НАУЧНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ СЕМИНАР
ПОВЫШЕНИЕ КАЧЕСТВА ПОДГОТОВКИ СТУДЕНТОВ СПЕЦИАЛЬНОСТИ «ПРОМЫШЛЕННОЕ И ГРАЖДАНСКОЕ СТРОИТЕЛЬСТВО»
(г. Минск, БНТУ — 24.05.2011)

УДК 624.072.014.2

ПРОВЕРКА УСТОЙЧИВОСТИ СЖАТЫХ ЭЛЕМЕНТОВ С НАЧАЛЬНЫМ НАПРЯЖЕНИЕМ

ДАВЫДОВ Е.Ю.
Белорусский национальный технический университет
Минск, Беларусь

При усилении сжатых элементов (колонн, стоек, опор и т.д.) не всегда удается осуществить их полную разгрузку. В статье рассматривается задача определения несущей способности сжатых стержней, усиление которых осуществляется при действии какой-то части от общей нагрузки.

Рассматриваются стержни, для которых решающей является изгибная форма потери устойчивости. Решение задачи ориентировано на применение действующих нормативных документов.

Вывод аналитических зависимостей предполагает, что кривизна усиливаемого и усиливающего элементов одинакова. При решении задачи использовалось общее уравнение упругой линии сжато-изогнутого стержня:

$$\begin{aligned} y_x = {} & y_0' B_x + M_0\left(\frac{1-\cos kx}{k^2}\right) + Q_0\left(\frac{kx-\sin kx}{k^2}\right) + \\ & + \frac{q_0}{k^4}\left(\cos kx - 1 + \frac{k^2 x^2}{2}\right) + \ldots q_0^n \int^{x(n+3)} B_x dx \end{aligned}, \qquad (1)$$

и обобщенное уравнение изгибающего момента:

$$M_x = -y_0^{'} kEI \sin x + M_{0\cos kx} + q_0 (\frac{1-\cos kx}{k^2}) + ... $$
$$... + q_0^n \int_0^{x(n+1)} B_x dx \quad , \qquad (2)$$

где $k = \sqrt{\frac{P}{EI}}$, $B_x = \frac{\sin kx}{k}$.

Критическое напряжение усиленного стержня в пределах сечения «А1»:

$$\frac{P_1}{A_1} + \frac{P_2 - P_1}{A_2} + \frac{y_1}{I}[P_1(y_{\max} + e_1) + (P_2 - P_1)(y_{\max} + e_2] \le nR_y \text{ ,(3)}$$

где А1 и А2 – соответственно площадь сечения стержня до и после усиления; (рис. 1,*а*) – момент инерции усиленного сечения; P1 и P2 – нагрузка, действующая на стержень до и после его усиления; y – прогиб стержня, отсчитываемый от первоначальной очи; e1 и e2 – соответственно эксцентриситет нагрузки P1 и P2; n – коэффициент, учитывающий упругопластическую работу материала.

После алгебраических преобразований и при равенстве эксцентриситетов (3) примет вид:

$$\frac{P_2}{A_2}(1 + \frac{y_{\max} + e}{\rho}) + \alpha \le \frac{y_2}{y_1} nR_y \text{ , } \frac{P_2}{A_2}(1 + m \sec \frac{kl}{2}) + \alpha \le \frac{y_2}{y_1} nR_y \text{ , (4)}$$

$$\text{где } k^2 = \frac{P_2}{EI} \text{ , } \alpha \ \frac{P_2}{A_2}(\frac{y_2}{y_1} - 1) + \frac{P_1 y_2}{A_1 y_1}(1 - \frac{A_1}{A_2}) \text{ ;}$$

где y_1 и y_2 – расстояние от центра тяжести сечения до наиболее сжатого волокна площади А1 и А2; ρ – радиус ядра сечения.

Из (4) находим коэффициент снижения напряжений при расчете внецентренно-сжатого стержня, усиленного под нагрузкой:

$$\varphi e1 = \varphi e (\frac{y_2}{y_1} - \frac{\alpha}{nR_y}) \text{ , } \qquad (5)$$

где φе – коэффициент, определяемый как для обычного внецентренно-сжатого стержня в зависимости от приведенного эксцентриситета и условной гибкости.

Замену сложной эпюры напряжений в сечении при упругопластической работе материала на треугольную можно компенсировать увеличением предела текучести на 10–15%. Поэтому в выражении (4) можно в запас прочности вместо nRy принять σу.

В дальнейшем аналогичный прием используется при выводе последующих зависимостей.

Для напряжений в пределах дополнительного сечения (А2 – А1) уравнение (3) будет:

$$\frac{P_2}{A_2}(1+m\sec\frac{kl}{2})-\sigma\leq nR_y, \quad (6)$$

где $\sigma = \frac{P_1}{A_2}$.

Из уравнения (6) находим:

$$\varphi e2=\varphi e(1+\frac{\sigma}{\sigma_y}), \qquad (7)$$

Проверку устойчивости следует производить с учетом коэффициента снижения напряжений, определяемого как по формуле (5), так и по формуле (7). Проверочная формула примет вид:

$$\varphi e1{,}2\cdot A_2R_y\geq P_2, \qquad (8)$$

В нормах расчет центрально-сжатых стержней и внецентренно-сжатых с малыми эксцентриситетами аналогичен, поэтому выражения (5), (7)) могут быть использованы и при расчете центрально-сжатых элементов. При этом вместо φе следует брать коэффициент продольного изгиба φ, а отношение y2/y1 следует принять равным единице.

В реальных условиях усиливаемые стержни довольно часто имеют дефекты в виде начальных искривлений, которые могут быть следствием случайных механических воздействий или неправильного изготовления. Исходя из этого, решение поставленной выше задачи с учетом начальных искривлений представляет определенный практический интерес.

Рассматриваемые стержни (рис. 1, *б*) с малыми ординатами начального искривления, поэтому дифференциальное уравнение изогнутой оси можно представить в общепринятом виде:

$$y'' = к2y + к2y1 = 0, \qquad (9)$$

где y1 – ордината начального искривления стержня.

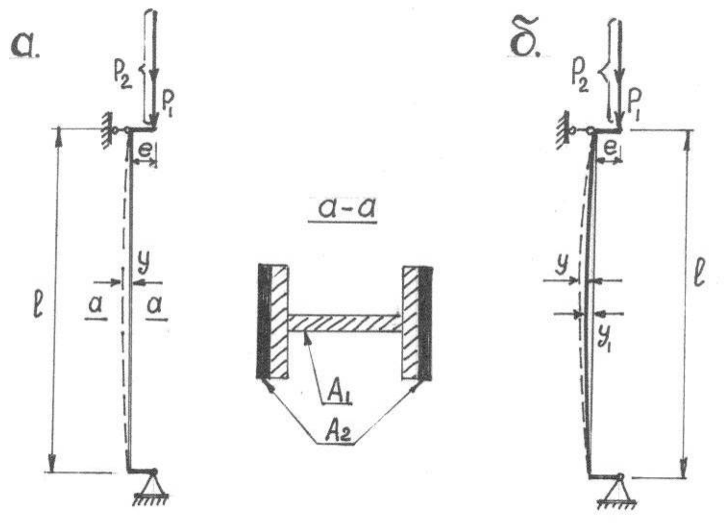

Рис. 1. Схема внецентренно сжатых элементов, усиленных под нагрузкой:
а – без начальных искривлений; *б* – с начальными искривлениями

Начальное искривление можно представить как результат действия дополнительной силы p3, приложенной с эксцентриситетом e3. При этом если предположить, что решение уравнения синусоида, то значение дополнительной силы можно получить из уравнения:

$$e3(\sec\frac{k_3 l}{2} - 1) = \alpha, \quad (10)$$

где α – наибольшее значение начального искривления при x= $\frac{l}{2}$;

к3= $\frac{p_3}{EI}$

Эксцентриситет дополнительной силы всегда можно принять равным эксцентриситету основных сил, тогда проверку критических напряжений в пределах сечения можно производить по следующей формуле:

$$\frac{P_1}{A_1} + \frac{P_2 - P_1}{A_2} + \frac{y_1}{I}(P_2 + P_3)(y_{\max} + e)] \le nR_{y1}, \qquad (11)$$

которая после некоторых преобразований принимает вид:

$$\frac{p_2 + p_3}{A_2}(1 + m\sec\frac{k_1 l}{2}) + c \le \frac{y_2}{y_1} nR_y, \qquad (12)$$

где $k_1^2 = \frac{p_2 + p_3}{EI}$, с=α- $\frac{p_3}{A_2}(\frac{\alpha + e}{\rho} + 1)$.

Из (7) определяется коэффициент снижения напряжений:

$$\varphi e = \varphi(\frac{y_2}{y_1} - \frac{c}{\sigma_y}), \quad (13)$$

В пределах дополнительной площади (А2 – А1) выражение (11) имеет вид:

$$\frac{p_2 - p_1}{A_2} + \frac{y_2}{I}[(p_2 + p_3)(y_{\max} + e) - p_3, \quad (14)$$

$$\text{или } \frac{p_2 + p_3}{A_2}(1 + m\sec\frac{k_1 l}{2}) - \sigma 2 \le nR_y, \qquad (15)$$

где $\sigma 2 = \sigma + \frac{p_3}{A_2}(\frac{\alpha + e}{\rho} + 1)$, (16)

Из уравнения (16) находим:

$$\varphi e4 = \varphi e(1 + \frac{\sigma_2}{\sigma}), \qquad (17)$$

Формула для проверки критических напряжений при начальном искривлении:

$$\varphi e3{,}4 \cdot A2Ry \ge p2 + p3.$$

Если направление начального искривления не совпадает с изгибом стержня от нагрузки, то значение фиктивной нагрузки нужно брать со знаком «минус».

Исследуя полученные зависимости (5), (7), (13) и (17), заключаем, что с увеличением относительного эксцентриситета и условной гибкости влияние неравномерного по сечению стержня загружение уменьшается. Объясняется это увеличением доли изгибных напряжений в напряженном состоянии элемента, которые в данном случае не зависят от последовательности приложения осевых сил.

Полученные зависимости могут быть использованы при расчете на устойчивость внецентренно сжатых усиленных стержней, усиление которых производилось при их неполной разгрузке.

ЛИТЕРАТУРА

1. Снитко, Н.К. Устойчивость сжатых и сжато-изогнутых стержневых систем / Н.К. Снитко. – М.: Госстройиздат, 1956.
2. Ржаницын, А.Р. Устойчивость равновесия упругих систем / А.Р. Ржаницын. – М.: Гостехиздат, 1955.