МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
Белорусский национальный технический университет

Кафедра «Высшая математика № 1»

МАТЕМАТИКА

ПРАКТИКУМ

В 4 частях

Часть 3

Минск
БНТУ
2015

УДК 51(076.5)
ББК 22.1я7
М34

Авторы:
О. Р. Габасова, А. В. Грекова, О. Л. Зубко, И. М. Мартыненко, Н. А. Микулик, Г. И. Лебедева, Г. А. Романюк, Е. А. Федосик

Рецензенты:
зав. каф. высшей математики БГУИР, *В. В. Цегельник*;
доцент БГУ, канд. физ.-мат. наук, доцент *А. Н. Исаченко*

М34 **Математика**: практикум : в 4 ч. / О. Р. Габасова и [и др.]. – Минск : БНТУ, 2013 – .– Ч.3. – 2015. – 107 с.
ISBN 978-985-550-481-9 (Ч. 3).

Практикум написан в соответствии с действующей программой курса «Математика» для студентов инженерно-технических специальностей БНТУ.

Практикум состоит из 17 занятий по разделам «Ряды», «Теория функций комплексного переменного», «Операционное исчисление», «Уравнения в частных производных». Каждое занятие содержит задания для аудиторной и самостоятельной работы студентов. Задания снабжены ответами, что позволит студентам проконтролировать правильность решений задач. Пособие содержит также типовые расчеты по указанным разделам, которые могут быть использованы и для индивидуальных заданий студентов, и для проведения текущего контроля знаний студентов.

Практикум предназначен для студентов дневной и заочной форм обучения и для преподавателей.

УДК 51(076.5)
ББК 22.1я7

ISBN 978-985-550-481-9 (Ч. 3)
ISBN 978-985-550-341-6

ОГЛАВЛЕНИЕ

Занятие 1

ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ. ПРИЗНАКИ СХОДИМОСТИ РЯДОВ С ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ ЧЛЕНАМИ

Аудиторные задания

1.1. Установить, сходятся ли указанные ряды, исходя из определения суммы ряда:

1) $1+\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\cdots+\frac{8}{27}+\cdots$; 2) $2+6+10+14+18+\cdots$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+3)}$.

1.2. Установить, выполняется ли необходимый признак сходимости ряда:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{2n+2}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{n+1}{n+2}}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{5}{n}\right)^{n}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{(n+1)^3}$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\cos\frac{1}{n}$; 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+2}{n+1}$.

1.3. Установить, сходятся ли ряды, используя признаки сравнения:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n+1}{2^n}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+6}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+5^n}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^k}{1+2^{2k}}$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^2+1}$; 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n^2+1}}$.

1.4. Установить, сходятся ли ряды, используя признаки Даламбера и Коши (радикальный или интегральный):

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{(n+1)!}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$; 5) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^n}$; 6) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$;

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2}$; 8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2+2n+2}$.

Домашние задания

1.5. Установить, сходятся ли указанные ряды, исходя из определения суммы ряда:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{3^{n-1}}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+2)}$.

1.6. Установить, сходятся ли указанные ряды:

1) $\sum \dfrac{10n+1}{10n+5}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+2}{n^2+n+1}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{3^n+n}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{7^n+1}{5^n}$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \arcsin\dfrac{1}{\sqrt{n}}$; 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} tg\dfrac{1}{n\sqrt{n}}$;

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(n+4)!}$; 8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{5n+6}{3n-4}\right)^n$; 9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\ln^2 n}{n}$;

10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+2}{n\cdot 4^n}$; 11) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{n!}$; 12) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{2}{5}\right)^n$.

Ответы:

1.1 1) Сходится; 2) Расходится; 3) Сходится.

1.2 1) Нет, ряд расходится; 2) Нет, ряд расходится; 3) Нет, ряд расходится; 4) Да, выполняется; 5) Нет, ряд расходится; 6) Нет, ряд расходится.

1.3 1) Расходится; 2) Сходится; 3) Сходится; 4) Сходится; 5) Расходится; 6) Сходится.

1.4 1) Сходится; 2) Расходится; 3) Расходится; 4) Расходится; 5) Сходится; 6) Расходится; 7) Сходится; 8) Сходится.

1.5 1) Сходится; 2) Сходится.

1.6 1) Расходится; 2) Расходится; 3) Сходится; 4) Расходится; 5) Расходится; 6) Сходится; 7) Сходится; 8) Сходится; 9) Расходится; 10) Сходится; 11) Сходится; 12) Сходится.

Занятие 2

ЗНАКОПЕРЕМЕННЫЕ И ЗНАКОЧЕРЕДУЮЩИЕСЯ РЯДЫ. ПРИЗНАК ЛЕЙБНИЦА. АБСОЛЮТНАЯ И УСЛОВНАЯ СХОДИМОСТЬ

Аудиторные задания

2.1 Исследовать на абсолютную и условную сходимость следующие ряды:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(3n-1)!}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n^2-1}{5+n^2}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(3n+1)}{n(n+2)}$;

4) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n\ln^2 n}$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$; 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{3n}{3n+1}\right)^n$;

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+3^n}$; 8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$; 9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos na}{n!}$;

10) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln n}$.

Домашние задания

2.2 Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряды:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^2}{2^n}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{10n+1}{10n-1}\right)$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(6n-5)}{10^n}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n}$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{1}{n^2}$; 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\ln(n+1)}$;

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{4n}{5n+3}\right)^n$.

Ответы:

2.1 1) Сходится абсолютно; 2) Расходится; 3) Сходится условно; 4) Сходится абсолютно; 5) Сходится условно; 6) Расходится; 7) Сходится абсолютно; 8) Сходится условно; 9) Сходится абсолютно; 10) Сходится условно.

2.2 1) Сходится абсолютно; 2) Расходится; 3) Сходится абсолютно; 4) Сходится условно; 5) Сходится абсолютно; 6) Сходится условно; 7) Сходится абсолютно.

Занятие 3

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

Аудиторные задания

3.1 Найти область сходимости ряда:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{2x-3}{4x+5}\right)^n$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)x^{2n-1}}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot 2^{nx}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot 3^n (x-5)^n}$; 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$;

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 3n^2 \cdot x^{n^2}$; 8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{n\cdot 9^n}$; 9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{x}{x+1}\right)^n$;

10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+x^{2n}}$; 11) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n e^{-nx}$; 12) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}$;

13) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot \sin\frac{x}{3^n}$.

3.2 Можно ли почленно интегрировать ряд в области его сходимости:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2+n^2}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{3^n}$.

3.3 Можно ли почленно дифференцировать ряд в области его сходимости:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2+n^2}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{3^n}$.

Домашние задания

3.4 Найти область сходимости ряда:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^x}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n \cdot e^{nx}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n \cdot x^n}{n^3 + x^{2n}}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^{3n+3}}{(2n+1)8^{n+1}}$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 8^n \cdot x^{3n} \operatorname{arctg} \dfrac{x}{n}$; 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 x}$;

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n} \cdot x^n}$; 8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{100} \cdot \left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^n$; 9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n \sin^n x}{n^2}$.

3.5 Можно ли почленно интегрировать ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{x^2 + n\sqrt{n}}$.

3.6 Можно ли почленно дифференцировать ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx}{n^7}$.

Ответы:

3.1 1) $\left(-\infty; -\dfrac{5}{4}\right) \cup \left(-\dfrac{5}{4}; +\infty\right)$; 2) $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$; 3) $(-\infty; 0)$;
4) $(0; +\infty)$; 5) $\left(-\infty; 4\dfrac{2}{3}\right) \cup \left(5\dfrac{1}{3}; +\infty\right)$; 6) $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$;
7) $\left(-\infty; -\dfrac{1}{3}\right) \cup \left(\dfrac{1}{3}; +\infty\right)$; 8) $-2; 4$; 9) $\left(-\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$;
10) $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$; 11) $(0; +\infty)$; 12) $(-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$;
13) $(-\infty; +\infty)$.

3.2 1) Да; 2) Да.
3.3 1) Да; 2) Да.

3.4 1) $(1; +\infty)$; 2) $(-\infty; 0)$; 3) $(-\infty; +\infty)$; 4) $[-2; 2)$; 5) $\left[-\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right)$;
6) $(0; +\infty)$; 7) $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$; 8) $(-\infty; 0)$; 9) $|x - \pi k| \le \dfrac{\pi}{6}, \quad k \in z$.

3.5 Да.
3.6 Да.

Занятие 4

СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

Аудиторные задания

4.1 Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n \quad |x| < 1.$

4.2 Найти область сходимости степенного ряда:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}(x+1)^n$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}(x+4)^n$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}(x-1)^n$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (n\,x)^n$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n!} x^n$; 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^{2n}$;

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-3)8^n} x^{2n}$; 8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + 3^n} x^n$; 9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}\left(\frac{x+1}{2}\right)^n$;

10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} x^n$.

4.3 Найти сумму ряда:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{a^n} x^{n-1}$, если $|x| < a$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)a^n}$, если $-a \le x < a$.

Домашние задания

4.4 Найти область сходимости степенного ряда:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n (x+2)^n}{\sqrt{n}}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n} + 2^n}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n5^n (x-3)^n$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2}{n!}(x+2)^n$; 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n\sqrt{n+1}}$;

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}\left(\frac{x-1}{2}\right)^n$; 8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{100^n (x+2)^n}{n!}$; 9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^{n^2} \cdot (x+2)^n$;

10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n3^n x^n$.

4.5 Почленно дифференцируя или интегрируя данный степенной ряд, найти его сумму.

Указание. В некоторых примерах сумму ряда следует домножить или разделить на x, x^2 и т. д.

1) $\dfrac{1\cdot 2}{100}+\dfrac{2\cdot 3}{1000}+\dfrac{3\cdot 4}{10000}+\dfrac{4\cdot 5}{100000}+\cdots,\quad |x|<10$;

2) $x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^4}{4}+\cdots,\quad |x|<1$;

3) $\dfrac{x^2}{1\cdot 2}-\dfrac{x^3}{2\cdot 3}+\dfrac{x^4}{3\cdot 4}-\dfrac{x^5}{4\cdot 5}+\cdots,\quad |x|<1$;

4) $\dfrac{1}{5}+\dfrac{2x}{5^2}+\dfrac{3x^2}{5^3}+\dfrac{4x^3}{5^4}+\cdots,\quad |x|<5$;

5) $x+\dfrac{x^2}{2\cdot 2}+\dfrac{x^3}{3\cdot 2^2}+\dfrac{x^4}{4\cdot 2^3}+...,\quad |x|<2$.

Ответы:

4.1 $S(x)=\dfrac{1}{x+1}$.

4.2 1) $-\infty<x<\infty$; 2) $3<x<5$; 3) $1<x<3$; 4) $x=0$; 5) Расходится; 6) $-1<x<1$; 7) $-2<x<2$; 8) $-3<x<3$; 9) $-1<x<3$; 10) $-1\le x\le 1$.

4.3 1) $\dfrac{a}{(a-x)^2}$; 2) $\dfrac{a\ln a}{(a-x)}-x$.

4.4 1) $\left(-\dfrac{1}{e};\dfrac{1}{e}\right)$; 2) $\left(-2,5;-1,5\right]$; 3) $\left(-2;2\right)$; 4) $\left(2,8;3,2\right)$; 5) $x=-2$; 6) $[1;3]$; 7) $\left(-1;3\right)$; 8) $\left(-\infty;+\infty\right)$; 9) $\left(-\infty;+\infty\right)$; 10) $\left(-\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{3}\right)$.

4.5 1) $\dfrac{20}{(10-x)^3}$; 2) $-\ln(1-x)$; 3) $(x+1)\ln(x+1)-x$; 4) $\dfrac{5}{(5-x)^2}$; 5) $2\ln\dfrac{2}{2-x}$.

Занятие 5

РЯДЫ ФУРЬЕ

Аудиторные задания

5.1 Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)$ на интервале $(-\pi, \pi)$:

1) $f(x)=\begin{cases} -x, & -\pi < x \le 0 \\ 2x, & 0 < x < \pi \end{cases}$; 2) $f(x)=\sin\dfrac{x}{2}$;

3) $f(x)=|x|$; 4) $f(x)=\pi + x$.

5.2 Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)$ на интервале $(0, \pi)$:

1) по косинусам, если $f(x)=\begin{cases} 1, & 0 < x \le 1 \\ 0, & 1 < x < \pi \end{cases}$;

2) по синусам, если $f(x)=\cos\dfrac{x}{\pi}$;

3) по косинусам, если $f(x)=\begin{cases} 1-2x, & 0 < x \le \dfrac{1}{2} \\ 0, & \dfrac{1}{2} < x < \pi \end{cases}$.

5.3 Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)$ на интервале $(-l, l)$:

1) $f(x)=\begin{cases} 1, & -1 < x \le 0 \\ x, & 0 < x < 1 \end{cases}$; 3) $f(x)=\begin{cases} -1, & -1 < x \le 0 \\ 1, & 0 < x < 1 \end{cases}$.

2) $f(x)=e^x$, $l=\dfrac{1}{2}$;

5.4 Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)$, заданную на интервале $(0, l)$:

1) по косинусам, если $f(x)=1-x, \quad l=1$;

2) по косинусам, если $f(x)=x+x^2, \quad l=1$;

3) по синусам, если $f(x)=1+x, \quad l=2$;

4) по синусам, если $f(x)=x^2, \quad l=1$.

Домашние задания

5.5 Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)$ на интервале $(-\pi, \pi)$:

1) $f(x)=\begin{cases} 5x, -\pi < x \le 0 \\ -x, \ 0 < x < \pi \end{cases}$; 2) $f(x)=\begin{cases} -3, -\pi < x \le 0 \\ 1, \quad 0 < x < \pi \end{cases}$;

3) $f(x)=e^{-x/2}$.

5.6 Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)$ на интервале $(0, \pi)$:

1) по косинусам, если $f(x)=\begin{cases} 1-x, 0 < x < 1 \\ 0 \ , \ 1 \le x < \pi \end{cases}$;

2) по синусам, если $f(x)=\cos \pi x$;

3) по синусам, если $f(x)=\begin{cases} 1, \quad 0 < x < \pi/2 \\ 0, \ \pi/2 < x < \pi \end{cases}$.

5.7 Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)$ на интервале $(-l, l)$:

1) $f(x)=\begin{cases} 0, -3 < x < 0 \\ x, \ 0 < x < 3, \end{cases} l=3$; 2) $f(x)=e^{-x}, l=1$;

3) $f(x)=|x|, l=2$.

5.8 Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)$, на интервале $(0, l)$:

1) по косинусам, если $f(x)=2+3x, \ l=3$;

2) по синусам, если $f(x)=x, l=3$;

3) по синусам, если $f(x)=x-\dfrac{x^2}{2}, l=2$.

Ответы:

5.1 1) $\dfrac{3}{4}\pi-\dfrac{6}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos(2n-1)x}{2n-1}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}\sin nx}{n}$;

2) $\dfrac{8}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{n\sin nx}{4n^2-1}$; 3) $\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}$;

4) $\pi+2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$.

5.2 1) $\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n}\cos nx\right)$;

2) $2\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{1-(n\pi)^2}\left((-1)^n\cos 1-1\right)\sin nx$;

3) $\frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{2}+16\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin n/4}{n}\right)^2\cos nx\right)$.

5.3 1) $\frac{3}{4}-\frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\left(\pi(2n+1)x\right)}{(2n-1)^2}-\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(\pi nx)}{n}$;

2) $2Sh\frac{1}{2}\left(1+4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1/2\left(\cos(2\pi nx)-\pi n\sin(2\pi nx)\right)}{1+(2\pi n)^2}\right)$;

3) $\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin\left((2n+1)\pi x\right)$.

5.4 1) $\frac{1}{2}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)\pi x}{(2n+1)^2}$;

2) $\frac{5}{6}+\frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3(-1)^n-1}{n^2}\cos n\pi x$; 3) $\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-3(-1)^n}{n}\sin\frac{n\pi x}{2}$;

4) $\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{2}{(\pi n)^2}\left((-1)^n-1\right)-(-1)^n\right)\sin n\pi x$.

5.5 1) $-\frac{3}{2}\pi+\frac{12}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{2n+1}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\sin nx}{n}$;

2) $-1+\frac{8}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}$;

3) $\frac{2}{\pi}\mathrm{sh}\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4n^2+1}\left(2\cos nx+4n\sin nx\right)\right)$.

5.6 1) $\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2}+4\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin n/2}{n}\right)^2\cos nx\right)$;

2) $\dfrac{2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{\pi^2-n^2}\Big((-1)^n\cos\pi^2-1\Big)\sin nx$; 3) $\dfrac{2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1-\cos\dfrac{n\pi}{2}}{n}\sin nx$.

5.7 1) $\dfrac{3}{4}-\dfrac{6}{\pi^2}\cdot\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{\left(2n+1\right)^2}\cos\dfrac{(2n+1)\pi x}{3}-\dfrac{3}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}\sin\dfrac{n\pi x}{3}$;

2) $2\operatorname{sh}1\left(\dfrac{1}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\cos n\pi x+n\pi\sin n\pi x}{1+(\pi n)^2}\right)$;

3) $1-\dfrac{8}{\pi^2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2n+1)^2}\cos\dfrac{(2n+1)\pi x}{2}$.

5.8 1) $\dfrac{13}{2}-\dfrac{36}{\pi^2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2n+1)^2}\cos\dfrac{(2n+1)\pi x}{3}$;

2) $\dfrac{6}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{n}\sin\dfrac{n\pi x}{3}$; 3) $\dfrac{16}{\pi^3}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2n+1)^3}\sin\dfrac{(2n+1)\pi x}{2}$.

Занятие 6

РАЗЛОЖЕНИЕ ФУНКЦИИ В РЯД ТЕЙЛОРА, МАКЛОРЕНА. ПРИМЕНЕНИЕ РЯДОВ В ПРИБЛИЖЕННЫХ ВЫЧИСЛЕНИЯХ

Аудиторные задания

6.1 Найти три первых, отличных от нуля, члена разложения в ряд Тейлора функции $f\left(x\right)$ по степеням $x-x_0$:

1) $f\left(x\right)=\ln\left(1+e^x\right),\quad x_0=0$; 2) $f\left(x\right)=\ln\cos x,\quad x_0=0$;

3) $f\left(x\right)=x\sqrt{x},\quad x_0=3$; 4) $f\left(x\right)=\dfrac{x}{3-x},\quad x_0=1$;

5) $f\left(x\right)=\operatorname{ctg}x,\quad x_0=\dfrac{\pi}{4}$; 6) $f\left(x\right)=\cos^2 x,\quad x_0=\dfrac{\pi}{3}$;

7) $f\left(x\right)=\dfrac{1}{x},\quad x_0=-2$; 8) $f\left(x\right)=2+\cos x,\quad x_0=\dfrac{\pi}{4}$;

9) $f\left(x\right)=\sin 3x, \quad x_0=-\dfrac{\pi}{3}$; 10) $f\left(x\right)=xe^{x}, \quad x_0=1$.

6.2 Разложить функции в ряд Маклорена, используя разложения основных элементарных функций:

1) $f\left(x\right)=e^{2x}$; 2) $f\left(x\right)=\sqrt[3]{8-x^3}$; 3) $f\left(x\right)=\sin^2 x$;

4) $f\left(x\right)=\dfrac{x}{4+x^2}$; 5) $f\left(x\right)=\dfrac{x}{3+4x}$; 6) $f\left(x\right)=\dfrac{1}{\sqrt{9+x^2}}$;

7) $f\left(x\right)=\operatorname{arctg} x$; 8) $f\left(x\right)=\ln\left(1+\dfrac{x}{2}\right)$; 9) $f\left(x\right)=\left(1-x\right)e^{-2x}$;

10) $f\left(x\right)=x\cos 2x$.

6.3 **а)** С помощью рядов вычислить приближенно с заданной точностью ε:

1) $1/\varepsilon, \quad \varepsilon=0{,}0001$; 2) $\ln 0{,}98, \quad \varepsilon=0{,}0001$;

3) $\sin\dfrac{\pi}{10}, \quad \varepsilon=0{,}0001$; 4) $\sqrt[3]{60}, \quad \varepsilon=0{,}001$;

5) $\cos 25°, \quad \varepsilon=0{,}0001$.

б) С помощью рядов вычислить приближенно определенные интегралы с указанной точностью ε:

6) $\int\limits_0^{0{,}5} x^5 \sin x dx, \quad \varepsilon=0{,}0001$; 7) $\int\limits_{0{,}1}^{0{,}2} \dfrac{e^{-x}}{x^2}dx, \quad \varepsilon=0{,}001$;

8) $\int\limits_0^{0{,}5} \dfrac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}, \quad \varepsilon=0{,}0001$; 9) $\int\limits_0^{0{,}5} \dfrac{dx}{1+x^4}, \quad \varepsilon=0{,}001$;

10) $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/4} \dfrac{\cos x}{x}dx, \quad \varepsilon=0{,}0001$.

6.4 Найти с помощью рядов решения дифференциальных уравнений, удовлетворяющих данным начальным условиям:

1) $y''-xy'+y-1=0, \quad y\left(0\right)=y'\left(0\right)=0$;

2) $y''+xy=0, \quad y\left(0\right)=y'\left(0\right)=1$;

3) $y'+y=x+1, \quad y\left(0\right)=1$;

4) $xy''+y=0, \quad y\left(0\right)=y'\left(0\right)=1$;

5) $y' = 1 - xy, \quad y(0) = 0$;

6) $y'' - \sin xy' = 0, \quad y(0) = 0, y'(0) = 1$;

7) $y'' - \left(1 + x^2\right) y = 0, \quad y(0) = -2, y'(0) = 2$;

8) $xy' = y^2 - 3y + 4x^2 + 2, \quad y(0) = 2$;

9) $y' = e^y + xy, \quad y(0) = 0$;

10) $y'' = x^2 y - y', \quad y(0) = 1, y'(0) = 0$.

Домашние задания

6.5 Разложить функцию $f(x) = \sqrt[4]{x}$ в ряд Тейлора по степеням $x - 1$.

6.6 Найти три первых, отличных от нуля, члена разложения в ряд Тейлора функции $f(x) = \operatorname{ctg} x$ в точке $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$.

6.7 Разложить $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{16 + x^2}}$ в ряд Маклорена, используя разложения основных элементарных функций.

6.8 С помощью рядов вычислить приближенно значения функций с точностью ε:

1) $\cos 10°, \quad \varepsilon = 0{,}0001$; 2) $\sqrt[3]{70}, \quad \varepsilon = 0{,}001$;

3) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{e}}, \quad \varepsilon = 0{,}0001$; 4) $\ln 5, \quad \varepsilon = 0{,}00001$.

6.9 С помощью рядов вычислить приближенно определенный интеграл с указанной точностью ε:

$$\int_0^{0,5} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx, \quad \varepsilon = 0{,}001.$$

6.10 Найти четыре члена разложения в ряд решения ДУ при заданных начальных условиях

1) $xy'' + y' + xy = 0, \quad y(0) = 1, y'(0) = 0$;

2) $y' = y^2 + x^3 = 0, \quad y(0) = \dfrac{1}{2}$.

Ответы:

6.1 1) $\ln 2+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{8}+\ldots$; 2) $\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{12}-\frac{x^6}{20}+\ldots$;

3) $3\sqrt{3}+\frac{3\sqrt{3}}{2}(x-3)+\frac{\sqrt{3}}{2^2}(x-3)^2+\ldots$;

4) $\frac{1}{3}+\frac{3}{2^2}(x-1)+\frac{3}{2^3}(x-1)^2+\ldots$;

5) $1-2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{4}{2!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2+\ldots$;

6) $\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{2\cdot 1!}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{2\sqrt{3}}{3!}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^2+\ldots$;

7) $-\frac{1}{2}\left(1+\frac{x+2}{2}+\frac{(x+2)^2}{4}+\ldots\right)$;

8) $2+\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1-\frac{1}{1!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{2!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2+\ldots\right)$;

9) $-\frac{3}{1!}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\frac{3^3}{3!}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)^3-\frac{3^5}{5!}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)^5+\ldots$;

10) $e\left(1+2(x-1)+3(x-1)^2+\ldots\right)$.

6.2 1) $1+2x+\frac{(2x)^2}{2!}+\ldots+\frac{(2x)^n}{n!}+\ldots$;

2) $2-2\left(\frac{1}{3}\left(\frac{x}{2}\right)^3+\frac{2}{3^2\cdot 2!}\left(\frac{x}{2}\right)^6+\ldots+\frac{2\cdot 5(3n-4)}{3^n\cdot n!}\left(\frac{x}{2}\right)^{3n}\right)$;

3) $\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(2x)^{2n}}{(2n)!}$; 4) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{4^{n+1}}$; 5) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{4^n x^{n+1}}{3^{n+1}}$;

6) $\frac{1}{3}\left(1-\frac{x^2}{18}+\frac{1\cdot 3}{1\cdot 18^2}x^4+\ldots+\frac{(-1)^n 1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{n!18^n}x^{2n}\right)$;

7) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$; 8) $\dfrac{x}{2}-\dfrac{x^2}{2^2\cdot 2}+\ldots+(-1)^n\dfrac{x^n}{2^n\cdot n}+\ldots$;

9) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2^n x^n}{n!}-\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{2^n x^{n+1}}{n!}$; 10) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{(2n)!}$.

6.3 а) 1) 0,3679; 2) – 0,0202; 3) 0,3091; 4) 3,915; 5) 0,9063; **б)** 6) 0,00108; 7) 32,864; 8) 0,4926; 9) 0,494; 10) 0,3230.

6.4 1) $y=\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}+\dfrac{3x^6}{6!}+\ldots$; 2) $y=1+x-\dfrac{x^3}{3!}-\dfrac{2x^4}{4!}+\ldots$;

3) $y=1+\dfrac{x^2}{2!}-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^4}{4!}-\ldots$; 4) $y=x-\dfrac{x^2}{(1!)^2\,2}+\dfrac{x^3}{(2!)^2\,3}-\dfrac{x^4}{(3!)^2\,4}+\ldots$;

5) $y=x-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^5}{3\cdot 5}-\ldots$; 6) $y=x+\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{2x^5}{5!}+\ldots$;

7) $y=-2+2x-x^2+\ldots$; 8) $y=2+4x^2+\dfrac{16}{3}x^4+\ldots$;

9) $y=x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{2x^3}{3}+\ldots$; 10) $y=1+\dfrac{2x^4}{4!}-\dfrac{2x^5}{5!}+\ldots$.

6.5 $1+\dfrac{1}{4}(x-1)-\dfrac{1}{4^2}\cdot\dfrac{3}{2!}(x-1)^2+\dfrac{1\cdot 3\cdot 7}{4^3\cdot 3!}(x-1)^3+\ldots$.

6.6 $1-2\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)+\dfrac{2^2}{2!}\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)^2-\dfrac{2^3}{3!}\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)^3+\ldots$.

6.7 $4\left(1-\dfrac{1}{2\cdot 16}x^2+\dfrac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!16^2}x^4-\dfrac{1\cdot 3\cdot 5}{3^3\cdot 3!16^3}x^6+\ldots\right)$.

6.8 1) 0,9849; 2) 4,121; 3) 0,7788; 4) 1,6099.

6.9 0,487.

6.10 1) $y=1-\dfrac{x^2}{2^2}+\dfrac{x^4}{2^2\cdot 4^2}-\dfrac{x^6}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}+\ldots$;

2) $y=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}x+\dfrac{1}{8}x^2+\dfrac{1}{16}x^3+\ldots$.

Занятие 7

ФУНКЦИЯ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ. ПРЕДЕЛ. ПРОИЗВОДНАЯ. УСЛОВИЯ КОШИ–РИМАНА

Аудиторные задания

7.1 Описать области, заданные следующими соотношениями:

1) $0 < \operatorname{Re}(2z) < 1$; 2) $-2 < \operatorname{Im}\left(\frac{z}{3}\right) < 2$; 3) $|z - i| > 2$;

4) $1 < |z + 4| < 3$; 5) $|z + i| > 1$; 6) $2 < |z + i| < 5$.

7.2 Найти действительную и мнимую части функции $f(z)$:

1) $f(z) = 2iz + \overline{z}$; 2) $f(z) = z\overline{z} + 4iz^2$;

3) $f(z) = \operatorname{Re}\left(z^2 - i\right) + i\operatorname{Im}\left(\frac{1}{2}z + 4\right)$;

4) $f(z) = \operatorname{Im}\left(\frac{z}{\overline{z}}\right) + 2i\operatorname{Re}\left(4i\overline{z}\right)$.

7.3 Найти образы указанных точек при заданных отображениях:

1) $z_0 = i;\ \omega = z^2 - i$; 2) $z_0 = -i;\ \omega = e^{2z}$;

3) $z_0 = \frac{1-i}{2};\ \omega = (z + i)^2$; 4) $z_0 = \frac{\pi i}{4};\ \omega = \sin(iz)$;

5) $z_0 = 1 - 5i;\ \omega = \cos z$; 6) $z_0 = -2i;\ \omega = \operatorname{Ln} z$.

7.4 Вычислить следующие пределы:

1) $\lim\limits_{z \to -2i} \frac{z^2 + zi + 2}{z + 2i}$; 2) $\lim\limits_{z \to 0} \frac{\cos z}{\operatorname{ch}(iz)}$;

3) $\lim\limits_{z \to \frac{\pi i}{4}} \frac{\sin(iz)}{\operatorname{ch} z + i\operatorname{sh} z}$; 4) $\lim\limits_{z \to \pi/2} \frac{e^{2iz} + 1}{e^{-iz} + 1}$.

7.5 Проверить выполнение условий Коши-Римана и в случае их выполнения найти $f'(z)$:

1) $f(z) = e^{z/2}$; 2) $f(z) = \operatorname{ch} z$;

3) $f(z)=4\left(x^2-2\right)-4\left(y^2+4\right)+i(8xy-5)$;

4) $f(z)=x^2+14xy+y^2-8+i\left(2xy-7x^2+7y^2+4\right)$.

7.6 Проверить гармоничность приведенных функций и найти, когда это возможно, аналитическую функцию по данной ее действительной или мнимой части:

1) $u(x,y)=x^3-3xy^2$; 3) $u(x,y)=x^2-y^2+5x+y-\dfrac{y}{x^2+y^2}$;

2) $v(x,y)=2e^x\sin y$; 4) $v(x,y)=2xy+8x^2-8y^2+4x$.

Домашние задания

7.7 Описать области, заданные соотношениями:

1) $1<|z+3i|<3$; 2) $|z|>2$; 3) $|z-4i|<5$.

7.8 Найти действительную и мнимую части функции $f(z)$:

1) $f(z)=2i-z+3iz^2$; 2) $f(z)=iz^2-4\overline{z}$; 3) $f(z)=e^z z^2$.

7.9 Вычислить следующие пределы:

1) $\lim\limits_{z\to 4i}\dfrac{z^2-2iz+8}{z^2+16}$; 2) $\lim\limits_{z\to 3i}\dfrac{z^2-2iz+3}{z^2+9}$.

7.10 Проверить выполнение условий Коши-Римана и в случае их выполнения найти $f'(z)$:

1) $f(z)=e^{4z}+2z-4$; 2) $f(z)=z^2+4iz+5$; 3) $f(z)=\operatorname{sh}(2z)$.

7.11 Проверить гармоничность приведенных ниже функций и найти, когда это возможно, аналитическую функцию по данной ее действительной или мнимой части:

1) $u(x,y)=2xy+3$; 2) $v(x,y)=3+x^2-y^2-\dfrac{y}{2\left(x^2+y^2\right)}$.

Ответы:

7.1 1) полоса, ограниченная прямыми $x=0, x=1/2$; 2) полоса, ограниченная прямыми $y=\pm 6$; 3) внешность круга с центром в точке $z=i$ и радиусом 2; 4) внутренность кольца с центром в точке $z=-4$ и радиусами 1 и 3; 5) внешность круга с центром в точке $z=-i$ и радиусом 1; 6) внутренность кольца с центром в точке $z=-2i$ и радиусами 2 и 5.

7.2 1) $\operatorname{Re} f(z)=x-2y, \operatorname{Im} f(z)=-2x-y$;

2) $\operatorname{Re} f(z)=x^2+y^2-8xy, \operatorname{Im} f(z)=4\left(x^2-y^2\right)$;

3) $\operatorname{Re} f(z)=x^2-y^2+2xy, \operatorname{Im} f(z)=\dfrac{1}{2}y$;

4) $\operatorname{Re} f(z)=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}, \operatorname{Im} f(z)=8y$.

7.3 1) $-1-i$; 2) i; 3) $\cos 2-i\sin 2$; 4) $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

5) $\dfrac{1}{2}\left(e^5+e^{-5}\right)\cos 1+\dfrac{i}{2}\left(e^5-e^{-5}\right)\sin 1$;

6) $\ln 2+i\left(\dfrac{3\pi}{2}+2\pi k\right), k\in Z$.

7.4 1) $-3i$; 2) 1; 3) ∞; 4) 0.

7.5 1) $\dfrac{1}{2}e^{z/2}$; 2) $\operatorname{sh} z$; 3) $8x+i8y$; 4) Условия Коши-Римана не выполняются.

7.6 1) $f(z)=\left(x^3-3xy^2\right)+i\left(3x^2y-y^3+C\right)$;

2) $f(z)=2e^x\cos y+C+2ie^x\sin y$;

3) $f(z)=\left(x^2-y^2+5x+y-\dfrac{y}{x^2+y^2}\right)+$

$+i\left(2xy+5y-\dfrac{x}{x^2+y^2}-x+C\right)$;

4) $f(z)=\left(x^2-16xy-y^2-4y+C\right)+i\left(2xy+8x^2-8y^2+4x\right)$.

7.7 1) внутренность кольца с центром в точке $z=-3i$ и радиусами 1 и 4; 2) внешность круга с центром в точке $z=0$ и радиусом 2;

3) внутренность круга с центром в точке $z=4i$ и радиусом 5.

7.8 1) $\operatorname{Re} f(z) = -x - 6xy, \operatorname{Im} f(z) = 2 - y + 3x^2 - 3y^2$;

2) $\operatorname{Re} f(z) = -2xy - 4x, \operatorname{Im} f(z) = x^2 - y^2 + 4y$;

3) $\operatorname{Re} f(z) = e^x \left(x^2 - y^2\right) \cos y - 2xye^x \sin y$,

$\operatorname{Im} f(z) = e^x \left(x^2 - y^2\right) \sin y + 2xye^x \cos y$.

7.9 1) $\dfrac{3}{4}$; 2) $\dfrac{2}{3}$.

7.10 1) $4e^{4z} + 2$; 2) $2\operatorname{ch}(2z)$; 3) $2z + 4i$.

7.11 1) $f(z) = 2xy + 3 + i\left(y^2 - x^2 + C\right)$;

2) $f(z) = \left(-2xy + \dfrac{x}{2\left(x^2 + y^2\right)} + C\right) + i\left(3 + x^2 - y^2 - \dfrac{y}{2\left(x^2 + y^2\right)}\right)$.

Занятие 8

ИНТЕГРАЛ ОТ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Аудиторные задания

8.1 Вычислить интегралы по заданным контурам:

1) $\int\limits_L \operatorname{Im} z dz, L = \left\{(x, y) \mid y = 2x^2, 0 \le x \le 1\right\}$;

2) $\int\limits_L \operatorname{Re}\left(z + z^2\right) dz, L = \left\{(x, y) \mid y = 2x^2, 0 \le x \le 1\right\}$;

3) $\int\limits_L \left(\bar{z}^2 - z\right) dz, L = \left\{z \mid |z| = 1, \pi \le \arg z \le 2\pi\right\}$;

4) $\int\limits_L \operatorname{Im} z^2 \cdot \operatorname{Re} z dz, L = \left\{(x, y) \mid y = 3x^2, 0 \le x \le 1\right\}$;

5) $\int\limits_L (\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z) dz$, где L – отрезок, соединяющий начало координат и точку $2 - i$.

8.2 Применяя формулу $\int\limits_{z_1}^{z_2} f(\eta)\,d\eta = F(z_2) - F(z_1)$, вычислить интегралы:

1) $\int\limits_L e^{2z}dz,\ L = \left\{(x, y) \mid y = x^3, 1 \le x \le 2\right\}$;

2) $\int\limits_L \sin z dz,\ L = \left\{z \mid z = t^2 + it, \dfrac{1}{2} \le t \le \dfrac{3}{2}\right\}$;

3) $\int\limits_L z^2 \cos z dz$, где L – отрезок прямой от т. $z_1 = i$ до т. $z_2 = 1$.

8.3 Вычислить интегралы, применив теорему Коши, интегральную формулу Коши или формулу, получаемую дифференцированием интегральной формулы Коши (обход контуров – против часовой стрелки):

1) $\oint\limits_{|z|=4} \dfrac{z^2}{z-2i}dz$; 2) $\oint\limits_{|z|=1} \dfrac{z^2}{z-2i}dz$; 3) $\oint\limits_{|z|=1} \dfrac{e^{2z}}{z-\pi i}dz$;

4) $\oint\limits_{|z|=4} \dfrac{e^{2z}}{z-\pi i}dz$; 5) $\oint\limits_{|z|=3} \dfrac{dz}{z^2+2z}$; 6) $\oint\limits_{|z|=1} \dfrac{\operatorname{sh}\left(\dfrac{\pi}{2}(z+i)\right)}{z^2-2z}dz$;

7) $\oint\limits_{|z|=2} \dfrac{\sin z \cdot \sin(z-1)}{z^2-z}dz$; 8) $\oint\limits_{|z+i|=1} \dfrac{\sin z}{(z+i)^3}dz$;

9) $\oint\limits_{|z+2|=2} \dfrac{e^{2z}}{(z^2-4)(z+i)}dz$; 10) $\oint\limits_{|z|=4} \dfrac{\cos z}{(z-\pi)^2}dz$.

Домашние задания

8.4 Вычислить интегралы по заданным контурам:

1) $\int\limits_L |z| \cdot \bar{z} dz$, где L – верхняя полуокружность $|z| = 2$ с обходом против часовой стрелки;

2) $\int\limits_L \dfrac{z}{\bar{z}}dz,\ L = \left\{z \,\middle|\, |z| = 1, 0 \le \arg z \le \dfrac{\pi}{2}\right\}$;

3) $\int\limits_L \left(\sin z + z^5\right) dz$, где L – ломаная, соединяющая точки $z_1 = 1, z_2 = 0, z_3 = 2i$;

4) $\int\limits_L \operatorname{Re}(2z)\,dz$, где L – отрезок, соединяющий точки $z_1 = 1 - i, z_2 = 1 + i$.

8.5 Выполнить действия согласно **8.3**.

1) $\oint\limits_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{dz}{1+z^2}$; 2) $\oint\limits_{|z-i|=1} \frac{dz}{1+z^2}$; 3) $\oint\limits_{|z+i|=1} \frac{dz}{1+z^2}$;

4) $\oint\limits_{|z|=4} \frac{\cos z}{z^2 - \pi^2} dz$; 5) $\oint\limits_{|z-1|=1} \frac{z^2+1}{z^2-1} dz$; 6) $\oint\limits_{|z|=1} \frac{\operatorname{sh}^2 z}{z^3} dz$;

7) $\oint\limits_{|z|=2} \frac{\cos 2z}{\left(z^2+1\right)\left(z^2-9\right)} dz$; 8) $\oint\limits_{|z-i|=3} \frac{e^z}{(z-\pi i)^3} dz$.

Ответы:

8.1 1) $\frac{2}{3} + 2i$; 2) $\frac{8}{15} - \frac{1}{3}i$; 3) $\frac{2}{3} + \pi i$; 4) $\frac{6}{5} + 6i$; 5) $1 - \frac{1}{2}i$.

8.2 1) $\frac{1}{2}\left(e^{4+6i} - e^{2+2i}\right)$;

2) $-\left(\cos\left(\frac{9}{4} + \frac{3}{2}i\right) - \cos\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}i\right)\right)$;

3) $(3\sin 1 + 2\cos 1) - i(2\operatorname{ch} 1 - \operatorname{sh} 1)$.

8.3 1) $-8\pi i$; 2) 0; 3) 0; 4) $2\pi i$; 5) 0; 6) π; 7) 0; 8) $\pi \operatorname{sh} 1$;

9) $\frac{\pi}{10} e^{-4}(2i - 1)$; 10) 0.

8.4 1) $8\pi i$; 2) $-\frac{i+1}{3}$; 3) $\cos 1 - \operatorname{ch} 2 - \frac{65}{6}$; 4) 0.

8.5 1) 0; 2) π; 3) – π; 4) – i; 5) $2\pi i$; 6) $2\pi i$; 7) 0; 8) $-\pi i$.

Занятие 9

РЯДЫ ТЕЙЛОРА И ЛОРАНА

Аудиторные задания

9.1 Используя разложение основных элементарных функций, разложить функции в ряд по степеням z и указать область сходимости полученных рядов:

1) e^{-z^2}; 2) $\cos z^2$; 3) $\sin 2z \cos 2z$; 4) $\sin^2 z$;

5) $\dfrac{z}{4+z^2}$; 6) $\dfrac{3}{1+z-2z^2}$; 7) $\ln\left(z+\sqrt{1+z^2}\right)$.

9.2 Разложить функции в ряд по степеням $z-z_0$ и указать область сходимости полученных рядов:

1) $z^3-2z^2-5z-2,\ z_0=-4$; 2) $\dfrac{1}{1-z},\ z_0=2$;

3) $\dfrac{1}{1-z},\ z_0=3i$; 4) $\dfrac{1}{z^2-6z+5},\ z_0=3$.

9.3 Найти область сходимости указанных рядов

1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)(n+2)z^n$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(z+1)^n$; 3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(z-3)^n}{n+1}$.

9.4 Разложить данные функции в ряд Лорана в проколотой окрестности точки z_0:

1) $\dfrac{z}{(z+1)^3},\ z_0=-1$; 2) $\dfrac{1}{z^3}\cos z,\ z_0=0$; 3) $\sin\left(\dfrac{1}{z+2}\right),\ z_0=-2$;

4) $\dfrac{e^{z2}}{z},\ z_0=0$; 5) $z^2\cos\left(\dfrac{1}{z}\right),\ z_0=0$; 6) $z^3e^{\frac{1}{z}},\ z_0=0$;

7) $\dfrac{1}{z(z-1)},\ z_0=1$; 8) $\dfrac{1}{(z-2)(z+3)},\ z_0=2$.

9.5 Разложить данные функции в ряд Лорана в заданных кольцах:

1) $\dfrac{1}{(z+i)(z+2i)},1<|z|<2$; 2) $\dfrac{1}{(z+i)(z+2i)},1<|z|<2$;

3) $\dfrac{z^3}{(z+1)(z+2)}, 1<|z+1|<3$.

Домашние задания

9.6 Выполнить действия согласно **9.2**.

1) $\sqrt{27-z}, z_0=0$; 2) $\dfrac{z}{3+4z}, z_0=0$; 3) $\ln(5z+3), z_0=1$;

4) $\dfrac{1}{z^2+3z+2}, z_0=-4$; 5) $z^2\cdot e^{1/z}, z_0=0$.

9.7 Выполнить действия согласно **9.3**.

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(z-1)^n}{n^2\cdot 2^n}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n!(z-i)^n$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1+i)^n\cdot z^n$.

9.8 Выполнить действия согласно **9.5**.

1) $\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}, 1<|z|<2$; 2) $\dfrac{1}{z(z+3)}, 1<|z-1|<2$;

3) $\dfrac{z^2}{z^2+1}, 0<|z-i|<2$; 4) $\dfrac{1}{(z^2-4)(z^2+4)}, 2<|z|<+\infty$.

Ответы:

9.1 1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\dfrac{z^{2n}}{n!}, |z|<+\infty$;

2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{z^{4n}}{(2n)!}, |z|<+\infty$; 3) $\dfrac{1}{2}\sum\limits_{z=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{(4z)^{2n-1}}{(2n-1)!}, |z|<+\infty$;

4) $\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{(2z)^{2n-1}}{(2n)!}, |z|<+\infty$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{z^{2n-1}}{2^{2n}}, |z|<2$;

6) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(1+(-1)^n 2^{n+1}\right)z^n, |z|<\dfrac{1}{2}$;

7) $z+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(2n-1)!z^{2n+1}}{2^n\cdot n!(2n+1)}, |z|<1$.

9.2 1) $-78+59(z+4)-14(z+4)^2+(z+4)^3$;

2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}(z-2)^n, |z-2|<1$; 3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(z-3i)^n}{(1-3i)^{n+1}}, |z-3i|<\sqrt{10}$;

4) $-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(z-3)^{2n}}{4^{n+1}}, |z-3|<2$.

9.3 1) $|z|<1$; 2) $|z+1|<1$; 3) $|z-3|<1$.

9.4 1) $\frac{1}{(z+1)^2}-\frac{1}{(z+1)^3}, z\neq -1$;

2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{z^{2n-3}}{(2n)!}, 0<|z|<+\infty$;

3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n+1)!(z+2)^{n+1}}, 0<|z+2|<+\infty$;

4) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n-1}}{n!}, 0<|z|<+\infty$; 5) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2-2n}}{(2n)!}, 0<|z|<+\infty$;

6) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^{3-n}}{n!}, 0<|z|<+\infty$; 7) $\frac{1}{z-1}-\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n$,

если $0<|z-1|<1$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{(z-1)^{n+1}}$, если $1<|z-1|<+\infty$;

8) $\frac{1}{5(z-2)}-\frac{1}{25}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{(z-2)^n}{5^n}$, если $0<|z-2|<5$ и

$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{5^n}{(z-2)^{n+2}}$, если $|z-2|>5$.

9.5 1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}i^{n+1}}{z^{n+1}}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{2^{n+1}i^n}$;

2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n-1}}{n!}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n+1}}{n!}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n+1}}{n!}+\ldots$;

3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2}{(z+1)^{2n-1}}-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{6}{(z+1)^{2n}}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{6}{(z+1)^{2n+1}}-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2}{(z+1)^{2n+2}}$.

9.6 1) $3-\dfrac{z}{27}\cdot\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{2\cdot5\cdot8\cdot\ldots\cdot(3n-4)}{n!3^{4n-1}}\cdot z^n, |z|<27$;

2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\dfrac{4^n\cdot z^{n+1}}{3^{n+1}}, |z|<3/4$;

3) $3\ln 2+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\dfrac{5^n\cdot(z-1)^n}{n\cdot 8^n}, |z-1|<8/5$;

4) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(2^{-n-1}-3^{-n-1}\right)\cdot(z+4)^n, |z+4|<2$;

5) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^{-n+2}}{n!}, 0<|z|<+\infty$.

9.7 1) $|z-1|<2$;

2) ряд расходится во всех точках, кроме $z=i$; 3) $|z|<\sqrt{2}/2$.

9.8 1) $-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^n}{2^{n+1}}-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{z^{n+1}}$;

2) $\dfrac{1}{3}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(z-1)^{n+1}}+\dfrac{1}{12}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(z-1)^n}{4^n}$;

3) $-\dfrac{i}{2}(z-i)+1+\dfrac{i}{2}\cdot\dfrac{1}{z-i}+\dfrac{1}{4}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(z-i)^{n+2}\cdot(-1)^n}{(2i)^n}+$

$+\dfrac{1}{4}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(z-i)^{n+1}}{(2i)^{n-1}}-\dfrac{1}{4}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(z-i)^n}{(2i)^n}$;

4) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2^{4k}}{z^{4k+4}}$.

Занятие 10

ИЗОЛИРОВАННЫЕ ОСОБЫЕ ТОЧКИ

Аудиторные задания

10.1 Указать все конечные особые точки заданных ниже функций и определить их характер:

1) $\dfrac{\sin 4z}{z}$; 2) $\dfrac{\sin z^2}{z^3+\frac{\pi}{2}z^2}$; 3) $\dfrac{1}{(z-2)(z-i)}$

4) $\dfrac{z-8}{z(z+1)^2(z-i)^3}$; 5) $\dfrac{e^{2z}}{z^2-1}$; 6) $\dfrac{1}{\sin z}$;

7) $\dfrac{1}{z^2}\sin\left(\dfrac{1}{z-1}\right)$; 8) $e^{\frac{1}{z+3i}}$;

9) $\cos\left(\dfrac{1}{z-2i}\right)$; 10) $\dfrac{1-\cos z}{z^2}$.

10.2 Определить тип особой точки $z=0$ для функций:

1) $\dfrac{\cos z^3-1}{\sin z-z+\frac{z^3}{6}}$; 2) $\dfrac{e^{3z}-1}{\cos z-1+\frac{z^2}{2}}$; 3) $z\cos\left(\dfrac{2}{z^3}\right)$;

4) $ze^{\frac{1}{z^2}}$; 5) $\sin\left(\dfrac{2}{z}\right)$.

10.3 Определить порядок нуля следующих функций:

1) $1-\cos z$; 2) $\dfrac{\cos z-1+z^2/2}{e^{3z}-1}$; 3) $z^2\left(e^{z^2}-1\right)$; 4) $\dfrac{z^3}{1+z-e^z}$.

10.4 Для заданных ниже функций выяснить характер бесконечно удаленной особой точки (устранимую особую точку считать правильной):

1) $\dfrac{z^2}{5+2z^2}$; 2) $\dfrac{-3z^5+4z-2}{z^2+z+8}$; 3) $\dfrac{z}{1+3z^4}$;

4) $1+3z+3z^2$; 5) $\cos z$.

Домашние задания

10.5 Указать все конечные особые точки заданных ниже функций и определить их характер:

1) $\dfrac{z}{(z+1)(z+2)^2(z-i)^4}$; 2) $e^{\frac{2}{z-3i}}$; 3) $z^3\sin\left(\dfrac{1}{z^2}\right)$;

4) $\dfrac{1}{z^2+5z+6}$; 5) $\dfrac{1}{z^2+16}$; 6) $\sin\left(\dfrac{2}{z^3}\right)$;

7) $\dfrac{z+1}{z^5+2z^4+z^3}$; 8) $\dfrac{z(z-\pi)}{\sin 2z}$; 9) $\dfrac{\cos z}{z^3}$;

10) $\dfrac{z-\sin z}{z^3}$.

Ответы:

10.1 1) $z=0$ – устранимая особая точка; 2) $z_1=0$ – устранимая особая точка; $z_2=-\pi/2$ – простой полюс; 3) $z_1=2$ – простой полюс; $z_2=i$ – простой полюс; 4) $z_1=0$ – простой полюс; $z_2=-1$ – полюс второго порядка; $z_3=i$ – полюс третьего порядка; 5) $z_{1,2}=\pm 1$ – простые полюсы; 6) $z_k=\pi k, k\in z$ – простые полюсы; 7) $z_1=0$ – полюс второго порядка; $z_2=1$ – существенно особая точка; 8) $z=-3i$ – существенно особая точка; 9) $z=2i$ – существенно особая точка; 10) $z=0$ – устранимая особая точка.

10.2 1) $z=0$ – устранимая особая точка; 2) $z=0$ – полюс третьего порядка; 3) $z=0$ – существенно особая точка; 4) $z=0$ – существенно особая точка; 5) $z=0$ – существенно особая точка.

10.3 1) нуль второго порядка; 2) нуль третьего порядка; 3) нуль четвертого порядка; 4) нуль первого порядка.

10.4 1) правильная точка (устранимая особая точка); 2) полюс третьего порядка; 3) правильная точка (устранимая особая точка); 4) полюс второго порядка; 5) существенно особая точка.

10.5 1) $z_1=-1$ – простой полюс; $z_2=-2$ – полюс второго порядка; $z_3=i$ – полюс четвертого порядка; 2) $z=3i$ – существенно особая точка; 3) $z=0$ – простой полюс; 4) $z_1=-2$ – простой полюс; $z_2=-3$ – простой полюс; 5) $z_{1,2}=\pm 4i$ – простые полюсы; 6) $z=0$ – существенно особая точка; 7) $z_1=0$ – полюс третьего порядка; $z_2=-1$ – простой полюс; 8) $z_1=0$ – устранимая особая точка; $z_2=\pi$ – устранимая особая точка; $z_3=\dfrac{\pi k}{2}, k\in Z/\{0\}$ – простые полюсы; 9) $z=0$ – полюс третьего порядка; 10) $z=0$ – устранимая особая точка.

Занятие 11

ВЫЧЕТЫ. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА О ВЫЧЕТАХ

Аудиторные задания

11.1 Найти вычеты указанных ниже функций в изолированных особых точках

1) $\dfrac{z^2+1}{(z-2)(z+3)}$; 2) $\dfrac{1}{z^2\left(4-z^2\right)}$; 3) $\dfrac{z^3}{4+z^2}$; 4) $\dfrac{z^2-2z+1}{z^2(z-1)}$;

5) $\dfrac{\sin 2z}{(z-1)^3}$; 6) $\dfrac{\cos^3 z}{z^3}$; 7) $\dfrac{1-\cos z}{2z^2}$; 8) $e^{\frac{2}{z+i}}$;

9) $z^3\cdot\sin\dfrac{1}{z}$; 10) $(z-1)^2\cos\left(\dfrac{1}{z-1}\right)$.

11.2 Найти вычеты функций относительно $z=0$.

1) $e^{\frac{4+z}{z}}$; 2) $\sin\left(\dfrac{2}{z}\right)$; 3) $\dfrac{\cos z}{z^3}$; 4) $z^2e^{1/z}$.

11.3 Найти вычеты функций относительно $z=\infty$.

1) $\sin\left(\dfrac{1}{z}\right)$; 2) $e^{\frac{1+z}{z}}$; 3) z^5e^{1/z^2}; 4) $z^4\cos\left(\dfrac{1}{z^4}\right)$.

11.4 Используя теоремы о вычетах, вычислить следующие интегралы:

1) $\oint\limits_{|z-2|=2} \frac{zdz}{(z-1)(z-2)}$; 2) $\oint\limits_{|z|=2} \frac{z^2dz}{(z^2+1)(z+3)}$; 3) $\oint\limits_{|z|=1} \frac{e^z dz}{z^2(z^2+9)}$;

4) $\oint\limits_{|z|=1/2} \frac{dz}{(z-1)^2(z^2+1)}$; 5) $\oint\limits_{|z|=1} \sin\left(\frac{1}{z}\right)dz$; 6) $\oint\limits_{|z+2i|=3} z^3 e^{1/z^2} dz$;

7) $\oint\limits_{|z+2i|=1} z^3 e^{1/z^2} dz$; 8) $\oint\limits_{|z|=1} \sin^2\left(\frac{1}{z}\right)dz$.

11.5 При помощи вычетов вычислить определенные интегралы:

1) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{2+\cos x}$; 2) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x-1}{(x^2+1)^2}dx$.

Домашние задания

11.6 Найти вычеты указанных ниже функций в изолированных особых точках:

1) $\frac{z^5}{z^2-4}$; 2) $\frac{z+1}{z^3-9z}$; 3) $\frac{z^2}{(z^2+1)^2}$;

4) $\cos\left(\frac{2}{z+1}\right)$; 5) $z^2\cos^2\frac{\pi}{z}$.

11.7 Используя теоремы о вычетах, вычислить следующие интегралы:

1) $\oint\limits_{|z+2|=1} \frac{z^2dz}{(z-1)(z+2)}$; 2) $\oint\limits_{|z|=3} \frac{zdz}{(z^2+4)(z-2)}$; 3) $\oint\limits_{|z|=4} \frac{e^z dz}{z^2(z^2+9)}$;

4) $\int\limits_{|z-(i+1)|=2} \frac{1}{z^2}\sin z dz$; 5) $\oint\limits_{|z+i|=2} \frac{\cos \pi z}{(z+1)^3}dz$.

Ответы:

11.1 1) $\operatorname{Res} f(2) = 5; \operatorname{Res} f(-3) = -2$;

2) $\operatorname{Res} f(2)=\frac{1}{16}$; $\operatorname{Res} f(-2)=-\frac{1}{16}$; $\operatorname{Res} f(0)=0$;

3) $\operatorname{Res} f(2i)=-2$; $\operatorname{Res} f(-2i)=-2$; 4) $\operatorname{Res} f(1)=0$; $\operatorname{Res} f(0)=1$;

5) $\operatorname{Res} f(1)=-\frac{1}{2}\sin 2$; 6) $\operatorname{Res} f(0)=-3/2$; 7) $\operatorname{Res} f(0)=0$;

8) $\operatorname{Res} f(-i)=2$; 9) $\operatorname{Res} f(0)=0$; 10) $\operatorname{Res} f(1)=0$.

11.2 1) $\operatorname{Res} f(0)=4e$; 2) $\operatorname{Res} f(0)=2$; 3) $\operatorname{Res} f(0)=-\frac{1}{2}$;

4) $\operatorname{Res} f(0)=\frac{1}{6}$.

11.3 1) $\operatorname{Res} f(\infty)=-2$; 2) $\operatorname{Res} f(\infty)=e$**;**

3) $\operatorname{Res} f(\infty)=-\frac{1}{6}$; 4) $\operatorname{Res} f(\infty)=0$.

11.4 1) 2πi; 2) $\frac{\pi i}{5}$; 3) $\frac{2\pi i}{9}$;

4) 0; 5) 2πi; 6) πi; 7) 0; 8) 0.

11.5 1) $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$; 2) $-\frac{\pi}{2}$**.**

11.6 1) $\operatorname{Res} f(2)=8$; $\operatorname{Res} f(-2)=8$;

2) $\operatorname{Res} f(0)=-\frac{1}{9}$; $\operatorname{Res} f(3)=\frac{2}{9}$; $\operatorname{Res} f(-3)=-\frac{1}{9}$;

3) $\operatorname{Res} f(i)=-\frac{i}{4}$; $\operatorname{Res} f(-i)=\frac{i}{4}$; 4) $\operatorname{Res} f(-1)=0$;

5) $\operatorname{Res} f(0)=-\pi$.

11.7 1) $-\frac{8\pi i}{3}$; 2) 0; 3) $2\pi i\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{27}\sin 3\right)$; 4) 2πi; 5) π^3.

Занятие 12

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА. ОРИГИНАЛ И ИЗОБРАЖЕНИЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ

Аудиторные задания

12.1 Проверить, являются ли оригиналами функции:

1) $f(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ 4, & t\ge 0;\end{cases}$ 2) $f(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ \operatorname{tg} t, & t\ge 0;\end{cases}$

3) $f(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ e^{(3+i)t}, & t>0;\end{cases}$ 4) $f(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ \sin(2-i)t, & t>0;\end{cases}$

5) $f(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ 2^{t^2}, & t>0;\end{cases}$ 6) $f(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ \sin t, & t\ge 0.\end{cases}$

12.2 Пользуясь определением преобразования Лапласа, найти изображения оригиналов:

1) $f(t)=1$; 2) $f(t)=e^{\alpha t}\ (\alpha>0)$; 3) $f(t)=t$;

4) $f(t)=\operatorname{ch}(4-3i)t$; 5) $f(t)=\sin t$; 6) $f(t)=\cos t$;

7) $f(t)=e^{\alpha t}\cdot\cos\beta t$; 6) $f(t)=e^{3t}\cdot\cos 2t$; 9) $f(t)=t^2$.

12.3 Используя свойства линейности и подобия, найти изображение оригиналов:

1) $f(t)=2e^{-it}+5\cos t-3$; 2) $f(t)=\sin 2t\cdot 5\cos 5t$;

3) $f(t)=\cos^4 t-\sin^4 t$; 4) $f(t)=\sin^2 5t$;

5) $f(t)=3\sin t-2\cos t$; 6) $f(t)=3\sin 4t-2\cos 5t$.

Домашние задания

12.4 Проверить, являются ли следующие функции оригиналами:

1) $f(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ \sin 3t, & t\ge 0;\end{cases}$ 2) $f(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ \sin 2t, & t\ge 0;\end{cases}$

3) $f(t)=\begin{cases} 0, & t<0, \\ t^2-9, & t\geq 0. \end{cases}$

12.5 Используя определение преобразования Лапласа, найти изображение оригиналов:

1) $f(t)=\begin{cases} 0, & t<0, \\ e^{-7t}, & t\geq 0; \end{cases}$ 2) $f(t)=\begin{cases} 0, & t<0, \\ \sin\alpha t, & t\geq 0; \end{cases}$

12.6 Пользуясь теоремой подобия, найти изображение оригинала $\operatorname{sh}\beta t$, зная, что $\operatorname{sh} t \risingdotseq \dfrac{1}{p^2-1}$.

Ответы:

12.1 1) является; 2) не является; 3) является; 4) является; 5) не является; 6) является.

12.2 1) $F(p)=\dfrac{1}{p}$; 2) $F(p)=\dfrac{1}{p-\alpha}$; 3) $F(p)=\dfrac{1}{p^2}$;

4) $F(p)=\dfrac{p}{p^2-7+24i}$; 5) $F(p)=\dfrac{1}{1+p^2}$; 6) $F(p)=\dfrac{p}{p^2+1}$;

7) $F(p)=\dfrac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2+\beta^2}$; 8) $F(p)=\dfrac{p-3}{(p-3)^2+4}$; 9) $F(p)=\dfrac{2}{p^3}$.

12.3 1) $F(p)=\dfrac{2}{p+i}+\dfrac{5p}{p^2+1}-\dfrac{3}{p}$; 2) $F(p)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{7}{p^2+49}-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{p^2+9}$;

3) $F(p)=\dfrac{p}{p^2+4}$; 4) $F(p)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{p}-\dfrac{p}{p^2+100}\right)$; 5) $F(p)=\dfrac{3-2p}{p^2+1}$;

6) $F(p)=\dfrac{12}{p^2+16}-\dfrac{2p}{p^2+25}$.

12.4 1) Да; 2) Да; 3) Нет.

12.5 1) $F(p)=\dfrac{1}{p+7}$; 2) $F(p)=\dfrac{\alpha}{p^2+\alpha^2}$.

12.6 $\dfrac{\beta}{p^2-\beta^2}$.

Занятие 13

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ ОПЕРАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Аудиторные задания

13.1 Пользуясь свойствами смещения и запаздывания, найти изображение оригиналов:

1) $f(t) = e^{-3t} \cdot \sin \pi t$;
2) $f(t) = \sin 2t \cdot 5\cos 5t$;
3) $f(t) = \sin(t-2)\cdot 1(t-2)$;
4) $f(t) = \sin(t-2)\cdot 1(t)$;
5) $f(t) = \begin{cases} t, & 0 < t < 2\pi, \\ \sin 2t, & t \geq 2\pi; \end{cases}$;
6) $f(t) = e^{-3t} \cdot \cos^2 t$;
7) $f(t) = \operatorname{ch} 5t \cdot \sin 3t$;
8) $f(t) = e^{-\alpha t}$;
9) $f(t) = e^{3t} \cdot \sin 4t$;
10) $f(t) = e^{-5t} \cdot \cos 7t$;
11) $f(t) = e^{-4t} \cdot \operatorname{ch} 5t$;
12) $f(t) = e^{5t} \cdot \operatorname{sh} 2t$;
13) $f(t) = \cos(3t+1)$;
14) $f(t) = \sin(5t-4)$;
15) $f(t) = e^{-3t} \cdot \cos(6t-5)$.

13.2 Найти оригиналы по их изображениям:

1) $F(p) = \dfrac{2p+1}{p^2+5p+10}$;
2) $F(p) = e^{-p} \cdot \dfrac{p}{p^2-9} + \dfrac{1}{p^2+5}$;
3) $F(p) = \dfrac{1}{p^2-4} + \dfrac{3p-2}{(p-1)^2+3}$;
4) $F(p) = \dfrac{p-3}{2p^2-6p-1}$;
5) $F(p) = \dfrac{e^{-2p}}{p^2+4p+3}$;
6) $F(p) = \dfrac{7}{p^2+10p+41}$;
7) $F(p) = \dfrac{p+3}{p^2+2p+10}$;
8) $F(p) = \dfrac{p}{(p-1)^3(p+2)^2}$;
9) $F(p) = \dfrac{20}{p^2+4} + \dfrac{20p}{p^2+9}$.

Домашние задания

13.3 Пользуясь теоремами подобия и запаздывания, найти изображение оригинала:

1) $f(t)=\cos(t-\frac{\pi}{2}),\ t>\frac{\pi}{2}$; 2) $f(t)=e^{-4t}\cdot\sin(t+7)$.

13.4 Применяя теорему запаздывания, найти оригинал для функции:

1) $\frac{e^{-2p}}{p^2}$; 2) $\frac{e^{-2p}}{(p+1)^3}$; 3) $\frac{3}{p^2+9p}$; 4) $\frac{4p+5}{6p^2+3p+1}$.

13.5 Используя свойства преобразования Лапласа и таблицу изображений основных функций, найти изображения заданных функций:

1) $t^2-\frac{1}{2}e^t$; 2) $\sin^2 2t$; 3) $\sin 3t - t\cos t$.

13.6 Найти оригинал, если:

1) $F(p)=\frac{p+2}{p^2+4p+20}$; 2) $F(p)=\frac{3-p}{4p^2+8p-51}$.

Ответы:

13.1 1) $F(p)=\frac{\pi}{(p+3)^2+\pi^2}$;

2) $F(p)=\frac{1}{2}\cdot\frac{p-\beta}{(p-\beta)^2+\beta^2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{p+\beta}{(p+\beta)^2+\beta^2}$;

3) $F(p)=e^{-2p}\cdot\frac{1}{p^2+1}$; 4) $F(p)=\cos 2\cdot\frac{1}{p^2+1}-\sin 2\cdot\frac{p}{p^2+1}$;

5) $F(p)=\frac{1}{p^2}-e^{-2\pi p}\cdot\frac{1}{p^2}-2\pi e^{-2\pi p}\cdot\frac{1}{p}+e^{-2\pi p}\cdot\frac{1}{p^2+1}$;

6) $F(p)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p+3}+\frac{p+3}{(p+3)^2+4}\right)$;

7) $F(p)=\dfrac{3\left(p^2+34\right)}{\left(p^2+34\right)^2-100p^2}$; 8) $F(p)=\dfrac{1}{p+\alpha}$;

9) $F(p)=\dfrac{4}{(p-3)^2+16}$; 10) $F(p)=\dfrac{p+5}{(p+5)^2+49}$;

11) $F(p)=\dfrac{p+4}{(p+4)^2-25}$; 12) $F(p)=\dfrac{2}{(p-6)^2-4}$;

13) $F(p)=\dfrac{p}{p^2+9}\cdot e^{\frac{p}{3}}$; 14) $F(p)=\dfrac{5}{p^2+25}\cdot e^{-\frac{p}{5}\cdot 4}$;

15) $F(p)=\dfrac{p+3}{(p+3)^2+36}\cdot e^{\frac{-(p+3)}{6}\cdot 5}$.

13.2 1) $f(t)=2e^{-\frac{5t}{2}}\cos\dfrac{\sqrt{15}}{2}t-\dfrac{8}{\sqrt{15}}e^{-\frac{5t}{2}}\sin\dfrac{\sqrt{15}}{2}t$;

2) $f(t)=\operatorname{ch}3(t-1)\cdot 1(t-1)+\dfrac{1}{\sqrt{5}}\sin\sqrt{5}t\cdot 1(t)$;

3) $f(t)=\dfrac{1}{2}\operatorname{sh}2t+3e^t\cos\sqrt{3}\cdot t+\dfrac{1}{\sqrt{3}}e^t\sin\sqrt{3}\cdot t$;

4) $f(t)=\dfrac{1}{2}e^{\frac{3t}{2}}\left(\operatorname{ch}\dfrac{\sqrt{11}}{2}t-\dfrac{3}{\sqrt{11}}\operatorname{sh}\dfrac{\sqrt{11}}{2}t\right)$;

5) $f(t)=\dfrac{1}{2}\left(e^{-t+2}-e^{-3t+6}\right)$; 6) $f(t)=7e^{-5t}\cdot\sin 4t$;

7) $f(t)=e^{-t}\left(\cos 3t+\dfrac{2}{3}\sin 3t\right)$;

8) $f(t)=\dfrac{3t^2+2t-2}{54}\cdot e^t+\dfrac{2t+1}{27}\cdot e^{-2t}$;

9) $f(t)=10\sin 2t+20\cos 3t$.

13.3 1) $F(p)=\dfrac{pe^{-\frac{\pi p}{2}}}{p^2+1}$; 2) $F(p)=\dfrac{1}{p^2+1}\cdot e^{-4p}$.

13.4 1) $f(t)=t-2$; 2) $f(t)=\dfrac{1}{2}(t-2)e^{-(t-2)}$; 3) $f(t)=\dfrac{1}{3}-\dfrac{\cos 3t}{3}$;

4) $f(t)=\dfrac{2}{3}\left(\cos\sqrt{\dfrac{5}{48}}t\cdot e^{-\frac{1}{4}t}-\dfrac{3}{2}\sqrt{\dfrac{5}{48}}\sin\sqrt{\dfrac{5}{48}}t\cdot e^{-\frac{1}{4}t}\right)$.

13.5 1) $F(p)=\dfrac{2}{p^3}-\dfrac{1}{2(p-1)}$; 2) $F(p)=\dfrac{1}{2p}-\dfrac{p}{2\left(p^2+16\right)}$;

3) $F(p)=\dfrac{3}{p^2+9}+\dfrac{1-p^2}{\left(p^2+1\right)^2}$.

13.6 1) $f(t)=e^{-2t}\cdot\cos 4t$;

2) $f(t)=\dfrac{2}{\sqrt{55}}\cdot e^{-t}\,\mathrm{sh}\dfrac{\sqrt{55}}{2}t-\dfrac{1}{4}e^{-t}\,\mathrm{ch}\dfrac{\sqrt{55}}{2}t$.

Занятие 14

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ ОРИГИНАЛОВ И ИЗОБРАЖЕНИЙ

Аудиторные задания

14.1 Найти изображение дифференциальных выражений:

1) $y''(t)-4y'(t)+3y(t)$, если $y(0)=1,\ y'(0)=2$;

2) $y'''(t)+6y''(t)+y'(t)-2y(t)+3$, если $y(0)=-3,\ y'(0)=7,\ y''(0)=1$;

3) $y'''(t)-3y''(t)+2y'(t)-4y(t)+1$, если $y(0)=-1,\ y'(0)=2,\ y''(0)=-3$;

4) $y''(t) - y'(t) - 6y(t)$, если $y(0) = 1,\ y'(0) = 0$;

5) $y''(t) + 2y'(t) + y(t)$, если $y(0) = 2,\ y'(0) = 2$.

14.2 Пользуясь свойством дифференцирования изображения, найти изображения оригиналов:

1) $f(t) = t\cos\beta t$; 2) $f(t) = t^2 \operatorname{sh} 3t$; 3) $f(t) = 2t - 3t^4$;

4) $f(t) = t^2\cos 3t$; 5) $f(t) = t\sin 5t$; 6) $f(t) = te^{-2t}$;

7) $f(t) = t^3 e^{-4t}$; 8) $f(t) = t\cos 5t$.

14.3 Пользуясь свойством интегрирования оригинала, найти изображения оригиналов:

1) $\int\limits_0^t \left(e^{-3t}\operatorname{ch} 2t + e^{4t}\sin 2t\right)dt$; 2) $\int\limits_0^t \left(t^7 - 5t^4 - 2t^2 + 3\right)e^{2t}dt$;

3) $\int\limits_0^t \left(\sin t + 3t^2\sin 2t\right)dt$; 4) $\int\limits_0^t te^{-2t}dt$.

14.4 Найти оригиналы следующих изображений:

1) $F(p) = \dfrac{1}{p\left(p^2+4\right)}$; 2) $F(p) = \dfrac{1}{p^2\left(p^2+4\right)}$;

3) $F(p) = \dfrac{1}{(p-3)^5}$; 4) $F(p) = \dfrac{2p-5}{(p+2)^6}$;

5) $F(p) = \dfrac{1}{p\left(p^2+1\right)}$; 6) $F(p) = \dfrac{p^2}{\left(p^2+1\right)^2}$;

7) $F(p) = \dfrac{2}{p\left(p^2+5\right)}$; 8) $F(p) = \dfrac{3}{p^2+4p}$; 9) $F(p) = \dfrac{3p}{p^2+9p}$.

14.5 Используя теорему интегрирования изображения, найти изображения функций:

1) $f(t) = \dfrac{1-\cos 2t}{t}\cdot e^{-3t}$; 2) $f(t) = \dfrac{e^t - 1}{t}$;

3) $f(t) = \dfrac{e^{-\alpha t}\sin\beta t}{t}$; 4) $f(t) = \dfrac{\sin t}{t}$; 5) $f(t) = \dfrac{\sin 3t}{t}$.

Домашние задания

14.6 Найти изображение дифференциального выражения при заданных начальных условиях:

$x'''(t)+6x''(t)+x'(t)-2x(t);\;\; x(0)=x'(0)=0;\;\; x''(0)=1$.

14.7 Пользуясь теоремой смещения и теоремой дифференцирования изображения, найти изображение оригинала $t\sin t$.

14.8 Пользуясь теоремой об интегрировании оригинала, найти изображение функции $\int\limits_0^t \cos\tau d\tau$.

14.9 Используя теорему интегрирования изображения, найти изображение функции:

1) $\dfrac{\operatorname{sh} t}{t}$; 2) $\dfrac{\sin 2t}{t}$.

Ответы:

14.1 1) $F(p)=\left(p^2-4p+3\right)Y(p)-p+2$;

2) $F(p)=\left(p^3+6p^2+p-2\right)Y(p)+3p^2+11p-40+\dfrac{3}{p}$;

3) $F(p)=\left(p^3-3p^2+2p-4\right)Y(p)+p^2-5p+11+\dfrac{1}{p}$;

4) $F(p)=Y(p)\left(p^2-p-6\right)+1-p$;

5) $F(p)=Y(p)\left(p^2+2p+1\right)-2p-6$.

14.2 1) $F(p)=\dfrac{p^2-\beta^2}{\left(p^2+\beta^2\right)^2}$; 2) $F(p)=\dfrac{18\left(p^2+3\right)}{\left(p^2-9\right)^3}$;

3) $F(p)=2\cdot\dfrac{1}{p^2}-3\dfrac{4!}{p^5}$; 4) $F(p)=\dfrac{2p\left(p^2-27\right)}{\left(p^2+9\right)^3}$;

5) $F(p)=\dfrac{10p}{\left(p^2+25\right)^2}$; 6) $F(p)=\dfrac{1}{(p+2)^2}$;

7) $F(p)=\dfrac{6}{(p+4)^4}$; 8) $F(p)=\dfrac{p^2-25}{\left(p^2+25\right)^2}$.

14.3 1) $F(p)=\dfrac{1}{p}\left(\dfrac{p+3}{(p+3)^2-4}+\dfrac{2}{(p-4)^2+4}\right)$;

2) $F(p)=\dfrac{1}{p}\left(\dfrac{7!}{(p-2)^8}-\dfrac{5!}{(p-2)^5}-\dfrac{4}{(p-2)^3}+\dfrac{3}{p-2}\right)$;

3) $F(p)=\dfrac{1}{p}\left(\dfrac{1}{p^2+1}+\dfrac{6}{p^3}\right)$; 4) $F(p)=\dfrac{4!}{p(p+2)^5}$.

14.4 1) $f(t)=\dfrac{1}{4}(1-\cos 2t)$; 2) $f(t)=\dfrac{1}{4}\left(t-\dfrac{1}{2}\sin 2t\right)$;

3) $f(t)=e^{3t}\cdot\dfrac{t^4}{4!}$; 4) $f(t)=e^{-2t}\left(\dfrac{t^4}{12}-\dfrac{3t^5}{40}\right)$;

5) $f(t)=1-\cos t$; 6) $f(t)=e^t\left(1-te^{-t}-e^{-t}\right)$;

7) $f(t)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\cos 2t}{2}$; 8) $f(t)=\dfrac{3}{4}-\dfrac{3}{4}e^{-4t}$;

9) $f(t)=\sin 3t$.

14.5 1) $F(p)=\ln\dfrac{\sqrt{p^2+6p+13}}{p+3}$; 2) $F(p)=\ln\dfrac{p}{p-1}$;

3) $F(p)=\operatorname{arctg}\dfrac{p+\alpha}{\beta}$; 4) $F(p)=\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} p$;

5) $F(p)=\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\dfrac{p}{3}$.

14.6 $F(p)=\left(p^3+6p^2+p-2\right)X(p)-1$.

14.7 $F(p)=\dfrac{2p}{\left(p^2+1\right)^2}$.

14.8 $F(p)=\dfrac{1}{p^2+1}$.

14.9 1) $F(p)=\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{p+1}{p-1}\right|$;

2) $F(p)=\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\dfrac{p}{2}$.

Занятие 15

СВЕРТКА ФУНКЦИЙ. ТЕОРЕМА БОРЕЛЯ. ФОРМУЛЫ ДЮАМЕЛЯ

Аудиторные задания

15.1 Найти свертку функций:

1) $f_1(t)=t,\ f_2(t)=e^t$; 2) $f_1(t)=e^{\alpha t},\ f_2(t)=e^{\beta t}$;

3) $f_1(t)=\cos\alpha t,\ f_2(t)=\cos 2t$; 4) $f_1(t)=\operatorname{ch} t,\ f_2(t)=\sin t$;

5) $f_1(t)=t,\ f_2(t)=\cos t$; 6) $f_1(t)=1-\alpha t,\ f_2(t)=e^{\alpha t}$;

7) $f_1(t)=e^{5t},\ f_2(t)=e^t$; 8) $f_1(t)=2t,\ f_2(t)=e^{-3t}$.

15.2 Найти свертку и ее изображение:

1) $f_1(t)=\cos 2t,\ f_2(t)=\sin 2t$; 2) $f_1(t)=e^{5t},\ f_2(t)=\sin 4t$.

15.3 Найти изображение свертки функций с помощью теоремы Бореля:

1) $f_1(t)=\operatorname{sh} 2t,\ f_2(t)=\operatorname{ch} 5t$; 2) $f_1(t)=t^n,\ f_2(t)=e^{3t}\cos 5t$.

15.4 Пользуясь теоремой Бореля, найти оригиналы изображений:

1) $F(p)=\dfrac{p^2}{\left(p^2+\alpha^2\right)^2}$; 2) $F(p)=\dfrac{p}{p^4-1}$;

3) $F(p)=\dfrac{p}{\left(p^2+1\right)\left(p^2+4\right)}$; 4) $F\left(p\right)=\dfrac{p^2}{p^4+13p^2+36}$.

15.5 Пользуясь формулой Дюамеля, найти оригинал изображения:

1) $F\left(p\right)=\dfrac{p^3}{p^4-8p^2+12}$; 2) $F(p)=\dfrac{1}{p^3\left(p^2+1\right)}$;

3) $F(p)=\dfrac{p^3e^{-2p}}{\left(p^2+9\right)^2}$.

15.6 Найти оригиналы изображений с помощью вычетов:

1) $F(p)=\dfrac{7-2p}{(p+2)(p-1)^2}$; 2) $F\left(p\right)=\dfrac{p^2+2}{p^4+4}$;

3) $F\left(p\right)=\dfrac{p^2+21p-40}{(p+1)\left(p^2-5p+6\right)}$; 4) $F\left(p\right)=\dfrac{5p^2+60p+146}{\left(p^2+4\right)(p+5)^2}$.

15.7 С помощью разложения дробей на простейшие найти оригиналы изображений:

1) $F\left(p\right)=\dfrac{3p^2-3p}{p^4-1}$; 2) $F\left(p\right)=\dfrac{(5p+4)e^{-2p}}{(p-1)^2\left(p^2+2p+5\right)}$;

3) $F\left(p\right)=\dfrac{3p^2+3p+2}{(p-2)\left(p^2+4p+8\right)}$; 4) $F\left(p\right)=\dfrac{p^{-4p}}{(p+1)^3(p+3)}$.

15.8 Найти свертку функций:

1) $f_1(t)=e^{5t}$, $f_2(t)=t^3$; 2) $f_1(t)=t$, $f_2(t)=\cos 5t$;

3) $f_1(t)=e^{4t}$, $f_2(t)=t^2$.

Домашние задания

15.9 Используя теорему Бореля об изображении свертки, найти изображение функции:

1) $\int\limits_0^t \tau e^{t-\tau}\sin(t-\tau)d\tau$;   2) $f_1(t)=4t,\ f_2(t)=e^{7t}$.

15.10 Найти оригиналы для заданных функций:

1) $\dfrac{1}{(p+1)(p-3)}$;   2) $\dfrac{1}{p^2+p+1}$;   3) $\dfrac{4-p}{p^2+9}$;

4) $\dfrac{p+2}{p^3+3p}$;   5) $\dfrac{1}{p^4+2p^2-3}$;   6) $\dfrac{2p+3}{p^3+4p^2+3p}$.

Ответы:

15.1 1) e^t-t-1; 2) $\dfrac{e^{\beta t}-e^{\alpha t}}{\beta-\alpha}$; 3) $\dfrac{1}{2}\left(t\cos\alpha t+\dfrac{1}{a}\sin\alpha t\right)$;

4) $\dfrac{1}{2}(\operatorname{ch}t-\cos t)$; 5) $1-\cos t$; 6) t; 7) $\dfrac{1}{4}e^{5t}-\dfrac{1}{4}e^t$;

8) $\dfrac{2t}{3}+\dfrac{2}{9}e^{-3t}-\dfrac{2}{9}$.

15.2 1) $F(p)=\dfrac{2p}{\left(p^2+4\right)}$;

2) $F(p)=\dfrac{4}{(p-5)\left(p^2+16\right)}$.

15.3 1) $F(p)=\dfrac{2}{p^2-4}\cdot\dfrac{2}{p^2-25}$; 2) $F(p)=\dfrac{n!(p-3)}{p^{n+1}\left((p-3)^2+25\right)}$.

15.4 1) $f(t)=\dfrac{1}{2}\left(t\cos\alpha t+\dfrac{1}{2}\sin\alpha t\right)$; 2) $f(t)=\dfrac{1}{2}(\operatorname{ch}t-\cos t)$;

3) $f(t)=\dfrac{1}{3}(\cos t-\cos 2t)$; 4) $f(t)=\dfrac{1}{5}(3\sin 3t-2\sin 2t)$.

15.5 1) $f(t)=1/2\left(3\operatorname{ch}\sqrt{6}t-\operatorname{ch}\sqrt{2}t\right)$; 2) $f(t)=t^2/2+\cos t-1$;

3) $f(t)=\cos 3(t-2)-1{,}5(t-2)\sin 3(t-2)$.

15.6 1) $f(t)=\dfrac{11}{9}e^{-2t}+\left(\dfrac{5}{3}t-\dfrac{11}{9}\right)e^t$; 2) $f(t)=\operatorname{ch}t\sin t$;

3) $f(t)=8e^{3t}-5e^{-t}-2e^{2t}$; 4) $f(t)=3\sin 2t-t\cdot e^{-5t}$.

15.7 1) $f(t)=-\frac{1}{4}e^{t}-\frac{5}{4}e^{-t}+\frac{3}{2}\cos t+\sin t$;

2) $f(t)=\frac{1}{16}\left(e^{t-2}\left(18(t-2)+1\right)-e^{-(t-2)}\left(\cos 2(t-2)+10\sin 2(t-2)\right)\right)\cdot 1(t-2)$

3) $f(t)=e^{2t}+e^{-2t}\left(2\cos 2t-0,5\sin 2t\right)$;

4) $f(t)=\frac{1}{8}\left(e^{-(t-4)}\left(1-2(t-4)+2(t-4)^2\right)\right)-e^{-3(t-4)}\cdot 1(t-4)$.

15.8 1) $e^{-5t}\left(-\frac{1}{5}t^3-\frac{3}{25}t^2-\frac{6}{125}t-\frac{6}{625}\right)+e^{5t}\cdot\frac{6}{625}$;

2) $\frac{1}{25}-\frac{1}{25}\cos 5t$; 3) $-\frac{t^2}{4}-\frac{t}{8}-\frac{1}{32}+\frac{e^{4t}}{32}$.

15.9 1) $F(p)=\frac{1}{p^2\left(p^2-2p+2\right)}$; 2) $F(p)=\frac{4}{p^2}\cdot\frac{17}{p-7}$.

15.10 1) $f(t)=\frac{1}{4}\left(e^{3t}-e^{t}\right)$; 2) $f(t)=\frac{2}{\sqrt{3}}e^{-\frac{t}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t$;

3) $f(t)=\frac{4}{3}\sin 3t-\cos 3t$; 4) $f(t)=\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\cos\sqrt{3}t+\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\sqrt{3}t$;

5) $f(t)=\frac{1}{4}\left(\operatorname{sh} t-\frac{\sqrt{3}}{3}\sin\sqrt{3}t\right)$; 6) $f(t)=1-\frac{1}{2}e^{-t}-\frac{1}{2}e^{-3t}$.

Занятие 16

ПРИМЕНЕНИЕ ОПЕРАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ К РЕШЕНИЮ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Аудиторные задания

16.1 Найти решения дифференциальных уравнений при заданных начальных условиях:

1) $4x''+12x'+9x=144e^{3t/2}$, $x(0)=1$, $x'(0)=\dfrac{1}{2}$;

2) $x''+4x=\sin^2 t$, $x(0)=0$, $x'(0)=0$;

3) $x''-9x=2-t$, $x(0)=0$, $x'(0)=1$;

4) $x''+4x=2\cos t$, $x(0)=0$, $x'(0)=4$;

5) $x''-x=e^t$, $x(0)=1$, $x'(0)=0$;

6) $x^{IV}+2x''+x=\cos t$, $x(0)=0$, $x'(0)=0$, $x''(0)=0$, $x'''(0)=0$;

7) $y''-2y'-3y=e^{3t}$, $y(0)=0$, $y'(0)=0$;

8) $y''+y'-2y=e^{-t}$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$;

9) $y'''-y'=t$, $y(0)=0$, $y'(0)=0$, $y''(0)=1$.

16.2 Найти решения систем дифференциальных уравнений при заданных начальных условиях:

1) $\begin{cases} x'-3x-5y=0, \\ y'+2x-8y=0, \end{cases}$ $x(0)=2$, $y(0)=5$;

2) $\begin{cases} x'-x+y=1{,}5t^2, \\ y'+4x+2y=1+4t, \end{cases}$ $x(0)=0$, $y(0)=0$;

3) $\begin{cases} x'-2x-4y=\cos t, \\ y'+x+2y=\sin t, \end{cases}$ $x(0)=0$, $y(0)=0$;

16.3 Решить интегральные уравнения:

1) $\int\limits_0^t (1+t-\tau)\,y(\tau)\,d\tau = \frac{1}{2}e^{-t}\cdot\sin t$;

2) $y''(t) - 4\int\limits_0^t \left(y'(\tau)+y(\tau)\right)e^{-(t-\tau)}d\tau = 0, y(0)=0, y'(0)=6$;

3) $y'(t)+2y(t)+\int\limits_0^t y(\tau)\left(e^{-3(t-\tau)}+3e^{t-\tau}\right)d\tau = 0, y(0)=1$;

4) $y''(t)+\int\limits_0^t \left(y''(\tau)+y(\tau)\right)\sin(t-\tau)\,d\tau = 2\cos t, y(0)=0, y'(0)=0$;

5) $\int\limits_0^t y(\tau)\cdot\sin(t-\tau)\,d\tau = \sin^2 t$; 6) $\int\limits_0^t y(\tau)\cdot\operatorname{ch}(t-\tau)\,d\tau = t^n$;

7) $y(t) = \sin 2t - \frac{8}{3}\int\limits_0^t y(\tau)\operatorname{sh}3(t-\tau)\,d\tau$; 8) $y(t) = \int\limits_0^t y\,dt + 1$.

16.4 Найти решения уравнений в частных производных:

4) $\begin{cases} x' = x+2y, \\ y' = 2x+y+1, \end{cases}$ $x(0)=0, \quad y(0)=5$;

5) $\begin{cases} x' = 2y, \\ y' = 2x, \end{cases}$ $x(0)=2, \quad y(0)=2$;

6) $\begin{cases} x' = 3x+4y, \\ y' = 4x-3y, \end{cases}$ $x(0)=1, \quad y(0)=1$.

1) $\int\limits_0^t (1+t-\tau)\,y(\tau)\,d\tau = \frac{1}{2}e^{-t}\cdot\sin t$;

2) $y''(t) - 4\int\limits_0^t \left(y'(\tau)+y(\tau)\right)e^{-(t-\tau)}d\tau = 0, y(0)=0, y'(0)=6$;

3) $y'(t)+2y(t)+\int\limits_0^t y(\tau)\left(e^{-3(t-\tau)}+3e^{t-\tau}\right)d\tau = 0, y(0)=1$;

4) $y''(t)+\int\limits_0^t \left(y''(\tau)+y(\tau)\right)\sin(t-\tau)\,d\tau = 2\cos t, y(0)=0, y'(0)=0$;

5) $\int_0^t y(\tau)\cdot\sin(t-\tau)\,d\tau=\sin^2 t$; 6) $\int_0^t y(\tau)\cdot\mathrm{ch}(t-\tau)\,d\tau=t^n$;

7) $y(t)=\sin 2t-\frac{8}{3}\int_0^t y(\tau)\,\mathrm{sh}\,3(t-\tau)\,d\tau$; 8) $y(t)=\int_0^t y\,dt+1$.

1) $(x+t)\frac{\partial u}{\partial t}=x+u,\quad u(x,0)=x^3-x,\quad 0<x<\infty,\quad 0<t<\infty$;

2) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=0,\ u(0,t)=E_0\sin\omega t,\ u(l,t)=0$;

3) $\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial u}{\partial x}=t+x-u,\quad u(x,0)=1-x,\quad 0<x<\infty,\quad 0<t<\infty$;

4) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{\partial u}{\partial x}+u=t,\quad u(x,0)=x$,

1) $\begin{cases} x'+x-2y=0, \\ y'+x+4y=0; \end{cases}\quad x(0)=y(0)=1$;

2) $\begin{cases} x'+4y+2x=4t+1, \\ y'+x-y=\frac{3}{2}t^2; \end{cases}\quad x(0)=y(0)=0$;

3) $\begin{cases} x'+7x-y=5, \\ y'+2x+5y=-37t; \end{cases}\quad x(0)=y(0)=0$;

4) $\begin{cases} x'=4y+z, & x(0)=5, \\ y'=z, & y(0)=0, \\ z'=4y; & z(0)=4. \end{cases}$

1) $\int_0^t y(\tau)(t-\tau)^2\,d\tau=\frac{1}{3}t^3$; 2) $\int_0^t y(\tau)\cos(t-\tau)\,d\tau=1-\cos t$.

1) $x'-x=\cos t-\sin t,\ x(0)=0$;

2) $x''-5x'+6x=12;\ x(0)=2,\ x'(0)=0$;

3) $x''+4x'+3x=1;\ x(0)=3,\ x'(0)=-2$;

4) $x''+3x'=e^{-3t};\ x(0)=0,\ x'(0)=-1$.

5) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u(x,0) = 0, \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0$,

$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0, \quad 0 < x < \infty, \quad 0 < t < \infty$;

$u(0,t) = 1, u(l,t) = 0, 0 < x < \infty, 0 < t < \infty$.

Домашние задания

16.5 Найти решения дифференциальных уравнений при заданных начальных условиях:

1) $\begin{cases} x' + x - 2y = 0, \\ y' + x + 4y = 0; \end{cases} \quad x(0) = y(0) = 1$;

2) $\begin{cases} x' + 4y + 2x = 4t + 1, \\ y' + x - y = \frac{3}{2}t^2; \end{cases} \quad x(0) = y(0) = 0$;

3) $\begin{cases} x' + 7x - y = 5, \\ y' + 2x + 5y = -37t; \end{cases} \quad x(0) = y(0) = 0$;

4) $\begin{cases} x' = 4y + z, & x(0) = 5, \\ y' = z, & y(0) = 0, \\ z' = 4y; & z(0) = 4. \end{cases}$

16.6 Найти общее решение дифференциального уравнения $x'' + 9x = \cos 3t$.

16.7 Найти решения систем дифференциальных уравнений при заданных начальных условиях:

1) $\begin{cases} x' + x - 2y = 0, \\ y' + x + 4y = 0; \end{cases} \quad x(0) = y(0) = 1$;

2) $\begin{cases} x' + 4y + 2x = 4t + 1, \\ y' + x - y = \frac{3}{2}t^2; \end{cases} \quad x(0) = y(0) = 0$;

3) $\begin{cases} x' + 7x - y = 5, \\ y' + 2x + 5y = -37t; \end{cases} \quad x(0) = y(0) = 0$;

4) $\begin{cases} x' = 4y + z, & x(0) = 5, \\ y' = z, & y(0) = 0, \\ z' = 4y; & z(0) = 4. \end{cases}$

16.8 Решить интегральные уравнения:

1) $\begin{cases} x' + x - 2y = 0, \\ y' + x + 4y = 0; \end{cases}$ $x(0) = y(0) = 1$;

2) $\begin{cases} x' + 4y + 2x = 4t + 1, \\ y' + x - y = \dfrac{3}{2}t^2; \end{cases}$ $x(0) = y(0) = 0$;

3) $\begin{cases} x' + 7x - y = 5, \\ y' + 2x + 5y = -37t; \end{cases}$ $x(0) = y(0) = 0$;

4) $\begin{cases} x' = 4y + z, & x(0) = 5, \\ y' = z, & y(0) = 0, \\ z' = 4y; & z(0) = 4. \end{cases}$

16.9 Найти решения уравнений:

1) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{p^2}{a^2}u = -pA \cdot \dfrac{1}{a^2}\sin\dfrac{\pi x}{l}$, $u(0,t) = u(l,t) = 0$;

2) $\dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $u(x,0) = 0$, $u(0,t) = u_0$, $t > 0$;

3) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{1}{a^2} \cdot \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}, u(x,0) = A\cos\left(\dfrac{n\pi x}{l}\right), \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0$,

$\dfrac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \dfrac{\partial u(l,t)}{\partial x} = 0, 0 \le x \le l$.

Ответы:

16.1 1) $x(t) = e^{-3t/2}\left(18t^2 + 2t + 1\right)$; 2) $x(t) = \dfrac{1}{8}(1 - \cos 2t - t\sin 2t)$;

3) $x(t) = \left(3t + 6 - 7e^{3t} - e^{-3t}\right)/27$; 4) $x(t) = (2 + 0{,}5t) \cdot \sin 2t$;

5) $x(t) = 0{,}5\left(te^t - \operatorname{sh} t\right)$; 6) $x(t) = t(\sin t - t\cos t)/8$;

7) $y(t)=\frac{1}{4}te^{3t}-\frac{1}{16}e^{3t}+\frac{1}{16}e^{-t}$; 8) $y(t)=\operatorname{sh}t$;

9) $y(t)=-2t-\frac{t^2}{2}+e^t+e^{-t}$.

16.2 1) $\begin{cases} x(t)=5e^{2t}-3e^{-7t}, \\ y(t)=6e^{-7t}-e^{2t}; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x(t)=-0,5t^2, \\ y(t)=t^2+t; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x(t)=1+10t-3\sin t-2\cos t, \\ y(t)=4-7t+2\sin t-2\cos t; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x(t)=-\frac{2}{3}-2e^{-t}+\frac{8}{3}e^{3t}, \\ y(t)=\frac{1}{3}+2e^{-t}+\frac{8}{3}e^{3t}; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x(t)=\frac{5}{2}e^{2t}-\frac{1}{2}e^{-2t}, \\ y(t)=\frac{5}{2}e^{2t}-\frac{1}{2}e^{-2t}; \end{cases}$

6) $\begin{cases} x(t)=\frac{6}{5}e^{5t}-\frac{1}{5}e^{-5t}, \\ y(t)=\frac{3}{5}e^{5t}+\frac{2}{5}e^{-5t}. \end{cases}$

16.3 1) $y(t)=e^{-t}\left(\frac{1}{2}-\sin t\right)$; 2) $y(t)=3\operatorname{sh}2t$;

3) $y(t)=4e^{-t}-4te^{-t}-3e^{-2t}$; 4) $y(t)=t\cdot\sin t$;

5) $y(t)=(1+3\cos 2t)/2$; 6) $y(t)=nt^{n-1}-t^{n+1}/(n+1),\ n>0$;

7) $y(t)=(13\sin 2t-16\operatorname{sh}t)/5$; 8) $y(t)=e^t$.

16.4 1) $u(x,t)=x^3-x+tx^2$;

2)

$$u(x,t)=E_0\left(\frac{\sin(\omega(e-x)/a)\sin\omega t}{\sin(\omega e/a)}+2a\omega e\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(k\pi x/e)\sin(ak\pi t/e)}{e^2\omega^2-a^2k^2\pi^2}\right);$$

3) $u(x,t)=t+e^{-t}(1-2t-2x)+x$;

4) $u(x,t)=t+x\cos t-\sin t-0,5t\sin t$;

5) $u(x,t)=1-\frac{x}{e}-\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sin\frac{k\pi x}{e}\cos\frac{k\pi at}{e}\right)/k$.

16.5 1) $x(t)=\sin t$; 2) $x(t)=2$; 3) $x(t)=\frac{1}{3}+3e^{-t}-\frac{1}{3}e^{-3t}$;

4) $x(t)=\frac{2}{9}\left(e^{-3t}-1\right)-\frac{t}{3}e^{-3t}$.

16.6 $x(t)=C_1\cos 3t+C_2\sin 3t+\frac{t}{6}\sin 3t$.

16.7 1) $\begin{cases} x(t)=4e^{-2t}-3e^{-t}, \\ y(t)=3e^{-3t}-2e^{-2t}. \end{cases}$; 2) $\begin{cases} x(t)=t^2+t, \\ y(t)=-\frac{1}{2}t^2. \end{cases}$;

3) $\begin{cases} x(t)=1-t-e^{-6t}\cos t, \\ y(t)=1-7t-e^{-6t}\cos t+e^{-6t}\sin t. \end{cases}$; 4) $\begin{cases} x(t)=1+3e^{2t}+e^{-2t}, \\ y(t)=e^{2t}-e^{-2t}, \\ z(t)=2e^{2t}+2e^{-2t}. \end{cases}$

16.8 1) $y(t)=1$; 2) $y(t)=t$.

16.9 1) $u(x,t)=A\cos\frac{\pi at}{e}\sin\frac{\pi x}{e}$;

2) $u(x,t)=U_0\left(1-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{x/2a\sqrt{t}}e^{-\tau}d\tau\right)$;

3) $u(x,t)=A\cos\frac{n\pi at}{e}\cos\frac{n\pi x}{e}$.

Занятие 17

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Аудиторные задания

17.1 Определите тип дифференциального уравнения:

1) $x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\sqrt{xy}\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{y}{\sqrt{x}}-\sqrt{y}\right)\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$;

2) $y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$; 3) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2x\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$.

17.2 Найдите решение уравнения $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, если $u(x,0)=\cos x;\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0$.

17.3 Найдите решение уравнения $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, если:

1) $u(x,0)=\dfrac{\sin x}{x};\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0)=\dfrac{1}{1+x^2}$;

2) $u(x,0)=\cos 2x;\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0)=\sin x$.

17.4 Найдите отклонение $u(x,t)$ закрепленной на концах $x=0$ и $x=l$ однородной струны от положения равновесия, если в начальный момент струна имела форму параболы с вершиной в точке $x=\dfrac{l}{2}$ и отклонением от положения равновесия $-h$, а начальные скорости отсутствуют.

17.5 Струна закреплена на концах $x=0$ и $x=2$. В начальный момент имеет форму параболы $u=2x-x^2$. Определить форму струны для любого момента времени, если начальные скорости точек струны отсутствуют.

17.6 Струна, закрепленная на концах $x=0$ и $x=l$, в начальный момент имеет форму $u=h\left(x^4+2x^3+x\right)$. Найти форму струны для любого момента времени *t*, если начальные скорости отсутствуют.

17.7 Найти решение уравнения теплопроводности $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, если $u(x,0)=\begin{cases} x \text{ при } 0<x\le\frac{l}{2} \\ l-x \text{ при } \frac{l}{2}\le x<l \end{cases}$ и $u(0,t)=u(l,t)\equiv 0$.

17.8 Решить задачу Дирихле в круге $0\le\rho\le 1$, если $u(\rho,\varphi)=\varphi^2$, $\varphi=1$.

17.9 Решить уравнение $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{a^2}{l^2}\sin\frac{\pi a t}{l}$ при начальных и граничных условиях: $u(x,0)=u_t'(x,0)=u(0,t)=u(l,t)=0$, где $0\le x\le l$ и $t\ge 0$.

Домашние задания

17.10 Определите тип дифференциального уравнения:

1) $y^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-2x\frac{\partial u}{\partial x}=0$; 2) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+x\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$.

17.11 Найти закон свободных колебаний закрепленной на конце $x=0$ однородной струны, если правый конец ее при $x=l$ перемещается так, что касательная к струне остается постоянно горизонтальной. В начальный момент струна находилась в положении равновесия и ей была придана начальная скорость $u_t'(x,0)=\sin\frac{\pi x}{l}$.

17.12 Определить температуру тонкого однородного стержня длины *l*, изолированного от внешнего пространства, начальная температура которого равна $f(x)=\frac{cx(l-x)}{l^2}$.

17.13 Решить задачу Дирихле в круге $0\le\rho\le 1$, если $u(1,\varphi)=\varphi$.

Ответы:

17.1 1) параболический тип в области $x+y>0; x+y<0$; 2) параболический тип в области $x^2+y^2=R^2$; 3) гиперболический тип.

17.2 $u(x,t)=\dfrac{\cos(x-t)+\cos(x+t)}{2}=\cos x\cos t$.

17.3 1)

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin(x-at)}{x-at}+\frac{\sin(x+at)}{x+at}+\frac{\operatorname{arctg}(x+at)-\operatorname{arctg}(x-at)}{a}\right);$$

2) $u(x,t)=\cos 2x\cos 2at+\dfrac{1}{a}\sin x\sin at$.

17.4 $u(x,t)=\dfrac{4h}{cr}\left(xl-x^2-t^2\right)$.

17.5 $u(x,t)=\dfrac{32}{\pi^3}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2n+1)^3}\cdot\cos\dfrac{(2n+1)\pi at}{2}\cdot\sin\dfrac{(2n+1)\pi x}{2}$.

17.6 $u(x,t)=h\left(x^4+6x^2a^2t^2+x^4t^4+2x^4+3xa^2t^2+x\right)$.

17.7 $u(x,t)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi t}}\left(\int\limits_0^{l/2}\alpha l^{-\frac{(\alpha-x)^2}{4t}}d\alpha+\int\limits_{l/2}^{l}(l-\alpha)l^{-\frac{(l-\alpha-x)^2}{4t}}d\alpha\right)$.

17.8 $u(x,t)=\dfrac{4}{3}\pi^2+4\sum\left(\dfrac{1}{n^2\cos n\varphi}-\dfrac{4\pi}{n}\sin n\varphi\right)\rho^n$.

17.9 $u(x,t)=\dfrac{2}{\pi^3}\left(\sin\dfrac{\pi at}{l}-\dfrac{\pi at}{l}\cos\dfrac{\pi at}{l}\right)\sin\dfrac{\pi x}{l}+$

$$+\frac{1}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(2n+1)^2}\times$$

$$\times\left((2n+1)\sin\frac{\pi at}{l}-\sin\frac{(2n+1)\pi at}{l}\right)\sin\frac{(2n+1)\pi x}{l}$$

17.10 1) гиперболического типа; 2) эллиптического типа при $x>0$, гиперболического типа при $x<0$.

17.11 $u(x,t)=\dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\dfrac{\pi n x}{l}\sin\dfrac{a\pi n}{l}t$.

17.12 $u(x,t)=l^{\frac{-\pi^2a^2t}{l^2}}\cdot\dfrac{cx(l-x)}{l^2}$. **17.13** $u(\rho,\varphi)=2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin n\varphi}{n}\rho^n$.

ТИПОВОЙ РАСЧЕТ.

РЯДЫ

В задачах **1, 2** исследовать сходимость числового ряда.

В задаче **3** исследовать сходимость знакочередующегося ряда. В случае сходимости исследовать на абсолютную и условную сходимость.

В задачах **4, 5** определить область сходимости степенных рядов.

В задаче **6** найти четыре первых, отличных от нуля, члена разложения в ряд функции $f(x)$ по степеням $x - x_0$.

В задаче **7** разложить функцию $f(x)$ в ряд по степеням x, используя разложения основных элементарных функций.

В задаче **8** вычислить с помощью ряда определенный интеграл с точностью до 0,001.

В задаче **9** найти первые k членов разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения при указанных начальных условиях.

В задаче **10** разложить в ряд Фурье функцию $f(x)$ на интервале $[-\pi, \pi]$.

Вариант 1

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n+2}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{2}{5}\right)^n$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3n+1}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n\sqrt{n}}$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n \cdot 3^n}(x+1)^n$; 6) $f(x) = \frac{1}{x}, x_0 = 1$;

7) $f(x) = \sin^2 x \cos^2 x$; 8) $\int\limits_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}} dx$;

9) $y' = x + y^2, y(1) = 1, k = 3$; 10) $f(x) = \begin{cases} \pi + x, -\pi \le x < 0, \\ 0,\ 0 \le x \le \pi. \end{cases}$.

Вариант 2

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+1}{n^2+1}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{(\sqrt{2})^n}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n\sqrt{n}}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\left(\dfrac{x}{2}\right)^n$;

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-3)^n}{n^2}$; 6) $f(x)=e^x, x_0=-2$; 7) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^4}}$;

8) $\int\limits_{-1}^{0}\dfrac{dx}{\sqrt[3]{8-x^3}}$; 9) $y'=2x+y^3, y(1)=1, k=3$;

10) $f(x)=\begin{cases}2x-1, -\pi\le x\le 0,\\ 0,\ 0<x\le\pi.\end{cases}$.

Вариант 3

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+1}{3n+2}$; 2) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln n}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{2n-1}{n(n+1)}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+1}{n}\left(\dfrac{x}{3}\right)^n$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-3)^n}{n^2}$; 6) $f(x)=\cos x, x_0=\dfrac{\pi}{2}$;

7) $f(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{x}$; 8) $\int\limits_{0}^{0,2}\sqrt{x}e^{-x}dx$;

9) $y'=x+\dfrac{1}{y}, y(0)=1, k=5$; 10) $f(x)=\begin{cases}-x+\dfrac{1}{2}, -\pi\le x\le 0,\\ 0,\ 0<x\le\pi.\end{cases}$.

Вариант 4

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3n+1}{\sqrt{n3^n}}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{4+n^2}{1+n^2}\right)^2$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\dfrac{2n+1}{3n+1}\right)^n$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3n-1}{2^n}\cdot x^n$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^n(x+3)^n$; 6) $f(x)=\sqrt{x},\ x(0)=4$;

7) $f(x)=x\,ch\,x$; 8) $\int\limits_{0}^{0,2}\sqrt{x}\cos x\,dx$;

9) $y'=2x-0{,}1y^2,\ y(0)=1,\ k=3$;

10) $f(x)=\begin{cases}2x+3, & -\pi\le x\le 0,\\ 0, & 0<x\le\pi.\end{cases}$.

Вариант 5

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{4^n}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+2}{2n-1}\right)^n$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^n x^n}{2^n}$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2+x)^n$; 6) $f(x)=\cos^2 x, x_0=\frac{\pi}{4}$;

7) $f(x)=\sqrt[3]{8+x}$; 8) $\int\limits_{0}^{0,5}\sqrt{1+x^2}\,dx$;

9) $y'=x^2-xy, y(0)=0{,}1,\ k=3$; 10) $f(x)=\begin{cases}x-2, -\pi\le x\le 0,\\ 0,\ 0<x\le\pi.\end{cases}$.

Вариант 6

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{10n+1}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{(2n)!}$; 3) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln}{n}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n}x^n$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{n^2}$; 6) $f(x)=e^{3x}, x_0=1$;

7) $f(x)=\cos^2 x$; 8) $\int\limits_{0}^{0,5}\frac{dx}{1+x^5}$;

9) $y''=2yy', y(0)=0,\ y'(0)=1,\ k=3$;

10) $f(x)=\begin{cases}0, -\pi\le x<0,\\ 4x-3,\ 0\le x\le\pi.\end{cases}$.

Вариант 7

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+3}{n^3-2}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{5^n}{3^n(2n+1)}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\sqrt{n}}{n+10}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n\cdot 3^n}$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-2)^n}{(n+1)\ln(n+1)}$; 6) $f(x)=\operatorname{ctg}x,\ x_0=\dfrac{\pi}{4}$;

7) $f(x)=\dfrac{x}{4+x^2}$; 8) $\int\limits_0^{0,1}\dfrac{e^x-1}{x}dx$.

9) $y'=2x+\cos y,\ y(0)=0,\ k=5$; 10) $f(x)=\begin{cases}5-x, -\pi\le x\le 0,\\ 0,\ 0<x\le\pi.\end{cases}$.

Вариант 8

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3n+2}{5n+1}$; 2) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n(\ln n)^2}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n+5}}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n^n}$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-4)^n}{\sqrt{n^2+1}}$; 6) $f(x)=\operatorname{sh}x,\ x_0=1$;

7) $f(x)=\dfrac{3x-5}{x^2-4x+3}$; 8) $\int\limits_0^{0,5}x^2\cos 3x dx$;

9) $y'''=ye^x-xy'^2, y(0)=y'(0)=y''(0)=1,\ k=6$;

10) $f(x)=\begin{cases}0, -\pi\le x<0,\\ 3x-1,\ 0\le x\le\pi.\end{cases}$.

Вариант 9

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2+2n+5}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n+1}{3n}\right)^n$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{n}{6n-4}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{n+1}\left(\dfrac{x}{2}\right)^n$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n(x+5)^n}{n^3+1}$; 6) $f(x)=\operatorname{tg}x, x_0=\dfrac{\pi}{4}$;

7) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{9-x^2}}$; 8) $\int\limits_0^{0,5}\ln\left(1+x^2\right)$;

9) $y'=3x-y^2,\ y(0)=2,\ k=3$; 10) $f(x)=\begin{cases}3-2x, -\pi\le x\le 0,\\ 0,\ 0<x\le\pi.\end{cases}$.

Вариант 10

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2\sin\dfrac{\pi}{2^n}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n+1)!}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt[n]{n}}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{\sqrt{n}}$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\left(\dfrac{x+2}{2}\right)^n$; 6) $f(x)=3x^3-6x^2+3, x_0=-1$;

7) $f(x)=\ln\left(2+x\right)$; 8) $\int\limits_0^{0,4}\sqrt{x}e^{-\frac{x}{4}}dx$; 9) $y'=x^2-2y,\ y(0)=1,\ k=4$.

10) $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x<0,\\ \dfrac{\pi-x}{2}, & 0\le x\le\pi.\end{cases}$.

Вариант 11

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1+n}{1+n^2}\right)^2$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^3}{n!}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\left(-1\right)^n}{\sqrt[3]{n}}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2n+1)^2x^n$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-3)^n}{(2n+1)\sqrt{n+1}}$; 6) $f(x)=x\sqrt{x},\ x_0=3$;

7) $f(x)=\cos(x+\alpha)$; 8) $\int\limits_0^{0,5}\dfrac{1+\cos x}{x^2}dx$;

9) $y''=\dfrac{y'}{y}-\dfrac{1}{x},\ y(1)=1,\ y'(1)=0,\ k=4$;

10) $f(x)=\begin{cases}5x+1, -\pi\le x\le 0,\\ 0,\ 0<x\le\pi.\end{cases}$.

Вариант 12

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1+n}{1+n^2}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n!}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n-1}{(n+1)\sqrt{n}}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2n-1}$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+4)^n}{n\cdot 3^n}$; 6) $f(x)=\frac{1}{x+1},\ x_0=2$;

7) $f(x)=x\sin^2 x$; 8) $\int\limits_0^{0,8}\frac{1-\cos x}{x}dx$;

9) $y'=x^2+0,2y^2,\ y(0)=0,\ k=3$;

10) $f(x)=\begin{cases}0, -\pi\le x<0,\\ 1-4x,\ 0\le x\le\pi.\end{cases}$.

Вариант 13

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^{\frac{n}{2}}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt[3]{n}}{n+1}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\cdot 2^n}$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n(x-1)^n}{\sqrt{n^2+1}}$; 6) $f(x)=\operatorname{ch}x,\ x_0=1$;

7) $f(x)=\frac{x^6}{1-x}$; 8) $\int\limits_0^1\sin x^2dx$;

9) $y''=y'^2+xy,\ y(0)=4,\ y'(0)=-2,\ k=5$;

10) $f(x)=\begin{cases}3x+2, -\pi\le x\le 0,\\ 0,\ 0<x\le\pi.\end{cases}$.

Вариант 14

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi}{2^{n+1}}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n+1}{n^2}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^n}{2n-1}$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(3n+1)\left(\frac{x-2}{4}\right)^n$;

6) $f(x)=\dfrac{1}{x+3}$, $x_0=-2$; 7) $f(x)=\ln(x+1), x_0=2$;

8) $\int\limits_0^{0,1}\dfrac{\ln(1+x)}{x}dx$; 9) $y'=xy+y^2, y(0)=0,1, k=3$;

10) $f(x)=\begin{cases} 0, -\pi\le x<0, \\ 4-2x,\ 0<x\le\pi. \end{cases}$.

Вариант 15

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^2}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(5n+8)\ln^3(5n+8)}$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{(2n+1)!}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{5^n x^n}{6^n\sqrt[3]{n}}$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x+3)^n}{n\cdot 5^n}$;

6) $f(x)=\dfrac{1}{2x+5}, x_0=3$; 7) $f(x)=xe^{-x}$; 8) $\int\limits_0^1\cos\sqrt[3]{x}dx$;

9) $y'=0,2x+y^2,\ y(0)=1,\ k=3$; 10) $f(x)=\begin{cases} x+\dfrac{\pi}{2}, -\pi\le x\le 0, \\ 0,\quad 0<x\le\pi. \end{cases}$.

Вариант 16

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+1}{n^2+2n}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{2^{n+1}}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{n^2+1}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\left(x-1\right)^n}{n}$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\left(x-1\right)^n}{n}$; 6) $f(x)=\sin^2 x, x_0=\dfrac{\pi}{4}$;

7) $f(x)=\operatorname{sh}\dfrac{x}{2}$; 8) $\int\limits_0^1\sqrt{x}\sin x dx$;

9) $y''=x^2+y^2,\ y(-1)=2,\ y'(-1)=0,5,\ k=4$;

10) $f(x)=\begin{cases} 0, -\pi\le x<0, \\ 6x-5,\ 0\le x\le\pi. \end{cases}$.

Вариант 17

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\sqrt[3]{n}-n}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+1}{2^n(n^2+1)}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{n!}{n^n}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{\sqrt{n}}$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x+1)^n}{n\cdot 5^n}$; 6) $f(x)=\sin\dfrac{\pi x}{4}, x_0=2$;

7) $f(x)=x^2e^{2x}$; 8) $\int\limits_0^{0,5}\dfrac{e^{-2x^2}}{\sqrt{x}}dx$;

9) $y'=x^2+xy+e^{-x}, y(0)=0, k=3$;

10) $f(x)=\begin{cases}7-3x, -\pi\le x\le 0,\\ 0,\ 0<x\le\pi.\end{cases}$.

Вариант 18

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{\dfrac{n+3}{2n+1}}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n\sin\dfrac{\pi}{3^n}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{3}{\ln(n+1)}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n^2+5}$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x+2)^n}{10^n}$; 6) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{4+x}}, x_0=-3$;

7) $f(x)=(1+x)\cos x$; 8) $\int\limits_0^1\cos\dfrac{x^2}{4}dx$;

9) $y''+y=0, y(0)=0, y'(0)=1,\ k=3$;

10) $f(x)=\begin{cases}0, -\pi\le x<0,\\ \dfrac{\pi}{4}-\dfrac{x}{2},\ 0\le x\le\pi.\end{cases}$.

Вариант 19

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2+n}{1+n^2}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^3}{(n+1)!}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n-1)3^n}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n}{n!}x^n$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-4)^n}{(n+1)^2}$; 6) $f(x)=\dfrac{1}{1-x}, x_0=2$;

7) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; 8) $\int\limits_0^{0,5}\dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}dx$;

9) $y''=y\cos y'+x,\ y(0)=1,\cdots y'(0)=\dfrac{\pi}{3},\ k=3$;

10) $f(x)=\begin{cases}6x-2,-\pi\le x\le 0,\\ \quad 0,\ 0<x\le\pi.\end{cases}$.

Вариант 20

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2-4n+13}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{2n-1}{3n}\right)^n$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n-1)!}{2^n}x^n$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x+4)^n}{\sqrt{n+1}}$; 6) $f(x)=\dfrac{1}{x+1},x_0=1$;

7) $f(x)=\arcsin x$; 8) $\int\limits_0^1\operatorname{arctg}\left(\dfrac{\sqrt{x}}{2}\right)dx$;

9) $y'=\cos x+x^2,\ y(0)=0,\ k=3$; 10) $f(x)=\begin{cases}\quad 0,-\pi\le x<0,\\ 4-9x,\ 0\le x\le\pi.\end{cases}$.

Вариант 21

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n+1}{3n+4}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n\cdot 3^n}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n!x^n$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n+1)(n+2)}{(n+3)^2}(x-3)^n$;

6) $f(x)=\dfrac{2}{x+2},x_0=1$; 7) $f(x)=\operatorname{arctg} x$; 8) $\int\limits_0^{0,5}\dfrac{x-\operatorname{arctg} x}{x^2}dx$;

9) $y'-4y+2xy^2-e^{3x}=0,\ y(0)=2,\ k=4$;

10) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{3}-3,-\pi\le x\le 0,\\ 0,\qquad 0<x\le\pi.\end{cases}$.

Вариант 22

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+5}{n^4-1}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{10^n}{3^n(n+2)}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+1}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{(n+1)(n+2)}$; 6) $f(x)=xe^x, x_0=1$;

7) $f(x)=x\ln(1+x^2)$. 8) $\int\limits_0^{0,5}e^{-x^2}dx$;

9) $(1-x)y''+y=0,\ y(0)=y'(0)=1,\ k=3$;

10) $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x\le 0,\\ 10x-3, & 0<x\le\pi.\end{cases}$.

Вариант 23

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+2n}{3n^2+4}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^3}{(3n)!}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\left(n+1\right)}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2^n\cdot n}$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+8)^n}{3n+2}$; 6) $f(x)=\ln x,\ x_0=1$;

7) $f(x)=\frac{x^2}{1-x^2}$; 8) $\int\limits_0^{0,4}\sqrt{1-x^3}\,dx$;

9) $4x^2y''+y=0, y(1)=1,\ y'(1)=\frac{1}{2}, k=3$;

10) $f(x)=\begin{cases}1-\frac{x}{4}, & -\pi\le x\le 0,\\ 0, & 0<x\le\pi.\end{cases}$

Вариант 24

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{5^n}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+2}{2n+1}\right)^n$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+4}}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)(2n+1)}{2n(2n+2)}\cdot x^n$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{n(n+1)}$;

6) $f(x)=\frac{1}{1-x},\ x_0=2$; 7) $f(x)=\frac{x}{1+x}$; 8) $\int\limits_0^1\sqrt{x}\cos x\,dx$;

9) $y'=2x^2+y^3,\ y(1)=1, k=3$; 10) $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x\le 0,\\ \frac{x}{5}-2, & 0<x\le\pi.\end{cases}$.

Вариант 25

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+2n}{2+3n}\right)^n$. 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n\cdot 4^n}$. 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{3n-1}$.

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{2n+3}x^n$. 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n(x-2)^n}{n+1}$. 6) $f(x)=e^x, x_0=-3$.

7) $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$. 8) $\int\limits_0^1\frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx$;

9) $y'=x^2+xy+y^2, y(0)=1, k=4$; 10) $f(x)=\begin{cases}2x-11, -\pi\le x\le 0,\\ 0,\ 0<x\le\pi.\end{cases}$.

Вариант 26

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+3}{3n+4}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n-1}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n(x+2)^n}{n+3}$; 6) $f(x)=\sqrt{x}, x_0=9$;

7) $f(x)=x\sqrt[5]{1+x}$; 8) $\int\limits_0^{0.1}\frac{dx}{1+x^4}$;

9) $xy''+y=0, y(1)=2, y'(1)=1, k=4$; 10) $f(x)=\begin{cases}0, -\pi\le x<0,\\ 3-8x,\ 0\le x\le\pi.\end{cases}$.

Вариант 27

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2+2}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n+1}{3^{\frac{n}{2}}}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)(n+2)}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{2n-3}$; 6) $f(x)=\sqrt{1+x}, x_0=3$;

7) $f(x)=\frac{e^{x^2}}{x}$; 8) $\int\limits_0^1 x^{10}\sin x dx$.

9) $y''-xy+1=0,\ y(0)=1,\ y'(0)=1,\ k=5$;

10) $f(x)=\begin{cases}7x-1, -\pi\le x\le 0,\\ 0,\ 0<x\le\pi.\end{cases}$.

Вариант 28

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2n+3}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{3}{4}\right)^n$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^{n-1}x^n$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{n^3+1}$; 6) $f(x)=xe^x,\ x_0=1$;

7) $f(x)=\frac{x^2}{1-x^2}$; 8) $\int\limits_0^1\sqrt[3]{x}\cos x dx$;

9) $xy''+y^2=0,\ y(1)=1,\ y'(1)=1,\ k=5$; 10) $f(x)=\begin{cases}0, -\pi\le x<0,\\ 2x+1,\ 0\le x\le\pi.\end{cases}$.

Вариант 29

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+3}{n^2+1}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+4)!}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{3}{\ln(n+1)}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{2^n}$; 6) $f(x)=\sin 2x,\ x_0=\frac{\pi}{4}$;

7) $f(x) = x\cos 2x$; 8) $\int\limits_0^1 e^{-x^2}dx$;

9) $y'' - y\cos x = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 2,\ k = 5$;

10) $f(x) = \begin{cases} 0, -\pi \le x < 0, \\ x+1,\ 0 \le x \le \pi. \end{cases}$.

Вариант 30

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 4n}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+1}{4n+5}\right)^n$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+4)^n}{n(n+1)(n+2)}$; 6) $f(x) = 2 + \cos x,\ x_0 = \frac{\pi}{4}$;

7) $f(x) = \frac{\sin x}{x}$; 8) $\int\limits_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$;

9) $y' = y\cos x + 2\cos y,\ y(0) = 0,\ k = 3$; 10) $f(x) = \begin{cases} 0, -\pi < x < 0, \\ x,\ 0 \le x \le \pi. \end{cases}$.

ТИПОВОЙ РАСЧЕТ.

ЭЛЕМЕНТЫ ОПЕРАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

В задачах **№ 1, 2** установить принадлежат ли множеству оригиналов данные функции.

В задаче **№ 3**, пользуясь определением, найти изображение оригинала $1(t)f(t)$, где $1(t)=\begin{cases}0, t<0,\\ 1, t\ge 0.\end{cases}$

В задачах **№ 4, 5** найти изображение оригинала $1(t)f(t)$.

В задачах **№ 6** найти свертку данных функций.

В задаче **№ 7** найти изображение периодического оригинала $1(t)f(t)$.

В задаче **№ 8** найти оригинал по данному изображению.

В задаче **№ 9** найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям.

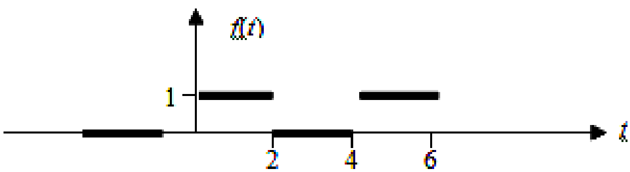
В задаче **№ 10** найти частное решение системы дифференциальных уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям.

Вариант 1

1) $f(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ e^{5t}, & t\ge 0\end{cases}$; 2) $f(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ \dfrac{1}{t+3}, & t\ge 0\end{cases}$; 3) $f(t)=e^{2t}$;

4) $f(t)=\sin^4 t$; 5) $f(t)=\dfrac{e^{-2t}\sin t}{t}$; 6) $f_1(t)=t,\ f_2(t)=\mathrm{sh}\, t$;

7)



8) $F(p)=\dfrac{2}{p(p^2+4)}$; 9) $y''-2y'=t^2,\ y(0)=0,\ y'(0)=0$;

10) $\left.\begin{aligned} x' &= -2x-2y-4z, \\ y' &= -2x+y-2z, \\ z' &= 5x+2y+7z, \end{aligned}\right\}$, $x(0)=1,\ y(0)=2,\ z(0)=-1$.

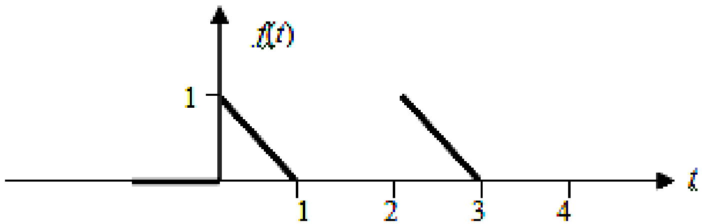
Вариант 2

1) $f(t)=\begin{cases} 0, & t<0, \\ e^{t^2}, & t\ge 0. \end{cases}$; 2) $f(t)=\begin{cases} 0, & t<0, \\ \dfrac{\sin t}{t}, & t\ge 0. \end{cases}$;

3) $f(t)=\begin{cases} e^{3t}, & t\in[0,1], \\ 2, & t\in[1,\infty]. \end{cases}$; 4) $f(t)=\operatorname{ch} t\sin^2 3t$;

5) $f(t)=\dfrac{\cos 2t-\cos 3t}{t}$; 6) $f_1(t)=e^t,\ f_2(t)=e^{-t}$;

7)



8) $F(p)=\dfrac{1}{p^2+2p+7}$; 9) $y''+y'=\sin t,\ y(0)=0,\ y'(0)=0$;

10) $\left.\begin{aligned} x''-3x'+2x+y'-y=0, \\ -x'+x+y''-5y'+4y=0, \end{aligned}\right\}$ $x(0)=x'(0)=y'(0)=0,\ y(0)=1$.

Вариант 3

1) $f(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ t^3, & t\geq 0.\end{cases}$; 2) $f(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ \dfrac{\cos t}{t}, & t\geq 0.\end{cases}$; 3) $f(t)=\mathrm{e}^{t/2}$;

4) $f(t)=\sin t\sin 2t$; 5) $f(t)=\dfrac{1-\mathrm{e}^{3t}}{t\,\mathrm{e}^{2t}}$;

6) $f_1(t)=\cos 2t,\ f_2(t)=\mathrm{e}^{-t}$;

7) $f(t)=\mathrm{e}^{-t},\ t\in[0;3],\quad f(t+3)=f(t)$;

8) $F(p)=\dfrac{p+2}{p(p+3)}$; 9) $y''-y=8t\,\mathrm{e}^{t},\ y(0)=0,\ y'(0)=0$;

10) $\left.\begin{aligned}x''-8x'+\sqrt{6}y'=0,\\ -\sqrt{6}x'+y''+2y=0,\end{aligned}\right\}$, $x(0)=1,\ x'(0)=y(0)=y'(0)=0$.

Вариант 4

1) $f(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ 1, & t\in[0,2],\\ 2t^3, & t>2.\end{cases}$; 2) $f(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ \dfrac{2}{\sin t}, & t\geq 0.\end{cases}$;

3) $f(t)=2-t$; 4) $f(t)=\mathrm{e}^{2t}\cos^2 t$;

5) $f(t)=\mathrm{e}^{2t}\sin 4t$; 6) $f_1(t)=t,\ f_2(t)=\mathrm{e}^{3t}$;

7) $f(t)=\mathrm{e}^{-t},\ t\in[0,2],\quad f(t+2)=f(t)$;

8) $F(p)=\dfrac{4-p}{p^2+9}$; 9) $y''-2y'+3y=1,\ y(0)=0,\ y'(0)=0$;

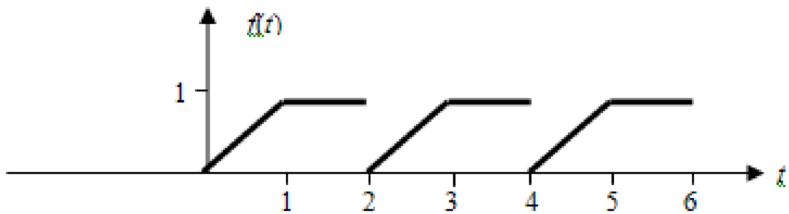
10) $\left.\begin{aligned}x'=y+z,\\ y'=z+x,\\ z'=x+y,\end{aligned}\right\}$, $x(0)=3,\ y(0)=-1,\ z(0)=2$.

Вариант 5

1) $f(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ t+\sin 3t, & t\ge 0.\end{cases}$; 2) $f(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ \dfrac{e^t}{t}, & t\ge 0.\end{cases}$; 3) $f(t)=\operatorname{sh}2t$;

4) $f(t)=\cos^3 t$; 5) $f(t)=\dfrac{e^{-\alpha t}\sin t}{t}$; 6) $f_1(t)=\cos t,\ f_2(t)=\cos t$;

7)



8) $F(p)=\dfrac{2p+3}{p^2-6p+12}$; 9) $y''+y=t^2,\ y(0)=0,\ y'(0)=0$;

10) $\left.\begin{aligned}x'&=8y,\\ y'&=-2z,\\ z'&=2x+8y-2z,\end{aligned}\right\}$, $x(0)=2,\ y(0)=0,\ z(0)=-1$.

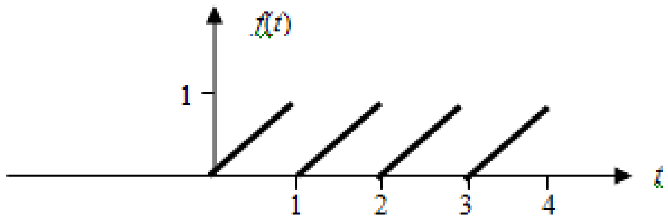
Вариант 6

1) $f(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ \dfrac{\sin^2 t}{t}, & t\ge 0.\end{cases}$; 2) $f(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ \dfrac{1}{t+1}, & t\ge 0.\end{cases}$;

3) $f(t)=2\operatorname{sh}3t$; 4) $f(t)=e^{3t}\sin^2\dfrac{t}{2}$;

5) $f(t)=\cos(\alpha t-b)$; 6) $f_1(t)=\sin 3t,\ f_2(t)=\sin 4t$;

7)



8) $F(p)=\dfrac{5}{p(p^2+2p+5)}$;

9) $y''+2y'+y=2\sin t,\ y(0)=0,\ y'(0)=0$;

10) $\left.\begin{array}{l} x'+3x+y=0, \\ y'-x+y=0, \end{array}\right\},\quad x(0)=2,\ y(0)=3$.

Вариант 7

1) $f(t)=\begin{cases} 0, & t<0, \\ e^{(2+3t)t}, & t\geq 0. \end{cases}$;

2) $f(t)=\begin{cases} 0, & t<0, \\ \dfrac{\cos 3t}{t}, & t\geq 0. \end{cases}$;

3) $f(t)=2-e^{2t}$;

4) $f(t)=\cos^4\dfrac{t}{2}$;

5) $f(t)=\dfrac{\cos bt-\cos at}{t}$;

6) $f_1(t)=\dfrac{t}{2},\ f_2(t)=\operatorname{ch}3t$;

7) $f(t)=\begin{cases} 4, t\in[0,2), \\ 2, t\in[2,3], \end{cases}\quad f(t+3)=f(t)$;

8) $F(p)=\dfrac{2p+6}{(p-2)(p+3)}$;

9) $y''+2y'+5y=5,\ y(0)=0,\ y'(0)=0$;

10) $\left.\begin{array}{l} x''+y''=0, \\ x'+y=1+e^t, \end{array}\right\},\quad x(0)=x'(0)=0,\ y(0)=2,\ y'(0)=-1$.

Вариант 8

1) $f(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ t^3, & t\geq 0.\end{cases}$;

2) $f(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ \dfrac{1}{\sin t}, & t\geq 0.\end{cases}$;

3) $f(t)=3-2t$;

4) $f(t)=\operatorname{ch}3t\cos^2 t$;

5) $f(t)=\dfrac{1-\mathrm{e}^{2t}}{t\,\mathrm{e}^{t}}$;

6) $f_1(t)=\mathrm{e}^{-t}$, $f_2(t)=\sin t$;

7) $f(t)=\begin{cases}e^{-t}, & t\in[0,a),\\ e^{-2t}, & t\in[a,2a],\end{cases}$ $\quad f(t+2a)=f(t)$;

8) $F(p)=\dfrac{3p+1}{p^2(p^2-4p+1)}$.

9) $y''+y=\sin t,\ y(0)=0,\ y'(0)=0$;

10) $\left.\begin{array}{l} x''-x'+9x-y''-y'-3y=0,\\ 2x''+x'+7x-y''+y'-5y=0,\end{array}\right\}$

$x(0)=x'(0)=1,\ y(0)=y'(0)=0.$

Вариант 9

1) $f(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ \mathrm{e}^{1/t}, & t\geq 0.\end{cases}$;

2) $f(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ \dfrac{\sin t}{2t}, & t\geq 0.\end{cases}$;

3) $f(t)=1+\mathrm{e}^{2t}$;

4) $f(t)=\sin^2 2t\cos 3t$;

5) $f(t)=e^{2(t-1)}\sin(t-1)$;

6) $f_1(t)=t,\ f_2(t)=\cos 3t$;

7) $f(t)=\begin{cases}2t, & t\in[0,\pi],\\ 3t, & t\in(\pi,2\pi[,\end{cases}$ $\quad f(t+2\pi)=f(t)$;

8) $F(p)=\dfrac{p^2+1}{p^3+27}$;

9) $y''+y=t\,\mathrm{e}^{t},\ y(0)=0,\ y'(0)=0$;

10) $\left.\begin{array}{l} x'-2y+5x=\mathrm{e}^{t},\\ y'-x+6y=\mathrm{e}^{-2t},\end{array}\right\},\quad x(0)=1,\ y(0)=-1.$

Вариант 10

1) $f(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ e^t, & t\ge 0.\end{cases}$; 2) $f(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ \dfrac{1}{t-1}, & t\ge 0.\end{cases}$;

3) $f(t)=\begin{cases}2, & t\in[0,3),\\ t, & t\in[3,\infty).\end{cases}$; 4) $f(t)=\sin^3 t$;

5) $f(t)=e^{-(t-a)}\cos(t-a)$; 6) $f_1(t)=t,\ f_2(t)=\operatorname{ch} t$;

7) $f(t)=\dfrac{3at}{2\pi},\ t\in[0,2\pi],\quad f(t+2\pi)=f(t);$

8) $F(p)=\dfrac{2p^2-1}{p(p^2+2)}$; 9) $y''+y=e^t,\ y(0)=0,\ y'(0)=0$;

10) $\left.\begin{aligned}&4x'-y'+3x=\sin t,\\ &x'+y=\cos t,\end{aligned}\right\}\quad x(0)=2,\ y(0)=-1.$

Вариант 11

1) $f(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ t+\sin 2t, & t\ge 0.\end{cases}$; 2) $f(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ \dfrac{1}{t^2-4}, & t\ge 0.\end{cases}$;

3) $f(t)=2t^2$; 4) $f(t)=\operatorname{sh} 2t\sin 3t$;

5) $f(t)=t\sin^2 t$. 6) $f_1(t)=t,\ f_2(t)=\sin 4t$;

7) $f(t)=\begin{cases}\pi, & t\in[0,\pi),\\ 2\pi, & t\in[\pi,2\pi],\end{cases}\quad f(t+2\pi)=f(t);$

8) $F(p)=\dfrac{p^2+1}{p^2(p^2+9)}$; 9) $y'''+y''=\cos t,\ y(0)=y'(0)=y''=0$;

10) $\left.\begin{aligned}&x''+y'+x=e^t,\\ &x'+y''=1,\end{aligned}\right\}\quad x(0)=1,\ x''(0)=0,\ y(0)=-1,\ y'(0)=2.$

Вариант 12

1) $f(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ \operatorname{ch}2t, & t\ge 0.\end{cases}$;

2) $f(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ \dfrac{\cos 3t}{t}, & t\ge 0.\end{cases}$;

3) $f(t)=\mathrm{e}^{-2t}$;

4) $f(t)=\cos 2t\cos 3t$;

5) $f(t)=\dfrac{\mathrm{e}^{2t}\sin t}{t}$;

6) $f_1(t)=\sin t,\ f_2(t)=\sin 2t$;

7) $f(t)=\begin{cases}2t, & t\in[0,1),\\ t, & t\in[1,2],\end{cases}$ $\quad f(t+2)=f(t)$;

8) $F(p)=\dfrac{p^2-p+2}{p^3-p^2-6p}$;

9) $2y'+3y=t^2,\ y(0)=-1$;

10) $\left.\begin{aligned}x''+y=1,\\ y''+x=0,\end{aligned}\right\}$, $\quad x(0)=y(0)=x'(0)=y'(0)=0.$

Вариант 13

1) $f(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ t, & t\in[0,1),\\ \mathrm{e}^t, & t\ge 1\end{cases}$, ;

2) $f(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ \dfrac{2}{t-3}, & t\ge 0.\end{cases}$;

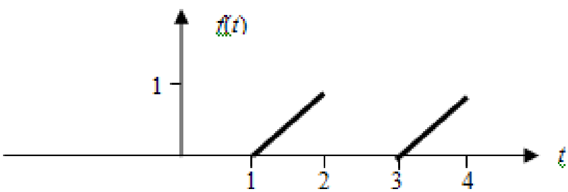
3) $f(t)=\operatorname{ch}\dfrac{t}{2}$;

4) $f(t)=\mathrm{e}^t\cos^2 t$;

5) $f(t)=\dfrac{\sin 3t\cos 2t}{t}$;

6) $f_1(t)=\cos 2t,\ f_2(t)=\mathrm{e}^{2t}$;

7)



8) $F(p)=\dfrac{p}{p^2+3p+2}$;

9) $y'+ay=b,\ y(0)=0$;

10) $\left.\begin{aligned} x''+y'&=\operatorname{sh}t-\sin t-t,\\ y''+x'&=\operatorname{ch}t-\cos t,\end{aligned}\right\}$, $x(0)=0,\ x'(0)=2,\ y(0)=1,\ y'=0$.

Вариант 14

1) $f(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ t+\dfrac{\sin t}{t}, & t\geq 0.\end{cases}$;

2) $f(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ e^{3t^2}, & t\geq 0.\end{cases}$;

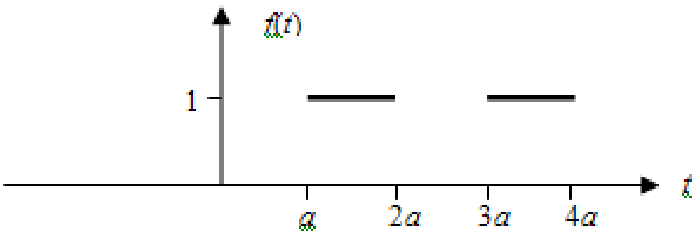
3) $f(t)=\begin{cases}2, & t\in[0,5),\\ t, & t\in[5,\infty).\end{cases}$;

4) $f(t)=\operatorname{sh}t\cos 2t$;

5) $f(t)=\dfrac{\sin 3t}{t}$;

6) $f_1(t)=e^{3t},\ f_2(t)=\cos t$;

7)



8) $F(p)=\dfrac{1-p^2}{p(p^2+1)}$;

9) $y''-y'-6y=2,\ y(0)=1,\ y'(0)=0$;

10) $\left.\begin{aligned} x''-x'+y&=e^{-t}+\cos t,\\ x'-y''-y'&=2e^{t}+\sin t,\end{aligned}\right\}$, $x(0)=2,\ x'(0)=1,\ y(0)=0,\ y'=1$.

Вариант 15

1) $f(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ \dfrac{\sin t}{t-2}, & t\geq 0.\end{cases}$;

2) $f(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ e^{(1+i)t}, & t\geq 0.\end{cases}$;

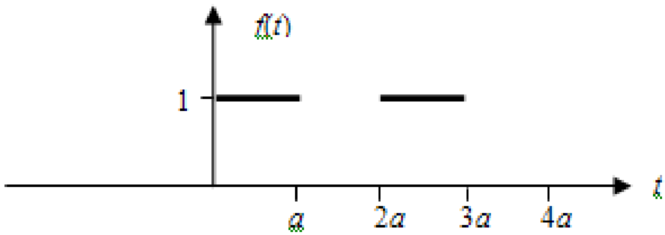
3) $f(t)=3\operatorname{sh}\dfrac{t}{3}$;

4) $f(t)=\cos 5t\sin 3t$;

5) $f(t)=\dfrac{e^t\sin 2t}{t}$;

6) $f_1(t)=t,\ f_2(t)=\cos 2t$;

7)



8) $F(p)=\dfrac{p+2}{(p^2+4p+5)^2}$;

9) $y''-4y=2\cos 2t,\ y(0)=0,\ y'(0)=4$;

10) $\left.\begin{array}{l} x'+3x-4y=9\mathrm{e}^{2t}, \\ 2x+y'-3y=3\mathrm{e}^{2t}, \end{array}\right\},\quad x(0)=2,\ y(0)=0.$

Вариант 16

1) $f(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ \operatorname{sh}2t, & t\ge 0.\end{cases}$;

2) $f(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ t^2, & t\in[0,2],\\ \dfrac{1}{t-4}, & t>2.\end{cases}$;

3) $f(t)=\begin{cases}0, & t\in[0,4],\\ 5t, & t\in(4,\infty).\end{cases}$;

4) $f(t)=\mathrm{e}^t\sin^2 t$;

5) $f(t)=\dfrac{1+\cos 2t}{t}$;

6) $f_1(t)=t,\ f_2(t)=\sin 2t$;

7) $f(t)=\begin{cases}a, & t\in[0,l[,\\ -a, & t\in[l,2l[,\end{cases}\quad f(t+2l)=f(t);$

8) $F(p)=\dfrac{p^2-2p-1}{(p^2-2p+3)^2}$; 9) $2y''-9y=2-t,\ y(0)=0,\ y'(0)=1$;

10) $\left.\begin{array}{l} x''+y'+y=\mathrm{e}^t-t, \\ x'-x+2y''-y=-\mathrm{e}^{-t}, \end{array}\right\}$, $x(0)=1,\ x'(0)=2,\ y(0)=y'(0)=0$.

Вариант 17

1) $f(t)=\begin{cases} 0, & t<0, \\ t^2+1, & t\in[0,1]; \\ \text{sint}, & t>1. \end{cases}$ 2) $f(t)=\begin{cases} 0, & t<0, \\ \mathrm{e}^{2t^2}, & t\geq 0. \end{cases}$;

3) $f(t)=t^2-1$; 4) $f(t)=\operatorname{ch}2t\cos t$;

5) $f(t)=\dfrac{\cos 3t}{2}+t\,\mathrm{e}^t$; 6) $f_1(t)=\mathrm{e}^{2t},\ f_2(t)=\sin 3t$;

7) $f(t)=\begin{cases} |\sin t|, & t>0, \\ 0, & t<0, \end{cases}$ $f(t+\pi)=f(t)$;

8) $F(p)=\dfrac{p^2-3p-9}{(p^2+9)^2}$; 9) $y''+y=\sin 2t,\ y(0)=y'(0)=0$;

10) $\left.\begin{array}{l} x''-y'=1, \\ y''-x'=0, \end{array}\right\}$, $x(0)=1,\ x'(0)=y(0),\ y'(0)=1$.

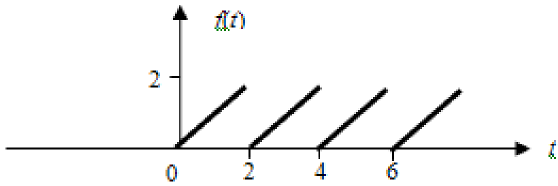
Вариант 18

1) $f(t)=\begin{cases} 0, & t<0, \\ \operatorname{sh}it, & t\geq 0. \end{cases}$; 2) $f(t)=\begin{cases} 0, & t<0, \\ \dfrac{1}{t-2}, & t\geq 0. \end{cases}$;;

3) $f(t)=\begin{cases} 1, & t\in[0,2), \\ 1+2t, & t\in[2,\infty). \end{cases}$; 4) $f(t)=\sin 2t\cos^2 t$;

5) $f(t)=\dfrac{2+3\cos 4t}{\mathrm{e}^t}$; 6) $f_1(t)=t,\ f_2(t)=\operatorname{sh}2t$;

7)



8) $F(p)=\dfrac{p^2+4}{(p^2-4)^2}$; 9) $y'''-y'=10\mathrm{e}^{2t}$, $y(0)=y'(0)=y''(0)=0$;

10) $\left.\begin{aligned} x'+3x+y=0, \\ y'-x+y=0, \end{aligned}\right\}$, $x(0)=y(0)=1$.

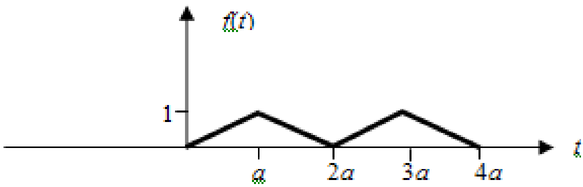
Вариант 19

1) $f(t)=\begin{cases} 0, & t<0, \\ \sin t+\dfrac{1}{t}, & t\ge 0. \end{cases}$; 2) $f(t)=\begin{cases} 0, & t<0, \\ \mathrm{e}^{(1+2i)t}, & t\ge 0. \end{cases}$;

3) $f(t)=t^2+2$; 4) $f(t)=\mathrm{ch}\,2t\sin^2 t$;

5) $f(t)=\dfrac{\sin t\cdot\cos 3t}{t}$; 6) $f_1(t)=e^{2t}$, $f_2(t)=e^{\frac{t}{2}}$;

7)



8) $F(p)=\dfrac{p^2-2p-8}{(p^2-2p+10)^2}$; 9) $y''-y'=t$, $y(0)=y'(0)=0$;

10) $\left.\begin{aligned} x'+4x+4y=0, \\ y'+2x+6y=0, \end{aligned}\right\}$, $x(0)=3$, $y(0)=15$.

Вариант 20

1) $f(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ \sin t, & t\ge 0.\end{cases}$; 2) $f(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ \dfrac{1}{t+3}, & t\ge 0.\end{cases}$;

3) $f(t)=\operatorname{sh}\dfrac{t}{3}$; 4) $f(t)=\operatorname{ch}3t\sin 2t$;

5) $f(t)=t\sin 3t\cdot\cos 4t$; 6) $f_1(t)=\mathrm{e}^{5t}$, $f_2(t)=t$;

7) $f(t)=t+1,\quad t\in[0,1],\quad f(t+1)=f(t)$;

8) $F(p)=\dfrac{2(p-3)}{(p^2-6p+8)^2}$; 9) $y''+y'=1,\ y(0)=y'(0)=0$;

10) $\left.\begin{aligned}&x''+y'+x=\mathrm{e}^t,\\ &x'+y''=1,\end{aligned}\right\}\quad x(0)=1,\ x'(0)=0,\ y(0)=-1,\ y'(0)=2.$

Вариант 21

1) $f(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ \cos t, & t\ge 0.\end{cases}$; 2) $f(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ \dfrac{1}{\sin t}, & t\ge 0.\end{cases}$;

3) $f(t)=\begin{cases}\mathrm{e}^{2t}, & t\in[0,1),\\ 1, & t\in[1,\infty).\end{cases}$; 4) $f(t)=\operatorname{sh}t\sin^2 t$;

5) $f(t)=\dfrac{\sin t\cdot\sin 3t}{t}$. 6) $f_1(t)=\cos 2t,\ f_2(t)=\cos 3t$;

7) $f(t)=2t,\ t\in[0,3],\quad f(t+3)=f(t)$;

8) $F(p)=\dfrac{p-1}{(p^2-2p+10)^2}$; 9) $y''+y=3,\ y(0)=y'(0)=0$;

10) $\left.\begin{aligned}&x'=-2x-2y-4z,\\ &y'=-2x+y-2z,\\ &z'=5x+2y+7z,\end{aligned}\right\},\quad x(0)=1,\ \ y(0)=2,\ z(0)=-1.$

Вариант 22

1) $f(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ \sin t, & t\geq 0.\end{cases}$; 2) $f(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ e^{t^2}, & t\geq 0.\end{cases}$;

3) $\begin{cases}\sin t, & t\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right),\\ 0, & t\in\left[\dfrac{\pi}{2},\infty\right].\end{cases}$; 4) ; $f(t)=\operatorname{sh}2t\cos^2\dfrac{t}{2}$.

5) $f(t)=t\cos(2t+3)$; 6) $f_1(t)=\sin 3t,\ f_2(t)=t$;

7) $\begin{cases}0, & t\in[0,1),\\ 1, & t\in[1,\ 4],\end{cases}\quad f(t+4)=f(t)$;

8) $F(p)=\dfrac{1}{(p-a)(p-b)}$; 9) $y''-2y'+y=e^{t},\ y(0)=y'(0)=0$;

10) $\left.\begin{array}{l}x'-x-2y=t,\\ y'-2x-y=t,\end{array}\right\}\ x(0)=2,\ y(0)=4.$

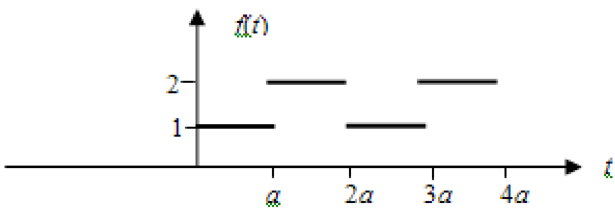
Вариант 23

1) $f(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ e^{2+t}, & t\geq 0.\end{cases}$; 2) $f(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ \dfrac{1}{2t+1}, & t\geq 0.\end{cases}$;

3) $\begin{cases}\cos t, & t\in[0,\ \pi),\\ 0, & t\in[\pi,\ \infty].\end{cases}$; 4) $f(t)=\sin^2 t\cos 2t$;

5) $f(t)=\dfrac{t\cos t}{e^{5t}}$; 6) $f_1(t)=\sin 2t,\ f_2(t)=e^{3t}$;

7)



8) $F(p)=\dfrac{1}{(p-2)^4}$;

9) $y'+y=\sin t,\ y(0)=0$;

10) $\left.\begin{array}{l} x'=y-z, \\ y'=z-2x, \\ z'=2x-y, \end{array}\right\},\quad x(0)=1,\ y(0)=z(0)=0.$

Вариант 24

1) $f(t)=\begin{cases} 0, & t<0, \\ 3t^2, & t\ge 0. \end{cases}$;

2) $f(t)=\begin{cases} 0, & t<0, \\ \dfrac{1}{\sin 2t}, & t\ge 0. \end{cases}$;

3) $f(t)=2-t$;

4) $f(t)=\operatorname{ch} t\sin^2 t$;

5) $f(t)=t\cos(2t+3)$;

6) $f_1(t)=\cos 3t,\ f_2(t)=\sin 2t$;

7) $f(t)=2t,\quad t\in\left[0,1\right],\quad f(t+1)=f(t)$;

8) $F(p)=\dfrac{p^2+5}{(p^2-5)^2}$;

9) $y'+y=t,\ y(0)=0$;

10) $\left.\begin{array}{l} x''+2y=0, \\ y''-2x=0, \end{array}\right\},\ \begin{array}{l} x(0)=0,\ x'(0)=1, \\ y(0)=y'(0)=0. \end{array}$.

Вариант 25

1) $f(t)=\begin{cases} 0, & t<0, \\ e^{2t}, & t\ge 0. \end{cases}$;

2) $f(t)=\begin{cases} 0, & t<0, \\ \dfrac{1}{t-2}, & t\ge 0. \end{cases}$;

3) $f(t)=1-t^2$;

4) $f(t)=\sin 2t\cdot\sin 4t$;

5) $f(t)=\dfrac{t\cos(t+2)}{e^{t+2}}$;

6) $f_1(t)=\cos 5t,\ f_2(t)=t$;

7) $\begin{cases} e^t, & t\in[0,2], \\ 0, & t\in\left(2,3\right), \end{cases}\quad f(t+3)=f(t)$;

8) $F(p)=\dfrac{1}{(2p+3)^3}$;

9) $y'+y=\sin t,\ y(0)=0$;

10) $\left.\begin{array}{l} x'-x+2y=0, \\ x''-2y'=2t-\cos 2t, \end{array}\right\}\ \begin{array}{ll} x(0)=0, & x'(0)=-1, \\ y(0)=-\dfrac{1}{2}, & y'(0)=0. \end{array}$.

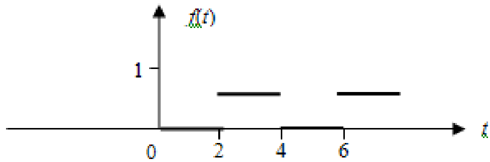
Вариант 26

1) $f(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ e^{57}, & t\ge 0.\end{cases}$; 2) $f(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ \dfrac{1}{t+3}, & t\ge 0.\end{cases}$; 3) $f(t)=e^{2t}$;

4) $f(t)=\sin^4 t$; 5) $f(t)=\dfrac{e^{-2t}\sin t}{t}$;

6) $f_1(t)=t,\ f_2(t)=\operatorname{sh} t$;

7)



8) $F(p)=\dfrac{p^2-3p-9}{(p^2+9)^2}$; 9) $y''-y'-6y=2,\ y(0)=1, y'(0)=0$;

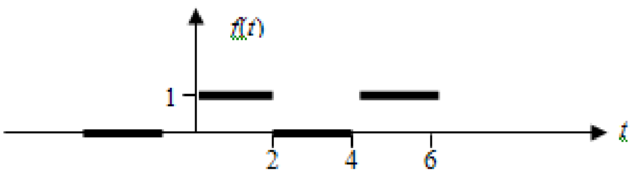
10) $\left.\begin{aligned}x''-y'=1,\\ y''-x'=0,\end{aligned}\right\}$, $x(0)=1, x'(0)=y(0)=0, y'(0)=1.$

Вариант 27

1) $f(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ e^{-6t}, & t\ge 0\end{cases}$; 2) $f(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ \dfrac{1}{t-5}, & t\ge 0\end{cases}$; 3) $f(t)=e^{3t}$;

4) $f(t)=\sin^4 2t$; 5) $f(t)=\dfrac{e^{-6t}\sin t}{t}$; 6) $f_1(t)=t^2,\ f_2(t)=\operatorname{sh} t$;

7)



8) $F(p)=\dfrac{6}{p(p^2+4)}$; 9) $y''-4y'=t^2,\ y(0)=0,\ y'(0)=0$;

10) $\left.\begin{aligned} x'&=-2x-2y-2z,\\ y'&=-2x+y-3z,\\ z'&=5x+2y+4z,\end{aligned}\right\},\quad x(0)=1,\ y(0)=2,\ z(0)=-1.$

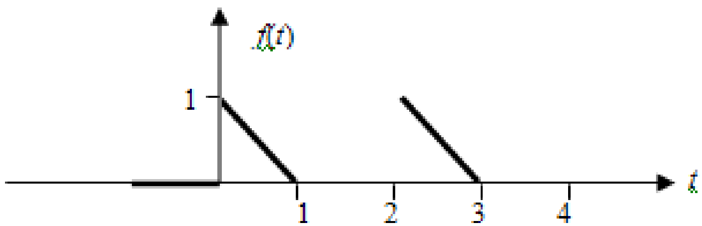
Вариант 28

1) $f(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ e^{4t}, & t\ge 0.\end{cases}$; 2) $f(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ \dfrac{\sin 5t}{t}, & t\ge 0.\end{cases}$;

3) $f(t)=\begin{cases}e^{2t}, & t\in[0,1],\\ 2, & t\in(1,\infty).\end{cases}$; 4) $f(t)=\operatorname{ch} t\sin^2 4t$;

5) $f(t)=\dfrac{\cos 3t-\cos 2t}{t}$; 6) $f_1(t)=e^{3t},\ f_2(t)=e^{-t}$;

7)



8) $F(p)=\dfrac{7}{p^2+2p+7}$; 9) $y''+2y'=\sin t,\ y(0)=0,\ y'(0)=0$;

10) $\left.\begin{aligned} x''-3x'+2x+y'-5y&=0,\\ -x'+x+y''-5y'+2y&=0\end{aligned}\right\},\ x(0)=x'(0)=y'(0)=0,\ y(0)=1.$

Вариант 29

1) $f(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ t^4, & t\ge 0.\end{cases}$; 2) $f(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ \dfrac{\cos 3t}{t}, & t\ge 0.\end{cases}$; 3) $f(t)=e^{-t/2}$;

4) $f(t)=\sin t\sin 4t$;   5) $f(t)=\dfrac{1-e^{5t}}{t\,e^{2t}}$;

6) $f_1(t)=\cos 4t,\ f_2(t)=e^{-t}$;

7) $f(t)=e^{-3t},t\in[0;3],\quad f(t+3)=f(t)$;

8) $F(p)=\dfrac{p+4}{p(p+3)}$;   9) $y''-3y=8t\,e^{t},\ y(0)=0,\ y'(0)=0$ м

10) $\left.\begin{array}{l} x''-8x'+y'=0,\\ -x'+y''+2y=0 \end{array}\right\},\ x(0)=1,\ x'(0)=y(0)=y'(0)=0$.

Вариант 30

1) $f(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ 2, & t\in[0,2],\\ 4t^3, & t>2.\end{cases}$;   2) $f(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ \dfrac{2}{\sin 3t}, & t\geq 0.\end{cases}$;

3) $f(t)=4-t$;   4) $f(t)=e^{5t}\cos^2 t$;

5) $f(t)=e^{3t}\sin 4t$;   6) $f_1(t)=t,\ f_2(t)=e^{3t}$ м

7) $f(t)=e^{-2t},t\in[0,2],\quad f(t+2)=f(t)$ м

8) $F(p)=\dfrac{6-p}{p^2+9}$;   9) $y''-3y'+3y=1,\ y(0)=0,\ y'(0)=0$;

10) $\left.\begin{array}{l} x'=2y+z,\\ y'=3z+x,\\ z'=x+y \end{array}\right\},\ x(0)=3,\ y(0)=-1,\ z(0)=2$.

ТИПОВОЙ РАСЧЕТ.

ТФКП

В задаче **1** вычислить значение функции $f(z)$ в точке $z0$.

В задаче **2** найти действительную и мнимую части функции $w = f(z)$.

В задаче **3** найти аналитическую функцию $f(z)$ по заданной действительной (u) или мнимой (v) части и заданному значению $f(z_0)$.

В задаче **4** найти область, на которую заданная функция $w = f(z)$ отображает указанную область G. Заданную область G на плоскости Z и ее образ на плоскости W изобразить на чертежах.

В задаче **5** вычислить $\int\limits_{\gamma} f(z)dz$.

В задаче **6** вычислить с помощью формулы Коши $\int\limits_{\gamma} f(z)dz$, где γ – замкнутый контур, пробегаемый против часовой стрелки.

В задаче **7** записать ряд Лорана функции $f(z)$ в окрестности точки z_0 и определить область сходимости полученного ряда.

В задаче **8** найти особые точки функции $f(z)$ и выяснить их характер.

В задаче **9** найти вычеты функции $f(z)$ в изолированных особых точках.

В задаче **10** вычислить с помощью вычетов $\int\limits_{\gamma} f(z)dz$, где γ – замкнутый контур, пробегаемый против часовой стрелки.

Вариант 1

1) $f(z) = Ln\, z, \quad z_0 = 1 + \sqrt{3}\, i$; 2) $w = ze^z$;

3) $u = x^2 - y^2 + 3x + y, \quad f(0) = i$;

4) $w = i(2z+1)$, G: квадрант $\operatorname{Re} z \ge 0$, $\operatorname{Im} z \ge 0$;

5) $\int\limits_{\gamma} \operatorname{Re} z dz$, γ – отрезок прямой от точки $z_0 = 0$ до точки $z_1 = 2 + i$;

6) $\oint\limits_{\gamma} \frac{zdz}{z^2+1}$, $\gamma : |z+i| = 1$;

7) $f(z) = z^2 e^{\frac{1}{z}}$, $z_0 = 0$;

8) $f(z) = \frac{z+2}{(z-1)^3(z+1)}$;

9) $f(z) = \frac{z}{(z-2)\sin z}$;

10) $\oint\limits_{\gamma} \frac{dz}{\left(z^2+4\right)^2}$, $\gamma : |z+2i| = 1$.

Вариант 2

1) $f(z) = z^i$, $z_0 = i$;

2) $w = \sin z$;

3) $u = x^3 - 3xy^2 + 2, f(0) = 2 + i$;

4) $w = e^{2z} + i, G:$ полоса $-\infty < \operatorname{Re} z < +\infty, 0 \le \operatorname{Im} z \le \pi$;

5) $\int\limits_{\gamma} \bar{z} dz$, где γ – ломаная с вершинами в точках $z_0 = 0, z_1 = 1, z_2 = 1 + i$;

6) $\oint\limits_{\gamma} \frac{e^z dz}{(z-i)^3}$, $\gamma : |z| = 2$;

7) $f(z) = \sin\frac{1}{z}$, $z_0 = 0$;

8) $f(z) = \frac{1}{\left(z^2+i\right)^3}$;

9) $f(z) = \frac{e^z}{z^2(z+3)}$;

10) $\oint\limits_{\gamma} \frac{tgz}{z+2} dz$, $\gamma : |z+2| = 2$.

Вариант 3

1) $f(z) = e^z$, $z_0 = 3 + \frac{\pi}{4} i$;

2) $w = \operatorname{ch} z$;

3) $v = 2e^x \cos y$, $f(0) = 2(1+i)$;

4) $w=(1-i)(1+z)$, $G:$ треугольник с вершинами в точках $z_1=0, z_2=-i, z_3=1$;

5) $\int\limits_{\gamma} z^2dz$, γ – отрезок прямой, соединяющий точку $z_0=0$ с точкой $z_1=1+i$;

6) $\int\limits_{\gamma}\dfrac{z^2dz}{(z-2i)^2}$, $\gamma:|z-i|=2$;

7) $f(z)=\dfrac{1}{(z+3)(z-1)^4}$, $z_0=1$;

8) $f(z)=\cos\dfrac{1}{z+i}$;

9) $f(z)=\dfrac{z^5}{z^2-1}$;

10) $\int\limits_{\gamma}\dfrac{e^z}{2z}dz$, $\gamma:|z|=1$.

Вариант 4

1) $f(z)=2^z$, $z_0=1+i$;

2) $w=\cos z$;

3) $u=x^2-y^2+5x+y-\dfrac{y}{x^2+y^2}$, $f(1)=6-2i$ $(|z|>0)$;

4) $w=\dfrac{1}{z+i}$, $G:$ полуплоскость $\operatorname{Im} z\ge 0$;

5) $\int\limits_{\gamma}\dfrac{dz}{\sqrt{z}}$, γ – полуокружность $|z|=1$ от точки $z_0=1$ до точки $z_1=-1$, лежащая в верхней полуплоскости;

6) $\oint\limits_{\gamma}\dfrac{dz}{(z-1)^3(z+1)^3}$, $\gamma:|z+1|=1{,}5$;

7) $f(z)=\sin\dfrac{1}{(z-2)}$, $z_0=2$;

8) $f(z)=\dfrac{(z+6)\sin(z+5)}{(z^4-z^2)(z^2-25)}$;

9) $f(z)=\dfrac{\cos z}{z^3}$;

10) $\oint\limits_{\gamma}\dfrac{dz}{(z+2)(z-1)}$, $\gamma:|z|=3$.

Вариант 5

1) $f(z)=Ln\,z, \quad z_0=3+4i$; 2) $w=e^{z^2}$;

3) $u=x^2-y^2+xy, \quad f(0)=0$;

4) $w=\dfrac{z+i}{z-i}$, G: квадрант $\operatorname{Re} z>0, \quad \operatorname{Im} z\le 0$;

5) $\int\limits_\gamma \operatorname{Re} z\,dz, \quad \gamma-$ окружность $|z-a|=R$, пробегаемая против часовой стрелки;

6) $\oint\limits_\gamma \dfrac{e^z dz}{(z+i)^2}, \quad \gamma: |z|=1{,}5$; 7) $f(z)=\dfrac{e^z}{z^2}, \quad z_0=0$;

8) $f(z)=\dfrac{z^2+1}{z-1}$; 9) $f(z)=\dfrac{z}{(z-1)^2}$;

10) $\oint\limits_\gamma \dfrac{zdz}{z^2-1}, \quad \gamma-$ эллипс $\dfrac{(x-1)^2}{1}+\dfrac{y^2}{9}=1$.

Вариант 6

1) $f(z)=e^z, \quad z_0=2-3i$; 2) $w=\operatorname{sh} z$;

3) $v=x^3+6x^2y-3xy^2-2y^3, \quad f(0)=0$;

4) $w=\dfrac{1}{z+1}$, G: полуплоскость $\operatorname{Re} z\ge 0$;

5) $\int\limits_\gamma \bar{z}dz$, где $\gamma-$ дуга параболы $y=x^2$ от точки (0,0) до точки (1,1);

6) $\oint\limits_\gamma \dfrac{e^z dz}{(z+2)^4}, \quad \gamma: |z+1|=1{,}5$; 7) $f(z)=(z-2)^3 e^{\frac{1}{z-2}}, \quad z_0=2$;

8) $f(z)=\dfrac{z^2}{1-\cos z}$; 9) $f(z)=\dfrac{\sin z}{z^3-z}$;

10) $\oint\limits_\gamma \dfrac{dz}{(z^2+1)(z-1)}, \quad \gamma: |z-1-i|=2$.

Вариант 7

1) $f(z)=\cos z, \quad z_0=i$; 2) $w=z^2e^z$;

3) $u=x^2-y^2+2x, \quad f(i)=2i-1$;

4) $w=z^2$, G: прямоугольник $0\le \operatorname{Re} z\le 1, \quad 0\le \operatorname{Im} z\le 2$;

5) $\int\limits_\gamma z\bar{z}dz$, γ – дуга окружности $|z|=1$, $0\le \arg z\le \pi$;

6) $\oint\limits_\gamma \dfrac{dz}{(z+1)^2(z+2)}, \quad \gamma: |z|=1{,}5$; 7) $f(z)=\dfrac{e^z}{z^5}, \quad z_0=0$;

8) $f(z)=\dfrac{z}{\sin^2 z}$; 9) $f(z)=\dfrac{z^4}{z^2-1}$;

10) $\oint\limits_\gamma \dfrac{e^z dz}{z^4+2z^2+1}, \quad \gamma: |z-i|=1$.

Вариант 8

1) $f(z)=\sin z, \quad z_0=1+2i$; 2) $w=z^2-|z|$;

3) $u=-2e^x\sin y, \quad f(0)=2i$;

4) $w=e^z$, G: полоса $-\infty<\operatorname{Re} z<+\infty, \quad -\pi\le \operatorname{Im} z\le 0$;

5) $\int\limits_\gamma z^2dz$, γ – ломаная с вершинами в точках $z_0=0$, $z_1=1, \quad z_2=1+i$;

6) $\oint\limits_\gamma \dfrac{dz}{z^2+2z}, \quad \gamma: |z|=1$; 7) $f(z)=\dfrac{1}{z^2+1}, \quad z_0=i$;

8) $f(z)=\dfrac{\cos z}{z-\dfrac{\pi}{2}}$; 9) $f(z)=\dfrac{\cos z}{(z+4)z^2}$;

10) $\oint\limits_\gamma (z-1)^2\dfrac{1}{z+1}dz, \quad \gamma: |z+1|=0$.

Вариант 9

1) $f(z) = Ln\,z, \quad z_0 = 3+4i;$ 2) $w = e^z \operatorname{Re} z;$

3) $u = x^3 - 3xy^2,\ f(0) = i;$

4) $w = z^2, \quad G:$ полуполоса $0 \le \operatorname{Re} z \le 1, \operatorname{Im} z \ge 0;$

5) $\int\limits_\gamma \left(2 - 3z + z^2\right) dz, \quad \gamma -$ произвольный контур, соединяющий точку $z_1 = 0$ с точкой $z_2 = i;$

6) $\oint\limits_\gamma \frac{zdz}{z^2+9}, \quad \gamma : |z+2i| = 2;$ 7) $f(z) = \frac{1}{z(z-1)^2},\ z_0 = 1;$

8) $f(z) = \operatorname{tg} z;$ 9) $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z+2)};$

10) $\oint\limits_\gamma \frac{z+1}{(z-2)^2} dz, \quad \gamma : |z| = 3.$

Вариант 10

1) $f(z) = 2^z, \quad z_0 = 1 - i;$ 2) $w = z^3 + \operatorname{Im} z;$

3) $v = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}, \quad (x > 0), \ f(1) = 0;$

4) $w = i(2 - z),\ G:$ квадрат $0 \le \operatorname{Re} z \le 1, 0 \le \operatorname{Im} z \le 1;$

5) $\int\limits_\gamma \bar{z}\, dz, \quad \gamma -$ отрезок прямой от точки $z_0 = 0$ до точки $z_1 = 1 + i;$

6) $\oint\limits_\gamma \frac{\cos z dz}{(z-i)^2}, \quad \gamma : |z| = 2;$ 7) $f(z) = \frac{1}{z(z+5)},\ z_0 = 0;$

8) $f(z) = \frac{1}{\left(z^2+1\right)^3};$ 9) $f(z) = \frac{\cos z}{z^4};$

10) $\oint\limits_\gamma \frac{(z+3)dz}{(z-1)(z+1)^2}, \quad \gamma : \left|z - \frac{1}{2}\right| = 1.$

Вариант 11

1) $f(z)=Ln\,z, \quad z_0=-i;$ 2) $w=(z+i)e^z;$

3) $v=y^2-2y-x^2+1, \ f(2i)=i-1;$

4) $w=(1+i)z+3, \quad G:$ круг $|z|\le 1;$

5) $\int\limits_\gamma \operatorname{Re} z\,dz, \quad \gamma -$ радиус–вектор точки $z_0=2+i$;

6) $\oint\limits_\gamma \frac{e^z dz}{z(z-1)^3}, \quad \gamma:|z+1|=1{,}5;$ 7) $f(z)=\frac{1}{(z-i)(z-1)}, z_0=i;$

8) $f(z)=\frac{e^{\sqrt{z}}-e^{-\sqrt{z}}}{\sqrt{z}};$ 9) $f(z)=\frac{z+1}{z^3+4z};$

10) $\oint\limits_\gamma \frac{zdz}{(z-1)(z-2)^2}, \quad \gamma:|z-2|=0{,}5$.

Вариант 12

1) $f(z)=\cos z, \quad z_0=5-i;$ 2) $w=e^{z+i};$

3) $v=3x^2y-y^3+3y-1, \ f(1+i)=2+4i;$

4) $w=\frac{z-i}{z+i}, \quad G:$ квадрант $\operatorname{Re} z>0, \ \operatorname{Im} z>0;$

5) $\int\limits_\gamma \bar{z}\,dz, \quad \gamma -$ отрезок прямой, соединяющий точку $z_0=0$ с точкой $z_1=2+i;$

6) $\oint\limits_\gamma \frac{dz}{z^2\left(z^2+4\right)}, \quad \gamma:|z+2i|=1;$ 7) $f(z)=z^3e^{\frac{1}{z}}, \ z_0=0;$

8) $f(z)=\frac{1}{z^2+5z+4};$ 9) $f(z)=\frac{\cos z}{z^2\left(z-\frac{\pi}{2}\right)};$

10) $\oint\limits_{\gamma} \dfrac{\sin z dz}{z\left(z-\dfrac{\pi}{2}\right)^2}, \quad \gamma: |z| = 2$.

Вариант 13

1) $f(z) = \arccos z, \quad z_0 = 2;$

2) $w = z^2 + \operatorname{Re} z;$

3) $u = e^{1+y}\cos x, \ f(-i) = 1 + 3i;$

4) $w = \dfrac{1+z}{1-z}, \quad G:$ полуплоскость $\operatorname{Re} z \le 0;$

5) $\int\limits_{\gamma} z^2 dz, \quad \gamma -$ произвольный контур, соединяющий точку $z_1 = 0$ с точкой $z_2 = 1 + i;$

6) $\oint\limits_{\gamma} \dfrac{e^z dz}{z(z-1)}, \quad \gamma: |z-2| = 1{,}5;$

7) $f(z) = z^2 \sin\dfrac{1}{z}, \ z_0 = 0;$

8) $f(z) = \dfrac{z}{\left(4+z^2\right)\sin z};$

9) $f(z) = \dfrac{z-1}{z^2+1};$

10) $\oint\limits_{\gamma} \dfrac{dz}{z^3 + 4z^2}, \quad \gamma: |z| = 1$.

Вариант 14

1) $f(z) = \arccos z, \quad z_0 = 2i;$

2) $w = z^3 \operatorname{Im} z;$

3) $v = e^{1+2y}\sin 2x, \ f\left(-\dfrac{i}{2}\right) = 3;$

4) $w = (1-i)z + 2i, \quad G:$ круг $|z| \le 1;$

5) $\int\limits_{\gamma} \operatorname{Re} z\, dz, \quad \gamma -$ дуга параболы $y = x^2$ от точки $(0,0)$ до точки $(1,1);$

6) $\oint\limits_{\gamma} \dfrac{dz}{z^2 + 4z}, \quad \gamma: |z| = 1;$

7) $f(z) = z\cos\dfrac{1}{z}, \ z_0 = 0;$

8) $f(z)=z^2\sin\dfrac{1}{z}$;

9) $f(z)=\dfrac{e^{-z}}{z^2}$;

10) $\oint\limits_{\gamma}\dfrac{1}{1-z^2}dz$, $\quad \gamma:|z|=1{,}5$.

Вариант 15

1) $f(z)=\operatorname{Ln} z, \quad z_0=1+i;$

2) $w=(z+i)^2$;

3) $u=x^4-6x^2y^2+y^4, \ f(0)=0;$

4) $w=-i(2z-1), \quad G:$ полуплоскость $\operatorname{Re}z\geq 0;$

5) $\int\limits_{\gamma}\sin z dz, \quad \gamma-$ произвольный контур, соединяющий точку $z_0=0$ с точкой $z_1=\dfrac{\pi}{2}+i;$

6) $\oint\limits_{\gamma}\dfrac{\sin 2z\,dz}{(z+1)^4}, \quad \gamma:|z|=2;$

7) $f(z)=(z-3i)\sin\dfrac{1}{z-3i}, \ z_0=3i;$

8) $f(z)=\dfrac{\cos z}{\left(z-\dfrac{\pi}{2}\right)\left(z^2+1\right)^2}$;

9) $f(z)=\dfrac{1}{\left(z^2+9\right)^2}$;

10) $\oint\limits_{\gamma}\dfrac{e^z}{(z+1)^2\cdot z}dz, \quad \gamma:|z|=\dfrac{1}{2}$.

Вариант 16

1) $f(z)=\arcsin z, \quad z_0=2;$

2) $w=\dfrac{\operatorname{Re}z}{z};$

3) $u=\dfrac{x}{x^2+y^2}, \ f(2)=\dfrac{1}{2};$

4) $w=(1+i)z, \quad G:$ круг $|z-1|\leq 1;$

5) $\int\limits_{\gamma}|z|dz, \quad \gamma-$ отрезок прямой, соединяющий точку $z_1=-1$ с точкой $z_2=1;$

6) $\oint\limits_{\gamma}\frac{z^2dz}{(z-2)^3}, \quad \gamma:|z|=3;$ 7) $f(z)=\frac{1}{z\left(z^2+1\right)},\ z_0=0;$

8) $f(z)=\frac{z-1}{\cos z};$ 9) $f(z)=\frac{z^2+1}{(z+2)^2(z-3)};$

10) $\oint\limits_{\gamma}\frac{\cos z}{z^2}dz, \quad \gamma:|z|=3.$

Вариант 17

1) $f(z)=e^z, \quad z_0=\frac{\pi i}{2};$ 2) $w=z^2\sin z;$

3) $u=x^3-3xy^2+3x^2-6x-3y^2,\ f(0)=0;$

4) $w=\frac{z+i}{z-i}, \quad G:$ полуплоскость $\operatorname{Re} z>0;$

5) $\int\limits_{\gamma}\operatorname{Re} z\,dz, \quad \gamma-$ отрезок прямой, соединяющий точку $z_1=i$ с точкой $z_2=2-i;$

6) $\oint\limits_{\gamma}\frac{dz}{z^2+1}, \quad \gamma:|z-i|=1;$ 7) $f(z)=\cos\frac{1}{z-3},\ z_0=3;$

8) $f(z)=\frac{e^z-z-1}{z^2};$ 9) $f(z)=\frac{e^{\frac{1}{z}}}{z-1};$

10) $\oint\limits_{\gamma}\frac{z-2}{z(z-1)}dz, \quad \gamma:|z+0,5|=3.$

Вариант 18

1) $f(z)=z^{1+i}, \quad z_0=i;$ 2) $w=\frac{\cos z}{z};$

3) $v=x+y-3, \quad f(0)=0;$

4) $w=\dfrac{z}{z+i}$, $G:$полуплоскость $\operatorname{Re} z>0$;

5) $\int\limits_{\gamma}|z|\,dz$, γ – полуокружность $|z|=1$ от точки $z_1=-1$ до точки $z_2=1$, лежащая в верхней полуплоскости;

6) $\oint\limits_{\gamma}\dfrac{dz}{z^3+4z}$, $\gamma:|z-3i|=2$; 7) $f(z)=\dfrac{1}{(z+1)(z-3)}$, $z_0=3$;

8) $f(z)=\dfrac{z}{\operatorname{tg} z}$; 9) $f(z)=e^{\frac{1}{z}}$; 10) $\oint\limits_{\gamma}\dfrac{\sin z}{z\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^2}dz$, $\gamma:|z|=2$.

Вариант 19

1) $f(z)=\cos z$, $z_0=1+i$; 2) $w=Ln\,z$;

3) $v=2xy$, $f(0)=0$;

4) $w=3z^2$, $G:$полуплоскость $\operatorname{Im} z>0$;

5) $\int\limits_{\gamma}z^3dz$, γ – произвольный контур, соединяющий точку $z_0=0$ с точкой $z_1=1+i$;

6) $\oint\limits_{\gamma}\dfrac{e^z dz}{z^2+\pi^2}$, $\gamma:|z-i|=3$; 7) $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-3)}$, $z_0=1$;

8) $f(z)=\dfrac{z^3}{\sin^4 z}$; 9) $f(z)=\dfrac{z^6}{(z-1)^3}$;

10) $\oint\limits_{\gamma}\dfrac{z-1}{z^2+4}dz$, $\gamma:|z|=3$.

Вариант 20

1) $f(z)=\cos z$, $z_0=2-i$; 2) $w=z^i$; 3) $u=x^2-y^2$, $f(0)=0$;

4) $w=(1+\sqrt{3}i)z-2i$, $G:$круг $|z|\le 1$;

5) $\int\limits_{\gamma} \operatorname{Im} z \, dz$, γ – отрезок прямой, соединяющий точку $z_0 = 0$ с точкой $z_1 = 2 + i$;

6) $\oint\limits_{\gamma} \dfrac{\left(z^2+1\right)dz}{z^2-1}$, $\gamma : |z+1| = 1$; 7) $f(z) = \dfrac{1}{z(z-1)}$, $z_0 = 0$;

8) $f(z) = \dfrac{\cos z}{z-i}$; 9) $f(z) = \dfrac{\sin z}{z\left(z^2+4\right)}$;

10) $\oint\limits_{\gamma} \dfrac{dz}{(1+z)^2 (z+2)}$, $\gamma : |z| = 1{,}5$.

Вариант 21

1) $f(z) = z^i$, $z_0 = 1 + i$; 2) $w = \dfrac{\operatorname{Im} z}{z}$;

3) $v = 4x^3 y - 4xy^3$, $f(0) = 0$;

4) $w = i(3z-1)$, G: полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$;

5) $\int\limits_{\gamma} \left(z^2 + iz - 2\right) dz$, γ – произвольный контур, соединяющий точку $z_1 = 0$ с точкой $z_2 = i - 1$;

6) $\oint\limits_{\gamma} \dfrac{dz}{\left(z^2+9\right)^2}$, $\gamma : |z - 2i| = 2$; 7) $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z-2)^3}$, $z_0 = 2$;

8) $f(z) = \dfrac{\sin z}{z^2}$; 9) $f(z) = \dfrac{z-1}{z^2+1}$;

10) $\oint\limits_{\gamma} \dfrac{dz}{\sin z}$, $\gamma : |z| = 2$.

Вариант 22

1) $f(z) = \arcsin z$, $z_0 = 3$; 2) $w = |z| \cos z$;

3) $v = 3x^2 y + 6xy - 6y - x^3$, $f(0) = 0$;

4) $w=(1-i)(1+z)$, $G:$ треугольник с вершинами в точках $z_1=0, z_2=-i, z_3=-1$;

5) $\int\limits_{\gamma} z|z|dz$, $\gamma-$ дуга параболы $y=x^2$ от точки $z_1=0$ до точки $z_2=1+i$;

6) $\oint\limits_{\gamma}\frac{\sin z dz}{(z+i)^3}$, $\gamma:|z|=1{,}5$; 7) $f(z)=ze^{-\frac{1}{z^2}}$, $z_0=0$;

8) $f(z)=\frac{z^2}{\left(z^2+1\right)^2}$; 9) $f(z)=\frac{1}{z^3(z-i)}$;

10) $\oint\limits_{\gamma}\frac{\cos z}{z^3}dz$, $\gamma:|z-1|=2$.

Вариант 23

1) $f(z)=e^z$, $z_0=3+i$; 2) $w=z^{3i}$;

3) $u=x^2-y^2+3x$, $f(0)=0$;

4) $w=e^{z+3}$, $G:$ полоса $-\infty<\operatorname{Re}z<+\infty,\ 0\le\operatorname{Im}z\le\pi$;

5) $\int\limits_{\gamma}\operatorname{Im}z\,dz$, $\gamma-$ ломаная линия, соединяющая точки $z_0=0, z_1=i, z_2=2+i$;

6) $\oint\limits_{\gamma}\frac{dz}{z^2+4}$, $\gamma:|z-2i|=1$; 7) $f(z)=\frac{1}{z(z-1)}$, $z_0=1$;

8) $f(z)=\frac{z+1}{z^2+4z}$; 9) $f(z)=\frac{2}{(z-i)(z+1)}$;

10) $\oint\limits_{\gamma}\frac{e^{iz}dz}{(z-\pi)^3}dz$, $\gamma:|z|=4$.

Вариант 24

1) $f(z)=Lnz$, $z_0=3-4i$; 2) $w=z\cos z$;

3) $v = 2xy + 3y, \quad f(0) = 0$;

4) $w = \dfrac{z+i}{z}, \quad G$: полоса $\operatorname{Re} z > 0,\ \operatorname{Im} z > 0$;

5) $\int\limits_{\gamma} \overline{z}\, dz, \quad \gamma -$ отрезок прямой, соединяющий точку $z_1 = 2i$ с точкой $z_2 = 1 - i$;

6) $\oint\limits_{\gamma} \dfrac{zdz}{(z-1)^2(z+3)}, \quad \gamma: |z| = 2;$ 7) $f(z) = z^2 \cos\dfrac{1}{z^2},\ z_0 = 0;$

8) $f(z) = \dfrac{\sin 2z}{(z+1)^2}$; 9) $f(z) = \dfrac{z}{(z+1)^3}$;

10) $\oint\limits_{\gamma} \dfrac{e^{-z}dz}{z^2}, \quad \gamma: |z| = 3$.

Вариант 25

1) $f(z) = \cos z, \quad z_0 = 2i;$ 2) $w = \dfrac{z^2 + i}{z};$

3) $u = x^3 - 3xy^2 - 2y, \quad f(0) = 0$;

4) $w = i(1-z), \quad G$: треугольник с вершинами в точках $z_1 = 0, z_2 = 1, z_3 = -i$;

5) $\int\limits_{\gamma} (z+2)\, dz, \quad \gamma -$ произвольный контур, соединяющий точку $z_1 = 0$ с точкой $z_2 = i$;

6) $\oint\limits_{\gamma} \dfrac{\sin z dz}{(z+i)^3}, \quad \gamma: |z| = 1{,}5;$ 7) $f(z) = \dfrac{1}{z\left(z^2+5\right)},\ z_0 = 0;$

8) $f(z) = \sin\dfrac{1}{z}$; 9) $f(z) = \dfrac{z^4}{(z+i)^2}$;

10) $\oint\limits_{\gamma} \dfrac{e^z}{z^2+1} dz, \quad \gamma: |z| = 3$.

Вариант 26

1) $f(z) = Ln\,z, \quad z_0 = 2 + \sqrt{3}\,i;$ 2) $w = ze^z;$

3) $u = x^2 - y^2 + 2x + y, \quad f(0) = i;$

4) $w = i(3z + 1)$, G: квадрант $\operatorname{Re} z \ge 0$, $\operatorname{Im} z \ge 0;$

5) $\int\limits_\gamma \operatorname{Re} z dz$, γ – отрезок прямой от точки $z_0 = 0$ до точки $z_1 = 3 + i;$

6) $\oint\limits_\gamma \frac{zdz}{z^2 + 1}, \quad \gamma: |z + i| = 4;$ 7) $f(z) = z^2 e^{\frac{1}{z}}, \quad z_0 = 0;$

8) $f(z) = \frac{z + 3}{(z - 1)^3 (z + 1)};$ 9) $f(z) = \frac{z}{(z - 3)\sin z};$

10) $\oint\limits_\gamma \frac{dz}{\left(z^2 + 2\right)^2}, \quad \gamma: |z + 2i| = 1.$

Вариант 27

1) $f(z) = z^{2i}, \quad z_0 = i;$ 2) $w = \sin z;$

3) $u = x^3 - 5xy^2 + 2, f(0) = 2 + i;$

4) $w = e^{3z} + i, G$: полоса $-\infty < \operatorname{Re} z < +\infty, 0 \le \operatorname{Im} z \le \pi;$

5) $\int\limits_\gamma \bar{z} dz,$ где γ – ломаная с вершинами в точках $z_0 = 0, z_1 = 1, z_2 = 1 + i;$

6) $\oint\limits_\gamma \frac{e^z dz}{(z - i)^3}, \quad \gamma: |z| = 4;$ 7) $f(z) = \sin\frac{1}{z}, \quad z_0 = 0;$

8) $f(z) = \frac{1}{\left(z^2 + i\right)^3};$ 9) $f(z) = \frac{e^z}{z^2 (z + 3)};$

10) $\oint\limits_{\gamma} \frac{\operatorname{tg} z}{z+4} dz, \quad \gamma : |z+2| = 2.$

Вариант 28

1) $f(z) = e^z, \quad z_0 = 4 + \frac{\pi}{4} i;$ 2) $w = \operatorname{ch} z;$

3) $v = 3e^x \cos y, \quad f(0) = 2(1+i);$

4) $w = (1-i)(1+z), \quad G:$ треугольник с вершинами в точках $z_1 = 0, z_2 = -i, z_3 = 1$;

5) $\int\limits_{\gamma} z^2 dz, \quad \gamma$ – отрезок прямой, соединяющий точку $z_0 = 0$ с точкой $z_1 = 2 + i$;

6) $\int\limits_{\gamma} \frac{z^2 dz}{(z-2i)^2}, \quad \gamma : |z-i| = 4$;

7) $f(z) = \frac{1}{(z+3)(z-2)^4}, \quad z_0 = 1;$ 8) $f(z) = \cos \frac{1}{z+2i};$

9) $f(z) = \frac{z^5}{z^2 - 1};$ 10) $\int\limits_{\gamma} \frac{e^z}{2z} dz, \quad \gamma : |z| = 1$.

Вариант 29

1) $f(z) = 3^z, \quad z_0 = 1 + i$; 2) $w = \cos z$;

3) $u = x^2 - y^2 + 4x + y - \frac{y}{x^2+y^2}, \quad f(1) = 6 - 2i \quad (|z| > 0)$;

4) $w = \frac{1}{z+i}$, $G:$ полуплоскость $\operatorname{Im} z \ge 0$;

5) $\int\limits_{\gamma} \frac{dz}{\sqrt{z}}, \quad \gamma$ – полуокружность $|z| = 2$ от точки $z_0 = 1$ до точки $z_1 = 2$, лежащая в верхней полуплоскости;

6) $\oint\limits_{\gamma}\frac{dz}{\left(z-1\right)^3\left(z+1\right)^3}, \quad \gamma:\left|z+1\right|=1,5$;

7) $f\left(z\right)=\sin\frac{1}{\left(z+3\right)}, \quad z_0=3$; 8) $f\left(z\right)=\frac{(z+6)\sin(z+5)}{\left(z^4-z^2\right)\left(z^2-25\right)}$;

9) $f\left(z\right)=\frac{\cos z}{z^2}$; 10) $\oint\limits_{\gamma}\frac{dz}{\left(z+3\right)\left(z-1\right)}, \quad \gamma:\left|z\right|=3$.

Вариант 30

1) $f\left(z\right)=Ln\,z, \quad z_0=2+4i$; 2) $w=e^{z^2}$;

3) $u=x^2-2y^2+xy, \quad f\left(0\right)=0$;

4) $w=\frac{z+i}{z-i}$, G: квадрант $\operatorname{Re}z>0, \quad \operatorname{Im}z\le 0$;

5) $\int\limits_{\gamma}\operatorname{Re}z\,dz$, γ – окружность $\left|z-a\right|=R$, пробегаемая против часовой стрелки;

6) $\oint\limits_{\gamma}\frac{e^z dz}{\left(z+i\right)^2}, \quad \gamma:\left|z\right|=3$; 7) $f\left(z\right)=\frac{e^z}{z^3}, \quad z_0=0$;

8) $f\left(z\right)=\frac{z^2+1}{z-2}$; 9) $f\left(z\right)=\frac{z}{(z-2)^2}$;

10) $\oint\limits_{\gamma}\frac{zdz}{z^2-1}$, γ – эллипс $\frac{\left(x-2\right)^2}{1}+\frac{y^2}{9}=1$.

ПЕРЕЧЕНЬ УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИХ ПОСОБИЙ

1. Гусак, А. А. Высшая математика : в 2 т. / А. А. Гусак. – Минск : ТетраСистемс, 2009. – Т. 2.

2. Пискунов, Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления (для втузов) : в 2 т. / Н. С. Пискунов. – М. : Наука, 1985. – Т. 2.

3. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике / Д. Т. Письменный. – М. : Айрис Пресс, 2010.

4. Сборник задач по математике для втузов : в 2 ч. / под ред. А. В. Ефимова и Б. П. Демидовича. – М. : Наука, 1985. – Ч. 2.

5. Данко, П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах / П. Е. Данко [и др.]. – М. : Оникс, 2005. – Ч. 2.

6. Белько, И. В. Высшая математика для инженеров : в 2 ч. / И. В. Белько, К. К. Кузьмич, Р. М. Жевняк. – М. : Новое знание, 2007. – Ч. 2.

7. Краснов, М. Л. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости / М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко. – М. : Наука, 1981.

8. Гусак, А. А. Справочное пособие к решению задач. Теория функций комплексной переменной и операционное исчисление / А. А. Гусак, Г. М. Гусак, Е. А. Бричикова. – Минск : ТетраСистемс, 2002.

9. Элементы операционного исчисления : методические указания и контрольные задания / сост.: Г. К. Воронович [и др.]. – Минск : БНТУ, 2009.

10. Марцинкевич, В. С. Уравнения математической физики : методическое пособие для студентов машиностроительных специальностей / В. С. Марцинкевич. – Минск : БНТУ, 2008.

Учебное издание

ГАБАСОВА Ольга Рафаиловна
ГРЕКОВА Анна Валентиновна
ЗУБКО Ольга Леонидовна и др.

МАТЕМАТИКА

ПРАКТИКУМ

В 4 частях

Часть 3

Редактор *О. В. Ткачук*
Компьютерная верстка *А. Г. Занкевич*

Подписано в печать 14.07.2015. Формат 60×84 $^{1}/_{16}$. Бумага офсетная. Ризография.
Усл. печ. л. 6,23. Уч.-изд. л. 4,91. Тираж 800. Заказ 299.
Издатель и полиграфическое исполнение: Белорусский национальный технический университет.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий № 1/173 от 12.02.2014. Пр. Независимости, 65. 220013, г. Минск.