УДК 517.968.23

А. С. КРАВЧУК, С. А. ПРОНКЕВИЧ, А. И. КРАВЧУК

СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ОДНОГО ТИПА

Рассмотрено интегро-дифференциальное уравнение, используемое при решении контактных задач теории упругости для цилиндра и цилиндрической полости в пространстве. В отличие от литературы, посвященной решению интегральных уравнений данного типа, в настоящей работе исследуемое уравнение не было сведено к уравнению с сингулярным ядром типа котангенса. Это дало возможность, используя простейшие оценки тригонометрических функций, показать положительную определенность сингулярного ядра. Построена оценка нормы интегрального оператора в пространстве функций, интегрируемых с квадратом. Получено условие применимости принципа сжатых отображений в зависимости от абсолютной величины коэффициента, определяемого упругими характеристиками твердых тел.

Ключевые слова: интегро-дифференциальное уравнение; интеграл типа Коши; принцип сжатых отображений; коэффициент сжатия; контактные задачи.

The integro-differential equation used for solving contact problems of elasticity theory for a cylinder and a cylindrical cavity in space was discussed in article. The existing literature devoted to the solution of integral equations of this type used the standard procedure of reducing the integral equation to a specific equation with singular kernel contains cotangent function. But authors of this article refused this procedure and used kernel in more complicated but more convenient for analytical perturbation form. This made it possible using simple estimates of trigonometric functions to show a positive definition of singular kernel. The estimation of norm of integral operator in the space of square-integrable functions was made. A condition for the applicability of the contraction mapping principle was obtained it depends on the magnitude of the coefficient which was determined by the elastic properties of solids.

Key words: integro-differential equation; integral of Cauchy type; the contraction mapping principle; the compression ratio; contact problems.

При решении контактных задач двумерной теории упругости для цилиндра и цилиндрической полости в пластине с 1950–60-х гг. широко используются сингулярные интегро-дифференциальные уравнения вида [1, с. 150–172; 2, с. 549; 3, с. 48; 4, с. 21; 5, с. 45, 47]

$$\frac{t}{\pi i}\int_L \frac{\sigma'(\tau)}{\tau - t}\,d\tau = \gamma\,\sigma(t) + f(t), \tag{1}$$

где

$$\sigma'(\tau) = \frac{d\sigma(\tau)}{d\tau};$$

$$t = e^{i\theta},\ \theta \in [-\alpha, \alpha];$$

$$\tau = e^{i\varphi},\ \varphi \in [-\alpha, \alpha];$$

L – дуга окружности единичного радиуса, заключенная между двумя точками с угловыми координатами $-\alpha$ и α, $\alpha \in (0, \pi/2)$; γ – вещественный коэффициент, определяемый упругими характеристиками взаимодействующих тел; $f(t)$ – известная функция, зависящая от приложенных нагрузок. Кроме того, предполагается, что $\sigma(\tau)$ обращается в нуль на концах отрезка интегрирования.

За прошедшее время были предложены разнообразные методы приближенного решения уравнения данного вида. Необходимо подчеркнуть, что уравнение (1), несмотря на свою определенную схожесть с уравнением Прандтля на вещественной оси, не может быть сведено к последнему и требует адаптации ранее разработанных методов для интегро-дифференциальных уравнений на вещественной оси декартовой системы координат к уравнению на дуге окружности, т. е. в полярной системе координат.

При решении уравнений типа (1) часто используются методы, близкие к методу механических квадратур [4, с. 10]. Во многих работах описано применение различного рода интерполяционных полиномов для решения уравнения вида (1), их краткий обзор можно найти в [5, с. 8–11].

В монографии [4, с. 21–24] предлагается иной подход к решению интегрального уравнения (1). Он основан на применении метода последовательных приближений в аналитическом изложении. В ходе экспериментов было установлено, что использование двух разных начальных приближений при проведении вычислений дает два близких по величине выражения для искомой функции, что косвенно может свидетельствовать о достаточно малом коэффициенте сжатия интегрального оператора (1), эквивалентного уравнению Фредгольма 2-го рода с логарифмическим ядром.

Однако исследование условий существования и единственности решения уравнений данного типа, сходимости предложенной процедуры последовательных приближений точности получаемых решений в [4, с. 21–24] не было выполнено.

Основным результатом настоящего исследования является доказательство того, что не только уравнение (1) имеет единственное решение для всех практически важных комбинаций материалов взаимодействующих тел (что определяется коэффициентом γ и коэффициентами функции $f(t)$), но коэффициент сжатия эквивалентного уравнения Фредгольма достаточно мал для того, чтобы с необходимой точностью обходиться аналитическими приближениями решений, построенных в [4, с. 21–24] без использования каких-либо дополнительных численных процедур.

Приведение сингулярного интегро-дифференциального уравнения к интегральному уравнению с логарифмическим ядром. При поставленных выше условиях поведения $\sigma(\tau)$ в углах области интегрирования уравнение (1) с помощью последовательного применения интегрирования по частям и формул обращения может быть приведено к виду [1, с. 172–173; 6, с. 446]

$$\sigma(t)=-\frac{\sqrt{(t-a)(t-b)}}{\pi i}\int_L \frac{f^*(\tau)}{\sqrt{(\tau-a)(\tau-b)}(\tau-t)}d\tau; \tag{2}$$

где

$$f^*(\tau)=\int_a^{\tau}\frac{(\gamma\sigma(\zeta)+f(\zeta))}{\zeta}d\zeta+C;$$

$$a=e^{-i\alpha},\ b=e^{i\alpha},$$

где C – постоянная.

Пусть $K^*(t,\tau)$ – функция такая, что

$$\frac{\partial K^*(t,\tau)}{\partial\tau}=-2\frac{\sqrt{(t-a)(t-b)}}{\sqrt{(\tau-a)(\tau-b)}(\tau-t)}.$$

Тогда из (2) получаем

$$\sigma(t)=\frac{1}{2\pi i}\left(\left(K^*(t,\tau)f^*(\tau)\right)\Big|_{\tau=a}^{\tau=b}-\int_L K^*(t,\tau)\frac{(\gamma\sigma(\tau)+f(\tau))}{\tau}d\tau\right). \tag{3}$$

Можно установить, что

$$K^*(t,\tau)=\ln\left(\frac{t\tau-(a+b)/2\cdot t-(a+b)/2\cdot\tau+ab+\sqrt{(t-a)(t-b)}\sqrt{(\tau-a)(\tau-b)}}{t\tau-(a+b)/2\cdot t-(a+b)/2\cdot\tau+ab-\sqrt{(t-a)(t-b)}\sqrt{(\tau-a)(\tau-b)}}\right). \tag{4}$$

При этом $K^*(t,a)=K^*(t,b)=0$.

Таким образом, из (2)–(4) следует, что уравнение (1) может быть приведено к виду

$$\sigma(t)=\frac{-\gamma}{2\pi i}\int_L K^*(t,\tau)\frac{\sigma(\tau)}{\tau}d\tau-\Phi(t),$$

где

$$\Phi(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_L K^*(t,\tau)\frac{f(\tau)}{\tau}d\tau.$$

После преобразований получаем

$$\sigma(\theta)=\frac{-\gamma}{2\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha}K(\theta,\varphi)\sigma(\varphi)d\varphi-\Phi(\theta), \tag{5}$$

где

$$K(\theta,\varphi)=\ln\left(\frac{\cos((\theta+\varphi)/2)-\cos(\alpha)\cos((\theta-\varphi)/2)+\aleph(\theta,\varphi)}{\cos((\theta+\varphi)/2)-\cos(\alpha)\cos((\theta-\varphi)/2)-\aleph(\theta,\varphi)}\right), \tag{6}$$

$$\aleph(\theta,\varphi)=\sqrt{(\cos(\theta)-\cos(\alpha))(\cos(\varphi)-\cos(\alpha))}.$$

Рассмотрим функцию $\cos((\theta+\varphi)/2)-\cos(\alpha)\cos((\theta-\varphi)/2)$ из (6) при $(\theta,\varphi)\in[-\alpha,\alpha][-\alpha,\alpha]$. Запишем очевидную оценку снизу

$$\cos((\theta+\varphi)/2)-\cos(\alpha)\cos((\theta-\varphi)/2)\ge\cos((\theta+\varphi)/2)-\cos(\alpha)=$$
$$=2\cos\left(\frac{2\alpha-\theta-\varphi}{4}\right)\cos\left(\frac{2\alpha+\theta+\varphi}{4}\right)\ge 0.$$

Поскольку $\aleph(\theta,\varphi)\ge 0$ из (6) при $(\theta,\varphi)\in[-\alpha,\alpha][-\alpha,\alpha]$ и выполнено неравенство

$$\frac{\cos((\theta+\varphi)/2)-\cos(\alpha)\cos((\theta-\varphi)/2)-\aleph(\theta,\varphi)}{\cos((\theta+\varphi)/2)-\cos(\alpha)\cos((\theta-\varphi)/2)+\aleph(\theta,\varphi)}=$$
$$=\left(\frac{\sin(\alpha)\sin((\theta-\varphi)/2)}{\cos((\theta+\varphi)/2)-\cos(\alpha)\cos((\theta-\varphi)/2)+\aleph(\theta,\varphi)}\right)^2>0,$$

то $\cos((\theta+\varphi)/2)-\cos(\alpha)\cos((\theta-\varphi)/2)\ge\aleph(\theta,\varphi)$. Следовательно, справедлива оценка

$$0\le\cos((\theta+\varphi)/2)-\cos(\alpha)\cos((\theta-\varphi)/2)-\aleph(\theta,\varphi)\le$$
$$\le\cos((\theta+\varphi)/2)-\cos(\alpha)\cos((\theta-\varphi)/2)+\aleph(\theta,\varphi).$$

Из последнего неравенства видно, что для любых $(\theta,\varphi)\in[-\alpha,\alpha][-\alpha,\alpha]$ выполнено $K(\theta,\varphi)\ge 0$. Используя указанное выше преобразование ядра (6) интегрального уравнения (5) с помощью умножения делимого и делителя на делимое, приведем (6) к виду

$$K(\theta,\varphi)=\ln\left(\left(\frac{\cos((\theta+\varphi)/2)-\cos(\alpha)\cos((\theta-\varphi)/2)+\aleph(\theta,\varphi)}{\sin(\alpha)\sin((\theta-\varphi)/2)}\right)^2\right). \tag{7}$$

Следуя [7, с. 199], в дальнейшем будем рассматривать интегральный оператор

$$A\sigma(\theta)=\frac{-\gamma}{2\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha}K(\theta,\varphi)\sigma(\varphi)d\varphi.$$

Оценка нормы линейного оператора в пространстве L_2. Покажем, что при $\alpha\in(0,\pi/2)$

$$\|K\|=\sqrt{\int_{-\alpha}^{\alpha}\int_{-\alpha}^{\alpha}K(\theta,\varphi)^2\,d\varphi\,d\theta}<\infty.$$

С целью упрощения получения численных результатов отметим, что ядро (7) уравнения (5) можно представить в следующей форме:

$$K(\theta,\varphi)=2\ln\left(\frac{|\cos((\theta+\varphi)/2)-\cos(\alpha)\cos((\theta-\varphi)/2)+\aleph(\theta,\varphi)|}{\sin(\alpha)|\sin((\theta-\varphi)/2)|}\right). \tag{8}$$

Исследуем на экстремум выражение $\cos((\theta+\varphi)/2)-\cos(\alpha)\cos((\theta-\varphi)/2)$, входящее в делимое дроби ядра (8). Вычислив соответствующие частные производные, можно установить, что указанное выражение имеет на квадрате $[-\alpha,\alpha][-\alpha,\alpha]$ единственную подозрительную на экстремум точку с координатами $(0,0)$, которая является «седловиной». Таким образом, непосредственной подстановкой уравнений границ можно найти максимальные и минимальные значения рассматриваемого выражения:

$$0\le\left[\cos((\theta+\varphi)/2)-\cos(\alpha)\cos((\theta-\varphi)/2)\right]\le 1-\cos(\alpha)^2=\sin(\alpha). \tag{9}$$

Очевидно также, что $\aleph(\theta,\varphi)$ удовлетворяет неравенствам

$$0\le\aleph(\theta,\varphi)\le 1-\cos(\alpha). \tag{10}$$

Докажем следующее неравенство:

$$\left[\cos((\theta+\varphi)/2)-\cos(\alpha)\cos((\theta-\varphi)/2)\right]\ge\aleph(\theta,\varphi). \tag{11}$$

Отметим, что при $\theta=\varphi$ (т. е. на диагонали квадрата $[-\alpha,\alpha][-\alpha,\alpha]$) неравенство (10) превращается в тождество. Докажем неравенство (10) для случая $\theta>\varphi$. Минимизируя левую часть и максимизируя правую, исходя из предположения, что $\theta>\varphi$, получаем тождество. Следовательно, для рассматриваемого случая неравенство (10) доказано. Рассуждения для $\theta<\varphi$ совершенно аналогичны рассмотренному выше случаю.

Оценим сверху ядро (8), исходя из того, что функция $\ln(\ )$ является возрастающей, и из результатов, полученных в неравенствах (9)–(11):

$$0\le K(\theta,\varphi)=2\ln\left(\frac{\left|\cos((\theta+\varphi)/2)-\cos(\alpha)\cos((\theta-\varphi)/2)+\aleph(\theta,\varphi)\right|}{\sin(\alpha)\left|\sin((\theta-\varphi)/2)\right|}\right)\le$$

$$\le 2\ln\left(2\frac{\left|\cos((\theta+\varphi)/2)-\cos(\alpha)\cos((\theta-\varphi)/2)\right|}{\sin(\alpha)\left|\sin((\theta-\varphi)/2)\right|}\right)\le$$

$$\le 2\ln\left(\frac{2}{\left|\sin((\theta-\varphi)/2)\right|}\right)\le 2\ln\left(\frac{2\pi}{|\theta-\varphi|}\right)=-2\ln\left(\frac{|\theta-\varphi|}{2\pi}\right). \tag{12}$$

Таким образом, из (12) получаем оценку нормы ядра интегрального уравнения (5) в виде

$$\|K\|=\sqrt{\int_{-\alpha}^{\alpha}\int_{-\alpha}^{\alpha}K(\theta,\varphi)^2\,d\varphi\,d\theta}\le C(\alpha)<\infty,$$

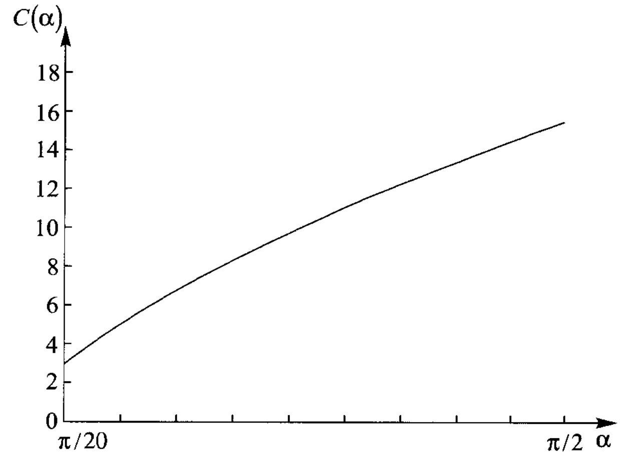
где

$$C(\alpha)=2\sqrt{\int_{-\alpha}^{\alpha}\int_{-\alpha}^{\alpha}\ln\left(\frac{|\theta-\varphi|}{2\pi}\right)^2 d\varphi\,d\theta}.$$

Отметим, что C можно вычислить в явном виде:

$$C(\alpha)=\sqrt{8\alpha^2\left(7+2(\ln(\alpha))^2+2\ln(\pi)(3+\ln(\pi))-2\ln(\alpha)(3+2\ln(\pi))\right)}. \tag{13}$$

Определение $C(\alpha)$ с помощью (13) для конкретных значений α выполнялось численно. На основе проведенных вычислений установлено, что при $\alpha\in(0,\pi/2)$ $C(\alpha)$ является возрастающей функцией (рисунок).



Изменение нормы ядра в зависимости от α

Таким образом, установлено, что $K(\theta, \varphi) \in L_2((-\alpha, \alpha)(-\alpha, \alpha))$. Рассматривая уравнение (5) в пространстве $L_2(-\alpha, \alpha)$ и принимая во внимание известные результаты [7, с. 199], получаем, что

$$\|A\| \leq \frac{|\gamma|}{2\pi} \|K(\theta, \varphi)\| \leq \frac{|\gamma|}{2\pi} C(\alpha). \tag{14}$$

Условие применения принципа сжатых отображений. Учитывая (14), получаем, что для применения принципа сжатых отображений к исследованию уравнения (5) и, соответственно, (1) достаточно выполнения условия при $\alpha \in (0, \pi/2)$:

$$\frac{|\gamma|}{2\pi} C(\alpha) < 1. \tag{15}$$

Необходимо отметить, что неравенство (15) выполняется для различных сочетаний упругих параметров материалов, применяемых в машиностроении, так как абсолютная величина безразмерного коэффициента γ, зависящая от механических характеристик взаимодействующих тел, не превышает 0,3 [1, с. 150–172; 3, с. 48; 4, с. 21]. Очевидным также является вывод о том, что чем меньше α, тем меньше коэффициент сжатия $\frac{|\gamma|}{2\pi} C(\alpha)$ и, соответственно, точнее получаемое приближенное аналитическое решение.

Таким образом, установлено, что принцип сжатых отображений применим к исследованию уравнения (5) и, соответственно, уравнения (1). При выполнении неравенства (15) для абсолютной величины безразмерного коэффициента $\gamma \leq 0,4$ интегро-дифференциальное уравнение (1) имеет единственное решение.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Шереметьев М. П.* Пластинки с подкрепленным краем. Львов, 1960.
2. *Панасюк В. В., Теплый М. И.* Розподіл напружань в циліндричних тілах при їх внутрішньому контакті // ДАН УРСР. Сер. А. 1971. № 6. С. 549–553.
3. *Андрейкив А. Е., Чернец М. В.* Оценка контактного взаимодействия трущихся деталей машин. Киев, 1991.
4. *Кравчук А. С., Чигарев А. В.* Механика контактного взаимодействия тел с круговыми границами. Минск, 2000.
5. *Панасюк В. В., Теплый М. Й.* Деякі контакктні задачі теоріі пружності. Київ, 1975.
6. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М., 1977.
7. *Антоневич А. Б., Радыно Я. В.* Функциональный анализ и интегральные уравнения. Минск, 1984.

Поступила в редакцию 23.12.2014.

Александр Степанович Кравчук – доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры био- и наномеханики механико-математического факультета БГУ.

Сергей Александрович Пронкевич – старший преподаватель кафедры теоретической механики машиностроительного факультета Белорусского национального технического университета.

Анжелика Ивановна Кравчук – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры веб-технологий и компьютерного моделирования механико-математического факультета БГУ.