

УДК 629.067

ПЕРЕВАРЮХА А. Ю.

ГРАНИЧНЫЙ КРИЗИС АТТРАКТОРА В МОДЕЛИРОВАНИИ ПРИЧИН ДЕГРАДАЦИИ ПРОМЫСЛОВЫХ БИОРЕСУРСОВ

Санкт-Петербургский институт информатики и автоматизации РАН

Рассмотрена вычислительная модель, соединяющая формализацию экологических особенностей репродуктивного цикла мигрирующих рыб и возможности исследования нелинейных эффектов в динамике популяций, подвергающихся антропогенному воздействию. Реализованная событийная компонента в непрерывном времени позволила учитывать изменения выживаемости поколения во взаимосвязи с факторами скорости роста. Дискретная составляющая траектории имеет две области притяжения и характеризуется обратной касательной бифуркации из-за воздействия промысла, что резко переводит популяцию с состояния нерегулярных флуктуаций при низкой численности. Дальнейшее возникновение граничного кризиса интервального аттрактора описывает распространенный сценарий необратимой деградации биоресурсов.

Введение

В основе моделей эксплуатируемых популяций рыб лежит формализация баланса воспроизводства и смертности от различных факторов. Естественная убыль на ранних этапах жизни очень велика и ее изменения критически сказываются на благополучии популяции крупных рыб. В ихтиологии возникло направление исследований, объясняющее закономерности изменения эффективности воспроизводства с целью определения классифицированных форм эмпирической зависимости на основе данных наблюдений для прогнозирования скорости восполнения промысловых запасов и подбора подходящего промыслового режима для особенностей нереста разных видов рыб. Нами ставится задача совершенствования математических методов системного анализа для выработки предосторожного подхода к использованию биоресурсов на основе организации непрерывно-событийной вычислительной структуры динамической системы.

Пополнением запаса будем считать численность поколения от одного нереста, дожившего до установленного момента. Для разных видов рыб этот момент может определяться достижением промысловых размеров или окончанием полового созревания. Определяющие итоговую форму зависимости механизмы действуют для рыб (называемых анадромными), которые заходят при необходимой температу-

ре в реки и нерестятся на ограниченных по площади русловых нерестилищах, как крупные лососевые и осетровые. При повышенной плотности икры на грунте наблюдается ряд негативных для выживаемости явлений, связанных с гипоксией и токсикозом. Ограниченность пригодных нерестовых участков характерна для волжской севрюги. В период масштабного гидростроительства возводились искусственные нерестилища. Для размножающихся в толще воды рыб успех репродуктивного процесса определяет благоприятное сочетание случайных флуктуаций условий среды, что снижает возможности применения детерминированных моделей. Сведения о воспроизводстве севрюги и горбуши показали, что наблюдается выраженная зависимость с двумя высокими диапазонами эффективности воспроизводства, между которыми существует промежуток численности запаса, при котором для популяции характерна низкая способность к восстановлению. С биологической точки зрения можно обосновать, что характер зависимости является следствием различия факторов смертности на разных этапах развития молоди осетровых рыб Каспийского моря.

Нелинейность в экологическом истолковании

Концепция моделей воспроизводства заключается в описании лимитирующих факторов

$v(S)$, действующих на нерестилищах при повышенной плотности запаса с репродуктивным потенциалом a : $R = aS / v(S)$. У. Рикером предложена экспоненциальная форма $v(S) = e^{bS}$, где b показатель действия лимитирующих факторов. Дж. Шепард обосновал применение зависимости по аналогии с логистической моделью: $v(S) = 1 + (S / K)^b$ где учтена критическая биомасса запаса K . Анализ моделей проводится в виде функциональных итераций $x_{n+1} = f(x_n)$. Для траектории итераций функции Рикера при возрастании a характерно изменение поведения от устойчивого равновесия R^* к хаосу через каскад удвоений М. Фейгенбаума [1]. Аналогично бифуркации удвоения периода цикла наблюдаются для модели Дж. Шепарда. Нами показано ранее, что бифуркационные параметры в двух моделях имеют противоположный смысл [2].

Аттрактор, возникающий в результате накопления каскада бифуркаций удвоения, является аналогом канторовского множества: замкнутого множества, не содержащего как внутренних, так и изолированных точек. Структурно хаотический аттрактор представляет собой результат объединения всё уменьшающихся субинтервалов, которые составляют точки отрезка за исключением несчетного числа неустойчивых точек всех периодов 2^n и их прообразов. Анализ образования и свойств канторовских множеств является отдельной задачей при исследовании нелинейных дискретных моделей. Существует теория универсальности изменения поведения отображений, удовлетворяющих критериям теоремы Д. Синжера [3] (SU -отображения).

Обычно для определения хаотичности используется свойство чувствительной зависимости от начальных условий, но на основе [4] можно ввести критерий хаотичности отображения отрезка $f: I \rightarrow I$ на основе топологической транзитивности: для всех открытых подмножеств $U \subseteq V, U \neq \emptyset$ и $Y \subseteq V, Y \neq \emptyset \exists n \geq 0$, выполняется $f^n(U) \cap Y \neq \emptyset$, то поведение хаотично.

Помимо хаотизации и эффекта экспоненциального разбегания близких траекторий в отображениях возможны другие нелинейные эффекты, связанные с окнами периодичности. Нелинейные эффекты в динамике ставят проблему сущностной интерпретации качествен-

ного поведения дискретных популяционных моделей, для которых возможна реализация бифуркаций.

Вычислительный базис новой модели

Физиологи выделяют стадии развития молодежи по мере формирования органов и характера передвижения. Изменения происходят по мере размерного развития за счет питания особей, скорость которого представим в уравнении обратно пропорциональной плотности:

$$\frac{dw}{dt} = \frac{g}{N^k(t) + l}, k < 1, \quad (1)$$

где g – параметр объема доступных кормовых ресурсов, l – учитывает ограничение скорости развития не связанное с плотностью. Важнейшие изменения, как переход на активное питание и начало самостоятельной миграции можно считать событиями. Реализуем модель со структурой, изменяемой при достижении некоторых выделяемых предикатами событий.

Предложение по формализации процесса формирования пополнения заключается в описании убыли начальной численности поколения от момента вылупления из икринок дифференциальным уравнением на промежутке времени $[0, T]$ в явном виде учитывающих разные факторы смертности и её изменение по мере развития особей:

$$\frac{dN}{dt} = \begin{cases} -(\alpha w(t)N(t) + U\beta)N(t), & t < \tau \\ -(\alpha_1 N(\tau)/w(\tau) + \beta)N(t), & t > \tau, w(t) < w_{D2} \\ -\alpha_2 w(t)N^2(t), & w(t) < w_{D3}, \end{cases} \quad (2)$$

где α – коэффициент зависящей от плотности компенсационной смертности; β – коэффициент нейтральной убыли. От абстрактного «репродуктивного потенциала» разумно перейти к естественному показателю средней плодовитости λ , оцениваемой по данным мониторинга. Начальные условия для уравнений (1), (2): $w(0) = w_0, N(0) = \lambda S$. Время τ – длительность первой стадии с эндогенным питанием, для севрюги в среднем составляет 8 суток. w_D – условный уровень развития, при достижении которого меняется действие факторов смертности, что интерпретируется экологией обитания молодежи при начале самостоятельной миграции. По данным о воспроизводстве волжской севрюги выявлено действие отрицатель-

ного эффекта группы. При низкой плотности уменьшается вероятность встреч на нерестилищах, что сильно сокращает продуктивность нереста. Правую часть (2) дополним $U(S)$ стремящейся к 1 $E(U)=[2,1)$:

$$U(S) = 1 + \exp(-cS^2), \quad (3)$$

где параметр $c < 1$ определяет степень выраженности эффекта. ОДУ (1), набор правых частей (2) с (3) формируют непрерывно-дискретную вычислительную структуру. Особенность дискретно-событийного подхода составляют переходы, которые происходят между состояниями моделируемой системы согласно графу всех возможных состояний. В применяемом методе на основе гибридного автомат переключение реализуется между *режимами изменения* состояния. Режимам изменения сопоставлен набор форм правой части системы ОДУ из (2), алгоритм контроля предикатов определяет выбор решаемой в данный момент задачи Коши с инициализацией новых начальных условий. Промежуток интервала уязвимости разделен на последовательность кадров гибридного модельного времени. Множество решений задач Коши для допустимых $S \in \mathbb{Z}^+$ определит интересующую нас зависимость.

Вычислительное исследование

В вычислительной среде получена неунимодальная «волнообразная» зависимость $R = \varphi(S)$ запаса и пополнения, о причинах наблюдения которой для крупных рыб писал Рикер в [6]. Зависимость (рис. 1) без учета действия промысловой смертности характеризуется четырьмя нетривиальными стационарными точками $R_i^*, i = 1 \dots 4$, пересечениями кривой с биссектрисой координатного угла $R = S$. График второй итерации $\varphi(\varphi(S)) \equiv \varphi^2(S)$ показал устойчивость четвертой точки наряду с устойчивостью $R = 0$. Для дискретной динамической системы $R_{n+1} = \varphi(R_n)$ возможны качественно различные варианты поведения в зависимости от вычисленного значения функции в двух точках локальных экстремумов $\min \varphi(R)$, $\max \varphi(R)$, $R_1^* < R < R_3^*$. Практический интерес представляет выполнение условий существование окрестности ε превышения пороговых значений: $\varphi(R_{\max} \pm \varepsilon) > R_3^*$, $\varphi(R_{\min} \pm \varepsilon) < R_1^*$. При выполнении условий фиксируется образование в фазовом пространстве объекта, отно-



Рис. 1. $\varphi(R)$ с четырьмя стационарными точками

сящегося к разновидности непритягивающих хаотических множеств.

В простейшем случае границей является неустойчивая «репеллерная» точка. Если для динамической системы существует два аттрактора при исследовании необходимо определить границу их областей притяжения. В нашем случае границу составляет множество прообразов неустойчивых точек R_i^* , которые не притягиваются ни к одному из аттракторов. Обе области притяжения в диапазоне $[R_1^*, R_3^*]$ представляются несвязным объединением малых интервалов.

Обсуждение вычислительных экспериментов

Получена ситуация образования канторовской структуры границы, которая представляет собой всюду разрывное множество точек, приводит к появлению длительного переходного хаотического режима, реализующегося до момента $\varphi^z(R_0) > R_3^*$ (или $\varphi^z(R_0) < R_1^*$), его достижение означает стремительное развитие неожиданной «вспышки» численности (рис. 2) популяции. Число итераций z пребывания траектории в переходном аperiодическом режиме чувствительно зависит от начальных условий [6] и соответственно от точности вычислений.

При рассмотрении в модели увеличения промысловой смертности изменяется конфигурация стационарных точек. Для динамической системы возможна обратная касательная бифуркация: слияние R_3^*, R_4^* с исчезновением стационарной точки, при сохранении оставшихся R_1^*, R_2^* . В таком случае возможны два варианта, определенные смещающимся значением $\varphi_1(R_{\min})$ в точке минимума измененной зависимости (рис. 3). При выполнении условия $\varphi_1(R_{\min}) > R_1^*$ траектории притягиваются к интервальному аттрактору, неустойчивая точ-

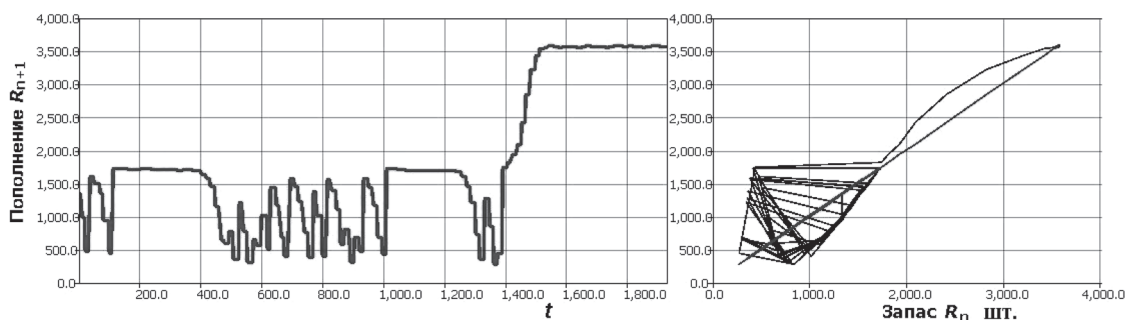


Рис. 2. Выход из режима переходного хаоса (временная и фазовая диаграммы)

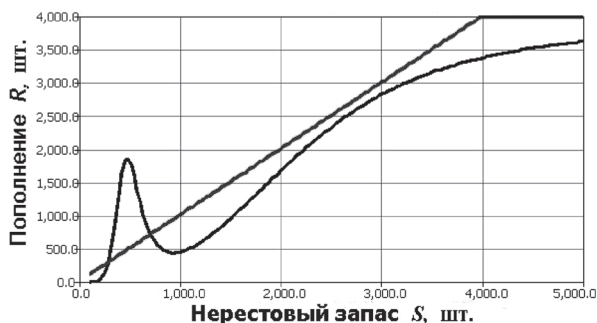


Рис. 3. $\varphi(R)$ после обратной касательной бифуркации

ка R_1^* служит границей с областью притяжения тривиального равновесия (рис. 4). Тогда после обратной касательной бифуркации траектория моментально переходит к устойчивому аperiodическому режиму, что соответствует колебаниям в диапазоне низкой численности популяции без возможности восстановления. Подобная ситуация из-за последствий длительного перелова наблюдается сейчас с осетровыми рыбами Каспийского моря, где промысел не был остановлен своевременно.

В момент достижения $\varphi_1(R_{\min}) < R_1^*$ происходит граничный кризис интервального аттрактора [7]. При подобном кризисе аттрактор соприкасается с границей, теряет свойство инвариантности при сохранении локально-несвязной структуры у вновь появившегося непритя-

гивающего хаотического множества типа «хаотическое седло» по классификации Ц. Гребоджи [8]. Единственным аттрактором остается тривиальное равновесие, что описывает неминуемую деградацию популяции после короткого переходного аperiodического режима флуктуаций.

Заключение

Разработанная модель формирования поколений популяций обладает рядом дополнительных возможностей по сравнению с известными аналогами. В частности свойства непрерывно-дискретной динамической системы позволят описывать зафиксированные в ряде случаев [9] для промысловых популяций горбуши тихоокеанского побережья Канады изменения, связанные с существованием двух уровней численности популяции: низкой и высокой. При низкой численности популяция испытывает резкие флуктуации, но существует перспектива восстановления высокой численности при прекращении промысла. Лососевые и осетровые виды существенно отличаются длительностью жизненного цикла, однако имеют сходные экологические условия воспроизводства, что позволяет проводить сравнение данных промысловой статистики. В режиме переходного хаоса мы не можем предсказать, к какому

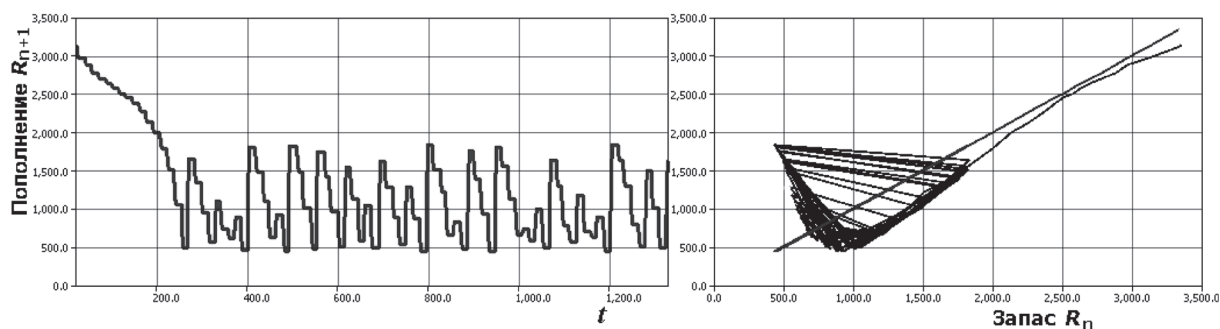


Рис. 4. Динамика в интервальном аттракторе (временная и фазовая диаграммы)

из альтернативных аттракторов в результате устремится траектория и данное свойство определяется как неопределенность относительно асимптотического состояния динамической системы.

При исследовании модели установлена возможность трансформации двух различных хаотических режимов при касательной бифуркации, переходного и устойчивого, связанного с интервальным аттрактором. Данная трансформация интерпретируется как последствие усиления промыслового давления и влечет длительное пребывание популяции в неблаго-

приятном для промысла состоянии. Реализация граничного кризиса аттрактора, теряющего свойство инвариантности, описывает сценарий необратимой деградации популяции, для которой уже необходимы меры по искусственному сохранению генофонда. Подобная ситуация стремительного сокращения численности нерестовой части произошла с волжской севрюгой несмотря на организованное искусственное заводское воспроизводство, с 2010 г. включенной в «Красную книгу».

*Работа поддержана
грантом РФФИ № 14-07-00066,
руководитель Переварюха А. Ю.*

Литература

1. **Feigenbaum M. J.** Universal behavior in nonlinear systems / M. J. Feigenbaum // *Physica D.*– 1983.– Vol. 7, № 1–3.– P. 16–39.
2. **Perevaryukha A. Yu.** Cyclic and unstable chaotic dynamics in models of two populations of sturgeon fish / A. Yu Perevaryukha. // *Numerical Analysis and Applications.*– 2012.– Vol. 5, № 3.– P. 254–264.
3. **Singer D.** Stable orbits and bifurcations of the maps on the interval / D. Singer // *SIAM journal of applied math.*– 1978.– V. 35.– P. 260–268.
4. **Vellekoop M.** On intervals, transitivity = chaos / M. Vellekoop, R. Berglund // *The American Mathematical Monthly.*– 1994.– Vol. 101, № 4.– P. 353–355.
5. **Ricker W. E.** Stock and recruitment / W. E. Ricker // *Journal Fisheries research board of Canada.*– 1954.– Vol. 11, № 5.– P. 559–623.
6. **Paar V.** Sensitive dependence of lifetimes of chaotic transient on numerical accuracy for a model with dry friction and frequency dependent driving amplitude / V. Paar, N. Pavin // *Modern Physics Letters B.*– 1996.– Vol. 10, № 4.– P. 153–159.
7. **Grebogi C.** Chaotic attractors in crisis / C. Grebogi, E. Ott, J. A. Yorke // *Physical Review Letters.*– 1982.– Vol. 48, № 22.– P. 1507–1510.
8. **Grebogi C.** Chaos, strange attractors and fractal basin boundaries in nonlinear dynamics / C. Grebogi, E. Ott, J. A. Yorke // *Science.*– 1987.– Vol. 238, № 4827.– P. 632–638.
9. **Minto C.** Survival variability and population density in fish populations / C. Minto, R. A. Myers, W. Blanchard // *Nature.*– 2008.– Vol. 452.– P. 344–348.

Поступила 25.08.15

UDC 629.067

Perevarukha A. Yu.

BOUNDARY CRISIS OF ATTRACTOR IN THE SIMULATION CAUSES OF THE DEGRADATION OF COMMERCIAL BIORESOURCES

The article describes the computational model that unites the formalization of ecological features of the reproductive cycle of anadromous fish and the possibility of studying nonlinear effects in the population dynamics under anthropogenic impact. Event-driven component implemented in continuous time has allowed us to take into account changes in the survival generation in interrelation with the factors of growth rate. Discrete component trajectory of the dynamical system has two areas of attraction and is characterized by the reverse tangent bifurcation due to the impact of fishing, which dramatically transforms the population with the condition of irregular fluctuations in low numbers. The further emergence of «boundary crisis» for the interval attractor describes a common scenario an irreversible degradation of biological resources.