

ИССЛЕДОВАНИЕ ФИЛЬТРАЦИИ ЖИДКОСТИ В ГИДРООПОРЕ ЧЕРЕЗ МИКРОСКОПИЧЕСКИЕ ПОРЫ

д.ф.-м.н. ¹Шкадов В.Я., к.ф.-м.н. ²Конон П.Н., к.ф.-м.н. ²Докукова Н.А.

¹Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва

²Белорусский государственный университет, Минск

Анализ колебаний механических систем широко используется в современном машиностроении при проектировании виброамортизаторов, виброизоляторов, ограничителей хода во время перегрузок мобильных машин, авиационной техники, подвижного состава метро, поездов, станков [1].

Рассматриваются колебания пассивного одноосного виброизолятора мобильного средства с инерционной трубкой. В колебательном режиме жидкая масса в трубке в верхней камере перемещается из камеры в камеру. Трубка называется инерционной, потому что она, ограничивая и направляя жидкость, создает инерционное сопротивление поршневому действию со стороны верхней камеры. Отверстие и инерционная трубка создают сопротивления различного типа. Сопротивление отверстия – диссипативное, а в инерционной трубке диссипативное сопротивление незначительно, но имеется повышенное инерционное сопротивление. Существуют другие типы устройства гидропор с инерционной трубкой, но принцип их действия подобен описанному выше.

Жесткость гидропоры зависит от частоты колебания. Основной резиновый элемент выполняет две задачи: воспринимать статическую нагрузку и выталкивать жидкость из верхней камеры в нижнюю и обратно. Характеристика динамической жесткости гидропоры зависит от свойств резинового элемента – жесткости, коэффициента потерь, податливости упругого элемента мембраны нижней камеры. Динамическая жесткость определяет изменение давления от изменения объема в нижней камере и гидравлического диссипативного и инерционного сопротивления отверстия течению жидкости. Определение вязкожидкостного трения и инерционного сопротивления является важной и актуальной задачей современной гидроупругой технологии снижения вибраций и шума.

Гидропоры с несжимаемыми жидкостями и инерционными трансформаторами представляют новую теоретически неисследованную задачу, несмотря на имеющиеся экспериментальные данные. Новые технические решения по снижению уровня вибраций и шума, которые предъявляются к гидропорам, требуют поиска новых эффективных аналитических решений [3].

Рассмотрим гидродинамическую модель исследуемого процесса. В приближении она представляет собой нестационарное ламинарное течение в трубе кругового сечения под действием пульсирующего во времени перепада давлений. Решение рассматривается в цилиндрической системе координат r, φ, z , в которой ось z направлена вдоль оси цилиндра. Течение формируется под действием перепада давлений вдоль оси z . Компоненты скорости представим в виде

$$v_r = 0, v_\varphi = 0, v_z = u(r, \varphi).$$

Таким образом, уравнение Навье – Стокса с граничными условиями прилипания на твердых поверхностях и начальными условиями на входе в канал запишется в следующем виде:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}, \quad (1)$$

$$u(a, t) = 0, t > 0, \quad u(r, 0) = u_0(r), 0 \leq r \leq a. \quad (2)$$

Здесь ν , ρ -соответственно вязкость и плотность жидкости, a -радиус капилляра.

Предполагается, что градиент давления изменяется во времени по гармоническому закону

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = k \cos \omega t, k = \text{const}. \quad (3)$$

Начальное условие при этом теряет свое значение. Найдем периодическое решение уравнения (1) с условием прилипания на стенке капилляра. С целью упрощения выкладок, решение разделением переменных ищется в комплексной форме [2]

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = k e^{i\omega t}, \quad u(r, t) = F(r) e^{i\omega t}.$$

Из (1) получаем уравнение для $F(r)$:

$$F'' + \frac{1}{r} F' - \frac{i\omega}{\nu} F = -\frac{k}{\nu}.$$

Решение этого уравнения, удовлетворяющее условию прилипания $F(a)=0$, позволяет получить следующее распределение скоростей:

$$u(r, t) = -i \frac{k}{\omega} \left(1 - \frac{J_0(r\eta)}{J_0(a\eta)} \right) e^{i\omega t}, \quad \eta = \sqrt{-\frac{i\omega}{\nu}}. \quad (4)$$

Физический смысл будет иметь действительная часть этого решения.

Рассмотрим асимптотические значения скоростей $u(r, t)$ при малых и больших значениях η . При малых значениях η функция Бесселя $J_0(r\eta)$ представляется в виде ряда

$$J_0(r\eta) = 1 - \left(\frac{r\eta}{2} \right)^2 + \frac{1}{(2!)^2} \left(\frac{r\eta}{2} \right)^4 - \dots$$

Оставляя два первых члена разложения и отделяя действительную и мнимую части, при низкочастотных колебаниях получим

$$u(r, t) = \frac{k}{4\nu} (a^2 - r^2) \cos \omega t. \quad (5)$$

Колебания скорости жидкости при малых η совпадают по фазе с изменением давления. При этом профиль фронта скорости – параболический.

В случае движения таких жидкостей как тосол или гликоль в гидроопоре для значений частот ω порядка 12-20 рад/с значения $|\eta|$ имеют порядок 10^3 - 10^4 . Это говорит о том, что необходимо рассматривать высокочастотные колебания при исследовании движения жидкости в гидроопоре.

При больших η для функции Бесселя можно применить асимптотическое представление

$$J_0(r\eta) = \sqrt{\frac{2}{i\pi r\eta}} e^{ir\eta}.$$

Отделяя при этом приближении действительную часть в (4), получаем высокочастотное приближение для $u(r, t)$, справедливое на некотором небольшом удалении от оси трубы.

$$u(r, t) = \frac{k}{\omega} \sin \omega t - \frac{k}{\omega} \sqrt{\frac{a}{r}} \sin \left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} (a-r) \right) e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} (a-r)}. \quad (6)$$

Точную скорость в при $r=0$ необходимо определять из решения (4).

Высокочастотные колебания скорости складываются из двух слагаемых. Первое из них не зависит от трения и существенно вдали от стенок трубки. Причем высокочастотные колебания без трения происходят в фазе, сдвинутой на $\pi/2$ по сравнению с градиентом давления. Второе слагаемое в (6) отвечает за трение при перемещении слоев и существенно вблизи стенок капиллярной трубки, а вдали от них быстро уменьшается. Виды профилей скоростей повторяются через время $T = 2\pi / \omega$. Полученные формулы (6) и (5) удобны для инженерных расчетов.

На рисунке 1 показаны распределения скоростей $u(r, t)$ движения тосола в гидроопоре, рассчитанные по формуле (6) в 3-D формате. В двумерном изображении в различные моменты времени эпюры скоростей показаны на рисунке 2. Расчеты проведены для тосола вязкости $\nu = 0,0000063 \text{ м}^2/\text{с}$ при 20°C и $k = 1 \text{ м}/\text{с}^2$, частоте $\omega = 2,5 \pi \text{ рад}/\text{с}$, радиусе капилляра $a = 0,002 \text{ м}$ на периоде повторяемости движений, который в данном примере составляет 0,4 секунды.

Максимальные значения скорости в инерционной трубке наблюдаются в моменты времени близкие к $0,25 T$ на оси трубы. Профили скоростей в некоторые моменты времени могут иметь и максимальные и минимальные значения скорости, а также точки перегиба, что показано на рисунке 2.

Среднее значение $\overline{u^2}$ характеризует интенсивность колебаний. Проведя осреднение выражения (6) по времени за период колебаний, можно получить

$$\overline{u^2} = \frac{k^2}{2\omega^2} (1 - 2 \cos y \exp(-y) + \exp(-2y)), \quad y = \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} (a - r). \quad (7)$$

Отсюда следует, что максимум $\overline{u^2}$ достигается вблизи от стенки на расстоянии δ_m , определяемом соотношением

$$y_m = \delta_m \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} = 2,2845.$$

Этот теоретический результат согласуется с экспериментальными данными по осциллирующим течениям в трубках.

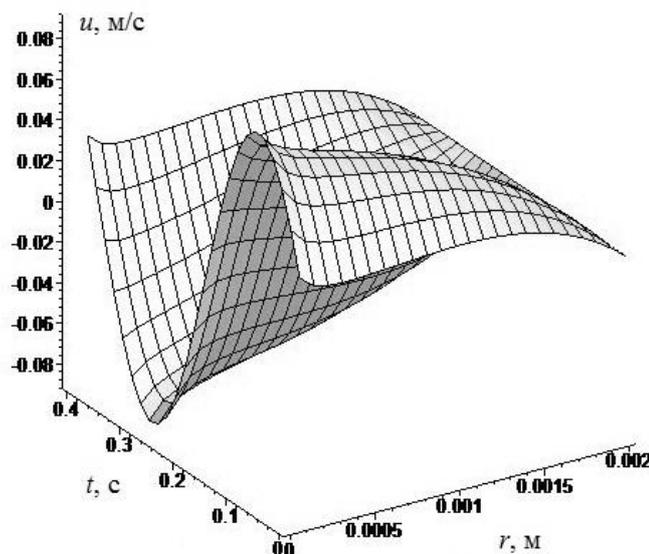


Рис. 1. Распределение скорости течения жидкости в инерционной трубке в 3D формате

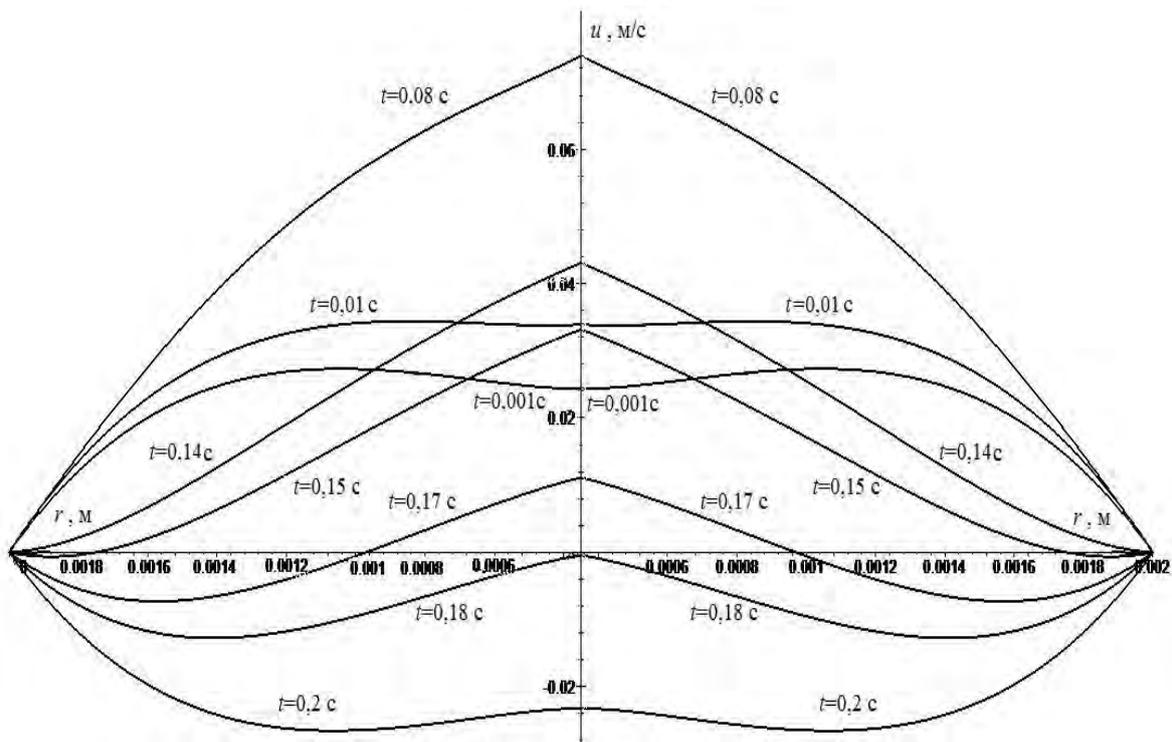


Рис. 2. Распределение скорости течения жидкости в инерционной трубке в восемь моментов времени от 0,001сек до полупериода 0,2 сек

Сила инерции P жидкости с массой M , пульсирующей в каналах капилляров, являющаяся инерционным трансформатором, будет иметь вид:

$$P(r, t) = Mk \left(\cos \omega t - \sqrt{\frac{a}{r}} \cos \left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} (a-r) \right) e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} (a-r)} \right). \quad (8)$$

Расход жидкости в единицу времени через круглое сечение капилляра определяется следующим соотношением

$$Q(t) = \pi \int_0^a u(r, t) r dr. \quad (9)$$

В явном виде интеграл (9) не считается. Вычислим коэффициент сопротивления $\lambda(t)$, являющийся показателем потерь на трение на торцевых поверхностях рабочего объема длины L

$$\lambda(t) = \frac{4a |\Delta p|}{L \rho u_c^2} = \frac{4a}{u_c^2} k \cos \omega t.$$

Учитывая формулу (3) и определение средней скорости в виде $u_c = Q(t) / (\pi a^2)$, получаем выражение для коэффициента сопротивления $\lambda(t)$

$$\lambda(t) = \frac{4\pi a}{Q^2(t)} k \cos \omega t. \quad (10)$$

Результаты решения задачи можно использовать в биомеханике при пульсирующем движении крови в сосудах.

РЕЗЮМЕ

Построена приближенная модель и исследовано движение жидкости в гидроопоре под действием градиента давления, изменяющемся со временем по гармоническому закону. Получено точное решение для скоростей с помощью специальных функций

Бесселя. Построены эпюры скоростей в различные моменты времени, найдены асимптотические приближения решения в случае низкочастотного и высокочастотного колебаний скорости в виде формул удобных для практического использования. Определены вязкожидкостное трение и инерционное сопротивление в гидроопоре. Результаты решения задачи можно использовать в биомеханике для исследования пульсирующего движения крови в сосудах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фролов, К.В. Экспериментальное определение статических и вибрационных характеристик гидропор двух типов / К.В. Фролов, В.А. Тихонов, А.Г. Чистяков, Е.И. Аббакумов, Б.А. Гордеев // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2001. № 4. С. 98-103.
2. Шкадов, В.Я. Течения вязкой жидкости / В.Я. Шкадов. –М.: Изд. МГУ. 1984.– 200 с.
3. Докукова, Н. А. Общие закономерности механических колебательных систем / Н.А. Докукова, П.Н. Конон // Инженерно-физический журнал. Сер. 79. № 6. 2006. С.186-193.

SUMMARY

An approximate model and studied the movement of fluid in the pipe under the influence of a pressure gradient changing with time according to the harmonic law. An exact solution of the velocity distribution using special Bessel functions. Constructed velocity profile at different times. The asymptotic approximation of the solution in the case of low and high velocity oscillations in the form convenient for practical use formulas. Defined friction and the inertial resistance in the channel. The results can be used for solving the problem in the biomechanics of movement under pulsating blood vessels.

E-mail: dokukova@mail.ru
kononp@tut.by

Поступила в редакцию 13.10.2015