+C$.

11. $\frac{1}{2\operatorname{tg}^2x}+\ln\left|\operatorname{tg}x\right|+C$.

12. $\frac{1}{16}x-\frac{1}{192}\sin 12x+\frac{1}{144}\sin^3 6x+C$.

13. $\frac{5}{9}\sqrt[5]{\sin^9x}-\frac{5}{19}\sqrt[5]{\sin^{19}x}+C$.

14. $-\frac{3}{5}\sqrt[3]{\sin^5x}-\frac{3}{\sqrt[3]{\sin x}}+C$.

15. $3\sqrt[3]{\sin x}-\frac{3\sqrt[3]{\sin^7x}}{7}+C$.

16. $\frac{1}{\cos^3x}-\frac{3}{\cos x}+C$.

17. $\frac{3}{11}\sqrt[3]{\cos^{11}x}-\frac{3}{5}\sqrt[3]{\cos^5x}+C$.

18. $\frac{1}{16}x-\frac{1}{128}\sin 8x+\frac{1}{96}\sin^3 4x+C$.

19. $\frac{\cos 2x}{4}-\frac{\cos 8x}{16}+C$.

20. $\frac{\sin 2x}{4}-\frac{\sin 16x}{32}+C$.

21. $\frac{1}{46}\operatorname{tg}^4 4x-\frac{1}{8}\operatorname{tg}^2 4x+6x+C$.

22. $\frac{1}{5}\operatorname{tg}(5x+1)-x+C$.

23. $-\frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3x+\operatorname{ctg}x+x+C$.

24. $-2\ln\left|\sin x\right|-\operatorname{ctg}x+C$.

25. $-\frac{1}{6}\operatorname{ctg}^2 3x-\frac{1}{3}\ln\left|\sin 3x\right|+C$.

26. $\frac{1}{4}\sin 4x-\frac{1}{12}\sin^3 4x+C$.

27. $\frac{8}{3}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+C$.

28. $\frac{3}{2}x-\frac{2}{3}\sin 3x+\frac{1}{12}\sin 6x+C$.

29. $\frac{1}{4}\ln\left|\operatorname{tg}^4x-1\right|+C$.

30. $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}^2x}{2}+C$.

## Приложение.

### Самостоятельная работа №1 Неопределенный интеграл.

Работа состоит из шести вариантов. К пяти первым приведены ответы. Шестой приводится с решением.

### Вариант 1

Вычислить интегралы:

1. $\int \frac{\sqrt{tg(3x)+1}}{\cos^2 3x}dx$ 2. $\int \frac{dx}{3\sin x+\cos x}$ 3. $\int \frac{dx}{x^3+x^2}$

4. $\int x^2 \ln x \cdot dx$ 5. $\int \frac{x}{\sqrt{3-x^4}}dx$ 6. $\int \frac{(x-1)dx}{\sqrt{x^2-4x+2}}$

7. $\int x\sqrt{1+x}dx$ 8. $\int e^{\cos 2x}\sin 2x dx$ 9*. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+4x+13)^3}}$

### Вариант 2

Вычислить интегралы:

1. $\int \frac{1}{x(x^2-3x+2)}dx$ 2. $\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[3]{x}+1}$ 3. $\int \frac{x^2dx}{3+x^6}$

4. $\int \frac{x}{2x^2+3x+1}dx$ 5. $\int \ln(2x+1)dx$ 6. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x-4}}$

7. $\int e^{x^6}x^5dx$ 8. $\int \sin^3 3x dx$ 9*. $\int \frac{xarctgxdx}{(1+x^2)^2}$

### Вариант 3

Вычислить интегралы:

1. $\int \frac{x-3}{x^2+5x+4}dx$ 2. $\int \frac{\sqrt[4]{\ln x}dx}{x}$ 3. $\int \frac{x^4dx}{3+x^5}$

4. $\int \frac{x+2}{x(x-3)(x+4)}dx$ 5. $\int x\sin 5x dx$ 6. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+2}$

7. $\int \frac{1}{5+2\cos x}dx$ 8. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$ 9*. $\int \frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})dx}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$

## Вариант 4

Вычислить интегралы:

1. $\int \frac{x}{\sqrt{2-x^2}}dx$ 2. $\int \frac{dx}{(x+1)(x^2+4)}$ 3. $\int \frac{xdx}{\sqrt{5x+x^2+4}}$

4. $\int xe^{3x}dx$ 5. $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}+4}dx$ 6. $\int tg^3 x dx$

7. $\int \frac{x^2}{\sqrt{4+x^6}}dx$ 8. $\int \sqrt[3]{\cos x}\sin x dx$ 9*. $\int \frac{x\ln x dx}{\sqrt{(x^2-1)^3}}$

## Вариант 5

Вычислить интегралы:

1. $\int \frac{2x+3}{x^2+x+2}dx$ 2. $\int \frac{\sqrt{x+1}dx}{x}$ 3. $\int x^2\cdot\sqrt[5]{3x^3+2}dx$

4. $\int \cos^3 2x dx$ 5. $\int \frac{1}{\sin^2\frac{x}{3}ctg\frac{x}{3}}dx$ 6. $\int \arcsin 2x dx$

7. $\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^8}}dx$ 8. $\int \frac{x}{(x-1)(x^2-2x+3)}dx$ 9*. $\int \frac{(x^2-1)dx}{x\sqrt{x^4+3x^2+1}}$

## Вариант 6

Вычислить интегралы:

1. $\int \frac{4-2x}{x^2-3x-4}dx$ 2. $\int x\ln(x-1)dx$ 3. $\int 2^{x^3}x^2dx$

4. $\int \frac{1}{\sin^4 x}dx$ 5. $\int \frac{x}{\sqrt{2+x^4}}dx$ 6. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x+2}}$

7. $\int \frac{x}{x^3-x^2+x-1}dx$ 8. $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^4-2}}dx$ $9^*$. $\int \frac{\ln(e^x+1)}{e^x}dx$

**Ответы к варианту 1.**

1. $\frac{2}{9}\left(tg3x+1\right)^{\frac{3}{2}+c}$ 2. $-\frac{1}{\sqrt{10}}\ln\left|\frac{tg\frac{x}{2}-3-\sqrt{10}}{tg\frac{x}{2}-3+\sqrt{10}}\right|+c$

3. Указание. $\frac{1}{x^3+x^2}=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}$; ответ: $-\frac{1}{x}-\ln|x|+\ln|x+1|+c$

4. $\frac{1}{3}x^3\cdot\ln x-\frac{1}{9}x^3+c$ 5. $\frac{1}{2}\arcsin\frac{x^2}{\sqrt{3}}+c$

6. $\sqrt{x^2-4x+2}+\ln\left|\left(x-2\right)+\sqrt{\left(x-2\right)^2-2}\right|+c$

7. $\frac{2}{5}\left(x+1\right)^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{3}\left(x+1\right)^{\frac{3}{2}}+c$

8. Указание. $\int\frac{dx}{\sqrt{\left(x^2+9x+13\right)^3}}=\int\frac{d\left(x+2\right)}{\left(\left(x+2\right)^3+9\right)^{\frac{3}{2}}}=\int\frac{d\left(x+2\right)}{\left(x+2\right)^3\left(1+\frac{9}{\left(x+2\right)^2}\right)^{\frac{3}{2}}}$

Ответ: $\frac{1}{9}\left(1+9\left(x+2\right)^{-2}\right)^{-\frac{1}{2}}+c$

**Ответы к варианту 2.**

1. Указание. $\frac{1}{x}=t$. Ответ: $-\frac{1}{2}\ln\left|2\left(\frac{1}{x}\right)^2-3\frac{1}{x}+1\right|-\frac{3}{4}\ln\left|\frac{\frac{1}{x}-1}{\frac{1}{x}-\frac{1}{2}}\right|+c$

2. $\frac{1}{7}x^{\frac{7}{6}}-\frac{1}{5}x^{\frac{5}{6}}+\frac{1}{3}x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{6}}+arctg\left(x^{\frac{1}{6}}\right)+c$

3. $\frac{1}{3\sqrt{3}}arctg\frac{x^3}{\sqrt{3}}+c$

4. $\frac{1}{4}\ln\left|2x^2+3x+1\right|-\frac{3}{4}\ln\left|\frac{x+\frac{1}{2}}{x+1}\right|+c$

5. $x\ln|2x+1|-x+\frac{1}{2}\ln|2x+1|+c$

6. $\frac{2}{3}\sqrt{3x-4}+c$

7. $\frac{1}{6}e^{x^6}+c$

8. $-\frac{1}{3}\cos 3x+\frac{1}{9}\cos^3 3x+c$

9. Указания. $arctgx=t$. Ответ: $-\frac{1}{4}\left(t\cos 2t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)+c$

**Ответы к варианту 3.**

1. $\frac{1}{2}\ln\left|x^2+5x+4\right|-\frac{11}{6}\ln\left|\frac{x+1}{x+4}\right|+c$ 2. $\frac{4}{5}(\ln x)^{\frac{5}{4}}+c$ 3. $\frac{1}{5}\ln\left|x^5+3\right|+c$

4. Указание. $\frac{x+3}{x(x-3)(x+4)}=\frac{-\frac{1}{6}}{x}+\frac{\frac{5}{21}}{x-3}-\frac{\frac{1}{14}}{x+4}$

Ответ: $-\frac{1}{6}\ln|x|+\frac{5}{21}\ln|x-3|-\frac{1}{14}\ln|x+4|+c$

5. $-\frac{1}{5}\left(x\cos 5x-\frac{1}{5}\sin 5x\right)+c$ 6. $\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}-6x^{\frac{1}{3}}+12\ln\left|x^{\frac{1}{3}}+2\right|+c$

7. $\frac{2}{3}\sqrt{\frac{3}{7}}arctg\left(\frac{\sqrt{3}tg\frac{7}{3}}{\sqrt{7}}\right)+c$ 8. $2e^{\sqrt{x}}+c$

9. Указания. $\int\frac{\ln\left(x\sqrt{1+x^2}\right)}{\sqrt{\left(x^2+1\right)^3}}=\int\frac{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{x^3\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{3}{2}}}=-\int\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)d\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$

Ответ: $-\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+c$

**Ответы к варианту 4.**

1. $-\sqrt{2-x^2}+c$

2. Указание. $\frac{1}{(x+1)\left(x^2+4\right)}=\frac{\frac{1}{5}}{x+1}-\frac{1}{5}\frac{x-1}{x^2+4}$

Ответ: $\frac{1}{5}\ln|x+1|-\frac{1}{10}\ln\left(x^2+4\right)+\frac{1}{10}arctg\frac{x}{2}+c$

3. $\sqrt{x^2+5x+4}-\frac{5}{2}\ln\left|\left(x+\frac{5}{2}\right)+\sqrt{\left(x+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{9}{4}}\right|+c$

4. $\frac{1}{3}xe^{3x}-\frac{1}{9}e^{3x}+c$ 5. $x-2x^{\frac{2}{3}}+16x^{\frac{1}{3}}-64\ln\left|\sqrt[3]{x+4}\right|+c$

6. $\frac{1}{2}tg^2x-\frac{1}{2}\ln\left(1+tg^2x\right)+c$ 7. $\frac{1}{3}\ln\left|x^3+\sqrt{4+x^6}\right|+c$

8. $-\frac{3}{4}(\cos x)^{\frac{4}{3}}+c$

9. Указание. $\int\frac{x\ln x}{\left(x^2-1\right)^{\frac{3}{2}}}dx=-\int\ln x d\left(\left(x^2-1\right)^{-\frac{1}{2}}\right)=-\ln x\left(x^2-1\right)^{-\frac{1}{2}}+\int\left(x^2-1\right)^{-\frac{1}{2}}\frac{dx}{x}$

Ответ: $-\ln x\left(x^2-1\right)^{-\frac{1}{2}}-\arcsin\left(\frac{1}{x}\right)+c$

**Ответы к варианту 5.**

1. $\ln\left(x^2+x+2\right)+2\cdot\frac{2}{\sqrt{7}}arctg\frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)\cdot 2}{\sqrt{7}}+c$

2. $2\sqrt{x+1}+\ln\left|\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\right|+c$ 3. $\frac{5}{54}\left(3x^3+2\right)^{\frac{5}{6}}+c$

4. $\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{1}{6}\sin^3 2x+c$ 5. $-3\ln\left|ctg\frac{x}{3}\right|+c$

6. $x\arcsin 2x+\frac{1}{2}\left(1-4x^2\right)^{\frac{1}{2}}+c$ 7. $\frac{1}{4}\ln\left(x^4+\sqrt{1+x^8}\right)+c$

8. Указание. $\frac{x}{(x-1)\left(x^2-2x+3\right)}=\frac{\frac{1}{2}}{x-1}-\frac{1}{2}\frac{(x-3)}{x^2-2x+3}$

Ответ: $\frac{1}{2}\ln|x-1|-\frac{1}{4}\ln\left(x^2-2x+3\right)+\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{(x-1)}{\sqrt{2}}+c$

9.Указание. $\int\frac{x^2-1}{x\sqrt{x^4+3x^2+1}}dx=\int\frac{xdx}{\sqrt{x^4+3x^2+1}}-\int\frac{dx}{x\sqrt{x^4+3x^2+1}}=$

$=\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x^2\right)}{\sqrt{x^4+3x^2+1}}-\int\frac{dx}{x^3\sqrt{x^{-4}+3x^{-2}+1}}=\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x^2\right)}{\sqrt{x^4+3x^2+1}}+\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x^{-2}\right)}{\sqrt{x^{-4}+3x^{-2}+1}}$

Ответ: $\frac{1}{2}\ln\left|\left(x^2+\frac{3}{2}\right)+\sqrt{\left(x^2+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{5}{4}}\right|+\frac{1}{2}\ln\left|\left(x^{-2}+\frac{3}{2}\right)+\sqrt{\left(x^{-2}+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{5}{4}}\right|+c$

**Решение к варианту 6.**

1. $\int\frac{4-2x}{x^2-3x-4}dx=\left|4-2x=-(2x-3)+1\right|=\int\frac{1-(2x-3)}{x^2-3x-4}dx=\int\frac{dx}{x^2-3x-4}-$

$-\int\frac{2x-3}{x^2-3x-4}dx=\int\frac{d\left(x-\frac{3}{2}\right)}{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{25}{4}}-\int\frac{d\left(x^2-3x-4\right)}{x^2-3x-4}=$

$$=\frac{1}{2\cdot\frac{5}{2}}\ln\left|\frac{\left(x-\frac{3}{2}\right)-\frac{5}{2}}{\left(x-\frac{3}{2}\right)+\frac{5}{2}}\right|-\ln\left|x^2-3x-4\right|+c$$

2. $$\int x\ln(x-1)dx=\left|\begin{matrix}u=\ln(x-1)\Rightarrow du=\frac{1}{x-1}dx\\ dv=xdx\Rightarrow v=\frac{1}{2}x^2\end{matrix}\right|=\frac{x^2}{2}\ln(x-1)-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2(x-1)}=$$

$$\left|\frac{1}{x^2(x-1)}=-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}\right|=\frac{x^2}{2}\ln(x-1)-\frac{1}{2x}+\frac{1}{2}\ln(x)-\frac{1}{2}\ln(x-1)+c$$

3. $$\int 2^{x^3}x^2dx=\frac{1}{3}\int 2^{x^3}d\left(x^3\right)=\frac{1}{3}\frac{2^{x^3}}{\ln 2}+c$$

4. $$\int\frac{dx}{\sin^4 x}=-\int\frac{d(ctgx)}{\sin^2 x}=-\int\left(1+ctg^2x\right)d(ctgx)=-ctgx-\frac{1}{3}ctg^3x+c$$

5. $$\int\frac{xdx}{\sqrt{2+x^4}}=\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x^2\right)}{\sqrt{2+x^4}}=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+\sqrt{2+x^4}\right)+c$$

6. $$\int\frac{xdx}{\sqrt{x+2}}=\left|\begin{matrix}\sqrt{x+2}=t\\ x=t^2-2\\ dx=2tdt\end{matrix}\right|=\int\frac{\left(t^2-2\right)2tdt}{t}=2\int\left(t^2-2\right)dt=\frac{2}{3}t^3-4t+c=$$

$$=\frac{2}{3}(x+2)^{\frac{3}{2}}-4(x+2)^{\frac{1}{2}}+c$$

7.

$$\int\frac{x}{x^3-x^2+x-1}dx=\left|\frac{x}{x^3-x^2+x-1}=\frac{x}{x^2(x-1)+(x-1)}=\frac{x^2}{(x-1)\left(x^2+1\right)}=\frac{1}{2}\frac{1}{x-1}+\frac{1}{2}\frac{x+1}{x^2+1}\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-1}+\frac{1}{2}\int\frac{x+1}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\ln|x-1|+\frac{1}{2}\int\frac{xdx}{x^2+1}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+1}=\frac{1}{2}\ln|x-1|+\frac{1}{4}\ln\left(x^2+1\right)+\frac{1}{2}arctgx+$$

8. $$\int\frac{x^3}{\sqrt{x^4-2}}dx=\frac{1}{4}\int\frac{d\left(x^4-2\right)}{\sqrt{x^4-2}}=\frac{1}{2}\sqrt{x^4-2}+c$$

9. $$\int\frac{\ln\left(e^x+1\right)}{e^x}dx=\int e^{-x}\cdot\ln\left(e^x\left(1+e^{-x}\right)\right)dx=\int e^{-x}\left(x+\ln\left(1+e^{-x}\right)\right)dx=$$

$$= -\int xd\left(e^{-x}\right) - \int \ln\left(1+e^{-x}\right)d\left(e^{-x}+1\right) = -\left(xe^{-x} - \int e^{-x}dx\right) - \int \ln\left(1+e^{-x}\right)d\left(1+e^{-x}\right) =$$

$$= -xe^{-x} - e^{-x} - \int \ln t\,dt = \begin{vmatrix} t = 1+e^{-x} \\ u = \ln t \Rightarrow du = \dfrac{dt}{t} \\ dv = dt \Rightarrow v = t \end{vmatrix} = -xe^{-x} - e^{-x} - t\cdot\ln t + \int dt =$$

$$-xe^{-x} - e^{-x} - \left(1+e^{-x}\right)\ln\left(1+e^{-x}\right) + \left(1+e^{-x}\right) + c$$

## ЛИТЕРАТУРА

1.Кудрявцев,Л.Д. Краткий курс математического анализа. / Л.Д.Кудявцев. – М.: Наука, 1989.

2. Демидович,Б.П.Сборник задач по математическому анализу./ Б.П.Демидович. – М.: Наука, 1990.

3. Сборник задач по математике для втузов. Линейная алгебра и основы математического анализа./ Под ред.А.В.Ефимова, Б.П.Демидовича. – М.: Наука, 1981.-Т.1.

4. Герасимович, А.И. Математический анализ: в 2 ч./ А.И. Герасимович, Н.А. Рысюк/. – Минск: Вышэйшая школа, 1989. – Ч. 1.

5. Математический анализ в вопросах и задачах./Под ред.В.Ф.Бутузова.- М.: Физматлит, 2001.

5. Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах./ П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова/. – Минск: Вышэйшая школа, 1986. – Ч. 1.

6. Сухая, Т.А. Задачи по высшей математике./ Т.А. Сухая, В.Ф.Бубнов/. – Минск: Вышэйшая школа, 1993. – Ч. 2.

7. Индивидуальные задания по высшей математике./ под ред. А.П. Рябушко /. – Минск: Вышэйшая школа, 2008. – Ч. 1.

8. Кузнецов, Л.А. Сборник заданий по высшей математике./ Л.А.Кузнецов/. – М: Высшая школа, 1983.

9.Матвеева,Л.Д., РудыйА.Н. Математический анализ. 1 семестр. /Л.Д.Матвеева,А.Н.Рудый/.-Минск,БНТУ,2015.