МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ
РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Белорусский национальный
технический университет

Кафедра «Кораблестроение и гидравлика»

И. В. Качанов
Ю. П. Ледян
М. К. Щербакова

МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА

Методическое пособие к решению задач

Минск
БНТУ
2015

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
Белорусский национальный технический университет

Кафедра «Кораблестроение и гидравлика»

И. В. Качанов
Ю. П. Ледян
М. К. Щербакова

МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА

Методическое пособие к решению задач
для студентов специальностей 1-37 03 02 «Кораблестроение
и техническая эксплуатация водного транспорта»,
1-70 02 02 «Экспертиза и управление недвижимостью»,
1-70 02 01 «Промышленное и гражданское строительство»,
1-70 01 01 «Производство строительных изделий и конструкций»

Минск
БНТУ
2015

УДК 532
ББК 22.253.3я73
К30

Рецензент
А. С. Дмитриченко

Качанов, И. В.
К30 Механика жидкости и газа : методическое пособие к решению задач для студентов специальностей 1-37 03 02 «Кораблестроение и техническая эксплуатация водного транспорта», 1-70 02 02 «Экспертиза и управление недвижимостью», 1-70 02 01 «Промышленное и гражданское строительство», 1-70 01 01 «Производство строительных изделий и конструкций» / И. В. Качанов, Ю. П. Ледян, М. К. Щербакова. – Минск : БНТУ, 2015. – 91 с.
ISBN 978-985-550-393-5.

Приводятся основные определения и формулы, а также задачи с решениями по дисциплине «Механика жидкости и газа» и включены следующие разделы: «Физические свойства жидкости», «Гидростатика», «Основы гидродинамики», «Гидравлические сопротивления», «Истечение через отверстия и насадки», «Гидравлический расчет простого трубопровода».

Издание предназначено для студентов 2–4-го курсов всех форм обучения, изучающих дисциплины «Механика жидкости и газа», «Гидравлика», «Гидравлика и гидропривод».

УДК 532
ББК 22.253.3я73

ISBN 978-985-550-393-5

1. ФИЗИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ЖИДКОСТИ

Жидкость – физическое тело, обладающее текучестью и способное изменять свою форму под действием сколь угодно малых сил.

Основными характеристиками жидкостей являются:

– плотность;

– сжимаемость;

– тепловое расширение;

– вязкость.

1. ***Плотность однородной жидкости*** – это отношение ее массы m к занимаемому объему W:

$$\rho = \frac{m}{W}.$$

Единица плотности в системе СИ – килограмм на метр кубический (кг/м^3).

2. ***Сжимаемость*** – свойство жидкости изменять свой объем под действием давления. Она характеризуется коэффициентом объемного сжатия β_p, представляющим собой относительное изменение объема жидкости, приходящееся на единицу давления:

$$\beta_p = -\frac{\Delta W}{W_0}\frac{1}{\Delta p}, \tag{1.1}$$

где ΔW – уменьшение объема при увеличении давления на Δp;

W_0 – первоначальный объем жидкости.

Знак «–» в формуле (1.1) обусловлен тем, что положительному приращению давления p соответствует отрицательное приращение объема W.

Единица измерения β_p – паскаль в минус первой степени (Па$^{-1}$).

Коэффициент объемного сжатия β_p связан с объемным модулем упругости E соотношением

$$\beta_p = \frac{1}{E}.$$

3. ***Тепловое расширение жидкости*** характеризуется температурным коэффициентом объемного расширения, представляющим собой относительное изменение объема жидкости при изменении температуры на 1 °C:

$$\beta_t = \frac{\Delta W}{W_0} \frac{1}{\Delta t}, \tag{1.2}$$

где Δt – изменение температуры жидкости.

Единица измерения β_t – $°C^{-1}$.

4. ***Вязкость*** – это свойство жидкости оказывать сопротивление относительному движению (сдвигу) ее частиц. Оно проявляется при движении жидкости. Сила трения между слоями жидкости

$$F_{\text{тр}} = \pm \mu S \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n},$$

где μ – коэффициент пропорциональности, называемый ***динамическим коэффициентом вязкости*** (Па·с);

S – площадь поверхности соприкасания слоев;

$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n}$ – градиент скорости, представляющий изменение скорости на единицу расстояния между смежными слоями жидкости в направлении, перпендикулярном к движению.

Единица измерения $F_{\text{тр}}$ – ньютон (Н).

Касательное напряжение в жидкости

$$\tau = \frac{F_{\text{тр}}}{S} = \mu \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n}.$$

Наряду с динамической вязкостью вводится понятие ***кинематический коэффициент вязкости***:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}.$$

Единица измерения ν – метр квадратный в секунду ($м^2$/с).

Задача 1.1

Определить плотность жидкости, полученной смешиванием 10 л жидкости плотностью ρ_1 = 900 кг/м^3 и 20 л жидкости плотностью ρ_2 = 870 кг/м^3.

Решение

Плотность смеси находим путем деления ее массы на объем:

$$\rho = \frac{\rho_1 W_1 + \rho_2 W_2}{W_1 + W_2} = \frac{900 \cdot 0,01 + 870 \cdot 0,02}{0,01 + 0,02} = 880 \text{ кг/м}^3.$$

Задача 1.2

Стальной трубопровод длиной l = 300 м и диаметром D = 500 мм испытывается на прочность гидравлическим способом. Определить объем воды, который необходимо дополнительно подать в трубопровод за время испытания для подъема давления от p_1 = 0,1 МПа до p_2 = 5 МПа. Расширение трубопровода не учитывать. Объемный модуль упругости воды E = 2060 МПа.

Решение

Определим объем трубопровода:

$$W_0 = \frac{\pi D^2}{4} l = \frac{3,14 \cdot 0,5^2}{4} 300 = 58,88 \text{ м}^3.$$

Дополнительный объем вода, необходимый для подачи в трубопровод, определим из формулы (1.1):

$$\Delta W = \beta_p \Delta p W_0 = \frac{1}{E}\left(p_2 - p_1\right)\frac{\pi D^2}{4} l =$$

$$= \frac{1}{2,06 \cdot 10^9}\left(5,0 - 0,1\right) \cdot 10^6 \cdot 58,88 = 0,14 \text{ м}^3.$$

Задача 1.3

Высота цилиндрического вертикального резервуара $H = 10$ м, его диаметр $D = 3$ м. Определить массу мазута ($\rho_0 = 920$ кг/м^3), которую можно налить в резервуар при 15 °C, если его температура может подняться до 40 °C. Расширением стенок резервуара пренебречь, температурный коэффициент объемного расширения жидкости $\beta_t = 0{,}0008$ °C^{-1}.

Решение

При повышении температуры жидкость расширяется и ее объем увеличивается. Пусть W_0 и H_0 – объем и высота столба мазута при 15 °C, а W и H – то же при 40 °C, причем H не может быть больше высоты резервуара. В соответствии с формулой (1.2) имеем

$$\beta_t = \frac{W - W_0}{W_0}\frac{1}{\Delta t} = \frac{\frac{\pi D^2}{4}H - \frac{\pi D^2}{4}H_0}{\frac{\pi D^2}{4}H_0}\cdot\frac{1}{\Delta t} = \frac{H - H_0}{H_0}\cdot\frac{1}{\Delta t},$$

откуда, принимая $H = 10$ м и $\Delta t = 40 - 15 = 25$ °C, получаем

$$H_0 = \frac{H}{1 + \beta_t \Delta t} = \frac{10}{1 + 0{,}0008\cdot 25} = 9{,}8 \text{ м}.$$

Масса мазута, которую можно залить в резервуар:

$$m = \rho_0 W_0 = \rho_0 \frac{\pi D^2}{4} H_0 = 920\cdot\frac{3{,}14\cdot 3^2}{4} 9{,}8 = 63\,698 \text{ кг}.$$

Задача 1.4

Определить повышение давления в закрытом объеме гидропривода при повышении температуры масла от 20 до 40 °C, если температурный коэффициент объемного расширения $\beta_t = 7\cdot 10^{-4}$ °C^{-1}, коэффициент объемного сжатия $\beta_p = 6{,}5\cdot 10^{-10}$ Па$^{-1}$. Утечками жидкости и деформацией элементов конструкции объемного гидропривода пренебречь.

Решение

Из-за повышения температуры объем жидкости, согласно зависимости (1.2), увеличится на величину

$$\Delta W = \beta_t W_0 \Delta t,$$

где W_0 – первоначальный объем масла;

$\Delta t = 40 - 20 = 20$ °C – повышение температуры.

Из формулы (1.1) величина повышения давления

$$\Delta p = \frac{\Delta W}{W_0}\frac{1}{\beta_p}.$$

Подставляя найденное ранее выражение для ΔW, после преобразований получаем

$$\Delta p = \frac{\beta_t}{\beta_p}\Delta t = \frac{7\cdot 10^{-4}}{6{,}5\cdot 10^{-10}}\cdot 20 = 21{,}54\cdot 10^{6}\,\text{Па}.$$

Задача 1.5

Разность скоростей между двумя соседними слоями жидкости толщиной dn = 0,02 мм du = 0,0072 м/ч. Рассматриваемая жидкость имеет динамической коэффициент вязкости $\mu = 13{,}04\cdot 10^{-4}$ Па·с. Определить тангенциальное напряжение и силу трения на 1 м^2 поверхности между слоями жидкости.

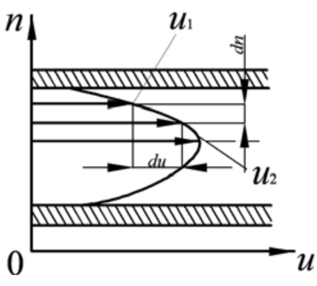

Рис. 1.1. К задаче 1.5

Решение

Градиент скорости в данном случае определяется следующим образом:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n} = \frac{0,0072 \cdot 1000}{3600 \cdot 0,02} = 0,1 \text{ с}^{-1}.$$

Сила трения определяется по формуле Ньютона:

$$F_{\text{тр}} = \mu S \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n} = 13,04 \cdot 10^{-4} \cdot 1 \cdot 0,1 = 13,04 \cdot 10^{-5} \text{ Н},$$

где S – площадь поверхности соприкасания слоев.

Тогда тангенциальное напряжение

$$\tau = \frac{F_{\text{тр}}}{\mathrm{S}} = \frac{13,04 \cdot 10^{-5}}{1} = 13,04 \cdot 10^{-5} \text{ Н/м}^2.$$

2. ГИДРОСТАТИКА

2.1. Гидростатическое давление

Гидростатика – это раздел гидравлики, в котором изучаются законы равновесия жидкости и применение этих законов для решения практических задач.

Гидростатическим давлением в точке называется напряжение сжатия в ней:

$$p = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta P}{\Delta S},$$

где ΔP – сила давления, действующая на площадку ΔS;
ΔS – элементарная площадка, содержащая данную точку.

В общем случае ***давление*** *в данной точке равно пределу, к которому стремится отношение силы давления к площадке, на которую она действует, при стремлении величины площадки к нулю.*

Единицей давления в СИ является паскаль (Па): 1 Па = 1 Н/м^2.

$$1\ \text{ат} = 1\ \text{кг/см}^2 = 760\ \text{мм рт. ст.} = 10\ \text{м вод. ст.}$$

$$1\ \text{ат} = 98\ 100\ \text{Па}.$$

Полное (абсолютное) гидростатическое давление в любой точке жидкости

$$p = p_0 + \rho g h, \tag{2.1}$$

где p_0 – давление на свободной поверхности;
$\rho g h$ – вес столба жидкости высотой h с площадью поперечного сечения, равной единице (h – глубина погружения точки).

Отсюда следует ***закон Паскаля****: внешнее давление всем точкам жидкости и по всем направлениями передается одинаково.*

Если давление p отсчитывается от 0, то оно называется **абсолютным** (рис. 2.1).

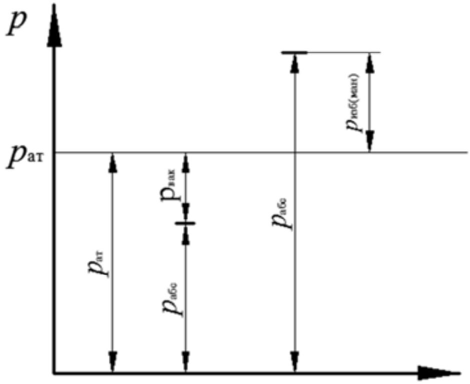

Рис. 2.1. Взаимосвязь между видами давлений

Превышение (избыток) абсолютного давления p над атмосферным $p_{\text{ат}}$ называется **избыточным давлением** (см. рис. 2.1):

$$p_{\text{изб}} = p - p_{\text{ат}}.$$

В технике широкое распространение получили манометры избыточного давления, которые измеряют превышение давления над атмосферным. Поэтому избыточное давление часто называют **манометрическим.**

Абсолютное давление может быть меньше атмосферного. Недостаток между абсолютным и атмосферным давлением называется **вакуумметрическим давлением** или **вакуумом** (рис. 2.1):

$$p_{\text{вак}} = p_{\text{ат}} - p.$$

Задача 2.1

В сообщающиеся сосуды (рис. 2.2) налиты вода (ρ = 1000 кг/м^3) и бензин. Определить плотность бензина, если высота столба воды h = 150 мм, а разность уровней жидкости в сосудах a = 60 мм.

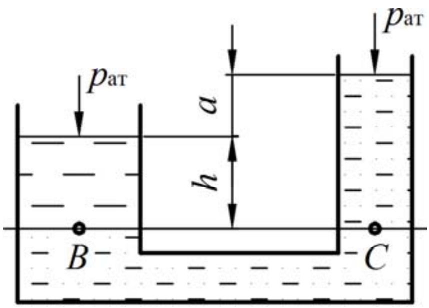

Рис. 2.2. К задаче 2.1

Решение

Из уравнения (2.1) следует, что во всех точках горизонтальной плоскости, проходящей в однородной жидкости, гидростатическое давление одинаково (см. рис. 2.2). Следовательно,

$$p_B = p_C,$$

где
$$p_B = p_{ат} + \rho g h;$$

$$p_C = p_{ат} + \rho_1 g(h + a),$$

где ρ – плотность воды;

ρ_1 – плотность бензина.

Приравнивая правые части выражений для давлений p_B и p_C, получаем

$$p_{ат} + \rho g h = p_{ат} + \rho_1 g(h + a),$$

откуда

$$\rho_1 = \rho \frac{h}{h + a} = 1000 \frac{0,15}{0,15 + 0,06} = 714 \text{ кг/м}^3.$$

Задача 2.2

Определить давление p_0 воздуха в напорном баке по показанию ртутного манометра (рис. 2.3). Какой высоты H должен быть пьезометр для измерения того же давления p_0? Высоты h = 2,6 м, h_1 = 1,8 м, h_2 = 0,6 м. Плотность ртути $\rho_{рт}$ = 13600 кг/м^3, воды $\rho_в$ = 1000 кг/м^3.

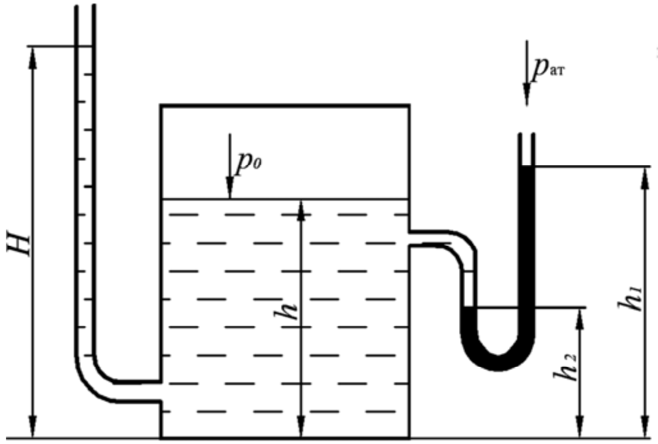

Рис. 2.3. К задаче 2.2

Решение

Абсолютное давление в баке (см. рис. 2.3) на уровне высоты h_2 будет равно абсолютному давлению в ртутном манометре на том же уровне:

$$p_{абс} = p_0 + \rho_в g\left(h - h_2\right) = p_{ат} + \rho_{рт} g\left(h_1 - h_2\right);$$

$$p_0 = p_{ат} + \rho_{рт} g\left(h_1 - h_2\right) - \rho_в g\left(h - h_2\right) = 100\,000 + 13\,600 \cdot 9{,}81 \times$$

$$\times\left(1{,}8 - 0{,}6\right) - 1\,000 \cdot 9{,}81\left(2{,}6 - 0{,}6\right) = 240\,479{,}2 \text{ Па} = 240{,}5 \text{ кПа}.$$

Аналогично находим высоту H:

$$p_{ат} + \rho_в g H = p_0 + \rho_в g h,$$

откуда

$$H = \frac{p_0 + \rho_в g h - p_{ат}}{\rho_в g} = \frac{240\,479{,}2 + 1\,000 \cdot 9{,}81 \cdot 2{,}6 - 100\,000}{1\,000 \cdot 9{,}81} = 16{,}92 \text{ м}.$$

Задача 2.3

Давление воды ($\rho_в$ = 1000 кг/м^3) в трубопроводе может быть определено с помощью обычного (слева) или V-образного пьезометра (рис. 2.4). Определить избыточное давление в трубопроводе и показание левого пьезометра, если высота ртути в правом пьезометре $h_{рт}$ = 100 мм, $\rho_{рт}$ = 13 600 кг/м^3.

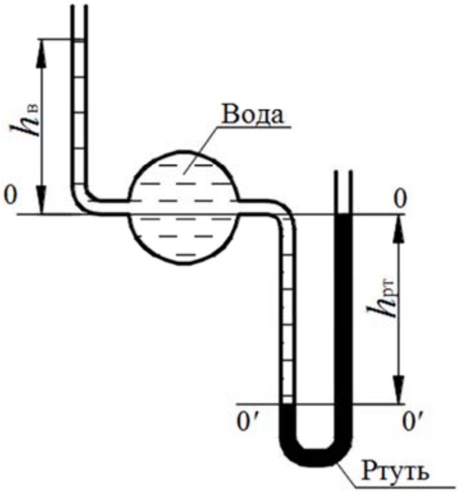

Рис. 2.4. К задаче 2.3

Решение

Условие равновесия в правом пьезометре запишем относительно плоскости *0′–0′*, применив закон распределения давления (2.1).

Абсолютное давление в правом колене V-образного пьезометра

$$p' = p_{ат} + \rho_{рт} g h_{рт}$$

должно быть равно абсолютному давлению в левом колене:

$$p'' = p_{абс} + \rho_в g h_в,$$

т. е.

$$p_{ат} + \rho_{рт} g h_{рт} = p_{абс} + \rho_{в} g h_{в},$$

$$p_{абс} - p_{ат} = \rho_{рт} g h_{рт} - \rho_{в} g h_{в},$$

откуда, учитывая, что $p_{абс} - p_{ат} = p_{изб}$, получим

$$p_{изб} = gh\left(\rho_{рт} - \rho_{в}\right), \text{ Па.}$$

Здесь

$$h = h_{рт} = h_{в};$$

$$p_{изб} = 9{,}81 \cdot 0{,}1\left(13\,600 - 1\,000\right) = 12{,}36 \text{ кПа.}$$

Запишем условие равновесия жидкости в левом пьезометре относительно плоскости *0–0*. Избыточное давление в трубопроводе уравновешивается давлением веса столба воды в пьезометре:

$$p_{изб} = \rho_{в} g h_{в}, \text{ Па,}$$

откуда показание левого пьезометра

$$h_{в} = \frac{p_{изб}}{\rho_{в} g} = \frac{12{,}36 \cdot 10^{3}}{1\,000 \cdot 9{,}81} = 1{,}26 \text{ м.}$$

Задача 2.4

Определить силу P, приложенную к поршню цилиндра (рис. 2.5) диаметром D = 100 мм, если ртуть в пьезометре поднялась на высоту $h_{рт}$ = 500 мм, $\rho_{рт}$ = 13 600 кг/м^3.

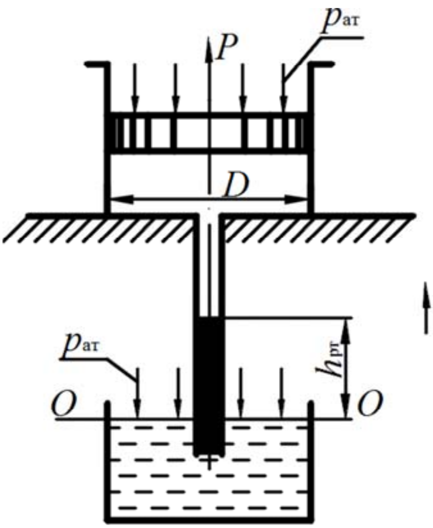

Рис. 2.5

Решение

Запишем условие равновесия данной системы относительно плоскости *0–0.* Атмосферное давление, действующее на поверхность ртути в емкости, уравновешивается давлением столбика ртути, давлением от силы P и атмосферным давлением на поверхности поршня (см. рис. 2.5):

$$p_{ат} = \rho_{рт} g h_{рт} - \frac{P}{S_{п}} + p_{ат};$$

$$\frac{P}{S_{п}} = \rho_{рт} g h_{рт}.$$

Отсюда

$$P = \rho_{рт} g h_{рт} S_{п} = 13\,600 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}5 \cdot \frac{3{,}14 \cdot 0{,}1^2}{4} = 524 \text{ Н}.$$

Задача 2.5

Манометр, подключенный к закрытому резервуару с нефтью (ρ = 900 кг/м^3), показывает избыточное давление $p_{ман}$ = 36 кПа (рис. 2.6). Определить абсолютное давление воздуха на поверхности жидкости p_0 и положение пьезометрической плоскости, если уровень нефти в резервуаре H = 3,06 м, а расстояние от точки подключения до центра манометра z = 1,02 м, атмосферное давление $p_{ат}$ = 100 кПа.

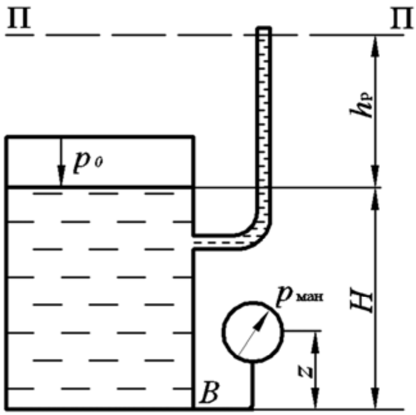

Рис. 2.6. К задаче 2.5

Решение

Избыточное давление в точке B

$$p_B = p_{ман} + \rho g z = 36\,000 + 900 \cdot 9{,}81 \cdot 1{,}02 = 45\,006 \text{ Па} = 45 \text{ кПа}.$$

С другой стороны, то же давление

$$p_B = p_{0ман} + \rho g H.$$

Отсюда избыточное давление на поверхности жидкости

$$p_{0ман} = p_B - \rho g H = 45\,000 - 900 \cdot 9{,}81 \cdot 3{,}06 = 17\,983 \text{ Па} = 18 \text{ кПа},$$

а абсолютное давление

$$p_0 = p_{0\text{ман}} + p_{\text{ат}} = 17\,983 + 100\,000 = 117\,983 \text{ Па} = 118 \text{ кПа}.$$

Расстояние пьезометрической плоскости от свободной поверхности жидкости

$$h_p = \frac{p_{0\text{ман}}}{\rho g} = \frac{17\,983}{900 \cdot 9{,}81} = 2{,}04 \text{ м}.$$

Задача 2.6

Определить избыточное давление воды (ρ = 1000 кг/м^3) в закрытом резервуаре, если показания батарейного двухжидкостного манометра (вода-ртуть) h_1 = 800 мм, h_2 = 100 мм, h_3 = 600 мм, h_4 = 200 мм, h_5 = 1400 мм (рис. 2.7).

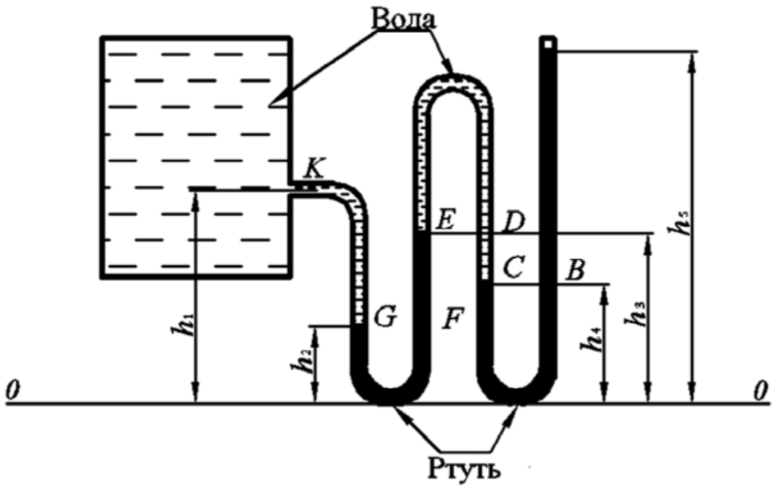

Рис. 2.7. К задаче 2.6

Решение

Последовательно находим избыточные давления в точках B, C, D, E, F, G и K, принимая во внимание тот факт, что во всех точках горизонтальной плоскости, проведенной в однородной жидкости, гидростатические давления одинаковы:

$$p_C = p_B = \rho_{\text{рт}} g\left(h_5 - h_4\right) = 13\,600 \cdot 9{,}81 \cdot \left(1{,}4 - 0{,}2\right) = 160\,099 \text{ Па};$$

$$p_E = p_D = p_C - \rho_B g\left(h_3 - h_4\right) = 160\,099 - 1\,000 \cdot 9{,}81 \cdot \left(0{,}6 - 0{,}2\right) =$$

$$= 156\,175 \text{ Па};$$

$$p_G = p_F = p_E + \rho_{\text{рт}} g\left(h_3 - h_2\right) = 156\,175 + 13\,600 \cdot 9{,}81 \cdot \left(0{,}6 - 0{,}1\right) =$$

$$= 222\,883 \text{ Па}.$$

Избыточное давление в резервуаре

$$p_K = p_G - \rho_B g\left(h_1 - h_2\right) = 222\,883 - 1\,000 \cdot 9{,}81 \cdot \left(0{,}8 - 0{,}1\right) =$$

$$= 216\,016 \text{ Па} = 216 \text{ кПа}.$$

Задача 2.7

Определить давление масла p_1, подводимого в поршневую полость гидроцилиндра (рис. 2.8), если избыточное давление в штоковой полости p_2 = 80 кПа, усилие на штоке R = 10 кН, сила трения поршня и штока о цилиндр F = 0,4 кН, диаметр поршня D = 125 мм, диаметр штока d = 70 мм.

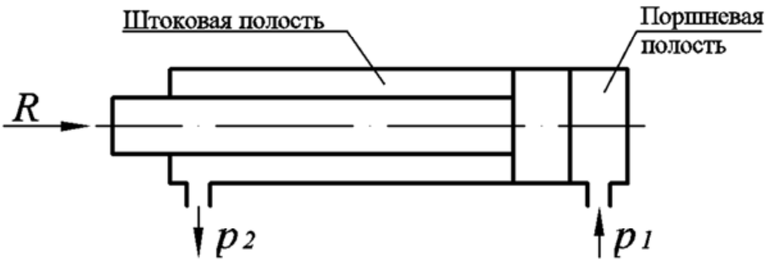

Рис. 2.8. К задаче 2.7

Решение

Искомое давление p_1 находим из условия равновесия поршня, на который кроме силы R действуют силы давления в поршневой полости P_1 и штоковой P_2:

$$P_1 = p_1 \frac{\pi D^2}{4} \text{ и } P_2 = p_2 \frac{\pi}{4}\left(D^2 - d^2\right)$$

и сила трения F, направленная против перемещения поршня:

$$R + P_2 + F - P_1 = 0$$

либо

$$R + p_2 \frac{\pi}{4}\left(D^2 - d^2\right) + F - p_1 \frac{\pi D^2}{4} = 0,$$

отсюда

$$p_1 = \frac{4R}{\pi D^2} + p_2\left[1 - \left(\frac{d}{D}\right)^2\right] + \frac{4F}{\pi D^2} = \frac{4 \cdot 10\,000}{3{,}14 \cdot 0{,}125^2} + 80 \cdot 10^3\left[1 - \left(\frac{0{,}07}{0{,}125}\right)^2\right] +$$

$$+ \frac{4 \cdot 400}{3{,}14 \cdot 0{,}125^2} = 902\,810 \text{ Па} = 903 \text{ кПа}.$$

Задача 2.8

Гидравлический аккумулятор состоит из плунжера *1* (рис. 2.9), помещенного в цилиндр *2*, который поднимается вместе с грузом при зарядке (нагнетании жидкости в цилиндр). При разрядке аккумулятора цилиндр, скользя по плунжеру, опускается вниз и жидкость под давлением подается к потребителю.

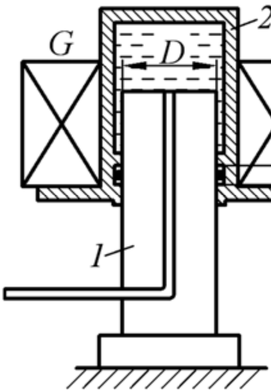

Рис. 2.9. К задаче 2.8

Определить давление при зарядке и разрядке аккумулятора, если диаметр плунжера D = 250 мм, вес груза вместе с подвижными частями G = 900 кН, коэффициент трения манжеты о плунжер f = 0,10, ширина манжеты b = 35 мм.

Решение

На цилиндр действуют силы: тяжести G, трения $F = \pi Dbpf$, гидростатического давления $P_1 = p\dfrac{\pi D^2}{4}$.

При зарядке аккумулятора цилиндр поднимается вверх, сила трения направлена вниз. Давление при зарядке p_1 находим из уравнения равновесия цилиндра $G + F - P_1 = 0$:

$$G + p_1\pi Dbf - p_1\frac{\pi D^2}{4} = 0;$$

$$p_1 = \frac{G}{\pi D\left(\dfrac{D}{4} - fb\right)} = \frac{900\,000}{3{,}14\cdot 0{,}25\left(\dfrac{0{,}25}{4} - 0{,}1\cdot 0{,}035\right)} = 19{,}43\cdot 10^6\text{ Па}.$$

При разрядке аккумулятора цилиндр опускается вниз, сила трения направлена вверх. Уравнение равновесия цилиндра принимает вид

$$G - F - P_2 = 0$$

или

$$G - p_2 \pi D b f - p_2 \frac{\pi D^2}{4} = 0.$$

Отсюда давление при разрядке гидроаккумулятора

$$p_2 = \frac{G}{\pi D\left(\dfrac{D}{4} + fb\right)} = \frac{900\,000}{3{,}14 \cdot 0{,}25\left(\dfrac{0{,}25}{4} + 0{,}1 \cdot 0{,}035\right)} = 17{,}37 \cdot 10^6 \text{ Па.}$$

Задача 2.9

Определить давление p_2 на выходе мультипликатора, если диаметр подвижного плунжера П D = 150 мм, а диаметр неподвижной скалки С d = 30 мм (рис. 2.10). Давление на входе p_1 = 1 МПа. Потерями на трение пренебречь.

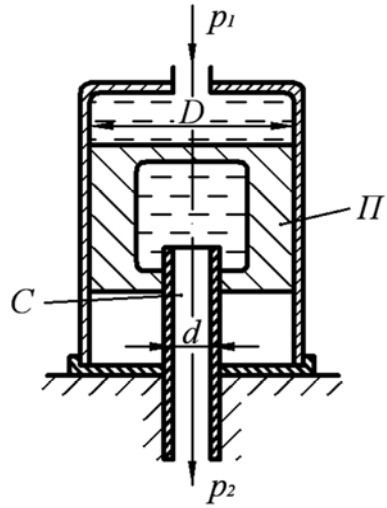

Рис. 2.10. К задаче 2.9

Решение

При подаче давления p_1 плунжер П будет перемещаться вниз, увеличивая давление p_2 в K раз, где K – коэффициент усиления (трансформации), равный отношению площадей плунжера и скалки.

Поэтому мультипликатор называют гидравлическим рычагом Архимеда или гидростатическим трансформатором.

Запишем условие равновесия плунжера:

$$p_1 \frac{\pi D^2}{4} = p_2 \frac{\pi d^2}{4},$$

откуда

$$p_2 = p_1 \frac{D^2}{d^2} = 1 \cdot 10^6 \frac{0{,}15^2}{0{,}03^2} = 25 \cdot 10^6 \text{ Па},$$

т. е.

$$K = \frac{D^2}{d^2} = \frac{p_2}{p_1} = 25.$$

2.2. Силы давления жидкости на плоские стенки

На плоскую стенку, наклоненную под углом α к свободной поверхности жидкости, действует сила давления жидкости.

Результирующая сила давления на плоскую стенку P перпендикулярна к ней и определяется по формуле

$$P = \left(p_0 + \rho g h_c\right) S = p_c S, \text{ Н},$$

где h_c – глубина центра тяжести площади ω до свободной поверхности жидкости;

S – смоченная площадь стенки;

p_c – избыточное давление в центре тяжести площади S.

Полная сила давления жидкости на плоскую стенку равна произведению площади стенки на величину гидростатического давления в центре тяжести этой площади.

Если $p_0 = p_{ат}$, то сила избыточного давления на плоскую стенку

$$P = \rho g h_c S.$$

Положение центра давления $h_д$ (точка приложения силы P) определяется формулой

$$h_д = h_c + \frac{I_0}{S z_c},$$

где I_0 – момент инерции относительно горизонтальной оси, проходящей через центр тяжести площади S;

z_c – координата центра тяжести площади ω.

Точка приложения силы избыточного давления расположена ниже (считается по стенке) центра тяжести смоченной поверхности фигуры на величину e, определяемую выражением

$$e = \frac{I_0}{S z_c}.$$

Координата точки приложения силы P (точка Д) определяется по формуле

$$z_д = z_c + \frac{I_0}{S z_c},$$

где $z_д$ – координата точки приложения силы избыточного давления, отсчитываемая в плоскости фигуры от свободной поверхности жидкости;

I_0 – центральный момент инерции фигуры, проходящей через ее центр тяжести;

z_c – координата центра тяжести площади ω.

Также силу P можно находить и геометрически, определяя ее как объем эпюры давления, линия действия P проходит через центр тяжести этого объема.

При двухстороннем действии жидкости на плоскую стенку следует сначала определить силы давления на каждую сторону стенки, а затем по суммарной эпюре давления найти их результирующую силу давления на стенку.

Задача 2.10

Определить силу давления воды на 1 м ширины b подпорной стенки на участке A–B (рис. 2.11), если h = 3 м, a = 2,2 м, угол $\alpha = 60^{\circ}$.

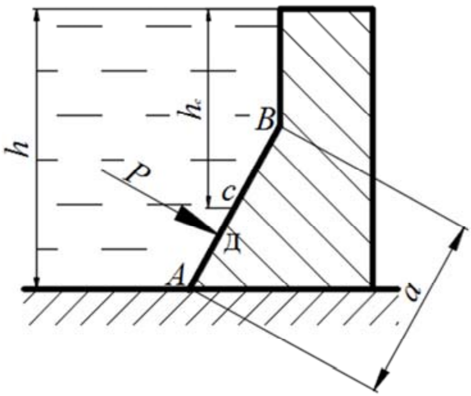

Рис. 2.11. К задаче 2.10

Решение

Силу давления на плоскую поверхность определим по формуле

$$P = \rho g h_c S,$$

где h_c – глубина погружения точки C;

S – площадь участка A–B.

$$h_c = h - \frac{a}{2}\sin\alpha = 3 - \frac{2,2}{2}\sin 60^{\circ} = 2,05 \text{ м};$$

$$S = a \cdot b = 2,2 \cdot 1 = 2,2 \text{ м}^2.$$

Сила давления P

$$P = \rho g h_c S = 1\,000 \cdot 9,81 \cdot 2,05 \cdot 2,2 = 44\,243 \text{ Н} = 44,2 \text{ кН}.$$

Задача 2.11

В емкости для хранения нефти ($\rho_н$ = 900 кг/м^3) в наклонном днище под углом α = 60° имеется квадратный люк со стороной a = 0,6 м (рис. 2.12). Определить силу, действующую на верхние A и нижние болты B, если уровень нефти H = 2 м, а избыточное давление на поверхности $p_м$ = 15 кПа.

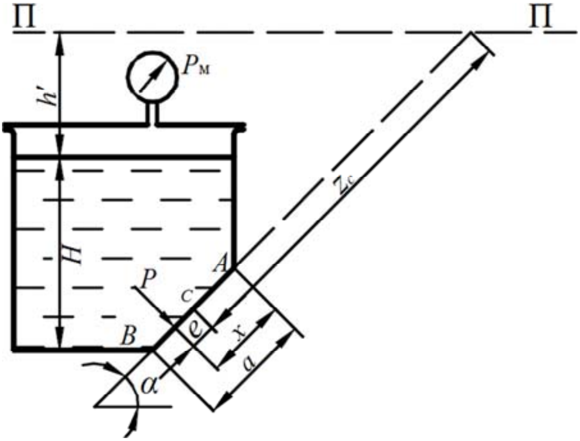

Рис. 2.12. К задаче 2.11

Решение

Сила, действующая на болты B, может быть определена из уравнения моментов относительно оси, проходящей через болты A:

$$\sum M_A = 0; \qquad P_B a - Px = 0, \qquad (2.2)$$

где P – сила давления нефти на люк;

x – плечо силы P.

Силу P найдем по формуле (2.2):

$$P = \rho g h_c S,$$

где величина h_c с учетом избыточного давления

$$h_c = H + \frac{p_{ман}}{\rho g} - \frac{a}{2}\sin\alpha.$$

Тогда

$$P = \rho g\left(H + \frac{p_{\text{ман}}}{\rho g} - \frac{a}{2}\sin\alpha\right)a^2 =$$

$$= 900 \cdot 9{,}81\left(2 + \frac{15 \cdot 10^3}{900 \cdot 9{,}81} - 0{,}3 \cdot 0{,}866\right)0{,}6^2 = 10{,}9 \text{ кН}.$$

Плечо x во всех случаях, за исключением, если угол $\alpha = 0$, т. е. площадка действия давления располагается горизонтально, определяется как сумма двух отрезков:

$$x = \frac{a}{2} + e.$$

Величина e называется эксцентриситетом точки приложения силы:

$$e = \frac{I_0}{Sz_c},$$

где $I_0 = \dfrac{a^4}{12}$ – центральный момент инерции;

$z_c = \dfrac{h_c}{\sin\alpha}$ – коэффициент центра тяжести люка.

Тогда

$$x = \frac{a}{2} + \frac{a^4 \sin\alpha}{12a^2 h_c} = \frac{0{,}6}{2} + \frac{0{,}6^2 \cdot 0{,}866}{12 \cdot 3{,}44} = 0{,}308 \text{ м}.$$

Подставив данные в уравнение (2.2), получаем

$$P_B = \frac{Px}{a} = \frac{10{,}9 \cdot 10^3 \cdot 0{,}308}{0{,}6} = 5{,}6 \text{ кН}$$

и

$$P_A = P - P_B = 10{,}9 - 5{,}6 = 5{,}3 \text{ кН}.$$

Задача 2.12

Определить момент сил, действующий на квадратный клапан со стороной a = 0,5 м, установленный в перегородке между двумя резервуарами с уровнями воды H_1 = 2 м, H_2 = 1 м (рис. 2.13).

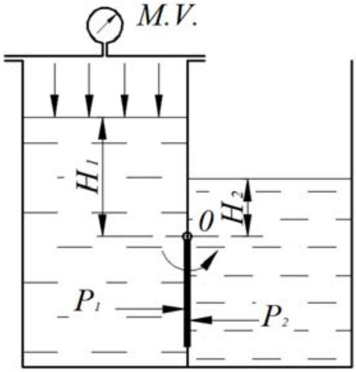

Рис. 2.13. К задаче 2.12

Задачу решить для двух случаев: когда в левом резервуаре избыточное положительное давление $p_{\text{ман}}$ = 5 кПа и когда отрицательное давление $p_{\text{вак}}$= 35 кПа.

Решение

1-й случай.

Момент сил, действующих на клапан, определяется как разность основания сил давления с двух сторон:

$$M_{\text{кр}} = P_1 x_1 - P_2 x_2.$$

Определяем силы P_1 и P_2 и их плечи x_1 и x_2.

Сила, действующая с левой стороны:

$$P_1 = \rho g h_{c1} S,$$

где $h_{c1} = H_1 + \frac{p_{\text{ман}}}{\rho g} + \frac{a}{2}$ – глубина расположения центра тяжести клапана;

$S = a^2$ – площадь клапана.

Тогда

$$P_1 = \rho g\left(H_1 + \frac{p_{\text{ман}}}{\rho g} + \frac{a}{2}\right)a^2 = 1000\cdot 9{,}81\left(2 + \frac{0{,}5}{2} + \frac{5\cdot 10^3}{1000\cdot 9{,}81}\right)0{,}5^2 = 6{,}77\ \text{кН}.$$

Плечо силы P_1

$$x_1 = \frac{a}{2} + e_1,$$

где $e_1 = \frac{I_0}{Sz_c}$ – эксцентриситет силы давления.

$$I_0 = \frac{a^4}{12};$$

$$z_c = \frac{h_{c1}}{\sin\alpha} = \frac{h_{c1}}{\sin 90} = h_{c1}.$$

Следовательно,

$$e_1 = \frac{a^4}{12\left(H_1 + \frac{a}{2} + \frac{p_{\text{ман}}}{\rho g}\right)a^2} = \frac{0{,}5^2}{12\left(2 + \frac{0{,}5}{2} + \frac{5\cdot 10^3}{1000\cdot 9{,}81}\right)} = 0{,}0075\ \text{м}$$

и

$$x_1 = \frac{0{,}5}{2} + 0{,}0075 = 0{,}2575\ \text{м}.$$

Сила, действующая с правой стороны:

$$P_2 = \rho g h_{c2} S,$$

где $h_{c2} = H_2 + \dfrac{a}{2}$ – глубина расположения центра тяжести клапана справа;

$S = a^2$ – площадь клапана.

Тогда

$$P_2 = \rho g\left(H_2 + \frac{a}{2}\right)a^2 = 1000 \cdot 9,81\left(1 + \frac{0,5}{2}\right)0,5^2 = 3,066\ \text{кН}.$$

Плечо силы P_2

$$x_2 = \frac{a}{2} + e_2,$$

где $e_2 = \dfrac{I_0}{S z_c}$ – эксцентриситет силы давления.

$$I_0 = \frac{a^4}{12};$$

$$z_c = \frac{h_{c2}}{\sin\alpha} = \frac{h_{c2}}{\sin 90} = h_{c2}.$$

Тогда

$$x_2 = \frac{0,5}{2} + \frac{a^4}{12\left(H_2 + \dfrac{a}{2}\right)a^2} = 0,25 + \frac{0,5^2}{12 \cdot 1,25} = 0,267\ \text{м}.$$

Момент силы, действующий на клапан:

$$M_{\text{кр}} = 6,77 \cdot 0,2575 - 3,066 \cdot 0,267 = 0,92 \cdot 10^3\ \text{Н} \cdot \text{м}.$$

2-й случай.

Давление в левом резервуаре вакуумметрическое. Если манометрическое давление, как это было показано в 1-м случае, «условно» добавляет уровень жидкости на величину $h' = \dfrac{p_{\text{ман}}}{\rho g}$, то отрицательное или вакуумметрическое давление уменьшает высоту столба жидкости на величину $h' = \dfrac{p_{\text{вак}}}{\rho g}$.

В нашем случае

$$h' = \frac{35 \cdot 10^3}{1000 \cdot 9{,}81} = 3{,}57 \text{ м.}$$

Полученное значение показывает, что пьезометрическая плоскость располагается ниже, чем кромка клапана, на величину

$$\Delta h = h' - H_1 = 3{,}57 - 2 = 1{,}57 \text{ м.}$$

Если бы h' оказалось равным H_1, то это было бы равносильно отсутствию жидкости с левой стороны вообще, но так как $h' > H_1$, то полученная разность должна быть добавлена к уровню жидкости в правом резервуаре, т. е.

$$H_2' = H_2 + \Delta h.$$

Следовательно, момент, действующий на клапан, будет

$$M_{\text{кр}2} = P_2 x_2;$$

$$P_2 = \rho g h'_{c2} S = \rho g \left(H_2 + \Delta h + \frac{a}{2} \right) a^2 = 1000 \cdot 9{,}81 \left(1 + 1{,}57 + \frac{0{,}5}{2} \right) 0{,}5^2 = 6\,916 \text{ Н.}$$

Плечо силы P_2

$$x_2 = \frac{a}{2} + e_2,$$

где

$$e = \frac{I_0}{z_c S} = \frac{a^4}{12\left(H_2 + \Delta h + \dfrac{a}{2} \right) a^2} = \frac{0{,}5^2}{12 \cdot 2{,}82} = 0{,}0074 \text{ м.}$$

Тогда

$$x_2 = \frac{0,5}{2} + 0,0074 = 0,2574 \text{ м};$$

$$M_{\text{кр2}} = 6\,916 \cdot 0,2574 = 1\,780 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

2.3. Силы давления жидкости на криволинейные стенки

Результирующая сила давления P на криволинейную поверхность выражается через ее составляющие: горизонтальную P_x и вертикальную P_z:

$$P = \sqrt{P_x^2 + P_z^2}. \qquad (2.3)$$

Горизонтальная составляющая силы давления на криволинейную поверхность определяется выражением

$$P_x = \rho g h_c S_z,$$

где h_c – расстояние по вертикали от центра тяжести вертикальной проекции стенки до пьезометрической линии П–П;

S_z – проекция криволинейной поверхности на вертикальную плоскость.

Вертикальная составляющая силы давления на криволинейную поверхность равна весу жидкости в объеме тела давления:

$$P_z = \rho g W.$$

Тело давления – это объем, ограниченный криволинейной поверхностью, пьезометрической плоскостью и вертикальной поверхностью, проведенной через крайние точки криволинейной поверхности. Сила P_x направлена вниз, если объем строится со смоченной стороны стенки, и вверх, если с несмоченной, имеется жидкость, при этом проекция силы P_z направлена вниз.

Тело давление называется **действительным**, если в его объеме имеется жидкость, при этом проекция силы P_z направлена вниз. Если в объеме тела давления жидкость отсутствует, тело давления называется мнимым или фиктивным, а вертикальная составляющая силы P_z направлена вверх.

Угол наклона результирующей силы P к горизонту определяется как

$$\mathrm{tg}\beta = \frac{P_z}{P_x}.$$

Задача 2.13

Определить силу давления воды на цилиндрическую стенку резервуара (рис. 2.14) и ее угол наклона к горизонту, если радиус стенки R = 2 м, ширина стенки B = 3 м, уровень воды в пьезометре h = 0,5 м.

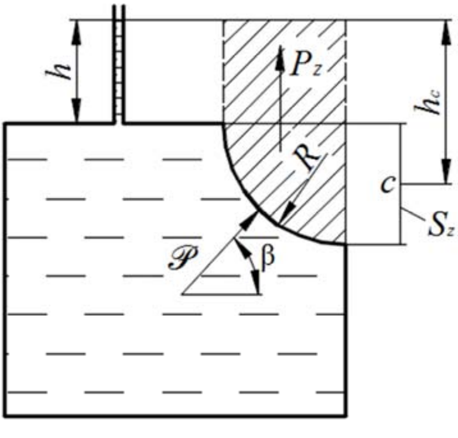

Рис. 2.14. К задаче 2.13

Решение

Результирующая сила давления на криволинейную поверхность в соответствии с формулой (2.3) будет

$$P = \sqrt{P_x^2 + P_z^2},$$

где P_x – горизонтальная составляющая силы:

$$P_x = \rho g h_c S_z,$$

где $h_c = h + \dfrac{R}{2}$ – глубина погружения центра тяжести проекции криволинейной поверхности;

$S_z = RB$ – площадь криволинейной поверхности на вертикальной плоскости.

$$P_x = \rho g\left(h + \frac{R}{2}\right)RB = 1000\cdot 9{,}81\left(0{,}5 + \frac{2}{2}\right)2\cdot 3 = 88{,}3\ \text{кН}.$$

P_z – вертикальная составляющая силы:

$$P_z = \rho g W,$$

где W – объем фиктивного тела давления (на рис. 2.14 заштрихован), состоящий из объема четверти цилиндра и объема параллелепипеда:

$$W = \frac{1}{4}\pi R^2 B + BRh = \frac{1}{4}\cdot 3{,}14\cdot 2^2\cdot 3 + 3\cdot 2\cdot 0{,}5 = 12{,}4\ \text{м}^3.$$

Тогда вертикальная составляющая

$$P_z = 1000\cdot 9{,}81\cdot 12{,}4 = 121{,}6\ \text{кН},$$

и результирующая сила давления P будет

$$P = \sqrt{P_x^2 + P_z^2} = \sqrt{88{,}3^2 + 121{,}6^2} = 150{,}3\ \text{кН}.$$

Угол наклона сила P к горизонту

$$\beta = \operatorname{arctg}\frac{P_z}{P_x} = \operatorname{arctg}\frac{121{,}6}{88{,}3} = 54^\circ.$$

Задача 2.14

Определить силу, действующую на сферическую крышку люка, закрывающего отверстие D = 0,6 м, если вода залита до отверстия в вершине крышки (рис. 2.15).

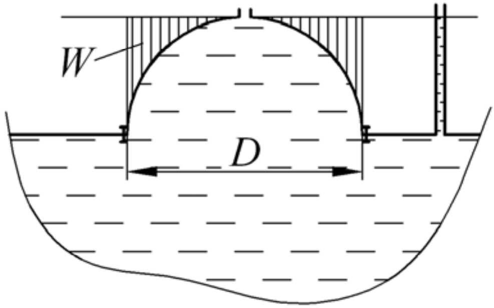

Рис. 2.15. К задаче 2.14

Решение

В тех случаях, когда криволинейная поверхность располагается симметрично оси, совпадающей с направлением действия потенциала сил, силы, действующие в перпендикулярной плоскости, взаимно уравновешиваются.

Следовательно, в нашем случае P_x = 0 и полная сила давления будет равна вертикальной составляющей:

$$P = P_z = \rho g W,$$

где $W = \frac{\pi D^2}{4} \cdot \frac{D}{2} - \frac{\pi D^3}{12} = \frac{\pi D^3}{24}$ – объем фиктивного тела давления (на рис. 2.15 заштрихован).

$$P = \rho g \frac{\pi D^3}{24} = 1000 \cdot 9{,}81 \frac{3{,}14 \cdot 0{,}6^3}{24} = 277{,}4 \text{ Н}.$$

Задача 2.15

В центральной перегородке резервуара отверстие диаметром D = 0,5 м закрывается сферической крышкой (рис. 2.16).

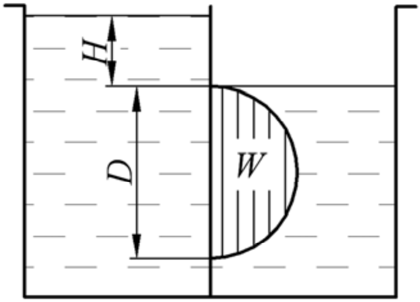

Рис. 2.16. К задаче 2.15

Определить силу давления на крышку при наличии воды в правом отсеке и при ее отсутствии, если уровень в левом отсеке H = 1,5 м.

Решение

В первом случае сила давления воды будет действовать с двух сторон.

1. Определим силу, действующую с левой стороны:

$$P_1 = \sqrt{P_{x1}^2 + P_{z1}^2},$$

где $P_{x1} = \rho g h_{c1} S_z$;

S_z – площадь проекции криволинейной поверхности на вертикальную плоскость.

Здесь $h_{c1} = H + \dfrac{D}{2}$;

$S_z = \dfrac{\pi D^2}{4}$ – площадь проекции сферы на вертикальную плоскость.

Тогда

$$P_{x1} = \rho g \left(H + \frac{D}{2} \right) \frac{\pi D^2}{4},$$

$P_{z1} = \rho g W_1$ – вертикальная составляющая силы;

$W_1 = \frac{\pi D^2}{4}$ – действительный объем тела давления (на рис. 2.16 заштрихован).

Тогда сила $P_{z1} = \rho g \frac{\pi D^2}{4}$ направлена вниз.

2. Сила, действующая с правой стороны:

$$P_2 = \sqrt{P_{x2}^2 + P_{z2}^2},$$

где $P_{x2} = \rho g h_{c2} S_z$.

Здесь $h_{c2} = \frac{D}{2}$;

$S_z = \frac{\pi D^2}{4}$

или

$$P_{x2} = \rho g \frac{D}{2} \frac{\pi D^2}{4}.$$

Вертикальная составляющая

$$P_{z2} = \rho g W_2,$$

где $W_2 = \frac{\pi D^3}{12}$ – объем фиктивного тела давления (на рис. 2.16 заштрихован).

Тогда сила $P_{z2} = \rho g \frac{\pi D^3}{12}$ направлена вверх.

Таким образом, так как вертикальные составляющие определяются одним и тем же объемом тела давления, но силы направлены в противоположные стороны, т. е. $P_{z1} = P_{z2}$, то полная сила давления воды на крышку будет равна разности горизонтальных составляющих слева и справа:

$$P = P_{x1} - P_{x2} = \rho g\left(H + \frac{D}{2}\right)\frac{\pi D^2}{4} - \rho g\frac{D}{2}\frac{\pi D^2}{4} =$$

$$P = \rho g\frac{D}{2}\frac{\pi D^2}{4}H = 1000\cdot 9{,}81\frac{3{,}14\cdot 0{,}5^2}{4}1{,}5 = 2888\ \text{Н}.$$

Во втором случае, когда с правой стороны жидкость отсутствует, сила давления будет действовать с левой стороны, что было показано выше.

$$P_1 = \sqrt{P_{x1}^2 + P_{z1}^2}\ ,$$

где P_{x1} – горизонтальная составляющая:

$$P_{x1} = \rho g\left(H + \frac{D}{2}\right)\frac{\pi D^2}{4} = 1000\cdot 9{,}81\left(1{,}5 + \frac{0{,}5}{2}\right)\frac{3{,}14\cdot 0{,}5^2}{4} = 3369\ \text{Н}.$$

P_{z1} – вертикальная составляющая, направленная вниз:

$$P_{z1} = \rho g\frac{\pi D^3}{12} = 1000\cdot 9{,}81\frac{3{,}14\cdot 0{,}5^3}{4} = 321\ \text{Н}.$$

Тогда результирующая сила давления

$$P = \sqrt{3369^2 + 321^2} = 3385\ \text{Н}.$$

Эта сила обязана пройти через центр кривизны криволинейной поверхности вниз под углом к горизонту β:

$$\beta = \operatorname{arctg}\frac{P_{z1}}{P_{x1}} = \operatorname{arctg}\frac{321}{3370} = 5^\circ 26'.$$

3. ОСНОВЫ ГИДРОДИНАМИКИ

3.1. Гидравлические характеристики потока. Средняя скорость и расход. Уравнение расхода (неразрывности движения)

К гидравлическим параметрам потока относятся живое сечение, смоченный периметр, гидравлический радиус и эквивалентный диаметр.

Живым сечением называется сечение потока, расположенное перпендикулярно (нормально) к направлению потока.

Смоченным периметром называется часть периметра живого сечения потока, в котором жидкость соприкасается с твердыми стенками канала или трубы. Смоченный периметр обозначается греческой буквой χ («хи»).

Отношение площади живого сечения к смоченному периметру называется ***гидравлическим радиусом*** $R_г$, т. е.

$$R_г = \frac{S}{\chi}.$$

В гидравлических расчетах широко используется понятие эквивалентный диаметр $d_{экв}$. ***Эквивалентным*** называют диаметр трубы круглого сечения при полном заполнении и при условии, что гидравлические радиусы потоков в этой трубе и в канале некруглого сечения одинаковы.

Для круглых труб, заполненных жидкостью, эквивалентный диаметр равен четырем гидравлическим радиусам, т. е.

$$d_{экв} = 4R_г.$$

Для труб прямоугольного сечения со сторонами a и b

$$d_{экв} = \frac{2ab}{a+b}.$$

Расход потока – это количество жидкости, проходящей через живое сечение потока за единицу времени.

В зависимости от количества жидкости различают объемный (м^3/с), массовый (кг/с) и весовой (Н/с) расходы. В гидравлике чаще всего используют первый, и поэтому слово «объемный» просто опускается, хотя и подразумевается.

Объемным расходом называется количество жидкости, проходящее через живое сечение потока в единицу времени. Он может быть измерен объемным способом:

$$Q = \frac{W}{T},$$

где W – объем мерной емкости;

T – длительность ее заполнения.

Средней скоростью $\boldsymbol{V}$ называется такая условная скорость, одинаковая для всех точек живого сечения, при которой **расход** соответствует действительному и рассчитывается по формуле

$$Q = VS. \tag{3.1}$$

При установившемся движении жидкости расход через все живые сечения потока описывается уравнением неразрывности или сплошности потока:

$$Q = V_1 S_1 = V_2 S_2 = \ldots = V_n S_n = \text{const},$$

где V_1, V_2, … , V_n – средние скорости;

S_1, S_2, … , S_n – площади живых сечений.

Из уравнения (3.1) следует, что средние скорости обратно пропорциональны площадям живых сечений:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{S_2}{S_1}.$$

Задача 3.1

Определить гидравлический радиус канала трапецеидального сечения (рис. 3.1) при следующих размерах: ширина по верху водной поверхности AD = 4 м, ширина по низу BC = 1 м, глубина воды h = 1 м.

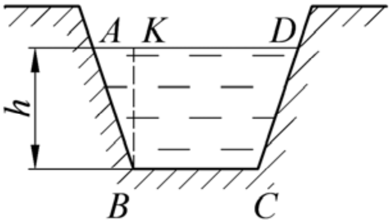

Рис. 3.1. К задаче 3.1

Решение

Гидравлический радиус определяем по формуле

$$R_{\text{г}} = \frac{S}{\chi}.$$

Площадь живого сечения составляет

$$S = \frac{AD + BC}{2} h = \frac{4+1}{2} \cdot 1 = 2,5 \text{ м}^2.$$

Смоченный периметр

$$\chi = AB + BC + CD; \qquad AB = CD.$$

AB определяем по теореме Пифагора (гипотенуза равна корню квадратному из суммы квадратов катетов):

$$AB = \sqrt{AK^2 + KB^2} = \sqrt{1,5^2 + 1^2} = 1,8 \text{ м}.$$

$$\chi = 1,8 + 1 + 1,8 = 4,6 \text{ м}.$$

Гидравлический радиус

$$R_{\text{г}} = \frac{2,5}{4,6} = 0,54 \text{ м}.$$

Задача 3.2

Определить гидравлический радиус и эквивалентный диаметр живого сечения потока, движущегося между двумя концентрическими трубами (рис. 3.2), если наружный диаметр d внутренней трубы равен 0,1 м, а внутренний диаметр D наружной трубы 0,15 м.

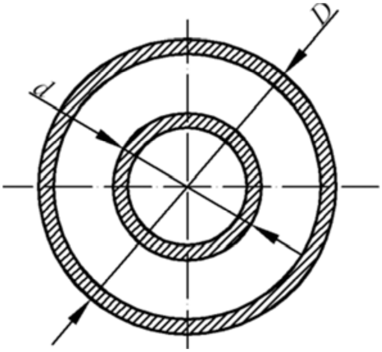

Рис. 3.2. К задаче 3.2

Решение

Площадь живого сечения потока

$$S = \frac{\pi(D^2 - d^2)}{4} = \frac{3{,}14(0{,}15^2 - 0{,}1^2)}{4} = 0{,}00981\ \text{м}^2.$$

Смоченный периметр живого сечения

$$\chi = \pi\left(D + d\right) = 3{,}14\left(0{,}15 + 0{,}1\right) = 0{,}785\ \text{м}.$$

Гидравлический радиус

$$R_\text{г} = \frac{S}{\chi} = \frac{0{,}00981}{0{,}785} = 0{,}0125\ \text{м}.$$

Эквивалентный диаметр

$$d_\text{экв} = 4R_\text{г} = 4 \cdot 0{,}0125 = 0{,}05\ \text{м}.$$

Задача 3.3

Подача шестеренного насоса объемного гидропривода (рис. 3.3) Q = 80 л/мин. Подобрать диаметры всасывающей, напорной и сливной гидролинии, принимая следующие расчетные скорости:

для всасывающей гидролинии $V'_{\text{вс}} = 0,6\text{–}1,4$ м/с;

напорной $V'_{\text{н}} = 3,0\text{–}5,0$ м/с;

сливной $V'_{\text{с}} = 1,4\text{–}2,0$ м/с.

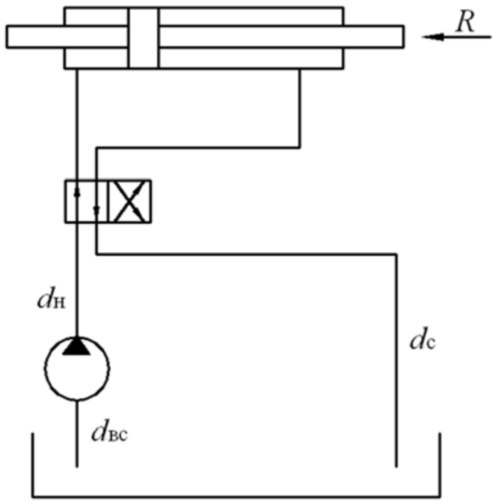

Рис. 3.3. К задаче 3.3

Решение

Диаметр трубопровода определяется по формулам

$$Q = VS = V\frac{\pi d^2}{4};$$

$$d = \sqrt{\frac{4Q}{\pi V}}.$$

С учетом условия примем средние значения расчетных скоростей:

$$V'_{\text{вс}} = 1 \text{ м/с};$$

$$V'_{\text{н}} = 4 \text{ м/с};$$

$$V'_{\text{с}} = 1,7 \text{ м/с}.$$

Вычислим внутренние диаметры труб при $Q = 80$ л/мин = = 0,0013 м^3/с:

$$d'_{\text{вс}} = \sqrt{\frac{4Q}{\pi V'_{\text{вс}}}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 0,0013}{3,14 \cdot 1}} = 0,041 \text{ м} = 41 \text{ мм};$$

$$d'_{\text{н}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 0,0013}{3,14 \cdot 4}} = 0,020 \text{ м} = 20 \text{ мм};$$

$$d'_{\text{с}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 0,0013}{3,14 \cdot 1,7}} = 0,031 \text{ м} = 31 \text{ мм}.$$

Округляем эти результаты до стандартных значений: $d_{\text{вс}}$ = 42 мм, $d_{\text{н}}$ = 20 мм, $d_{\text{с}}$ = 32 мм (толщина стенок δ = 3 мм).

Действительные скорости течения для принятых диаметров труб:

$V'_{\text{н}} = 4$ м/с (так как расчетный диаметр равен стандартному);

$$V_{\text{вс}} = \frac{4Q}{\pi d_{\text{вс}}^2} = \frac{4 \cdot 0,0013}{3,14 \cdot 0,042^2} = 0,94 \text{ м/с};$$

$$V_{\text{с}} = \frac{4 \cdot 0,0013}{3,14 \cdot 0,032^2} = 1,62 \text{ м/с}.$$

3.2. Уравнение Бернулли

Уравнение баланса удельной энергии потока реальной жидкости при установившемся движении или, как его принято называть, уравнение Бернулли, имеет вид

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 V_2^2}{2g} + h_{\text{тр}},$$

где z – геометрическая высота или геометрический напор;

$\frac{p}{\rho g}$ – пьезометрическая высота или пьезометрический напор;

$z + \frac{p}{\rho g} = H$ – потенциальный напор; является мерой удельной потенциальной энергии;

$\frac{\alpha V^2}{2g}$ – скоростная высота или скоростной напор; является мерой удельной кинетической энергии;

V – средняя скорость в живом сечении потока;

α – коэффициент Кориолиса или корректив кинетической энергии (безразмерный);

$z + \frac{p}{\rho g} + \frac{\alpha V^2}{2g} = H$ определяет полный напор, величина его характеризует полную энергию в сечении потока;

$h_{\text{тр}}$ выражает суммарную потерю напора или энергии при движении жидкости на всем участке между рассматриваемыми сечениями потока.

Задача 3.4

При движении воды через расходомер Вентури разность показаний пьезометров h = 120 см (рис. 3.4). Отношение площадей живых сечений широкой к узкой части $\frac{S_1}{S_2} = 12$, площадь живого сечения широкой части S_1 = 314 см^2. Коэффициент расхода $\mu = 0{,}92$. Чему равен расход воды, проходящей через расходомер?

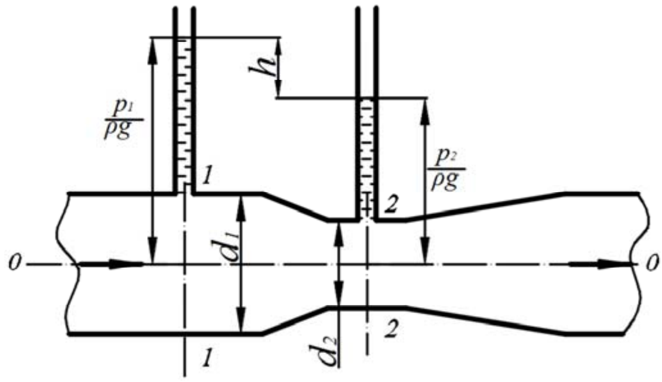

Рис. 3.4. К задаче 3.4

Решение

Выбираем сечения *1–1* и *2–2* по месту подключения пьезометров и проводим плоскость сравнения *0–0* по оси расходомера. Запишем уравнение Бернулли в общем виде:

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 V_2^2}{2g} + h_{\text{тр}}.$$

В нашем случае $z_1 = z_2 = 0$; коэффициенты Кориолиса при равномерном движении $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$; потери напора $h_{\text{тр}}$ ввиду малого расстояния между сечениями *1–1* и *2–2* не учитываем, тогда уравнение Бернулли примет вид

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g}.$$

Заменив $\frac{p_1}{\rho g} - \frac{p_2}{\rho g} = h$, окончательно получим

$$h = (V_2^2 - V_1^2) / 2g.$$

Из уравнения неразрывности имеем

$$\frac{V_2}{V_1}=\frac{S_1}{S_2}=\frac{d_1^2}{d_2^2}$$

или

$$V_2=V_1\frac{d_1^2}{d_2^2}.$$

Подставляя значение V_2 в уравнение для h, получим

$$h=\frac{V_1^2}{2g}\left(\frac{d_1^4}{d_2^4}-1\right);$$

$$V_1=\sqrt{\frac{2gh}{\frac{d_1^4}{d_2^4}-1}}.$$

Находим диаметр широкой части:

$$S_1=\frac{\pi d_1^2}{4}=314\text{ см}^2;$$

$$d_1=\sqrt{\frac{4\cdot 314}{3{,}14}}=20\text{ см}=0{,}2\text{ м}.$$

Находим площадь, а затем диаметр узкой части расходомера:

$$\frac{314}{S_2}=12;$$

$$S_2=\frac{314}{12}=26{,}166\text{ см}^2.$$

$$S_2 = \frac{\pi d_2^2}{4} = 26{,}166 \text{ см}^2;$$

$$d_2 = \sqrt{\frac{4 \cdot 26{,}166}{3{,}14}} = 5{,}773 \text{ см.}$$

Расход определяется из выражения

$$Q = V_1 S_1;$$

$$Q = \frac{\pi d_1^2}{4} \sqrt{\frac{2gh}{\frac{d_1^4}{d_2^4} - 1}}.$$

Обозначим через C постоянное для данного водомера выражение:

$$C = \frac{\pi d_1^2}{4} \sqrt{\frac{2gh}{\frac{d_1^4}{d_2^4} - 1}} = \frac{3{,}14 \cdot 0{,}2^2}{4} \sqrt{\frac{2 \cdot 9{,}81 \cdot 1{,}2}{\frac{0{,}2^4}{0{,}05773^4} - 1}} = 0{,}0181 \text{ м}^{5/2}/\text{с}^2.$$

Расход через расходомер определяется выражением

$$Q = \mu C \sqrt{h} = 0{,}92 \cdot 0{,}0181 \sqrt{1{,}2} = 0{,}01824 \text{ м}^3/\text{с} = 18{,}24 \text{ л/с}.$$

Задача 3.5

По горизонтальной трубе диаметром d_1 = 100 мм, имеющей сужение d_2 = 40 мм, движется вода (расход Q = 6 л/с), рис. 3.5. Определить абсолютное давление в узком сечении, если уровень воды в открытом пьезометре перед сужением h_1 = 1,5 м.

При каком расходе воды Q ртуть в трубке, присоединенной к трубопроводу в узком сечении, поднимется на высоту h = 10 см, если при этом h_1 = 1,2 м? Потерями напора пренебречь.

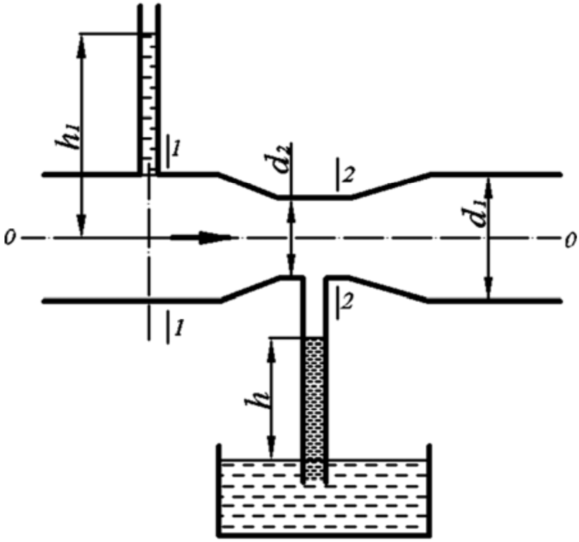

Рис. 3.5. К задаче 3.5

Решение

1. Из уравнения Бернулли для сечений *1–1* и *2–2* относительно плоскости *0–0*

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g},$$

где $z_1 = z_2 = 0$;

$\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, так как режим движения турбулентный.

Абсолютное давление в сечении *1–1*

$$p_1 = p_{\text{ат}} + \rho g h_1 = 100\,000 + 1000 \cdot 9{,}81 \cdot 1{,}5 = 114\,715 \text{ Па};$$

$$V_1 = \frac{4Q}{\pi d_1^2} = \frac{4 \cdot 0{,}006}{3{,}14 \cdot 0{,}1^2} = 0{,}76 \text{ м/с};$$

$$V_2 = \frac{4Q}{\pi d_2^2} = \frac{4 \cdot 0{,}006}{3{,}14 \cdot 0{,}04^2} = 4{,}78 \text{ м/с}.$$

Находим давление в сечении *2–2*:

$$\frac{114715}{1000\cdot 9,81}+\frac{0,76^2}{2\cdot 9,81}=\frac{p_2}{1000\cdot 9,81}+\frac{4,78^2}{2\cdot 9,81};$$

$$p_2=103583,8\ \text{Па}=103,6\ \text{кПа}.$$

2. Если ртуть в трубке, присоединенной к трубопроводу в сечении *2–2*, поднимется на высоту h = 10 см, то абсолютное давление в этом сечении трубопровода:

$$p_2=p_{\text{ат}}-\rho_{\text{рт}}gh=100\,000-13\,600\cdot 9,81\cdot 0,1=86658,4\ \text{Па};$$

$$p_1=p_{\text{ат}}+\rho g h_1=100\,000+1000\cdot 9,81\cdot 1,2=111\,772\ \text{Па}.$$

Расход определяем из уравнения Бернулли:

$$\frac{111\,772}{1000\cdot 9,81}+\frac{V_1^2}{2\cdot 9,81}=\frac{86658,4}{1000\cdot 9,81}+\frac{V_2^2}{2\cdot 9,81};$$

$$11,39-8,83=\frac{V_2^2}{19,62}-\frac{V_1^2}{19,62};$$

$$2,56=\frac{16Q^2}{\pi^2 d_2^4\cdot 19,62}-\frac{16Q^2}{\pi^2 d_1^4\cdot 19,62};$$

$$2,56=\frac{16Q^2}{3,14^2\cdot 0,04^4\cdot 19,62}-\frac{16Q^2}{3,14^2\cdot 0,1^4\cdot 19,62};$$

$$2,56=32308,9Q^2-827,1Q^2;$$

$$2,56=31481,8Q^2;$$

$$Q=0,009\ \text{м}^3/\text{с}.$$

Задача 3.6

Определить высоту всасывания центробежного насоса h_s над уровнем воды в колодце (рис. 3.6), если подача воды насосом $Q = 30$ л/с, диаметр всасывающей трубы $d = 150$ мм, величина вакуума, создаваемого насосом, $p_V = 66,6$ кПа. Потери напора во всасывающей трубе $h_{тр} = 0,9$ м, плотность жидкости $\rho = 1000$ кг/м^3.

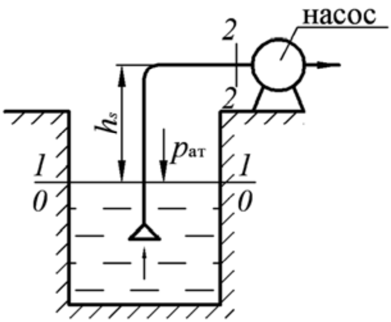

Рис. 3.6. К задаче 3.6

Решение

Выбираем сечения и плоскость сравнения для составления уравнения Бернулли: сечение *1–1* проводим по уровню жидкости в колодце, сечение *2–2* – на входе в насос. Запишем уравнение Бернулли:

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 V_2^2}{2g} + h_{тр}.$$

В нашем случае

$$z_1 = 0;\ \ z_2 = h_s;\ \ p_1 = p_{атм};\ \ \alpha_1 = \alpha_2 = 1;\ \ V_1 = 0.$$

После преобразования уравнение примет вид

$$\frac{p_{ат}}{\rho g} = h_s + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + h_{тр};$$

$$\frac{p_{ат}}{\rho g} - \frac{p_2}{\rho g} = h_s + \frac{V_2^2}{2g} + h_{тр};$$

$$\frac{p_V}{\rho g} = h_s + \frac{V_2^2}{2g} + h_{\text{тр}};$$

$$h_s = \frac{p_V}{\rho g} - \frac{V_2^2}{2g} - h_{\text{тр}}.$$

Из полученной формулы следует, что высота всасывания всегда меньше вакуумметрической высоты, так как часть вакуума расходуется на создание скоростного напора и преодоление гидравлических сопротивлений во всасывающем трубопроводе.

Определяем скорость движения воды в трубе из уравнения расхода $Q = VS$:

$$V = \frac{4Q}{\pi d^2} = \frac{4 \cdot 0,03}{3,14 \cdot 0,15^2} = 1,7 \text{ м/с};$$

$$h_s = \frac{66,6 \cdot 10^3}{1000 \cdot 9,81} - \frac{1,7^2}{2 \cdot 9,81} - 0,9 = 5,74 \text{ м}.$$

Найденное значение h_s отвечает действительности, так как находится в известном диапазоне предельных высот всасывания насоса 4–6 м.

3.3. Режимы движения жидкости

Существуют два различных режима движения – ламинарный и турбулентный. При **ламинарном режиме** жидкость движется отдельными слоями, пульсации скорости и давления не наблюдается. **Турбулентный режим** характеризуется неупорядоченным, хаотичным движением частиц, интенсивным перемешиванием жидкости и пульсациями скоростей и давления.

Критерием для определения режима движения в цилиндрической трубе является безразмерное число Рейнольдса:

$$\text{Re} = \frac{Vd}{\nu},$$

где V – средняя скорость;

d – внутренний диаметр трубы;

ν – кинематический коэффициент вязкости.

Чтобы определить режим движения, необходимо фактическое число Рейнольдса сравнить с критическим $Re_{кр}$, которое для круглых труб примерно 2300:

если Re < 2300 – режим ламинарный;

если Re > 2300 – режим турбулентный.

Задача 3.7

Определить критическую скорость, соответствующую переходу от ламинарного режима к турбулентному в трубе диаметром $d = 0{,}03$ м при движении воды, воздуха и глицерина при температуре 25 ºС.

Решение

Из формулы Рейнольдса найдем

$$V_{кр} = \frac{Re_{кр}\nu}{d} = \frac{2300\nu}{d}.$$

Для воды $\nu = 0{,}9 \cdot 10^{-6}$ м^2/с, тогда

$$V_{кр} = \frac{Re_{кр}\nu}{d} = \frac{2300 \cdot 0{,}9 \cdot 10^{-6}}{0{,}03} = 0{,}069 \text{ м/с}.$$

Для воздуха $\nu = 1{,}56 \cdot 10^{-5}$ м^2/с, тогда

$$V_{кр} = \frac{Re_{кр}\nu}{d} = \frac{2300 \cdot 1{,}56 \cdot 10^{-5}}{0{,}03} = 1{,}196 \text{ м/с}.$$

Для глицерина $\nu = 4{,}1 \cdot 10^{-4}$ м^2/с, тогда

$$V_{кр} = \frac{Re_{кр}\nu}{d} = \frac{2300 \cdot 4{,}1 \cdot 10^{-4}}{0{,}03} = 31{,}4 \text{ м/с}.$$

Задача 3.8

Определить число Рейнольдса и режим движения воды в водопроводной трубе диаметром d = 300 мм при расходе Q = 0,136 м^3/с и температуре воды 10 ºС ($\nu = 1{,}306 \cdot 10^{-6}$ м^2/с).

Решение

Определим живое сечение потока:

$$\omega = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3{,}14 \cdot 0{,}3^2}{4} = 0{,}071\,\text{м}^2.$$

Средняя скорость движения воды в трубе составит

$$V = \frac{Q}{\omega} = \frac{0{,}136}{0{,}071} = 1{,}92\ \text{м/с}.$$

Число Рейнольдса

$$\mathrm{Re} = \frac{Vd}{\nu} = \frac{1{,}92 \cdot 0{,}3}{1{,}306 \cdot 10^{-6}} = 441\,041,$$

где $\nu = 1{,}306 \cdot 10^{-6}$ м^2/с.

Режим движения воды турбулентный, поскольку

$$\mathrm{Re} = 441\,041 > \mathrm{Re}_{\text{кр}} = 2320.$$

Задача 3.9

Горизонтальный отстойник для осветления сточных вод представляет собой удлиненный прямоугольный в плане резервуар. Глубина его h = 2,5 м, ширина b = 6 м. Кинематический коэффициент вязкости $\nu = 1 \cdot 10^{-6}$ м^2/с. Определить среднюю скорость и режим движения сточной жидкости, если ее расчетный расход Q = 0,08 м^3/с. При какой скорости движения в отстойнике будет наблюдаться ламинарный режим движения жидкости?

Решение

Определяем скорость движения воды в отстойнике:

$$V = \frac{Q}{bh} = \frac{0,08}{2,5 \cdot 6} = 0,0053 \text{ м/с}.$$

Находим число Рейнольдса:

$$\mathrm{Re} = \frac{VR_{\text{г}}}{\nu}.$$

где $R_{\text{г}}$ – гидравлический радиус:

$$R_{\text{г}} = \frac{S}{\chi} = \frac{2,5 \cdot 6}{2,5 \cdot 2 + 6} = 1,364 \text{ м};$$

$$\mathrm{Re} = \frac{0,0053 \cdot 1,364}{1 \cdot 10^{-6}} = 7170.$$

Для отстойников критическое число Рейнольдса $\mathrm{Re}_{\text{кр}}$ = 500–600. Полученное число Рейнольдса больше критического, значит, режим движения будет турбулентным.

Критическая скорость, при которой возможна смена режима, определится из выражения

$$V_{\text{кр}} = \frac{\mathrm{Re}_{\text{кр}}\nu}{R_{\text{г}}} = \frac{600 \cdot 1 \cdot 10^{-6}}{1,364} = 0,0044 \text{ м/с} = 0,44 \text{ мм/с}.$$

В горизонтальных отстойниках расчетная скорость принимается равной 5–10 мм/с, т. е. движение жидкости всегда будет турбулентным, что является недостатком работы данных сооружений.

4. ГИДРАВЛИЧЕСКИЕ СОПРОТИВЛЕНИЯ

Движение вязкой жидкости сопровождается потерями напора, обусловленными гидравлическими сопротивлениями. Определение потерь напора является одним из главных вопросов практически любого гидравлического расчета.

Различают два вида потерь напора:

– ***потери на трение по длине***, зависящие в общем случае от длины и размеров поперечного сечения трубопровода, его шероховатости, вязкости жидкости, скорости течения;

– ***потери в местных сопротивлениях*** происходят на коротких участках трубопроводов с изменением скорости по величине и направлению.

$$h_{\text{тр}} = h_{\text{дл}} + \sum h_{\text{м}},$$

где $h_{\text{тр}}$ – потери напора в трубопроводе;

$h_{\text{дл}}$ – потери на трение по длине;

$\sum h_{\text{м}}$ – сумма потерь в местных сопротивлениях.

При движении жидкости в круглых трубах постоянного сечения **потери напора на трение** определяются по формуле Дарси–Вейсбаха:

$$h_{\text{дл}} = \lambda \frac{l}{d} \frac{V^2}{2g},$$

где λ – коэффициент гидравлического трения по длине или коэффициент Дарси (безразмерный);

l и d – длина и диаметр трубопровода;

V – средняя скорость потока;

g – ускорение свободного падения.

Для ламинарного режима движения в круглой трубе коэффициент λ определяется по теоретической формуле

$$\lambda = \frac{64}{\text{Re}},$$

где Re – число Рейнольдса.

При турбулентном режиме движения коэффициент λ в общем случае зависит от числа Рейнольдса Re и относительной шероховатости Δ/d (где Δ – эквивалентная шероховатость) и определяется по эмпирическим формулам. При этом различают три области гидродинамических сопротивлений – гидравлически гладких труб, переходную и квадратичную.

Область гидравлически гладких труб имеет место при $2300 \leq \mathrm{Re} < 20d/\Delta$.

Численное значение коэффициента λ для этой области определяют по формуле Блазиуса:

$$\lambda = \frac{0{,}3164}{\sqrt[4]{\mathrm{Re}}}.$$

В переходной области, $20d/\Delta \leq \mathrm{Re} < 500d/\Delta$, коэффициент гидравлического трения можно определить по универсальной формуле Альтшуля:

$$\lambda = 0{,}11\left(\frac{68}{\mathrm{Re}} + \frac{\Delta}{d}\right)^{0{,}25}.$$

В квадратичной области сопротивления, $\mathrm{Re} > 500d/\Delta$ (области гидравлически шероховатых труб), коэффициент λ можно определить по формуле Шифринсона:

$$\lambda = 0{,}11\left(\frac{\Delta}{d}\right)^{0{,}25}.$$

Потери напора в местных сопротивлениях выражаются формулой Вейсбаха:

$$h_{\text{м}} = \zeta_{\text{мест}} \frac{V^2}{2g},$$

где $\zeta_{\text{мест}}$ – безразмерный коэффициент местной потери (сопротивления).

В большинстве случаев коэффициент ζ определяют по справочным данным на основании результатов экспериментов.

Задача 4.1

Определить потери напора по длине при равномерном движении жидкости по трубопроводу со средней скоростью $V_{ср}$ = 0,4 м/с, если кинематический коэффициент вязкости ν = 0,4·10^{-4} м^2/с, диаметр трубопровода d = 100 мм и длина l = 1000 м.

Решение

Определим режим течения жидкости:

$$\mathrm{Re} = \frac{Vd}{\nu} = \frac{0,4 \cdot 0,1}{0,4 \cdot 10^{-4}} = 1000 < \mathrm{Re}_{кр},$$

т. е. режим течения ламинарный, тогда

$$\lambda = \frac{64}{\mathrm{Re}} = \frac{64}{1000} = 0,064.$$

Потери напора по длине в соответствии с формулой Дарси–Вейсбаха

$$h_{дл} = \lambda \frac{l}{d}\frac{V^2}{2g} = 0,064 \cdot \frac{1000}{0,1} \cdot \frac{0,4^2}{2 \cdot 9,81} = 5,22 \text{ м}.$$

Задача 4.2

При прокачке бензина (ρ = 700 кг/м^3) по трубе длиной l = 5,5 м и диаметром $d = 15$ мм падение давления в трубопроводе $\Delta p = 0,11$ МПа. Принимая закон сопротивления квадратическим, определить эквивалентную шероховатость трубы Δ, если расход Q = 0,9 л/с.

Решение

Скорость движения жидкости

$$V = \frac{4Q}{\pi d^2} = \frac{4 \cdot 900}{3{,}14 \cdot 1{,}5^2} = 510\ \text{см/с} = 5{,}1\ \text{м/с}.$$

Из формулы для определения потерь давления

$$\Delta p = \rho g h_{\text{дл}} = \rho g \lambda \frac{l}{d}\frac{V^2}{2g}$$

находим коэффициент гидравлического трения:

$$\lambda = \frac{2\Delta p d}{\rho l V^2} = \frac{2 \cdot 110\,000 \cdot 0{,}015}{700 \cdot 5{,}5 \cdot 5{,}1^2} = 0{,}033.$$

Эквивалентную шероховатость Δ найдем из формулы

$$\Delta = d\left(\frac{\lambda}{0{,}11}\right)^4 = 15\left(\frac{0{,}033}{0{,}11}\right)^4 = 0{,}12\ \text{мм}.$$

Задача 4.3

Определить коэффициент сопротивления вентиля, установленного в конце трубопровода диаметром d = 50 мм, если показание манометра перед вентилем $p_{\text{ман}}$ = 3,7 кПа, а расход воды Q = 2,5 л/с.

Решение

Потери давления при прохождении жидкости через вентиль $\Delta p = p_{\text{ман}}$, так как давление после вентиля равно атмосферному.

Скорость движения воды в трубопроводе

$$V = \frac{4Q}{\pi d^2} = \frac{4 \cdot 0{,}0025}{3{,}14 \cdot 0{,}05^2} = 1{,}27\ \text{м/с}.$$

Коэффициент сопротивления вентиля найдем из формулы

$$\Delta p = \rho g h_{\text{м}} = \zeta \frac{\rho V^2}{2};$$

$$\zeta = \frac{2\Delta p}{\rho V^2} = \frac{2 \cdot 3700}{1000 \cdot 1,27^2} = 4,59.$$

Задача 4.4

Определить потери напора в системе охлаждения двигателя внутреннего сгорания, включающей в себя центробежный насос, радиатор (ζ_1 = 5), термостат (ζ_2 = 3), трубопроводы (ζ_3 = 1,5) и водяную рубашку двигателя (ζ_4 = 4,5), если расход воды Q = 4,2 л/с, рис. 4.1. Все коэффициенты местных сопротивлений отнесены к скорости в трубе диаметром d = 50 мм. Потерями напора на трение пренебречь.

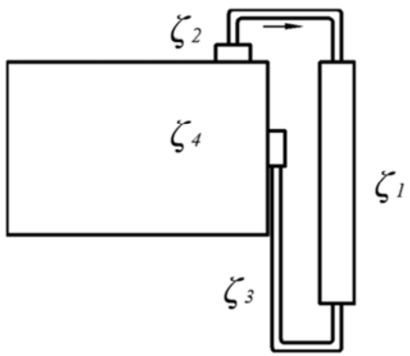

Рис. 4.1. К задаче 4.4

Решение

Расчетная скорость

$$V = \frac{4Q}{\pi d^2} = \frac{4 \cdot 0,0042}{3,14 \cdot 0,05^2} = 2,14 \text{ м/с}.$$

Потери напора в системе охлаждения

$$h_{\text{п}} = \left(\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 + \zeta_4\right)\frac{V^2}{2g} = \left(5 + 3 + 1,5 + 4,5\right)\frac{2,14^2}{2 \cdot 9,81} = 3,27 \text{ м}.$$

Задача 4.5

Определить потери напора на трение в трубопроводе диаметром d = 250 мм, длиной l = 1000 м, с абсолютной шероховатостью стен Δ = 0,15 мм, служащего для транспортирования нефти с весовым расходом $G = 2{\cdot}10^6$ Н/ч, плотностью ρ = 880 кг/м^3 и коэффициентом кинематической вязкости ν = 0,3 см^2/с.

Решение

Определим режим течения нефти:

$$\text{Re} = \frac{Vd}{\nu};$$

$$V = \frac{4Q}{\pi d^2}.$$

Отсюда

$$Q = \frac{G}{\rho g} = \frac{2 \cdot 10^6}{880 \cdot 9,81 \cdot 3600} = 0,064 \text{ м}^3/\text{с},$$

тогда

$$V = \frac{4Q}{\pi d^2} = \frac{4 \cdot 0,064}{3,14 \cdot 0,25^2} = 1,30 \text{ м/с}.$$

Следовательно,

$$\text{Re} = \frac{Vd}{\nu} = \frac{1,30 \cdot 0,25}{0,3 \cdot 10^{-4}} = 10\,833 > \text{Re}_{\text{кр}}.$$

Режим турбулентный, трубопровод гидравлически гладкий, тогда потери напора на трение по формуле Дарси–Вейсбаха составят

$$h_{\text{дл}} = \frac{\Delta p}{\rho g} = \lambda \frac{l}{d} \frac{V^2}{2g}.$$

Определим коэффициент трения:

$$\lambda = \frac{0,3164}{\sqrt[4]{\text{Re}}} = \frac{0,3164}{\sqrt[4]{10\,833}} = 0,031;$$

$$h_{\text{дл}} = 0,031 \frac{1000}{0,25} \frac{1,28^2}{2 \cdot 9,81} = 10,4 \text{ м}.$$

Задача 4.6

Вода из реки по самотечному трубопроводу длиной L = 100 м и диаметром d = 150 мм подается в водоприемный колодец с расходом Q = 26,2 л/с. Определить общие потери напора $h_{\text{тр}}$ в трубопроводе, если эквивалентная шероховатость трубы $\Delta_{\text{экв}}$ = 1 мм, коэффициент кинематической вязкости ν = 0,01 см^2/с, коэффициент местного сопротивления входа в трубу $\zeta_{\text{вх}}$ = 3, а выхода $\zeta_{\text{вых}}$ = 1.

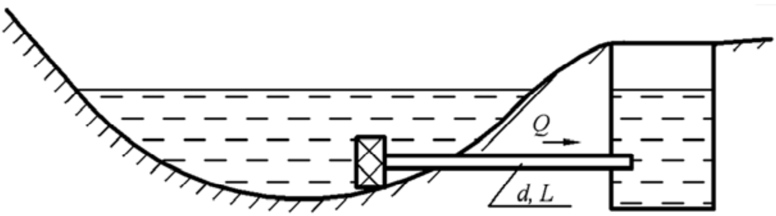

Рис. 4.2. К задаче 4.6

Решение

Определяем скорость движения в трубе:

$$Q = VS;$$

$$V = \frac{Q}{S},$$

где S – площадь сечения трубы: $S = \dfrac{\pi d^2}{4}$.

$$V = \frac{Q4}{\pi d^2} = \frac{0,0262 \cdot 4}{3,14 \cdot 0,15^2} = 1,48 \text{ м/с}.$$

Определяем число Рейнольдса:

$$\mathrm{Re} = \frac{Vd}{\nu} = \frac{148 \cdot 15}{0,01} = 222\,000.$$

Следовательно, коэффициент гидравлического трения λ определяем по формуле Шифринсона:

$$\lambda = 0,11\left(\frac{\Delta}{d}\right)^{0,25} = 0,11\left(\frac{1}{150}\right)^{0,25} = 0,0314.$$

Потери напора по длине находим по формуле Дарси–Вейсбаха:

$$h_{\text{дл}} = \lambda \frac{l}{d}\frac{V^2}{2g} = 0,0314\frac{100}{0,15} \cdot \frac{1,48^2}{2 \cdot 9,81} = 2,34 \text{ м}.$$

Определяем местные потери в трубе:

$$h_{\text{м}1} = \left(\zeta_{\text{вх}} + \zeta_{\text{вых}}\right)\frac{V^2}{2g} = \left(3+1\right) \cdot \frac{1,48^2}{2 \cdot 9,81} = 0,447 \text{ м}.$$

Определяем общие потери в трубе:

$$h_{\text{тр}} = h_{\text{дл}} + h_{\text{м}} = 2,34 + 0,447 = 2,787 \text{ м}.$$

Задача 4.7

Найти диаметр трубопровода для транспортирования водорода при массовом расходе G = 120 кг/ч. Длина трубопровода 1000 м, допускаемое падение давления Δp = 1080 Па. Плотность водорода ρ = 0,0825 кг/м^3. Коэффициент трения λ = 0,03.

Решение

Диаметр трубопровода найдем из формулы Дарси–Вейсбаха в единицах давления:

$$\Delta p = \rho g h_{\text{дл}} = \rho\lambda \frac{l}{d}\frac{V^2}{2}.$$

Выразим скорость через объемный расход:

$$V = \frac{Q4}{\pi d^2}.$$

Объемный расход найдем через массовый:

$$Q = \frac{G}{3600\rho} = \frac{120}{3600 \cdot 0,0825} = 0,40 \text{ м}^3/\text{с}.$$

С учетом найденных величин формула Дарси–Вейсбаха относительно диаметра примет вид

$$\Delta p = \rho\lambda \frac{l}{d}\frac{V^2}{2} = \rho\lambda \frac{l}{d2}\left(\frac{Q4}{\pi d^2}\right)^2 = \rho\lambda \frac{l}{d2} \cdot \frac{Q^2 16}{\pi^2 d^4} = \rho\lambda \frac{l}{d} \cdot \frac{Q^2 8}{\pi^2 d^5};$$

$$d = \sqrt[5]{\frac{8\lambda\rho l Q^2}{\pi^2 \Delta p}} = \sqrt[5]{\frac{8 \cdot 0,03 \cdot 0,0825 \cdot 1000 \cdot 0,4^2}{3,14^2 \cdot 1080}} = \sqrt[5]{0,0003} = 0,2 \text{ м}.$$

Задача 4.8

Из открытого резервуара, в котором поддерживается постоянный уровень, по стальному трубопроводу (эквивалентная шероховатость $\Delta_{\text{экв}}$ = 0,1 мм), состоящему из труб различного диаметра (d_1 = 50 мм,

d_2 = 75 мм, d_3 = 50 мм) и различной длины (l_1 = 5 м, l_2 = 10 м, l_3 = 15 м), в атмосферу вытекает вода, расход которой Q = 6 л/с, рис. 4.3. Определить скорости движения воды и потери напора (по длине и местные) на каждом участке трубопровода. При определении местных потерь коэффициент местного сопротивления входа принять $\zeta_{вх} = 0,5$, на внезапном сужении $\zeta_{в.с} = 0,38$. Потери на расширение определить по формуле Борда $h_{в.р} = \frac{(V_1 - V_2)^2}{2g}$. Кинематический коэффициент вязкости воды $\nu = 0,0101$ см^2/с.

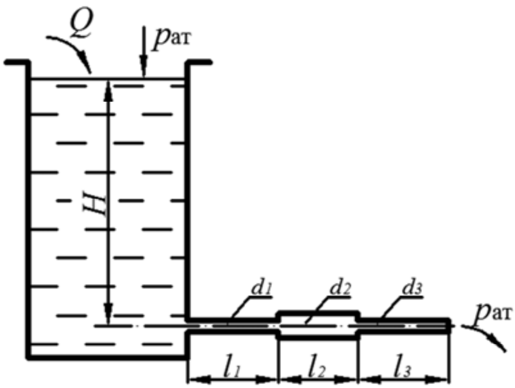

Рис. 4.3. К задаче 4.8

Решение

Определяем скорости на участках по уравнению

$$Q = VS;$$

$$V = \frac{Q}{S}.$$

На первом участке

$$V_1 = \frac{Q}{S_1} = \frac{4Q}{\pi d_1^2} = \frac{4 \cdot 0,006}{3,14 \cdot 0,05^2} = 3,06 \text{ м/с}.$$

Диаметры третьего и первого участка равны, следовательно, $V_1 = V_3$, $V_3 = 3{,}06$ м.

На втором участке

$$V_2 = \frac{Q}{S_2} = \frac{4Q}{\pi d_2^2} = \frac{4 \cdot 0{,}006}{3{,}14 \cdot 0{,}075^2} = 1{,}36 \text{ м/с}.$$

Определяем числа Рейнольдса:

$$\mathrm{Re} = \frac{Vd}{\nu};$$

$$\mathrm{Re}_1 = \mathrm{Re}_3 = \frac{Vd}{\nu} = \frac{3{,}06 \cdot 0{,}05}{0{,}0101 \cdot 10^{-4}} = 151\,353;$$

$$\mathrm{Re}_2 = \frac{Vd}{\nu} = \frac{1{,}36 \cdot 0{,}075}{0{,}0101 \cdot 10^{-4}} = 100\,990.$$

Коэффициент гидравлического трения λ определяем по формуле Альтшуля:

$$\lambda = 0{,}11\left(\frac{68}{\mathrm{Re}} + \frac{\Delta}{d}\right)^{0{,}25};$$

$$\lambda_1 = \lambda_3 = 0{,}11\left(\frac{68}{151353} + \frac{0{,}1}{50}\right)^{0{,}25} = 0{,}0245;$$

$$\lambda_2 = 0{,}11\left(\frac{68}{100990} + \frac{0{,}1}{75}\right)^{0{,}25} = 0{,}0233.$$

Потери напора по длине определяем по формуле Дарси–Вейсбаха:

$$h_{\text{дл}} = \lambda \frac{l}{d}\frac{V^2}{2g};$$

$$h_{\text{дл}1} = 0{,}0245 \frac{5}{0{,}05} \cdot \frac{3{,}06^2}{2 \cdot 9{,}81} = 1{,}17 \text{ м};$$

$$h_{\text{дл}2} = 0,0233\frac{10}{0,75}\cdot\frac{1,36^2}{2\cdot 9,81} = 0,29\text{ м};$$

$$h_{\text{дл}3} = 0,0245\frac{15}{0,05}\cdot\frac{3,06^2}{2\cdot 9,81} = 3,51\text{ м}.$$

Определяем местные потери.

Потери на вход

$$h_{\text{м}1} = \zeta_{\text{вх}}\frac{V_1^2}{2g} = 0,5\cdot\frac{3,06^2}{2\cdot 9,81} = 0,24\text{ м}.$$

Потери на расширение

$$h_{\text{м}2} = \frac{(V_1 - V_2)^2}{2g} = \frac{(3,06 - 1,36)^2}{2\cdot 9,81} = 0,15\text{ м}.$$

Потери на внезапное сужение

$$h_{\text{м}3} = \zeta_{\text{в.с}}\frac{V_3^2}{2g} = 0,38\cdot\frac{3,06^2}{2\cdot 9,81} = 0,18\text{ м}.$$

Общие потери определяем как сумму всех потерь:

$$h_{\text{тр}} = h_{\text{дл}1} + h_{\text{дл}2} + h_{\text{дл}3} + h_{\text{м}1} + h_{\text{м}2} + h_{\text{м}3} =$$

$$= 1,17 + 0,29 + 3,51 + 0,24 + 0,15 + 0,18 = 5,54\text{ м}.$$

Задача 4.9

Вентиляционная труба d = 0,1 м имеет длину l = 100 м. Определить потери давления, если расход воздуха, подаваемый по трубе, Q = 0,078 м^3/с. Давление на выходе равно атмосферному ($p_{\text{ат}}$ = 0,1 МПа). Местные сопротивления по пути движения воздуха отсутствуют. Кинематический коэффициент вязкости воздуха при t = 20 °С составляет ν = 15,7·10^{-6} м^2/с. Средняя шероховатость выступов Δ = 0,2 мм, плотность воздуха ρ = 1,18 кг/м^3.

Решение

Скорость воздуха в трубе

$$V = \frac{Q}{S} = \frac{4Q}{\pi d^2} = \frac{4 \cdot 0,078}{3,14 \cdot 0,1^2} = 10 \text{ м/с}.$$

Число Рейнольдса

$$\mathrm{Re} = \frac{Vd}{\nu} = \frac{10 \cdot 0,1}{15,7 \cdot 10^{-6}} = 69\,000.$$

Режим течения воздуха – турбулентный (Re > 2300), поэтому коэффициент гидравлического трения определим по формуле Альтшуля:

$$\lambda = 0,11\left(\frac{68}{\mathrm{Re}} + \frac{\Delta}{d}\right)^{0,25} = 0,11\left(\frac{68}{69000} + \frac{0,2}{100}\right)^{0,25} = 0,0257.$$

Потери давления на трение по длине определим по формуле Дарси–Вейсбаха:

$$h_{\text{дл}} = \frac{\Delta p}{\rho g} = \lambda \frac{l}{d}\frac{V^2}{2g};$$

$$\Delta p = \rho\lambda \frac{l}{d}\frac{V^2}{2} = 1,18 \cdot 0,0257 \cdot \frac{100}{0,1} \cdot \frac{10^2}{2} = 1,5 \text{ кПа}.$$

Задача 4.10

При внезапном расширении трубы от d = 50 мм до D = 1500 мм, рис. 4.4, происходит увеличение давления, которому соответствует разность показаний пьезометров Δh = 80 мм. Определить скорости V_1 и V_2 и расход жидкости. Учесть потери на внезапном расширении.

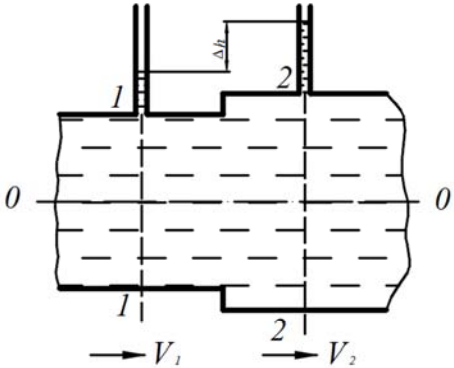

Рис. 4.4. К задаче 4.10

Решение

Составим уравнение Бернулли для сечений *1–1* и *2–2*. Плоскость сравнения *0–0* совпадает с осью трубы:

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 V_2^2}{2g} + h_{\text{м}},$$

где $z_1 = z_2 = 0$;
$\alpha_1 = \alpha_2 = 1$.

Потери напора на внезапном расширении определим по формулам

$$h_{\text{м}} = \zeta_{\text{вх}} \frac{V_1^2}{2g};$$

$$\zeta_{\text{в.р}} = \left(1 - \frac{S_1}{S_2}\right)^2;$$

$$h_{\text{м}} = \left(1 - \frac{S_1}{S_2}\right)^2 \frac{V_1^2}{2g}.$$

Учтем также, что $\Delta h = \frac{p_2}{\rho g} - \frac{p_1}{\rho g}$. Выразим любую скорость (например, V_2) из уравнения расхода:

$$V_2 = V_1 \frac{d^2}{D^2}.$$

Уравнение Бернулли можно представить в виде

$$\Delta h = \frac{V_1^2}{2g} - \frac{V_2^2}{2g} - h_\text{м} = \frac{V_1^2}{2g} - \frac{V_1^2\left(\frac{d^2}{D^2}\right)^2}{2g} - \left(1 - \frac{d^2}{D^2}\right)\frac{V_1^2}{2g}.$$

Откуда скорость V_1 $\Delta h = \frac{p_2}{\rho g} - \frac{p_1}{\rho g}$ будет

$$V_1 = \sqrt{\frac{\Delta h 2g}{1 - \left(\frac{d^2}{D^2}\right)^2 - \left(1 - \frac{d^2}{D^2}\right)^2}} = \sqrt{\frac{0,08 \cdot 2 \cdot 9,81}{1 - \left(\frac{0,05}{0,15^2}\right)^2 - \left(1 - \frac{0,05^2}{0,15^2}\right)^2}} = 2,82 \text{ м/с};$$

$$V_2 = 2,82 \cdot \frac{0,05^2}{0,15^2} = 0,31 \text{ м/с}.$$

Расход жидкости определим из уравнения расхода:

$$Q = V_1 S_1 = V_2 S_2 = 2,82 \cdot \frac{3,14 \cdot 0,05^2}{4} = 5,55 \text{ л/с}.$$

5. ИСТЕЧЕНИЕ ЧЕРЕЗ ОТВЕРСТИЯ И НАСАДКИ

Малым называется такое отверстие, при расчете истечения из которого пренебрегают скоростью подхода и местные скорости во всех точках сжатого сечения считают практически одинаковыми, что наблюдается при h (или d) $\leq 0{,}1\ H$, где h – вертикальный размер в случае некруглого отверстия; d – диаметр круглого отверстия; H – напор относительно плоскости сравнения *0–0*, проведенной через центр тяжести площади ω отверстия (рис. 5.1).

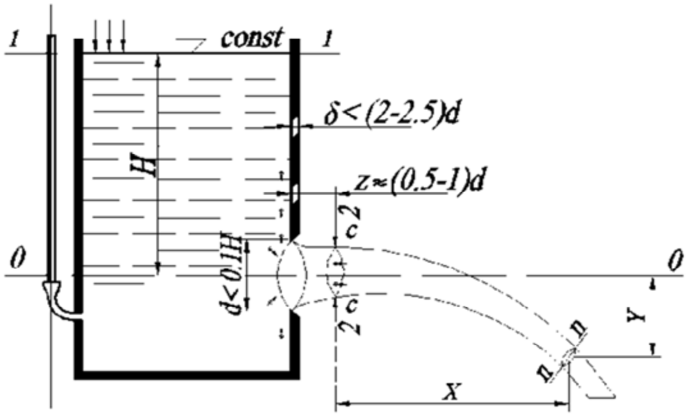

Рис. 5.1. Истечение через малое отверстие

На расстоянии (0,5…1,0)d устанавливается сжатое сечение, где движение будет плавно изменяющимся. Если ни дно, ни стенки сосуда не оказывают влияния на истечение, то такое сжатие называют совершенным, если одна из кромок отверстия совпадает с направляющей, то сжатие неполное.

Степень сжатия струи характеризуется коэффициентом сжатия

$$\varepsilon = \frac{S_c}{S},$$

где S_c – площадь сжатого сечения;

S – площадь отверстия.

Скорость и расход определяются из уравнения Бернулли, записанного для сечений *1–1* и *2–2*, относительно плоскости сравнения *0–0*, проходящей через центр тяжести отверстия:

$$\upsilon = \varphi\sqrt{2gH}; \tag{5.1}$$

$$Q = \mu S\sqrt{2gH}, \tag{5.2}$$

где φ – коэффициент скорости;

$\mu = \varepsilon\varphi$ – коэффициент расхода.

Насадком называется короткий фасонный патрубок длиной (3…4)d, присоединенный к отверстию. Скорость на выходе из насадка и расход определяются по формулам (5.1) и (5.2). Так как насадок обычно работает полным сечением, то коэффициент сжатия $\varepsilon = 1{,}0$, а коэффициент расхода $\mu = \varphi$. Коэффициенты истечения μ, φ, ε и ζ для различных насадков определяются по справочным данным в зависимости от типа насадка.

При измерении напора во времени ($H \neq \text{const}$) движение является неустановившимся и основной задачей является определение времени полного или частичного наполнения или опорожнения емкости:

$$t = \frac{2\Omega}{\mu\omega\sqrt{2g}}\left(\sqrt{H_1} - \sqrt{H_2}\right), \tag{5.3}$$

где Ω – площадь резервуара;

ω – площадь отверстия или насадка.

Длительность полного опорожнения определяется из (5.3) при $H_2 = 0$. При истечении жидкости при переменном напоре под переменный уровень длительность изменения уровней t определяется по формуле

$$t = \frac{2\Omega_1\Omega_2}{\left(\Omega_1 + \Omega_2\right)\mu\omega\sqrt{2g}}\left(\sqrt{H_1} - \sqrt{H_2}\right), \tag{5.4}$$

где Ω_1 и Ω_2 – площадь резервуара.

Длительность выравнивания уровней в двух резервуарах получается из (5.4) при $H_2 = 0$.

Задача 5.1

Определить расход воды Q через круглое отверстие в тонкой боковой стенке мерного бака диаметром $D = 1$ м, если диаметр отверстия $d = 5$ см и постоянный напор над его центром тяжести $H = 1{,}5$ м, принимаем коэффициент расхода $\mu = 0{,}62$.

Решение

Ввиду того, что отношение площадей сечения отверстия и бака

$$\frac{S}{\Omega} = \left(\frac{d}{D}\right)^2 = \left(\frac{0{,}05}{1}\right)^2 = 0{,}0025,$$

где S – площадь отверстия,
весьма мало, для определения расхода используем формулу

$$Q = \mu\omega\sqrt{2gH},$$

где μ – коэффициент расхода.

Таким образом

$$Q = \mu\frac{\pi d^2}{4}\sqrt{2gH} = 0{,}62\frac{3{,}14\cdot 0{,}05^2}{4}\sqrt{2\cdot 9{,}81\cdot 1{,}5} = 0{,}0065\ \text{м}^3/\text{с} = 6{,}5\ \text{л/с}.$$

Задача 5.2

Истечение воды из закрытого вертикального сосуда в атмосферу (рис. 5.2) происходит при постоянном геометрическом напоре $h = 3$ м через внешний цилиндрический насадок диаметром $d = 8$ см. Определить, какое давление p необходимо создать на свободной поверхности воды в сосуде для того, чтобы расход при истечении был равен $Q = 50$ л/с, $\mu = 0{,}82$.

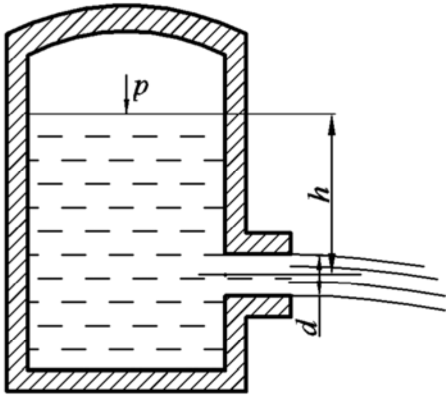

Рис. 5.2. К задаче 5.2

Решение

Будем исходить из общей формулы для расхода жидкости при истечении

$$Q = \mu\omega\sqrt{2gH},$$

откуда получаем

$$H = \frac{Q^2}{\mu^2\omega^2 2g}.$$

Для внешнего цилиндрического насадка коэффициент расхода $\mu = 0,82$; площадь сечения насадка

$$\omega = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 0,08^2}{4} = 0,005 \text{ м}^2,$$

и, следовательно:

$$H = \frac{0,05^2}{0,82^2 \cdot 0,005^2 \cdot 2 \cdot 9,81} = 7,6 \text{ м}.$$

В рассматриваемом случае

$$H = h + \frac{p_0}{\rho g} - \frac{p_{ат}}{\rho g},$$

где p_0 – давление на свободной поверхности в сосуде;

$p_{ат}$ – давление в той среде, куда происходит истечение (т. е. атмосферное давление).

Отсюда имеем

$$\frac{p_0}{\rho g} - \frac{p_{ат}}{\rho g} = H - h.$$

Поэтому на свободной поверхности воды в сосуде необходимо иметь избыточное давление

$$p - p_{ат} = \rho g\left(H - h\right) = 1000 \cdot 9{,}81 \cdot \left(7{,}4 - 3\right) = 43\,164 \text{ Па} = 43{,}2 \text{ кПа}.$$

Задача 5.3

Определить время, необходимое для выравнивания уровней в двух сообщающихся емкостях *A* и *B* (рис. 5.3), с постоянными по высоте поперечными сечениями Ω_1 = 3 м^2, Ω_2 = 2 м^2, если диаметр отверстия d = 10 см и первоначальная разность уровней H = 1,5 м.

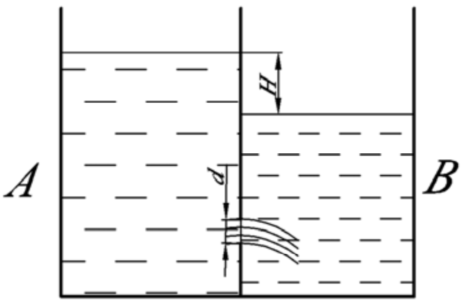

Рис. 5.3. К задаче 5.3

Решение

Вычисляем площадь сечения отверстия:

$$S = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3{,}14 \cdot 0{,}1^2}{4} = 0{,}00785\ \text{м}^2,$$

и, принимая, как для случая тонкой стенки, коэффициент расхода μ = 0,62, по уравнению (5.4) находим время, необходимое для выравнивания уровней:

$$t = \frac{2\Omega_1\Omega_2}{\left(\Omega_1 + \Omega_2\right)\mu\omega\sqrt{2g}}\left(\sqrt{H_1} - \sqrt{H_2}\right) =$$

$$= \frac{2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \sqrt{1}}{\left(3+2\right)0{,}62 \cdot 0{,}00785\sqrt{2 \cdot 9{,}81}} = 111\ \text{с} = 1\ \text{мин}\ 51\ \text{с}.$$

6. ГИДРАВЛИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ ПРОСТОГО ТРУБОПРОВОДА

Простым называется трубопровод постоянного или переменного сечения, который не имеет ответвлений и в котором расход жидкости постоянный по длине.

Для расчета простого трубопровода при установившемся движении несжимаемой жидкости ($\rho = \text{const}$) используются **уравнение расхода**

$$Q = VS = \text{const}$$

и уравнение Бернулли

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 V_2^2}{2g} + h_{\text{тр}}.$$

Потери напора $h_{\text{тр}}$ между сечениями *1–1* и 2–*2* складываются из потерь по длине трубопровода $h_{\text{дл}}$ и потерь в местных сопротивлениях $h_{\text{м}}$, расположенных на трубопроводе.

Задача 6.1

По сифону диаметром d = 10 см, длина которого L = 20 м, вода поступает из резервуара A в резервуар B (рис. 6.1). Разность уровней воды в резервуарах H = 1 м, а расстояние от уровня воды в резервуаре A до наивысшей точки сифона h = 3 м. Определить расход воды Q и величину наибольшего вакуума в сифоне. Труба старая стальная.

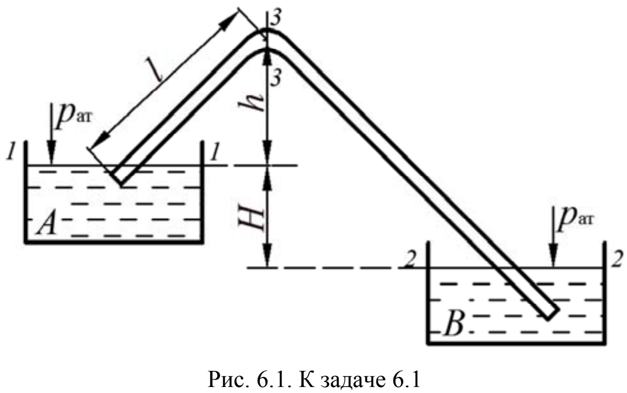

Рис. 6.1. К задаче 6.1

Решение

Для определения расхода необходимо записать уравнение Бернулли для сечений *1–1* и *2–2* относительно плоскости сравнения, проходящей через сечение *2–2*:

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 V_2^2}{2g} + h_{\text{тр}},$$

$z_1 = H$; $z_2 = 0$; $p_1 = p_2 = p_{\text{атм}}$; $V_1 = V_2 = 0$ – так как уровень в резервуарах постоянный.

$$h_{\text{тр}} = \left(\sum\zeta + \lambda\frac{l}{d}\right)\frac{V^2}{2g}.$$

Получаем, что

$$H = \left(\sum\zeta + \lambda\frac{l}{d}\right)\frac{V^2}{2g}. \qquad (6.1)$$

Сумма коэффициентов сопротивления

$$\sum\zeta = \zeta_{\text{вх}} + \zeta_{\text{пов}} + \zeta_{\text{вых}}.$$

Значение коэффициентов сопротивления

$$\zeta_{\text{вх}} = 0{,}5; \quad \zeta_{\text{пов}} = 0{,}15; \quad \zeta_{\text{вых}} = 1{,}0.$$

Предполагаем, что режим движения турбулентный, а труба гидравлически шероховатая (зона сопротивления квадратичная). Коэффициент гидравлического трения λ определяется по формуле Шифринсона

$$\lambda = 0{,}11\left(\frac{\Delta_{\text{экв}}}{d}\right)^{0{,}25},$$

где эквивалентная шероховатость для старых стальных труб $\Delta_{экв} = 0{,}2$ мм.

$$\lambda = 0{,}11\left(\frac{0{,}02}{10}\right)^{0{,}25} = 0{,}023.$$

Из выражения (6.1) получаем, что

$$V = \sqrt{\frac{2gH}{\zeta_{вх} + \zeta_{пов} + \zeta_{вых} + \lambda\frac{l}{d}}} = \sqrt{\frac{2\cdot 9{,}8\cdot 1}{0{,}5 + 0{,}15 + 1{,}0 + 0{,}023\frac{20}{0{,}1}}} = 1{,}77 \text{ м/с}.$$

Проверяем сделанное выше предположение о режиме движения, т. е. определяем число Рейнольдса:

$$\mathrm{Re} = \frac{Vd}{\nu} = \frac{1{,}77\cdot 0{,}1}{0{,}01\cdot 10^{-4}} = 177\,000.$$

Так как Re = 177 000 > $\mathrm{Re}_{кр}$ = 2300, режим движения турбулентный, предложение верно.

Уточняем зону сопротивления:

$$500\frac{d}{\Delta_{экв}} = 500\frac{10}{0{,}02} = 250\,000;$$

$$20\frac{d}{\Delta_{экв}} = 20\frac{10}{0{,}02} = 10\,000;$$

$$20\frac{d}{\Delta_{экв}} = 10000 < \mathrm{Re} = 177\,000 < 500\frac{d}{\Delta_{экв}} = 250\,000.$$

Следовательно, второе предположение неверно: труба не вполне шероховатая и коэффициент гидравлического трения определяется по формуле Альтшуля:

$$\lambda = 0{,}11\left(\frac{68}{\mathrm{Re}} + \frac{\Delta}{d}\right)^{0{,}25} = 0{,}11\left(\frac{68}{177000} + \frac{0{,}02}{10}\right)^{0{,}25} = 0{,}024.$$

Тогда

$$V = \sqrt{\frac{2gH}{\zeta_{вх} + \zeta_{пов} + \zeta_{вых} + \lambda \frac{l}{d}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 9{,}8 \cdot 1}{0{,}5 + 0{,}15 + 1{,}0 + 0{,}024 \frac{20}{0{,}1}}} = 1{,}74 \text{ м/с};$$

$$\mathrm{Re} = \frac{Vd}{\nu} = \frac{1{,}74 \cdot 0{,}1}{0{,}01 \cdot 10^{-4}} = 174\,000.$$

Очевидно, что в этом случае коэффициент гидравлического трения λ определен верно.

Расход воды, проходящей по сифону, будет

$$Q = VS = V\frac{\pi d^2}{4} = 1{,}74 \cdot \frac{3{,}14 \cdot 0{,}1^2}{4} = 0{,}0137 \text{ м}^3\text{/с}.$$

Для определения величины наибольшего вакуума в сифоне уравнение Бернулли записывается для сечений *1–1* и *3–3*, плоскость сравнения выбирается по сечению *1–1*.

После преобразования этого уравнения получаем

$$\frac{p_{ат}}{\rho g} = h + \frac{p_{абс}}{\rho g} + (1 + \zeta_{вх} + \lambda \frac{l}{d})\frac{V^2}{2g};$$

$$\frac{p_{вак}}{\rho g} = h + \left(1 + \zeta_{вх} + \lambda \frac{l}{d}\right)\frac{V^2}{2g} = 3 + \left(1 + 0{,}5 + 0{,}024\frac{20}{0{,}1}\right)\frac{1{,}74^2}{2 \cdot 9{,}8} =$$

$$= 3{,}61 \text{ м вод. ст.}$$

Задача 6.2

Насос при рабочем ходе гидроцилиндра развивает давление $p^{н}_{ман} = 3$ МПа (рис. 6.2). Масло ($\rho_м$ = 900 кг/м^3; ν = 0,85 см^2/с) подается по трубопроводу диаметром d = 20 мм и длиной l = 3 м в гидроцилиндр D = 80 мм. Определить силу P на штоке гидроцилиндра при рабочем ходе, если расход масла Q = 0,003 м^3/с, а коэффициент сопротивления дросселя $\zeta_{др}$ = 15.

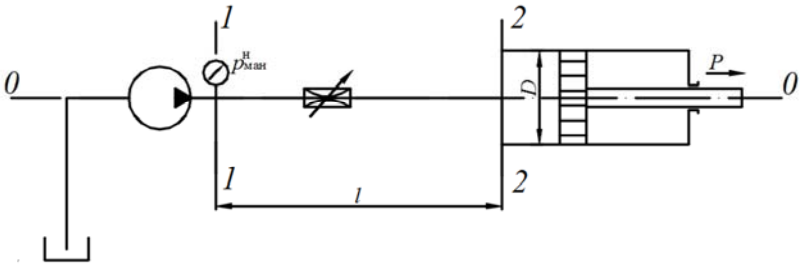

Рис. 6.2. К задаче 6.2

Решение

Записываем уравнение Бернулли для сечения *1–1* и *2–2* относительно плоскости сравнения *0–0*:

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 V_2^2}{2g} + h_{тр}.$$

$z_1 = 0$; $z_2 = 0$;

$p_1 = p^{н}_{ман}$; $p_2 = p^{ц}_{ман}$; $V_1 = V_2 = \dfrac{Q}{S}$.

Следовательно, расчетное уравнение трубопровода имеет вид

$$\frac{p^{н}_{ман}}{\rho g} - \frac{p^{ц}_{ман}}{\rho g} = h_{тр}.$$

С учетом зависимостей для потерь напора расчетное уравнение подводящего трубопровода записывается следующим образом:

$$p^{ц}_{ман} = p^{н}_{ман} - \rho \frac{V^2}{2}\left(\zeta_{др} + \lambda \frac{l}{d}\right).$$

Установим режим движения:

$$V = \frac{Q}{S} = \frac{0{,}003 \cdot 4}{3{,}14 \cdot 0{,}02^2} = 9{,}55 \text{ м/с}.$$

$$\mathrm{Re}=\frac{Vd}{\nu}=\frac{955\cdot 2}{0,85}=2247<2300$$ – режим движения ламинарный.

Коэффициент гидравлического трения λ определим по формуле

$$\lambda=\frac{64}{\mathrm{Re}}=\frac{64}{2247}=0,028.$$

Подставляем данные в исходное уравнение:

$$p_{\text{ман}}^{\text{ц}}=3\cdot 10^6-900\frac{9,55^2}{2}\left(15+0,028\frac{3}{0,02}\right)=2,21\,\text{МПа}.$$

Сила P на штоке гидроцилиндра при рабочем ходе

$$P=p_{\text{ман}}^{\text{ц}}\frac{\pi D^2}{4}=2\,212\,010\cdot\frac{3,14\cdot 0,08^2}{4}=11113\ \text{Н}=11,11\ \text{кН}.$$

Задача 6.3

Всасывающий трубопровод насоса имеет длину l = 5 м и диаметр d = 32 мм, высота всасывания h = 0,8 м (рис. 6.3). Определить давление в конце трубопровода (перед насосом), если расход масла (ρ = 890 кг/м^3; ν = 10 мм^2/с), Q = 50 л/мин, коэффициент сопротивления колена $\zeta_{\text{к}}$ = 0,3, вентиля $\zeta_{\text{в}}$ = 4,5, фильтра $\zeta_{\text{ф}}$ = 10.

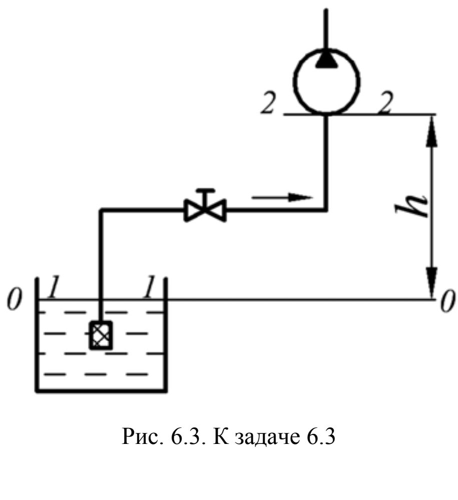

Рис. 6.3. К задаче 6.3

Решение

Определяем скорость, число Рейнольдса и коэффициент гидравлического трения по длине при расходе

$$Q = \frac{50}{60} = 0,833 \text{ л/с} = 0,000833 \text{ м}^3\text{/с} = 833 \text{ см}^3\text{/с}.$$

$$V = \frac{4Q}{\pi d^2} = \frac{4 \cdot 833}{3,14 \cdot 3,2^2} = 104 \text{ см/с};$$

$$\mathrm{Re} = \frac{Vd}{\nu} = \frac{104 \cdot 3,2}{0,1} = 3328;$$

$$\lambda = \frac{0,3164}{\mathrm{Re}^{0,25}} = \frac{0,3164}{3328^{0,25}} = 0,042.$$

Сумма коэффициентов местных сопротивлений

$$\sum\zeta = \zeta_{\text{ф}} + 2\zeta_{\text{к}} + \zeta_{\text{в}} = 10 + 2 \cdot 0,3 + 4,5 = 15,1.$$

Потери напора во всасывающем трубопроводе

$$h_{\text{тр}} = \left(\lambda \frac{l}{d} + \sum\zeta\right)\frac{V^2}{2g} = \left(0,042 \frac{5}{0,032} + 15,1\right)\frac{1,04^2}{2 \cdot 9,81} = 1,2 \text{ м}.$$

Из уравнения Бернулли для сечений *1–1* и *2–2* относительно плоскости сравнения *0–0*

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 V_2^2}{2g} + h_{\text{тр}},$$

в котором

$V_1 = 0$; $p_1 = p_{\text{ат}} = 10^5$ Па; $z_1 = 0$; $V_2 = 1,04$ м/с; $z_2 = h$; $h_{\text{тр}} = 1,2$ м; $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$.

Находим давление перед насосом:

$$p_2 = p_{\text{ат}} - \rho g\left(h + h_{\text{тр}}\right) - \frac{\rho}{2}V_2^2 =$$

$$= 100\,000 - 890 \cdot 9{,}81\left(0{,}8 + 1{,}2\right) - \frac{890}{2}1{,}04^2 = 82057 \text{ Па.}$$

Задача 6.4

Сифонный трубопровод длиной L = 200 м, диаметром d = 200 мм с горизонтальным участком CD соединяет водоем A с колодцем B (рис. 6.4). Разность уровней h_1 = 2 м; h_2 = 3 м; h_3 = 6 м. На трубопроводе имеются всасывающая коробка с сеткой, два колена и задвижка. Определить пропускную способность трубопровода Q и проверить условия его нормальной работы при температуре воды t = 20 °С.

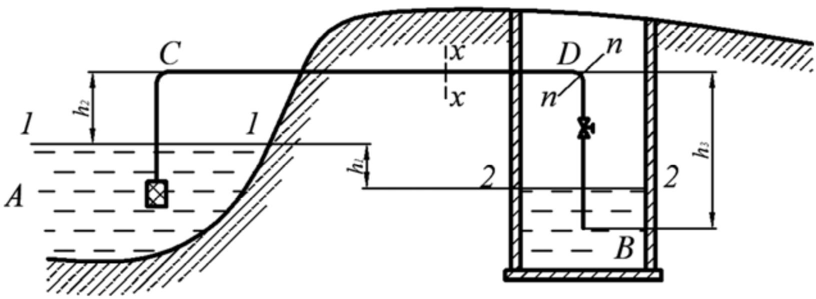

Рис. 6.4

Решение

Составляя уравнение Бернулли для сечений *1–1* и *2–2*, совпадающих со свободными поверхностями воды в водоеме и колодце, ось сравнения *1–1*, получим

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha V_2^2}{2g} + h_{\text{тр}},$$

где $z_1 = 0$; $z_2 = -h_1$; $p_1 = p_2 = p_{\text{ат}} = 10^5$ Па; $V_1 = V_2 = 0$; $h_1 = h_{\text{тр}}$,

$$h_1 = \sum h_{1-2} = \lambda \frac{L}{d}\frac{V^2}{2g} + \zeta_{\text{всас}}\frac{V^2}{2g} + 2\zeta_{\text{кол}}\frac{V^2}{2g} +$$

$$+ \zeta_{\text{задв}}\frac{V^2}{2g} + \zeta_{\text{вых}}\frac{V^2}{2g} = \zeta_{\text{сист}}\frac{V^2}{2g}, \qquad (6.2)$$

где $\zeta_{\text{сист}}$ – коэффициент сопротивления системы:

$$\zeta_{\text{сист}} = \lambda\frac{L}{d} + \zeta_{\text{всас}} + 2\zeta_{\text{кол}} + \zeta_{\text{задв}} + \zeta_{\text{вых}}.$$

Коэффициент гидравлического сопротивления λ определяем по формуле Маннинга, принимая в нормальных условиях коэффициент шероховатости для водопроводных труб $n = 0{,}012$:

$$\lambda = 124{,}6\frac{n^2}{d^{1/3}} = 124{,}6\frac{0{,}012^2}{0{,}2^{1/3}} = 0{,}0308.$$

Коэффициенты местных сопротивлений:
для колена .... $\zeta_{\text{кол}} = 0{,}5$;
задвижки (при полном открытии)........... $\zeta_{\text{задв}} = 0{,}12$;
всасывающей коробки с сеткой .... $\zeta_{\text{всас}} = 5$;
выхода из трубы .... $\zeta_{\text{вых}} = 1$.

Тогда

$$\zeta_{\text{сист}} = 0{,}0308\cdot\frac{200}{0{,}2} + 5 + 2\cdot 0{,}5 + 0{,}12 + 1 = 37{,}92.$$

После этого из уравнения (6.2) определяем среднюю скорость течения в трубопроводе:

$$V = \sqrt{\frac{2gh_1}{\zeta_{\text{сист}}}} = \sqrt{\frac{2\cdot 9{,}81\cdot 2}{37{,}92}} = 1{,}02 \text{ м/с},$$

и находим расход:

$$Q = VS = V\frac{\pi d^2}{4} = 1{,}02\cdot\frac{3{,}14\cdot 0{,}2^2}{4} = 0{,}032\ \text{м}^3/\text{с} = 32\ \text{л/с}.$$

Для определения давления в некотором сечении трубопровода *x–x* необходимо составить уравнение Бернулли между сечением *1–1* свободной поверхности воды в водоеме *A* и сечением *x–x*:

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha V_1^2}{2g} = z_x + \frac{p_x}{\rho g} + \frac{\alpha V_x^2}{2g} + \sum h_{1-x},$$

где $z_1 = 0$; $p_1 = p_{\text{ат}} = 10^5$ Па; $z_x = h_2$; $V_1 = 0$.

$$\frac{p_{\text{ат}}}{\rho g} = h_2 + \frac{p_x}{\rho g} + \frac{V_x^2}{2g} + \sum h_{1-x},$$

откуда

$$\frac{p_x}{\rho g} = \frac{p_{\text{ат}}}{\rho g} - \left[h_2 + \left(1 + \zeta_{1-x}\right)\frac{V_x^2}{2g}\right],$$

где ζ_{1-x} – коэффициент сопротивления части системы от сечения *1–1* до сечения *x–x*.

Учитывая расположение трубопровода, приходим к выводу, что минимальное давление в нем будет иметь место в конце его горизонтального участка, т. е. в сечении *n–n*.

В этом случае

$$\zeta_{1-x} = \lambda\frac{L}{d} + \zeta_{\text{вс}} + \zeta_{\text{кол}} = 0{,}0308\frac{194}{0{,}2} + 5 + 0{,}5 = 35{,}5$$

и минимальное давление, выраженное в метрах столба воды, будет

$$\frac{p_{\min}}{\rho g} = 10{,}33 - \left[3 + 35{,}5\frac{1{,}02^2}{2\cdot 9{,}81}\right] = 5{,}4\ \text{м}.$$

Сопоставим полученное значение давления со значением упругости паров воды при заданной температуре. Из справочника, при $t = 20$ °С упругость паров воды $A_t = 0{,}24$ м.

Следовательно, условие

$$\frac{p_{\min}}{\rho g} > A_t,$$

необходимое условие для обеспечения нормальной работы сифонного трубопровода, выполнено.

Задача 6.5

Определить требуемый напор, который необходимо создать в сечении *1–1* для подачи в бак воды с вязкостью $\nu = 0{,}008 \cdot 10^{-4}$ м^2/с, если длина трубопровода $l = 80$ м; его диаметр $d = 50$ мм; расход жидкости $Q = 15$ л/с; высота $H_0 = 30$ м; давление в баке $p_2 = 0{,}2$ МПа; коэффициент сопротивления крана $\zeta_1 = 5$; колена $\zeta_2 = 0{,}8$; шероховатость стенок $\Delta = 0{,}04$ мм (рис. 6.5).

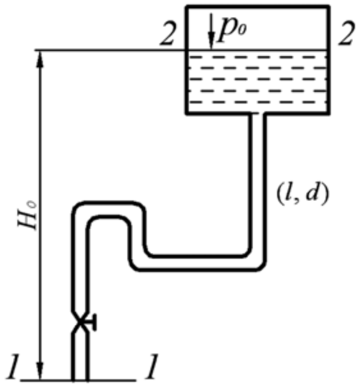

Рис. 6.5. К задаче 6.5

Решение

Составим уравнение Бернулли для сечений *1–1* и *2–2* относительно плоскости сравнения, совпадающего с сечением *1–1*:

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 V_2^2}{2g} + h_{\text{тр}},$$

где $z_1 = 0$; $z_2 = H_0$; $V_2 = 0$; $h_{\text{тр}} = h_{\text{дл}} + \sum h_{\text{м}}$.

Скорость течения жидкости

$$V = \frac{4Q}{\pi d^2} = \frac{7,64 \cdot 0,015}{3,14 \cdot 0,05^2} = 7,64 \text{ м/с}.$$

Определим число Рейнольдса:

$$\text{Re} = \frac{Vd}{\nu} = \frac{7,64 \cdot 0,05}{0,008 \cdot 10^{-4}} = 477\,500.$$

Поскольку режим движения турбулентный ($\alpha = 1$), то потери напора по длине определим по формуле Дарси–Вейсбаха:

$$h_{\text{дл}} = \lambda \frac{l}{d} \frac{V^2}{2g}.$$

Коэффициент Дарси по формуле Альтшуля

$$\lambda = 0,11\left(\frac{68}{\text{Re}} + \frac{\Delta}{d}\right)^{0,25} = 0,11\left(\frac{68}{477500} + \frac{0,04}{50}\right)^{0,25} = 0,019.$$

Тогда

$$h_{\text{дл}} = 0,019 \frac{80}{0,05} \cdot \frac{7,64^2}{2 \cdot 9,81} = 90,4 \text{ м}.$$

Местные потери напора (с учетом внезапного расширения $\zeta_{\text{р}}$)

$$h_{\text{м}} = \left(\zeta_1 + 4\zeta_2 + \zeta_{\text{р}}\right)\frac{V^2}{2g} = \left(5 + 4 \cdot 0,8 + 1\right)\frac{7,64^2}{2 \cdot 9,81} = 27,4 \text{ м}.$$

Тогда потребный напор

$$H_{\text{потр}} = \frac{p_1}{\rho g} = H_0 + \frac{p_2}{\rho g} + \sum h_{\text{тр}} - \frac{V^2}{2g} =$$

$$= 30 + \frac{0,2 \cdot 10^6}{1000 \cdot 9,81} + 90,4 + 27,4 - \frac{7,64^2}{2 \cdot 9,81} = 165,1 \text{ м.}$$

Задача 6.6

Определить показания манометра $p_{\text{м}}$, если расход воды, проходящей по трубопроводу (рис. 6.6), составляет Q = 30 м^3/ч. Длина трубопровода l = 120 м, высота h = 710 мм, диаметр труб d = 100 мм, шероховатость Δ = 0,5 мм, степень открытия задвижки Лудло h/d = 0,7, радиус скругления отводов R = 200 мм.

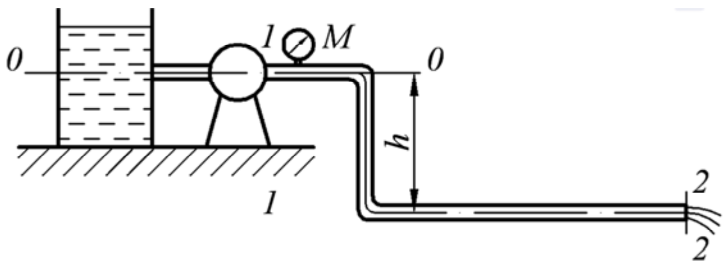

Рис. 6.6. К задаче 6.6

Решение

В потоке проводим два сечения *1–1* и *2–2*, а также плоскость сравнения *0–0*. Для этих двух сечений составим уравнение Бернулли:

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 V_2^2}{2g} + h_{\text{тр}},$$

где $z_1 = 0$; $z_2 = -h$; $p_1 = p_{\text{ат}} + p_{\text{м}}$; $p_2 = p_{\text{ат}}$; $V_1 = V_2 = V$; $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$; $h_{\text{тр}} = h_{\text{дл}} + h_{\text{м}}$.

$$h_{\text{тр}} = \left(\lambda \frac{l}{d} + \zeta_{\text{м}}\right)\frac{V^2}{2g}.$$

Получим

$$\frac{p_{\text{ат}} + p_{\text{м}}}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} = -h + \frac{p_{\text{ат}}}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} + \left(\lambda \frac{l}{d} + \sum \zeta_{\text{м}}\right) \frac{V^2}{2g},$$

откуда

$$p_{\text{м}} = \rho g \left[\left(\lambda \frac{l}{d} + \sum \zeta_{\text{м}}\right) \frac{V^2}{2g} - h \right].$$

Определим среднюю скорость воды в трубопроводе:

$$V = \frac{4Q}{\pi d^2} = \frac{4 \cdot 0,00833}{3,14 \cdot 0,1^2} = 1,06 \text{ м/с}.$$

Найдем число Рейнольдса:

$$\text{Re} = \frac{Vd}{\nu} = \frac{1,06 \cdot 0,1}{0,01 \cdot 10^{-4}} = 106\,000.$$

Ввиду того что значения $\text{Re} > \text{Re}_{\text{кр}} = 2300$, режим движения воды по трубопроводу турбулентный.

Так как $\text{Re} > 500 \dfrac{d}{\Delta}$; $106\,000 > \text{Re} > 500 \dfrac{100}{0,5} = 100\,000$, то имеет место зона квадратичного сопротивления и коэффициент Дарси может быть вычислен по формуле Шифринсона:

$$\lambda = 0,11 \left(\frac{\Delta}{d}\right)^{0,25} = 0,11 \left(\frac{0,5}{100}\right)^{0,25} = 0,029.$$

Значения коэффициентов местных сопротивлений (по справочнику):

при $R/d = 0,2/0,1 = 2$........... $\zeta_{\text{отв}} = 0,28$;

при $h/d = 0,7$ .... $\zeta_{\text{з}} = 0,67$, следовательно

$$\sum\zeta = 2\zeta_{\text{отв}} + \zeta_{\text{з}} = 2\cdot 0,28 + 0,67 = 1,23.$$

Подставив найденные значения V, λ и $\sum\zeta$ в полученное выше уравнение для $p_{\text{м}}$, получим

$$p_{\text{м}} = 1000\cdot 9,81\left[\left(0,029\frac{120}{0,1} + 1,27\right)\frac{1,06^2}{2\cdot 9,81} - 0,71\right] =$$

$$= 13\,342\ \text{Па} = 13,3\ \text{кПа}.$$

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

КАЧАНОВ Игорь Владимирович
ЛЕДЯН Юрий Павлович
ЩЕРБАКОВА Мария Константиновна

МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА

Методическое пособие к решению задач
для студентов специальностей 1-37 03 02 «Кораблестроение
и техническая эксплуатация водного транспорта»,
1-70 02 02 «Экспертиза и управление недвижимостью»,
1-70 02 01 «Промышленное и гражданское строительство»,
1-70 01 01 «Производство строительных изделий и конструкций»

Редактор *Т. Н. Микулик*
Компьютерная верстка *Н. А. Школьниковой*

Подписано в печать 12.11.2015. Формат 60×84 $^{1}/_{16}$. Бумага офсетная. Ризография.
Усл. печ. л. 5,35. Уч.-изд. л. 4,18. Тираж 100. Заказ 1138.

Издатель и полиграфическое исполнение: Белорусский национальный технический университет.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя
печатных изданий № 1/173 от 12.02.2014. Пр. Независимости, 65. 220013, г. Минск.